INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: J. Miguel Cruz
Auxiliares: J. Pizarro
C. Majluf
Otoño 2008

Guía 1: Procesos de Precios y Series de Tiempo

Pregunta 1

Sea V una variable con distribución normal de media m y varianza s^2. Se dice que una variable Q, se distribuye lognormal, si V = ln (Q) se distribuye normal.

a) Calcule el valor esperado de Q.
b) Calcule la varianza de Q.

Solución:

Recordemos que la densidad de probabilidad de V es:

$$\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(V-m)^2}{2s^2}\right)$$

Por lo tanto, la densidad de probabilidad de Q es:

$$h(Q)=\frac{1}{Qs\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(\ln(Q)-m)^2}{2s^2}\right)$$

Consideremos el n-ésimo momento de Q:

$$\int_0^\infty Q^n h(Q)dQ$$

Substituyendo Q = exp (V) se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(nV)}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(V-m)^2}{2s^2}\right)dV$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(V-m-ns^2)^2}{2s^2}\right)\exp\left(\frac{2mns^2+n^2s^4}{2s^2}\right)dV$$

$$=\exp(nm+n^2s^2/2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(V-m-ns^2)^2}{2s^2}\right)dV$$

La integral corresponde a la función de densidad de una normal con media m+ns^2 y varianza s^2 y por lo tanto, es igual a 1. Luego,

$$\int_0^{\infty} Q^n h(Q)dQ = \exp(nm + n^2 s^2 / 2)$$

Por lo tanto, haciendo n = 1:

$$E[Q] = \exp(m + s^2 / 2)$$

Para calcular la varianza de Q necesitamos el segundo momento de Q:

$$E[Q^2] = \int_0^{\infty} Q^2 h(Q)dQ = \exp(2m + 2s^2)$$

Luego, por definición:

$$V(Q) = E[Q^2] - E^2[Q] = \exp(2m + 2s^2) - \exp(2m + s^2)$$

$$V(Q) = E[Q^2] - E^2[Q] = \exp(2m + s^2)[\exp(s^2) - 1]$$

Pregunta 2

a) Si {X(t), t≥0} es un movimiento Browniano, entonces el proceso {Y(t), t≥0} definido por

$$Y(t) = e^{X(t)}$$

es un movimiento Browniano geométrico. Si X(t) se distribuye Normal de media 0 y varianza t, calcule:

- E[Y(t)]
- V[Y(t)]

b) Suponga tiene la opción de comprar en el tiempo T futuro, una unidad de una acción a un precio fijo K. Suponga que el valor presente de la acción es y. Además, el precio varía según un proceso Browniano geométrico.

- Calcule El valor esperado de la opción

Solución

a) De la parte anterior, reconociendo términos, se tiene que:

$$E[Y(t)] = E[e^{X(t)}] = e^{t/2}$$

$$V[Y(t)] = E[Y^2(t)] - E^2[Y(t)] = e^t(e^t - 1)$$

b) $$E[\max(Y(T) - K, 0)] = \int_0^\infty P\{Y(T) - K > a\} da$$

$$= \int_0^\infty P\{ye^{X(T)} - K > a\} da$$

$$= \int_0^\infty P\left\{X(T) > \log \frac{K + a}{y}\right\} da$$

$$= \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{\log[(K+a)/y]}^\infty \exp(-x^2 / 2T) dx da$$

Pregunta 3

Sea un contrato futuro en una acción que no paga dividendos. Asuma que la tasa de interés libre de riesgo es constante e igual a r para todas las maduraciones.

Es decir:

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

Donde F_0 es el precio futuro de la acción en t igual a cero y S_0 es el precio spot en el tiempo cero y T es el tiempo de maduración del contrato.

a) Se le pide determinar el proceso que sigue F a través del tiempo, donde F:

$$F = Se^{r(T-t)}$$

dado que S sigue el siguiente proceso:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

Donde dz es un movimiento Browniano de media 0 y varianza t.

b) Repita el calculo anterior para

$$F = \ln(S)$$

A partir de la parte b)

c) Determine la media y la desviación estándar de $\ln(S_T)$
d) Determine la media y la desviación estándar de S_T.

Solución

a) Para ver el proceso que sigue el derivado de S, basta usar el lema de Ito:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial S} a(S,t) + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} b^2(S,t)\right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial S} b(S,t)\right] dz$$

Luego se tiene:

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma F dz$$

b) De manera análoga, se tiene:

$$dF = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz$$

Luego, haciendo:

c) $dF = d\ln(S) \rightarrow \ln(S_T) \sim N\left[\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T, \sigma\sqrt{T}\right]$

d) Propuesto: Hint: use la pregunta 1 y reconozca términos.

