

IN 5204 - Organización Industrial

Repaso curso Estrategia y Teoría de Juegos

Ramiro de Elejalde
(Slides de Ronald Fischer)

CEA, Universidad de Chile

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de Nash

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de Nash
 - Estrategias:

$$q_1 \in [0, \infty) \text{ y } q_2 \in [0, \infty)$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de Nash
 - Estrategias:

$$q_1 \in [0, \infty) \text{ y } q_2 \in [0, \infty)$$

- Pagos:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(q_1 + q_2)) - C_1(q_1) = q_1(a - b(q_1 + q_2)) - c q_1$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de Nash
 - Estrategias:

$$q_1 \in [0, \infty) \text{ y } q_2 \in [0, \infty)$$

- Pagos:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(q_1 + q_2)) - C_1(q_1) = q_1(a - b(q_1 + q_2)) - c q_1$$

- Mejor respuesta de la firma 1 (chequear SOC):

$$\text{Max}_{q_1} \pi_1(q_1, q_2) \Rightarrow q_1 = R_1(q_2) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_2$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Cournot
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma simultánea, bienes homogéneos.
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de Nash
 - Estrategias:

$$q_1 \in [0, \infty) \text{ y } q_2 \in [0, \infty)$$

- Pagos:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(q_1 + q_2)) - C_1(q_1) = q_1(a - b(q_1 + q_2)) - c q_1$$

- Mejor respuesta de la firma 1 (chequear SOC):

$$\text{Max}_{q_1} \pi_1(q_1, q_2) \Rightarrow q_1 = R_1(q_2) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_2$$

- Equilibrio de Nash: (equilibrio simétrico $q_1^c = q_2^c$)

$$q_1^c = q_2^c = \frac{a - c}{3b}$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Lección 1: Incentivos individuales y cooperación.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Lección 1: Incentivos individuales y cooperación.
- Lección 2: Bienestar social: Competencia perfecta y Cournot.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Lección 1: Incentivos individuales y cooperación.
- Lección 2: Bienestar social: Competencia perfecta y Cournot.
- Lección 3: Sustitutos estratégicos o complementos estratégicos.
Por ej. comprar nueva maquinaria que disminuye costos de producción.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma secuencial, bienes homogéneos.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1 , q_2) en forma secuencial, bienes homogéneos.
 - Primero la firma 1 elige q_1 y luego la firma 2 elige q_2 conociendo q_1

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma secuencial, bienes homogéneos.
 - Primero la firma 1 elige q_1 y luego la firma 2 elige q_2 conociendo q_1
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma secuencial, bienes homogéneos.
 - Primero la firma 1 elige q_1 y luego la firma 2 elige q_2 conociendo q_1
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma secuencial, bienes homogéneos.
 - Primero la firma 1 elige q_1 y luego la firma 2 elige q_2 conociendo q_1
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - ¿Qué firma tiene ventaja? ¿Por qué?

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
 - 2 firmas, compiten en cantidades (q_1, q_2) en forma secuencial, bienes homogéneos.
 - Primero la firma 1 elige q_1 y luego la firma 2 elige q_2 conociendo q_1
 - Demanda (inversa): $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$
 - Costos: $C_i(q_i) = c q_i$
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - ¿Qué firma tiene ventaja? ¿Por qué?
 - Intuición usando sustitutos estratégicos.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - ¿Qué firma tiene ventaja? ¿Por qué?
 - Intuición usando sustitutos estratégicos.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - ¿Qué firma tiene ventaja? ¿Por qué?
 - Intuición usando sustitutos estratégicos.
 - Estrategias:

$$q_1 \in [0, \infty) \text{ y } q_2(q_1) : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - ¿Qué firma tiene ventaja? ¿Por qué?
 - Intuición usando sustitutos estratégicos.
 - Estrategias:

$$q_1 \in [0, \infty) \text{ y } q_2(q_1) : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$$

- Pagos:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(q_1 + q_2)) - C_1(q_1) = q_1(a - b(q_1 + q_2)) - c q_1$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - Inducción hacia atrás

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - Inducción hacia atrás
 - Etapa 2: Dado q_1 la firma 2

$$\text{Max}_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) \Rightarrow q_2 = R_2(q_1) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_1$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - Inducción hacia atrás
 - Etapa 2: Dado q_1 la firma 2

$$\text{Max}_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) \Rightarrow q_2 = R_2(q_1) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_1$$

