IN5204: Organización Industrial
Profesores: R. Fischer, R. de Elejalde
Auxiliares: P. Cuellar, N. Inostroza, P. Lemus, C. Palominos

Pauta Auxiliar 1: Teoría de Juegos

Lunes 19 de marzo de 2012

Pregunta 1

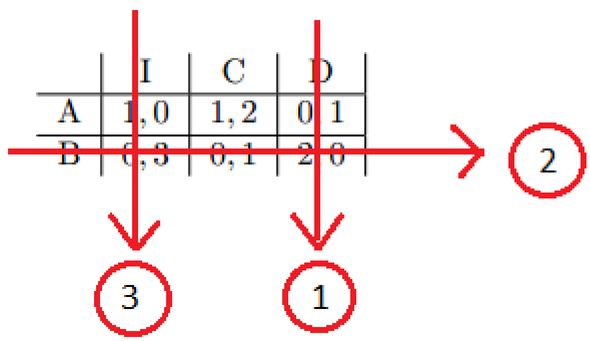

Figura 1.

Al aplicar el método de EIEED se deben eliminar las estrategias estrictamente dominadas. Las eliminaciones que se hacen son las siguientes (se pueden observar en la Figura 1):

1. D está estrictamente dominada por C para el jugador 2.
2. Luego de eliminar D, B está estrictamente dominada por A para el jugador 1.
3. Luego de eliminar B, I está estrictamente dominada por C para el jugador 2.

De esta forma el equilibrio de Nash es {A, C}

Pregunta 2

a)

Para el jugador 2:

- N domina estrictamente a S

Para el jugador 1:

- N domina a S y C
- S domina a C

b)

Para el jugador 2:

- S está estrictamente dominada por N

Para el jugador 1:

- S está dominada por N
- C es dominada por S y N

c)

	N	C	S
N	$-2, 3$	$2, 4$	~~$0, -1$~~
~~C~~	~~$-3, 1$~~	~~$-2, 4$~~	~~$0, 0$~~
S	$-2, 2$	$-2, -1$	~~$0, 0$~~

2

1

Figura 2.

Al aplicar el método de EIEED se deben eliminar las estrategias estrictamente dominadas. Las eliminaciones que se hacen son las siguientes (se pueden observar en la Figura 2):

1. S está estrictamente dominada por N para el jugador 2.
2. Luego de eliminar S, C está estrictamente dominada por N para el jugador 1.

Dado que no se pueden hacer más eliminaciones (porque no existen más estrategias estrictamente dominadas), el juego se reduce al siguiente:

	N	C
N	$-2, 3$	$2, 4$
S	$-2, 2$	$-2, -1$

Figura 3.

Aquí se puede ver que los EN son {S, N} y {N, C}, ya que si los jugadores juegan estas estrategias no tienen incentivos a desviarse unilateralmente.

Vamos a ver que los perfiles {N, N} y {S, C} no son EN, ya que existen desviaciones unilaterales beneficiosas:

- Si se está jugando {N, N}: el jugador 2 está mejor si se desvía a C.
- Si se está jugando {S, C}: el jugador 2 tiene incentivos a desviarse a N.

Pregunta 3

Sabemos que una estrategia S_i^* del jugador i es dominante si:

$U_i(s_i^*, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i})\ \forall s_i\ \forall s_{-i}$ con desigualdad estricta para al menos algún s_i

Luego, es la mejor respuesta a todas las estrategias de los demás, y es única, ya que si existieran dos estrategias dominantes s_i' y s_i'' se tendría que:

$U_i(s_i', s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i})\ \forall s_i\ \forall s_{-i}$ con desigualdad estricta para al menos algún S_i

$U_i(s_i'', s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i})\ \forall s_i\ \forall s_{-i}$ con desigualdad estricta para al menos algún S_i

En particular $U_i(s_i', s_{-i}) \geq U_i(s_i'', s_{-i})\ \forall s_{-i}$

$U_i(s_i', s_{-i}) \leq U_i(s_i'', s_{-i})\ \forall s_{-i}$

Por lo que la estrategia dominante necesariamente es única ($S_i' = S_i''$) ya que de otra manera se viola la condición de desigualdad en la definición de estrategia dominante.

→ Equilibrio en estrategias dominantes es único.