Pregunta 4

El valor de una cartera de inversiones en dos tipos diferentes de acciones en un momento dado del tiempo se puede escribir como

V= P1*Q1 + P2*Q2

Suponga que los precios de las acciones 1 y 2 siguen un proceso browniano geométrico, con

$$dP_1 = \mu_1 \, \mathrm{P}_1 \, dt + \sigma_1 \, \mathrm{P}_1 \, dZ_1$$
$$dP_2 = \mu_2 \, \mathrm{P}_2 \, dt + \sigma_2 \, \mathrm{P}_2 \, dZ_2$$

Además

$$dZ_1 = \varepsilon_1 \sqrt{dt} \quad \varepsilon_1 \to N(0,1)$$
$$dZ_2 = \varepsilon_2 \sqrt{dt} \quad \varepsilon_2 \to N(0,1)$$
$$\text{y } E(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \rho$$

a) Determine una expresión para el proceso que sigue dV.¿Qué tipo de proceso es?
b) Si μ_1= 3% mensual , μ_2= 5% mensual, σ_1= 8% mensual, σ_2 = 10%, y ρ =0,5. Además en t=0, P_1= 10, P_2=5, Q_1=5, Q_2= 20. Se pide que estime **x** tal que

$$\Pr\left[\frac{V(t=1)-V(0)}{V(0)} \le x\right] = 0.9772$$

(Nota: use el hecho que si z es normal con media μ y varianza σ^2 entonces $\Pr[z \le x] = 0.9772 \Leftrightarrow x = \mu - 2\sigma$)

Solución

a) $dV = dP_1 \cdot Q_1 + dP_2 \cdot Q_2$

luego multiplicando y dividiendo por V

$$\frac{dV}{V} = \frac{dP_1 \cdot Q_1}{V} + \frac{dP_2 \cdot Q_2}{V} = \frac{dV_1}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V} + \frac{dV_2}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V} = v_1 \frac{dV_1}{V_1} + v_2 \frac{dV_2}{V_2}$$

con $v_1 + v_2 = 1 \; \forall t$

Es fácil ver que

$$\frac{dVi}{V_i} = \frac{Q_i \cdot dP_i}{P_i \cdot Q_i} = \frac{dP_i}{P_i}$$

por lo que

$$\frac{dV}{V} = v_1 \frac{dP_1}{P_1} + v_2 \frac{dP_2}{P_2}$$

como dPi/Pi son normales y los v_i en **t** no son estocásticos, entonces dV/V también es <u>normal</u>

$$\frac{dV}{V} = v_1(\mu_1 dt + \sigma_1 dZ_1) + v_2(\mu_2 dt + \sigma_2 dZ_2) = (v_1\mu_1 + v_2\mu_2)dt + v_1\sigma_1 dZ_1 + v_2\sigma_2 dZ_2$$

luego podemos definir que

$$\mu \equiv v_1\mu_1 + v_2\mu_2$$

y además definir

$$\sigma \equiv \sqrt{v_1^2\sigma_1^2 + v_2^2\sigma_2^2 + 2\cdot\rho\cdot v_1\cdot v_2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2}$$

notar que tanto μ como σ dependen del tiempo.

Luego podemos escribir que

$$\frac{dV}{V} = \mu(t)dt + \sigma(t)dZ$$

b) Basta entonces encontrar x = μ -2σ = 4,333%-2*8,33%=-12,32%

Pregunta 5

Suponga que de acuerdo a sus estimaciones, la tasa de interés nominal a 1 año plazo (promedio entre colocaciones y captaciones bancarias) sigue un proceso de la forma,

$$r_{t+1} = \phi \cdot r_t + \alpha + \varepsilon_{t+1} \qquad \textbf{(1)}$$

donde ε_{t+1} es un ruido blanco (iid con media 0 y varianza σ^2). Si se cumple que $|\phi|<1$, se pide

Parte 1

a) (10 puntos) encuentre $\boldsymbol{\mu_r}$, el valor esperado (incondicional) de la tasa de interés

b) (10 puntos) muestre que $\mathbf{y_t}$ definido como r_t-μ_r, sigue un proceso AR(1) estacionario sin drift.

c) (10 puntos) encuentre la desviación estándar $\boldsymbol{\sigma_r}$ de la tasa de interés.

d) (10 puntos) encuentre la covarianza entre la tasa de interés r_t y la tasa de interés r_{t-j} con j=1,2,...k

Parte 2

Suponga que se define otro proceso para la tasa de interés de la forma

$$r_{t+1} - r_t = a\cdot(b - r_t) + \eta_{t+1} \qquad \textbf{(2)}$$

con η_t ruido blanco.

e) (10 puntos) Escoja **a** y **b** tal que la formulación (1) y (2) sean equivalentes.

f) (10 puntos) Qué interpretación financiera podría darles a los parámetros a y b?

