Auxiliar 2

Organización Industrial – IN5402
Profesor: Ramiro De Elejalde
Auxiliar: Claudio Palominos
26 de marzo de 2012

Problema 1: Equilibrio de Nash y Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Considere una firma con dos trabajadores que producen un output de acuerdo a la siguiente función de producción

$$f(e_1, e_2) = e_1 + e_2 + 2e_1e_2$$

donde e_1, $e_2 \geq 0$ corresponde a los niveles de esfuerzo de cada uno. La firma paga a cada trabajador la mitad de su producción, es decir, un salario

$$w(e_1, e_2) = \frac{1}{2}f(e_1, e_2)$$

y cada trabajador tiene una función de utilidad

$$u_i(e_1, e_2) = w(e_1, e_2) - e_i^2$$

1. Supongamos que los dos trabajadores eligen su nivel de esfuerzo de forma simultánea. Determine para cada trabajador su función de mejor respuesta y encuentre el equilibrio de Nash (NE). ¿Es equilibrio la estrategia $e = (1, 1)$? Discuta.

2. Supongamos que los trabajadores eligen su nivel de esfuerzo ($e_i \in [0, 1]$) de forma simultánea, pero ahora interactúan infinitamente, cada uno con un factor de descuento $\delta \in (0, 1)$. Se asume que los trabajadores usan estrategias gatillo (trigger estrategies). Escoja una estrategia gatillo que entregue un resultado deseable, descríbala. Calcule $\bar{\delta}$ tal que las estrategias gatillo constituyan un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (SPNE) si y sólo si $\delta > \bar{\delta}$.

   Solución: Un resultado deseable sería aquel que maximice la utilidad conjunta de ambos trabajadores:

   $$u_T = u_1(e_1, e_2) + u_2(e_1, e_2) = e_1 + e_2 + 2e_1e_2 - e_1^2 - e_2^2$$

   Supongamos un resultado simétrico, $e = e_1 = e_2$

   $$u_T = (e + e + 2ee) - e^2 - e^2 = 2e$$

El máximo de u_T se encuentra en $e = 1$, la utilidad de cada jugador sería $u_i = 1$. Mientras que la utilidad jugando el equilibrio de Nash es $u_i = \frac{1}{2}$
$\left(u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\right)$

Recordemos que en un juego dinámico, las estrategias son contingentes (dicen qué hacer en cada periodo del juego). Una estrategia gatillo permite a los jugadores cooperar para obtener un determinado pago, aplicándose un castigo si se llega a observar que algún jugador se ha desviado.

La estrategia gatillo del juego es la siguiente:

$$s_i(t) = \begin{cases} e_i = 1 \text{ en el periodo } t & \text{si ningún jugador se ha desviado} \\ e_i = \frac{1}{2} \text{ en el periodo } t & \text{si algún jugador se ha desviado en algún periodo } \bar{t} < t \end{cases}$$

Inmediatamente, bajo esta estrategia, si algún jugador se desvía, ambos jugadores se desvían desde ese periodo en adelante. Notar que la estrategia es implementable porque cuando se desvían, los jugadores juegan un equilibrio de Nash.

Nos falta determinar cuál es el pago de un jugador que se desvía, dado que el otro jugador coopera. En este caso, el jugador que se desvía maximiza su pago sujeto a que el otro juega $e = 1$, es decir que resuelve

$$\max \frac{1}{2}\left(e_i + 1 + 2e_i\right) - e_i^2$$

Derivando e igualando a cero, obtenemos $e_i = \frac{3}{4}$ y el pago es $u_i = \frac{17}{16}$. Luego, los niveles de esfuerzo y pagos para cooperación, desvío y Nash estático son, respectivamente:

$$\begin{aligned} e_i^c &= 1 & u_i^c &= 1 \\ e_i^d &= \frac{3}{4} & u_i^d &= \tfrac{17}{16} \\ e_i^n &= \frac{1}{2} & u_i^n &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, para calcular $\bar{\delta} > \delta$, recordemos que si $\delta \in (0, 1)$

$$\sum_{k=m}^{n} \delta^k = \frac{\delta^m - \delta^{n+1}}{1 - \delta}$$

Entonces

$$\sum_{k=m}^{\infty} \delta^k = \frac{\delta^m}{1 - \delta}$$

Para que la estrategia gatillo seguida por los jugadores constituya un **Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos**, se debe cumplir que cooperar sea más rentable que no cooperar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_i^c \delta^k \geq u_i^d + \sum_{k=1}^{\infty} u_i^n \delta^k$$

$$1\frac{1}{1-\delta} \geq \frac{17}{16} + \frac{1}{2}\frac{\delta}{1-\delta}$$

$$1 \geq \frac{17}{16}(1-\delta) + \frac{1}{2}\delta$$

$$\delta \geq \frac{1}{9}$$

Luego, $\bar{\delta} = \frac{1}{9}$ Tenemos la estrategia gatillo que describimos es Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos $\forall\ \delta \geq \frac{1}{9}$

Problema 2: Bayesian Nash Equilibrium

Sea el siguiente juego en forma normal:

	A	B
A	$0, 0$	$1, x_2$
B	$x_1, 1$	$0, 0$

donde x_i sólo es observable por $i \in \{1, 2\}$, x_i son independientes uniformemente distribuidas en $[-1, 1]$

1. Mostrar que no existe un Equilibrio Bayesiano de Nash (NBE) en el que alguno de los jugadores juegue siempre B
2. Mostrar que el siguiente par de estrategias es un Equilibrio Bayesiano de Nash (NBE): (s_1, s_2), donde

$$s_1(x_1) = A\ \forall x_1 \in [-1, 1]$$

$$s_2(x_2) = \begin{cases} \text{A} & \text{si } x_2 \leq 0 \\ \text{B} & \text{si } x_2 > 0 \end{cases}$$

3. Encontrar algún otro Equilibrio Bayesiano.

Problema 3: Licitación sobre cerrado primer precio