Pregunta 4

a)

Cada ganadero es un agente racional, por lo que maximizará su función de utilidad, la que viene dada por:

$$U_i(n_i, n_{-i}) = n_i V(N) - cn_i \qquad \forall i$$

$$U_i(n_i, n_{-i}) = n_i V\left(\left(\sum_{j \neq i} n_j\right) + n_i\right) - cn_i \qquad \forall i$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_i}(n_i, n_{-i}) = V\left(\left(\sum_{j \neq i} n_j\right) + n_i\right) + n_i \frac{\partial V}{\partial n_i}\left(\left(\sum_{j \neq i} n_j\right) + n_i\right) - c = 0 \qquad \forall i$$

Como la función V y los costos C son los mismos para todos los jugadores, en el equilibrio la cantidad de animales va a ser la misma para cada ganadero, ie $n_i = n_j \ \ \forall j$.

Según esto, se puede observar que $n_i = \frac{N}{I}$. Por lo tanto la CPO queda así:

$$V(N) + \frac{N}{I}V'(N) - C = 0$$

Por lo que la condición que determina el número óptimo de animales de cada ganadero es:

$$V(N) = C - \frac{N}{I}V'(N)$$

b)

El planificador social benevolente maximiza la utilidad social:

$$U_{soc} = N\,V(N) - NC$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial U_{soc}}{\partial N} = V(N) + N\,V'(N) - C = 0$$

Por lo tanto, la condición que determina el número óptimo de animales de un planificador benevolente será:

$$V(N) = C - N\,V'(N)$$

c)

Para determinar en que caso habrá un mayor número de animales se procederá a graficar las curvas:

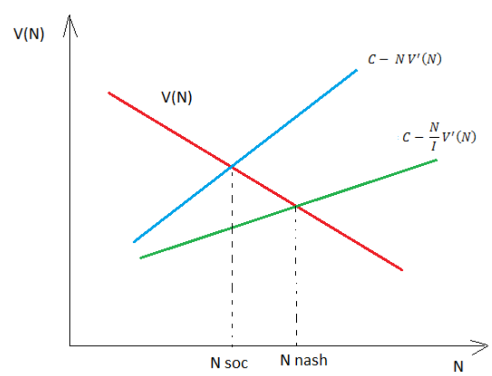

Figura 4.

Cabe señalar que las pendientes de las curvas están dadas por las condiciones impuestas sobre la función V:

- Dado que $V'(N) < 0$, se tendrá que $V(N)$ es decreciente.
- Dado que $V''(N) < 0$, se tendrá que $V'(N)$ es decreciente, por lo tanto $-V'(N)$ es creciente.

De este gráfico se puede ver claramente que en el caso en que no hay un regulador (planificador central) la cantidad de animales será mayor.

d) Propuesto

Pregunta 5

Para probar que estos son los unicos equlibrios, analicemos los distintos casos y veamos que no son eq. de Nash, y luego veremos que no existen desviaciones unilaterales para el caso en que la suma es 100. (Los jugadores son analogos por lo que el desarrollo se hara para un solo jugador)

La utilidad de cada jugador se puede caracterizar de la siguiente forma:

$$U_i(s_i, s_j) = \begin{cases} s_i & si \quad s_i + s_j \leq 100 \\ 0 & si \quad s_i + s_j > 100 \end{cases}$$

- Caso 1: $s_i + s_j < 100$

Para ver que no son eq. de Nash, veamos que existen desviaciones unilaterales para almenos uno de los jugadores.

Sea $s_i' = s_i + 1$ una desviacion por el jugador i, se verifica que $s_i' + s_j \leq 100$ y por lo tanto se tiene que $U_i(s_i', s_j) = s_i' = s_i + 1 > s_i = U_i(s_i.s_j)$ por lo que la desviacion s_i' es una desviacion que le produce beneficios al jugador i, y por ende, este caso no puede ser eq. de Nash.

- Caso 2: $s_i + s_j > 100$

En este caso $U_i(s_i, s_j) = 0$, si definimos $s_i' = 100 - s_j$ se verifica que $s_i' + s_j = 100 - s_j + s_j = 100$ por lo que $U_i(s_i', s_j) = s_i' > 0$. Nuevamente hemos encontrado una desviacion beneficiosa para el jugador i, por lo que este caso no puede ser eq. de Nash.

- Caso 3: $s_i + s_j = 100$

Para este caso mostraremos que no existen descviaciones unilaterales beneficiosas para ningun jugador.

Sea $s_i' = s_i + 1$ una desviacion para el jugador i (esta es la menor desviacion posible hacia arriba). $s_i' + s_j = s_i + 1 + s_j = 101$ por lo que $U_i(s_i', s_j) = 0 < s_i = U_i(s_i, s_j)$. Esto muestra que incluso la menor desviacion hacia arriba empeora la situacion del jugador i, por lo que no es una desviacion beneficiosa.