Solución

a)

$$E(r_{t+1}) = \varphi E(r_t) + E(\alpha) + E(\varepsilon_{t+1})$$

Estacionariedad, $E(r_{t+1}) = E(r_t) = \mu_r$

$$\Rightarrow \mu_r = \frac{\alpha}{1-\varphi}$$

b)

$$r_t = y_t + \mu_r$$

En (1): $$y_{t+1} + \mu_r = \varphi(y_t + \mu_r) + \alpha + \varepsilon_{t+1}$$

Reemplazando $\mu_r = \dfrac{\alpha}{1-\varphi}$ y agrupando términos:

$$y_{t+1} = \varphi y_t - \frac{\alpha(1-\varphi)}{1-\varphi} + \alpha + \varepsilon_{t+1}$$

$$y_{t+1} = \varphi y_t + \varepsilon_{t+1} \rightarrow \text{AR}(1) \text{ sin drift (sin constante)}$$

c)

$$V(r_{t+1}) = V(\varphi r_t + \alpha + \varepsilon_{t+1})$$

Estacionariedad, $V(r_{t+1}) = V(r_t) = \sigma_r^2$

$$\Rightarrow \sigma_r = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\varphi^2}}$$

d)

j=1 $\rightarrow \text{Cov}(r_t, r_{t-1}) = \text{Cov}(\varphi r_{t+1} + \alpha + \varepsilon_t, r_{t-1}) = \varphi \sigma_r^2$

J=2 $\rightarrow \text{Cov}(r_t, r_{t-2}) = \text{Cov}(\varphi(\varphi r_{t-2} + \alpha + \varepsilon_{t-1}) + \alpha + \varepsilon_{t-1}, r_{t-2}) = \varphi^2 \sigma_r^2$

$$\vdots$$

j=k $\rightarrow \text{Cov}(r_t, r_{t-k}) = \varphi^k \sigma_r^2$

e)

Identificando términos, se llega rápidamente a

$$a = 1-\varphi \quad y \quad \alpha = (1-\varphi)b \Rightarrow b = \frac{\alpha}{1-\varphi} = \mu_r$$

f)

b es la tasa de LP a la que tiende r_t.

a está relacionado con la velocidad a que r tiende a b.

Pregunta 6

1) a) Demuestre que si $y_t = \delta + \rho y_{t-1} + u_{t-1} - \theta u_{t-1}$ con $|\rho| > 1$, entonces y_t admite la representación:

$$y_t = \frac{-\delta}{\rho - 1} - \sum_{i-1}^{\infty} \frac{1}{\rho^i}(u_{t+i} - \theta u_{t+i-1})$$

b) Explique cómo obtener un estimador consistente del parámetro θ de un proceso MA(1), $y_t = u_t - \theta u_{t-1}$, a partir de la función de autocorrelación simple muestral. ¿Cuál es el rango de valores admisibles del coeficiente de autocorrelación simple, a fin de que $\theta \in \Re$? En general, existirán dos soluciones para θ. ¿Cuál escogería? Hint: Piense en qué condición debe cumplirse para que el proceso MA(1) sea invertible.

Solución

a)

$$y_t = \delta + \rho y_{t-1} + u_t - \theta u_{t-1}$$

$$y_{t+1} = \delta + \rho y_1 + u_{t+1} - \theta u_t \Rightarrow y_t = \frac{y_{t+1}}{\rho} - \frac{\delta}{\rho} - \frac{(u_{t+1} - \theta u_t)}{\rho} \quad [1]$$

$$y_{t+2} = \delta + \rho y_{t+1} + u_{t+2} - \theta u_{t+1} \Rightarrow y_{t+1} = \frac{y_{t+2}}{\rho} - \frac{\delta}{\rho} - \frac{(u_{t+2} - \theta u_{t+1})}{\rho} \quad [2]$$

$$y_{t+3} = \delta + \rho y_{t+2} + u_{t+3} - \theta u_{t+2} \Rightarrow y_{t+2} = \frac{y_{t+3}}{\rho} - \frac{(u_{t+3} - \theta u_{t+2})}{\rho} \quad [3]$$

reemplazando [2] y [3] en [1]:

$$y_t = -\frac{\delta}{\rho} - \frac{\delta}{\rho^2} - \frac{\delta}{\rho^3} - \frac{(u_{t+1} - \theta u_t)}{\rho} - \frac{u_{t+2} - \theta u_{t+1}}{\rho^2} - \frac{(u_{t+2} - \theta u_{t+2})}{\rho^3} + \frac{y_{t+3}}{\rho^3}$$

$$\vdots$$

$$y_t = -\delta\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} + \cdots + \frac{1}{\rho^n}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(u_{t+1} - \theta u_{t+i-1})}{\rho^i} + \frac{y_{t+n}}{\rho^n}$$

$$y_t = -\frac{\delta}{\rho - 1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(u_{t+1} - \theta u_{t+i-1})}{\rho^i}$$

dado que $y_{t+n}/\rho^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} + \cdots + \frac{1}{\rho^n} = \frac{1/\rho}{1 - 1/\rho} = \frac{1}{\rho - 1}$