- Etapa 1: La firma 1 prevee $q_2 = R_2(q_1)$ entonces

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_1} \pi_1(q_1, R_2(q_1)) &= \text{Max}_{q_1} \frac{a - c}{2}q_1 - \frac{b}{2}q_1^2 \\ \Rightarrow q_1^s &= \frac{a - c}{2b} \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Modelo de Stackelberg
- Calcular el equilibrio de perfecto en el subjuego
 - Inducción hacia atrás
 - Etapa 2: Dado q_1 la firma 2

$$\text{Max}_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) \Rightarrow q_2 = R_2(q_1) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_1$$

- Etapa 1: La firma 1 prevee $q_2 = R_2(q_1)$ entonces

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_1} \pi_1(q_1, R_2(q_1)) &= \text{Max}_{q_1} \frac{a - c}{2}q_1 - \frac{b}{2}q_1^2 \\ \Rightarrow q_1^s &= \frac{a - c}{2b} \end{aligned}$$

- Equilibrio de Nash:

$$q_1^s = \frac{a - c}{2b} > q_1^c$$

$$q_2^s = \frac{a - c}{4b} < q_2^c$$

$$q_1^s + q_2^s > q_1^c + q_2^c \Rightarrow P^s < P^c$$

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Lección 1: Compromiso estratégico y decisiones irreversibles.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Lección 1: Compromiso estratégico y decisiones irreversibles.
- Lección 2: Más información no siempre es bueno en situaciones estratégicas.

Ejemplo 1: Compromiso estratégico

- Lección 1: Compromiso estratégico y decisiones irreversibles.
- Lección 2: Más información no siempre es bueno en situaciones estratégicas.
- Lección 3: First-mover advantage. En este caso pero NO siempre, por ej. Piedra, papel, tijera.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Pregunta: En situaciones de interacción repetida, ¿ Existen incentivos que ayudan a un “buen” comportamiento? Ejemplos: Gasfiter, mecánico, empleado-empleador, firmas que compiten en forma repetida, etc.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Pregunta: En situaciones de interacción repetida, ¿ Existen incentivos que ayudan a un “buen” comportamiento? Ejemplos: Gasfiter, mecánico, empleado-empleador, firmas que compiten en forma repetida, etc.
- Idea: Promesa de recompensas futuras y la amenaza de castigos futuros “pueden” proveer incentivos a buen comportamiento en el presente.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

Definición (Juegos repetidos)

Dado un juego G , denotamos $G(T)$ el juego repetido donde G se juega T veces y los resultados de las jugadas precedentes son observados antes que la siguiente jugada comience. Los pagos de $G(T)$ son la suma de los pagos de cada etapa.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

Definición (Juegos repetidos)

Dado un juego G , denotamos $G(T)$ el juego repetido donde G se juega T veces y los resultados de las jugadas precedentes son observados antes que la siguiente jugada comience. Los pagos de $G(T)$ son la suma de los pagos de cada etapa.

- Ejemplo 2.1: Dilema del prisionero repetido $T < \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar	No cooperar
Jugador 1	Cooperar	2, 2	-1, 3
	No cooperar	3, -1	0, 0

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

Definición (Juegos repetidos)

Dado un juego G , denotamos $G(T)$ el juego repetido donde G se juega T veces y los resultados de las jugadas precedentes son observados antes que la siguiente jugada comience. Los pagos de $G(T)$ son la suma de los pagos de cada etapa.

- Ejemplo 2.1: Dilema del prisionero repetido $T < \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar	No cooperar
Jugador 1	Cooperar	2, 2	-1, 3
	No cooperar	3, -1	0, 0

- Lección 1: Si el juego de una etapa tiene un sólo equilibrio de Nash, el EPS del juego repetido un número finito de veces tiene un sólo EPS: el equilibrio de Nash es jugado en cada etapa.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.2: Juego repetido 2 veces

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	4, 4	0, 5	0, 0
	B	5, 0	1, 1	0, 0
	C	0, 0	0, 0	3, 3

- ¿Se puede sostener (A, A) cooperación como equilibrio?

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.2: Juego repetido 2 veces

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	4, 4	0, 5	0, 0
	B	5, 0	1, 1	0, 0
	C	0, 0	0, 0	3, 3

- ¿Se puede sostener (A, A) cooperación como equilibrio?
- Estrategias: Jugar A , luego jugar C si se jugó (A, A) en la primera etapa en caso contrario jugar B .