b) La función de autocorrelación simple de un proceso estocástico $\{y_t\}$ es igual a la correlación entre y_t y y_{t-k}:

$$\rho_k = \frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\operatorname{var}(y_t)}\sqrt{\operatorname{var}(y_{t-k})}}$$

dónde $\lambda_k = \operatorname{cov}(y_t, y_{t-k})$ es la función de autocovarianza. Para un proceso MA(1):

$$\rho_1 = \frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\operatorname{var}(y_t)}\sqrt{\operatorname{var}(y_{t-1})}} = \frac{E[(u_t - \theta u_{t-1})(u_{t-1} - \theta u_{t-2})]}{\sqrt{E[(u_t - \theta u_{t-1})^2]}\sqrt{E[(u_{t-1} - \theta u_{t-2})^2]}}$$

$$= \frac{E[u_t u_{t-1}] - \theta E[u_t u_{t-2}] - \theta E[u_{t-1}^2] - \theta^2 E[u_{t-1} u_{t-2}]}{\sqrt{E[u_t^2] - 2\theta E[u_t u_{t-1}] + \theta^2 E[u_{t-1}^2]}\sqrt{E[u_{t-1}^2] - 2\theta E[u_{t-1} u_{t-2}] + \theta^2 E[u_{t-2}^2]}}$$

$$= \frac{-\theta\sigma_u^2}{\sqrt{\sigma_u^2 + \theta^2\sigma_u^2}\sqrt{\sigma_u^2 + \theta^2\sigma_u^2}} = \frac{-\theta\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \theta^2\sigma_u^2} = -\frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t-2})}{\sqrt{\operatorname{var}(y_t)}\sqrt{\operatorname{var}(y_{t-2})}}$$

$$\rho_2 = \frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t-2})}{\sqrt{\operatorname{var}(y_t)}\sqrt{\operatorname{var}(y_{t-2})}}$$

$$= \frac{E[u_t u_{t-2}] - \theta E[u_t u_{t-3}] - \theta E[u_{t-1} u_{t-2}] - \theta^2 E[u_{t-1} u_{t-3}]}{\sqrt{\operatorname{var}(y_t)}\sqrt{\operatorname{var}(y_{t-2})}} = 0$$

$$\rho_k = 0 \quad \forall k \geq 2$$

Se sabe que:

$$\rho_1 = -\frac{\theta}{1+\theta^2} \Rightarrow \rho_1\left(1+\theta^2\right) = -\theta \Rightarrow \theta^2 + \frac{\theta}{\rho_1} + 1 = 0$$

$$\theta = \frac{-\frac{1}{\rho_1} \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - 4}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\rho_1^2} - 4 \geq 0 \text{ para que } \theta \in \Re$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_1^2} \geq 4 \Rightarrow \rho_1^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |\rho_1| \leq \frac{1}{2}$$

La ecuación anterior tiene una raíz única si $|\rho_1|=0.5$. En general, habrán dos soluciones para θ, una de las cuales será mayor que 1 en valor absoluto. (Si $1/\theta$ es solución, θ también lo es porque $-\frac{1/\theta}{1+1/\theta^2} = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$). A fin de tener un MA(1) invertible, elegimos aquella raíz que sea menor que 1 en valor absoluto. En dicho caso, el proceso MA(1) puede representarse como un AR(∞).

Pregunta 7

Suponga que el tipo de cambio S(t) (expresado en pesos por dólar) sigue un proceso de la forma,

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma_S\, dz$$

donde dz es un proceso de Wiener. Suponga además que el precio del petróleo (en dólares por barril), P(t) sigue un proceso de la forma,

$$\frac{dP}{P} = \alpha\, dt + \sigma_P\, dw$$

donde dw es también un proceso de Wiener independiente del anterior.

a) Determine el proceso que sigue el nivel del precio del petróleo en pesos definido como V(t)=P(t)S(t).

b) Encuentre el valor esperado del precio del petróleo en pesos V(T), dado que el precio en $V(0)=V_0$.

c) Suponga que Ud. estima que la volatilidad diaria del tipo de cambio, σ_S, se estima en 0,5%.Si el tipo de cambio hoy es de 535, y el mercado espera que el tipo de cambio llegue a 550 en 360 días más. Se pide que estime μ.

d) Suponga ahora que el proceso dw y dz están correlacionados positivamente. Por ejemplo suponga que E(dz dw) = 0.5dt. ¿Qué efecto tiene este supuesto sobre la volatilidad de V(t)? Cómo cambia el valor esperado del precio del petróleo en pesos en T, V(T), calculado en b)?

e) Si de Ud. dependiera el diseño de un fondo de estabilización del precio del petróleo para el corto plazo, que tiene una regla que acumula dólares cuando el precio es alto, y los usa cuando el precio es bajo, ¿cómo espera que funcione si el proceso del precio es el descrito más arriba.?

f) ¿Cómo cambia su respuesta en e) si el precio del petróleo en dólares sigue un proceso de la forma donde M es una constante ?(Hint: analice el proceso en forma discreta y compare su comportamiento en plazos largos)

Solución

a)

V = PS, luego diferenciando:

dV = dPS + dSP (*)

Reemplazando dP y dS en (*):

$$dV = (P\alpha dt + P\sigma_P dw)S + (S\mu dt + S\sigma_S dz)$$
$$dV = V\alpha dt + V\sigma_P dw + V\mu dt + V\sigma_S dz$$
$$\frac{dV}{V} = (\alpha + \mu)dt + (\sigma_P dw + \sigma_S dz)$$

Por lo tanto, V se distribuye como un MBG.

Alternativamente,: sea Ln(V)=Ln(P) + Ln(S), entonces como Ln(P) y Ln(S) siguen un proceso de Wiener con drift fijo, la suma seguirá un proceso similar con drift igual a la suma de los drifts originales. Además, como dz + dw se puede llamar dy con E(dy) = 0 y V(dy) = la suma de las varianzas por dt.

b)

Si dV/V se distribuye $N([\alpha+\mu]dt,(\sigma_p^2+\sigma_s^2)dt)$, donde N(media, varianza),entonces:

por Ito sabemos que Ln(V(T)/V(0)) se distribuye $N\left(\left[\alpha+\mu-\frac{\sigma_p^2+\sigma_s^2}{2}\right]T,[\sigma_p^2+\sigma_s^2]T\right)$,

luego, para un proceso de Ito, tal que:

Ln(X(T)/X(0)) se distribuye $N(\theta T,\sigma^2 T)$,

sabemos que:

$$E(X)=X_0e^{(\theta+\sigma^2/2)T},\theta=\tau-\sigma^2/2$$

lo que implica que:

$$E(V)=V_0e^{(\alpha+\mu)T}$$

c)

Siguiendo el mismo razonamiento anterior,

$$E(S)=550=535e^{\mu*360}\Rightarrow\mu=0.00768\%\ \ diario\Rightarrow 2.77\%\ anual$$

d)

Volatilidad crece ya que es raíz de $(\sigma_p^2+\sigma_s^2+2\rho\sigma_p\sigma_s)dt$

Pero su valor esperado no cambia (está dado por la parte b)

e)

Si el precio de referencia es fijo, entonces un proceso como el de arriba nunca se va a distribuir alrededor de este precio de referencia por que el proceso no es estacionario en media. Es decir diverge, luego en promedio siempre o acumula en forma explosiva o se agota con probabilidad 1. Ahora en el corto plazo, dependiendo del precio de referencia escogido podría funcionar, pero dada su naturaleza de camino aleatorio, requeriría ajustes permanentes del precio de referencia para que no terminara o llenos de dinero o bien vacío.

f)

Si el precio sigue un proceso como al anterior, notar que en el largo plazo si $P_{t+1} = P_t$, entonces $P_t = M$. Es decir es un proceso que converge a M. Luego sí es estacionario. SI el precio de referencia es M entonces el proceso acumulará y desacumulará cantidades similares por lo que en promedio estará en cero, y cumplirá su función como fondo de estabilización.

Pregunta 8

a) Suponga que el proceso que sigue del precio de un bono que paga 1 en T es de la forma,

$$\frac{dP}{P} = \mu \, dt + \sigma \, dz$$

para t<T.

La TIR de este bono expresada en composición continua, se define como:

$$P(t) = 1 \cdot e^{-R(t)\cdot(T-t)}$$

para t<T.
Encuentre el proceso que sigue R(t).

b) Suponga ahora que estimamos que R(t) sigue un proceso browniano simple de la forma,
$dR = \mu_R \, dt + \sigma_R \, dz$
Se pide que encuentre el proceso que seguiría esta vez el precio del bono cero cupón.

c) Suponga que desea estimar econométricamente el proceso browniano de R descrito en b). Explique claramente cómo estimaría μ_R y σ_R. Sea preciso.

Solución
a)

$$P(t) = e^{-R(t)(T-t)} \Rightarrow R(t) = \frac{-\ln(P(t))}{T-t}$$

Usando el lema de Ito:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{-\ln(P)}{(T-t)^2} \qquad \frac{\partial R}{\partial P} = \frac{-1}{P(T-t)} \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} = \frac{1}{P^2(T-t)}, \text{ luego}$$

$$dR = \left[\frac{-\ln(P)}{(T-t)^2} - \frac{1}{P(T-t)}\mu P + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{1}{P^2(T-t)} \right] dt - \frac{\sigma P}{P(T-t)} dz$$

Reemplazando ln(P):

$$dR = \left[\frac{R}{(T-t)} - \frac{\mu}{(T-t)} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{(T-t)} \right] dt - \frac{\sigma}{(T-t)} dz$$

b)