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.2: Juego repetido 2 veces

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	4, 4	0, 5	0, 0
	B	5, 0	1, 1	0, 0
	C	0, 0	0, 0	3, 3

- ¿Se puede sostener (A, A) cooperación como equilibrio?
- Estrategias: Jugar A , luego jugar C si se jugó (A, A) en la primera etapa en caso contrario jugar B .
- Clave: Tentación a no cooperar hoy $\leq$ valor de la recompensa mañana menos valor del castigo mañana $\Rightarrow 5 - 4 \leq 3 - 1$

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.2: Juego repetido 2 veces

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	4, 4	0, 5	0, 0
	B	5, 0	1, 1	0, 0
	C	0, 0	0, 0	3, 3

- ¿Se puede sostener (A, A) cooperación como equilibrio?
- Estrategias: Jugar A , luego jugar C si se jugó (A, A) en la primera etapa en caso contrario jugar B .
- Clave: Tentación a no cooperar hoy $\leq$ valor de la recompensa mañana menos valor del castigo mañana $\Rightarrow 5 - 4 \leq 3 - 1$
- Lección 2: Si el juego de una etapa tiene un múltiples equilibrios de Nash, se “puede llegar a” usar la recompensa-amenaza de jugar distintos equilibrio mañana para proveer incentivos hoy.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Estrategias gatillo: Empezar jugando C, luego jugar C si ninguno ha jugado D en la historia del juego, en caso contrario jugar D.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Estrategias gatillo: Empezar jugando C, luego jugar C si ninguno ha jugado D en la historia del juego, en caso contrario jugar D.
- En el subjuego que empieza en t , hay 2 historias posibles:

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Estrategias gatillo: Empezar jugando C, luego jugar C si ninguno ha jugado D en la historia del juego, en caso contrario jugar D.
- En el subjuego que empieza en t , hay 2 historias posibles:
 - 1 Alguien ha jugado D en algún período: Dado que mi rival va a jugar D por siempre, mi mejor respuesta es jugar D por siempre, y viceversa.

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Estrategias gatillo: Empezar jugando C, luego jugar C si ninguno ha jugado D en la historia del juego, en caso contrario jugar D.
- En el subjuego que empieza en t , hay 2 historias posibles:
 - 1 Alguien ha jugado D en algún período: Dado que mi rival va a jugar D por siempre, mi mejor respuesta es jugar D por siempre, y viceversa.
 - 2 Ambos jugadores cooperaron en la historia del juego:
 Pago de seguir la estrategia de gatillo $= 2 + \delta 2 + \delta^2 2 + \dots = 2/(1 - \delta)$
 Pago de desviarse (Mejor desviación es D,D,...¿Por qué?):
 $3 + \delta 0 + \delta^2 0 + \dots = 3$

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Estrategias gatillo: Empezar jugando C, luego jugar C si ninguno ha jugado D en la historia del juego, en caso contrario jugar D.
- En el subjuego que empieza en t , hay 2 historias posibles:
 - 1 Alguien ha jugado D en algún período: Dado que mi rival va a jugar D por siempre, mi mejor respuesta es jugar D por siempre, y viceversa.
 - 2 Ambos jugadores cooperaron en la historia del juego:
 Pago de seguir la estrategia de gatillo $= 2 + \delta 2 + \delta^2 2 + \dots = 2/(1 - \delta)$
 Pago de desviarse (Mejor desviación es D,D,...¿Por qué?):
 $3 + \delta 0 + \delta^2 0 + \dots = 3$
 - 3 Estrategias de gatillo son EPS si $\delta \geq 1/3$

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Siguiendo la idea anterior:

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Siguiendo la idea anterior:
 - 1 Tentación hoy= $3 - 2 = 1$

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Siguiendo la idea anterior:
 - 1 Tentación hoy= $3 - 2 = 1$
 - 2 Valor de la promesa a futuro (C, C) por siempre ó 2 por siempre= $2/(1 - \delta)$

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Siguiendo la idea anterior:
 - 1 Tentación hoy= $3 - 2 = 1$
 - 2 Valor de la promesa a futuro (C, C) por siempre ó 2 por siempre= $2/(1 - \delta)$
 - 3 Valor del castigo a futuro (D, D) por siempre ó 0 por siempre=0

Ejemplo 2: Cooperación en juegos repetidos

- Ejemplo 2.3: Dilema del prisionero repetido $T = \infty$ veces

		Jugador 2	
		Cooperar(C)	Desviarse (D)
Jugador 1	Cooperar (C)	2, 2	-1, 3
	Desviarse (D)	3, -1	0, 0

- Tasa de descuento: $\delta \in [0, 1]$
- Siguiendo la idea anterior:
 - 1 Tentación hoy= $3 - 2 = 1$
 - 2 Valor de la promesa a futuro (C, C) por siempre ó 2 por siempre= $2/(1 - \delta)$
 - 3 Valor del castigo a futuro (D, D) por siempre ó 0 por siempre=0
- Lección 2: Promesas de beneficios futuros y amenazas de castigos futuros pueden proveer incentivos para cooperar en el presente en juegos repetidos en forma infinita siempre que los jugadores sean lo suficientemente pacientes.