Nuevamente, usando el lema de Ito:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{Re}^{-R(T-t)} \qquad \frac{\partial P}{\partial R} = -(T-t)e^{-R(T-t)} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} = (T-t)^2 e^{-R(T-t)}, \text{ luego}$$

$$dP = \left[\mathrm{Re}^{-R(T-t)} - \mu_R (T-t) e^{-R(T-t)} + \frac{1}{2}\sigma_R^2 (T-t)^2 e^{-R(T-t)} \right] dt - \sigma_R (T-t) e^{-R(T-t)} dz$$

$$\frac{dP}{P} = \left[1 - \mu_R (T-t) + \frac{1}{2}\sigma_R^2 (T-t)^2 \right] dt - \sigma_R (T-t) dz$$

c)

Los parámetros μ_R y σ_R se estiman exógenamente al modelo. Provienen de los datos. Si se posee data equivalente a n retornos, entonces se sabe que un estimadores insesgados para la media y la varianza son:

$$\hat{\mu}_R = \overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \qquad \hat{\sigma}_R^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(R_i - \overline{R}\right)^2$$

d)

Esta pregunta es de criterio y deben dar una opinión fundamentada. Por ejemplo, habría que revisar la data y ver qué se asemeja más. Si la diferencia de tasas es normal o el retorno logarítmico es normal. Además si la varianza de la serie de tasas depende del nivel de tasas, entonces el modelo a aplicar es el logarítmico (es decir Modelo 2). Si las tasas muestran un comportamiento homocedástico ,entonces modelo 1. A lo mejor modelo 3 un modelo de tendencia a la media….etc.

Además,

Modelo 1:
Permite tasas negativas, y la normalidad está en las tasas

Modelo 2:
En este modelo, el incremento en el retorno de un período dado depende del nivel de retorno actual. Además, no admite precios negativos. El comportamiento normal está en los cambios porcentuales de tasas.

Pregunta 9

a) Considere la serie definida por $y_t=0,2t + \varepsilon_t$ con ε_t proceso Gaussiano de media cero y varianza σ^2. Estime el valor esperado de y_t en T, y su varianza. Explique si el proceso es estacionario.

b) Suponga una serie definida por $(1\text{-}0.5L)y_t = 0.2 + \varepsilon_t$ con ε_t proceso Gaussiano de media cero y varianza σ^2. Encuentre una expresión para γ_k, para k = 0,1,2.

c) Encuentre la representación MA del proceso en b).

d) Encuentre el valor esperado (incondicional) de **y**.

e) Suponga que Ud. obtuvo los siguientes resultados de una estimación de series de tiempo: $w_t = 5.260 + 1.815w_{t-1} - 0.861w_{t-2} + e_t$
(2.060) (0.073) (0.071)
donde los términos entre paréntesis son los errores estándares. Qué conclusión o recomendación haría en función de los resultados.

Solución

a)

$$E[y_T \mid y_t] = 0{,}2\sum_{i=t}^{T} E[\varepsilon_i] = 0{,}2*(T-t)$$

$$V[y_T \mid y_t] = \sum_{i=t}^{T} V[\varepsilon_i] = (T-t)\sigma_\varepsilon^2$$

Claramente, si t tiende a infinito el proceso diverge en media y varianza, luego, no es estacionario.

b)

Análogamente al enunciado, se tiene:

$$y_t = 0,2 + 0,5 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\gamma_0 = Cov(y_t, y_t) = V(y_t)$$

En este caso, claramente la serie es estacionaria. (Por el 0,5 (parámetro que acompaña a y_{t-1}) menor a 1.

Luego:

$$V(y_t) = \sigma_y^2 = (0,5)^2 \sigma_y^2 + \sigma_\varepsilon^2 \rightarrow \sigma_y^2 = 1,33\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \sigma_y^2 = 1,33\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) = Cov(0,2 + 0,5 y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-1}) = 0,5 * \sigma_y^2$$

$$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) = Cov(0,2 + 0,5(0,2 + 0,5 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t, y_{t-2}) = (0,5)^2 * \sigma_y^2$$

c)

$$(1 - 0,5L) y_t = 0,2 + \varepsilon_t ,$$

$$y_t = \frac{0,2}{(1-0,5L)} + \frac{\varepsilon_t}{(1-0,5L)} = 0,2 \sum_{i=0}^{\infty} (0,5^i) + \sum_{i=0}^{\infty} (0,5)^i \varepsilon_{t-i} = 0,4 + \sum_{i=0}^{\infty} (0,5)^i \varepsilon_{t-i}$$

d)

$$E(y_t) = \mu = 0,2 + 0,5\mu \rightarrow E(y_t) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

e)

Realizar test t sobre parámetros para ver su significancia:

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_{\beta}}$$

y el test es:

$$H0 : \rho_1 = 0$$
$$vs.$$
$$Ha : \rho_1 \neq 0$$

lo que da como resultado para cada parámetro:

$$t(5.260) = 2.55$$

$$t(1.815) = 24.863$$

$$t(-0.861) = -12.1268$$

Suponiendo un número grande de observaciones, a un 95% de confianza, los 3 parámetros son estadísticamente significativos. Notar que es un test de 2 colas.

Sin embargo notar que el intervalo al 95% para el parámetro $\Phi1$ es [1,67 1,96] y para $\Phi2$ es [-1,0 -0,72]. Si redondeamos a 1 decimal los intervalos son [1,7 2,0] y [-1,0 -0,7] luego $1\text{-}\Phi1\text{-}\Phi2$ es probable que quede igual a cero, o muy cercano a cero por lo que hay evidencia de que se acerca bastante a un proceso de raíz unitaria.

f)

Realizar test t sobre parámetros para ver su significancia:

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_{\beta}}$$

y el test es:

$$H0 : \rho_1 = 0$$
$$vs.$$
$$Ha : \rho_1 \neq 0$$

lo que da como resultado para cada parámetro:

$$t(0.038) = 1.46$$

$$t(-0.0075) = -1.5$$

$$t(0.773) = 13.10$$

Suponiendo un número grande de observaciones, a un 95% de confianza, solo el parámetro que acompaña $\Delta_1 w_t$ es estadísticamente significativo. Notar que es un test de 2 colas.

Además, podemos ver si hay convergencia si se cumple que:

$$H0 : |\rho_1| = 1$$
$$vs.$$
$$Ha : |\rho_1| \neq 1$$

Luego, el proceso converge.

$$t(0.0075) = -198.5$$

$$t(0.773) = -3.85$$

Se rechaza la hipótesis nula. Hay convergencia. Es decir la serie era una integrada de orden 1.

Problema 10

Comente o responda las siguientes preguntas:

a) Para un proceso MA(2), γ_k=0, para k>3.

Recordar:
$E(\varepsilon_t)=0$
$V(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t * \varepsilon_t)=\sigma^2$
$E(\varepsilon_t * \varepsilon_{t+k})=0$, k!=0

Verdadero, basta calcular $Cov(y_t, y_{t+k})$ y ver que la condición γ_k=0, se cumple para k>3

b) Sea $y_t= 0{,}8\, y_{t-1} - 0{,}15\, y_{t-2}+\varepsilon_t$
con ε_t ruido blanco Gaussiano de media cero. Encuentre las representaciones MA y AR de la serie en función de los operadores **L**.

Recordar:
$Ly_t = y_{t-1}$
$AR(p) = yt = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \ldots + \theta p y_{t-q} + e_t$
$MA(q) = yt = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta 2 \varepsilon t_{-2} + \ldots + \theta q \varepsilon_{t-q} + e_t$
$\sum(_{i=0\ldots..})\, q^i = 1/(1-q)$

Ocupado el operador de Rezagos L,
El proceso AR se puede escribir (1-0,5L)*(1-0,3L)yt=εt

El proceso MA se puede escribir $yt=(1-0{,}5L)^{-1}*(1-0{,}3L)^{-1}\varepsilon t$
Este también se puede escribir encontrando las series que representan cruzando términos. Dar pocos puntos por esta última parte
$(1+0{,}5L+0{,}5^2L^2+\ldots.)*(1+0{,}3L+0{,}3^2L^2+\ldots.)$ …….

c) Suponga que el proceso ARMA(1,1) definido por,

$y_t - \phi\, y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta\, \varepsilon_{t-1}$

es tal que ϕ=0,5 , θ =0,1, y $E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2=1$
Encuentre una expresión para $\rho_1 =\gamma_1/\gamma_0$.¿Cómo cambia su respuesta si $\phi=\theta$ =0,5?

$\gamma_0 = E(y^2_t) = E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})y_t] = \phi_1\gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1\sigma^2 + \theta_1\sigma^2)$
$\gamma_1 = E(y_t*y_{t-1}) = E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})y_{t-1}] = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \theta(\theta - 2\phi)\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

Si $\phi=\theta \Rightarrow \rho_1 = 0$

Explique qué serie utilizada por Ud. en la Tarea 1 correspondía en forma apropiada a un proceso **ARIMA,** y explique el procedimiento que siguió para demostrarlo.

Por ejemplo: Alguna serie de precios. A estas se les aplica ln y luego una diferenciación para trabajar con los retornos logarítmicos (eso es ARIMA(p,q,1) i.e. una diferenciación).

Para aplicar ARIMA hay que hacer el test de raíces unitarias y rechazarlo con un grado de confianza hasta obtener datos estacionarios. La serie se diferencia tantas veces como se haya aplicado el test (generalmente en la tarea bastaba una para obtener resultados estacionarios).
Luego estimando el modelo, se llega a que toda la varianza se explica por el ruido blanco ya que los datos son tomados de un mercado eficiente.

Problema 11

El proceso estocástico para el precio de una acción es el de un Movimiento Browniano Geométrico, con parámetros μ y σ.

$$\frac{dP}{P} = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

a) Si Ud. conoce la función $\Phi(x)$ que corresponde a la función de probabilidad acumulada de una normal estándar, se pide que encuentre una expresión, en función de $\Phi(.)$ para determinar la probabilidad de que el precio de la acción en T días más duplique su valor. Recuerde que $\Phi(\mathbf{z})$ es igual Prob (Z<= **z**) con Z distribuida como una N(0,1), y **z** un valor fijo determinado por Ud.

Notar que

$$d(LnP) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dz$$

luego

$$\Pr(P_T > 2P_0) = \Pr[Ln(P_T / P_0) > Ln(2)]$$

$$\text{con} \quad Ln(P_T / P_0) \to N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma^2 T\right)$$

Construimos z N(0,1) como:

$$z = \frac{Ln(P_T / P_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \to N(0;1)$$

Luego la probabilidad se puede expresar como

$$1-\Phi\left(\frac{Ln(2)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

b) Suponga que ud estimó que la volatilidad de los retornos (logarítmicos) de la acción es de 45% anual, que el retorno esperado del IPSA en el próximo año es de 10%, la tasa libre de riesgo es de 4%, y el beta de la acción es de 1,0. Ud desea simular el precio de la acción para la próxima semana. Para ello generó un número aleatorio normal de media cero y varianza 1 igual a 70,1%. Si el precio de la acción hoy es 100, ¿cuál es el valor del precio simulado en una semana más?

Rlog acción →N(0,1t;0,45^{2}t) t en años
σ= 45%
μ=10%
ln(P1s)=ln(100)+10%/52 + 0,45/raiz(52)*0,701 →P1=104,673

c) De acuerdo a los parámetros del proceso descritos en b) encuentre el valor esperado del retorno logarítmico del precio de la acción en 6 meses más y su desviación estándar.

R en t años ->N(Re*t;σ^{2}t)
R en 0,5 años N(Re*0,5;σ^{2}0,5)

E(R) = Re/2=5%
desvest(R) = 0,45/raiz(2)

Problema 12

Suponga que Ud. es asesor de una viña que acaba de hacer una importante inversión agrícola, al adquirir y plantar 50 hectáreas de uva Carmenere. La viña dispone de una planta de procesamiento de uva de capacidad de 1,000 toneladas de uva por temporada, y espera obtener un rendimiento, en plena producción, de 14 Ton por hectárea. El proceso tiene un costo directo de 50$ por litro de vino a granel producido, y cada tonelada de uva genera 600 litros de vino. Se espera que en 3 años más se obtenga la primera cosecha con un 50% del rendimiento, el 4º año se llegue a un 75% del rendimiento, y el quinto año se alcance la plena producción. La capacidad ociosa de la planta se puede utilizar arrendándola a un precio máximo de 80$ por litro de vino producido.

Ud. ha elaborado un modelo econométrico en donde estimó que el precio del vino (en $ por litro) de cada temporada sigue un AR(1) de las siguientes características:

$$P_t = 55 + 0{,}9 \cdot P_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco Gaussiano de media cero y de desviación estándar anual igual a 20 pesos por litro.

Esta temporada que termina, el precio del Carmenere (a granel) es de 300 pesos por litro.

a) Si una planta embotelladora de vino le ofrece comprar hoy el total de la producción de tres años más a $310 pesos por litro, qué decisión recomendaría Ud y por qué?

$E(P_{t+k})=550(1-0,9^k)+0,9^k E(Pt)$
$k=3$ y $Pt=300 \Rightarrow P_{t+3}=367$
Debieran rechazarlo, salvo que argumenten que son muy aversos al riesgo.

b) Estime el precio esperado (condicional a la información de hoy) en 5 años más, y construya un intervalo de confianza al 95% para dicho precio. ¿Recomendaría cerrar un contrato por la venta a futuro de su producción en 5 años más a 400 pesos por litro? Comente.

$P_{t+5} = 402$
$V(P_t) = \sigma^2/(1-0,9^2) = 45,8$
$V(P_{t+k}) = \sum(i=0\dots k)\sigma^2 0,9^{2i}$
$V(P_{t+k}) = 0,9^{2k} * V(P_t) = 15,99$

I=402+-1,96* 15,99

Debieran rechazarlo, salvo que argumenten que son muy aversos al riesgo.

c) Podría estimar cuál es el ingreso esperado incondicional (i.e. de largo plazo) de la planta por venta de vino a granel y la desviación estándar de este ingreso? Cuántas temporadas Ud. estima que llegará a obtener un ingreso cercano en un 95% del valor esperado de largo plazo?

$E(P_t) = E(P_{t+1})$

- ⇨ $E(P) = 550$

$0,95*550 = 550(1-0,9^k)+0,9^k*300$
k = 21 temporadas