Sea ahora $s_i' = s_i - 1$ la menor desviacion hacia abajo. $s_i' + s_j = s_i - 1 + s_j = 99$ y $U_i(s_i', s_j) = s_i' = s_i - 1 < s_i = U_i(s_i, s_j)$. Nuevamente vemos que esta desviacion no es beneficiosa para el jugador i.

Hemos mostrado que para este caso, no existen desviaciones unilaterales que mejoren la situacion de alguno de los jugadores, por lo que ningun jugador tiene incentivos a desviarse de este perfil de estrategias, lo que es precisamente el concepto de equilibrio de Nash.

Pregunta 6

Para ver si existen equilibrios puros se debe ver que no haya incentivos a desviarse unilateralmente. Según esto los EN son {A, I} y {B, D}.

Vamos a ver que los perfiles {A, D} y {B, I} no son EN, ya que existen desviaciones unilaterales beneficiosas:

- Si se está jugando {A, D}: el jugador 2 está mejor si se desvía a I.
- Si se está jugando {B, I}: el jugador 2 tiene incentivos a desviarse a A.

Ahora se debe encontrar el EN en estrategias Mixtas. La forma de hacerlo será calcular las funciones de mejor respuesta de cada jugador usando la utilidad esperada.

Sea p la probabilidad con la que el jugador 1 juaga la estrategia A y q la probabilidad con que el jugador 2 juaga la estrategia I.

Para el jugador 1:

$$U_1(p,q) = p[2q + 0(1-q)] + (1-p)[0q + 1(1-q)]$$

$$U_1(p,q) = p(3q-1) + 1 - q$$

Con esto la función de mejor respuesta del jugador 1, ante la acción del jugador 2, es:

$$BR_1(q) = \begin{cases} p = 0 & si\ q < 1/3 \\ p = 1 & si\ q > 1/3 \\ p \in [0,1] & si\ q = 1/3 \end{cases}$$

Análogamente para el jugador 2:

$$U_2(q,p) = q[1p + 0(1-p)] + (1-q)[0p + 2(1-p)]$$

$$U_2(q,p) = q(3p-2) + 2 - 2p$$

Con esto la función de mejor respuesta del jugador 1, ante la acción del jugador 2, es:

$$BR_2(p) = \begin{cases} q = 0 & si\; p < 2/3 \\ q = 1 & si\; p > 2/3 \\ q \in [0,1] & si\; p = 2/3 \end{cases}$$

Los equilibrios serán aquellos en que las mejores respuestas se induzcan mutuamente, es decir, los perfiles (σ_1^*, σ_1^*) tal que:

$$BR_i\big(BR_{-i}(\sigma_i^*)\big) = \sigma_i^* \qquad \forall i$$

Esto se puede ver gráficamente en la Figura 5, donde la curva azul representa la mejor respuesta del jugador 1, y la roja la mejor respuesta del jugador 2:

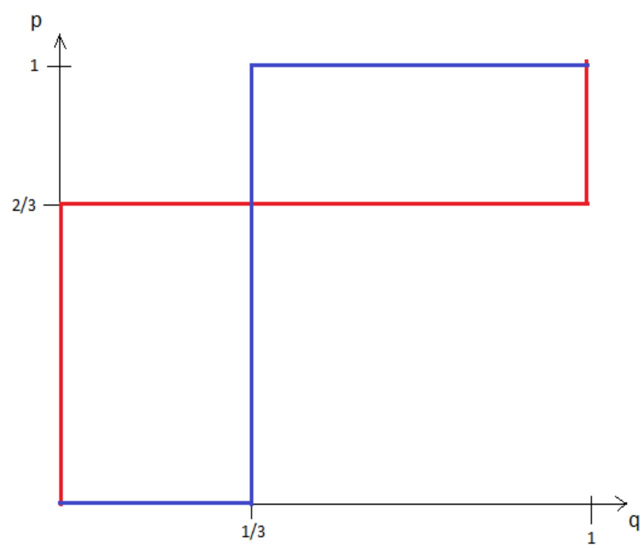

Figura 5.

Aquí se puede ver que las tres intersecciones corresponden a las estrategias (dos puras y una mixta).

De esta forma la estrategia mixta es $\left\{\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)\right\}$

Entonces, los tres EN son: $\left\{(\mathrm{A},\mathrm{I}),(\mathrm{B},\mathrm{D}),\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)\right\}$

Pregunta 7

Para encontrar los equilibrios, calculamos las funciones de mejor respuesta de cada jugador usando la utilidad esperada.

Sea p la probabilidad con que el jugador 1 juega la estrategia A y q la probabilidad con que el jugador 2 juega la estrategia I.

$$U_1(p,q) = p(5q + 3 - 3q) + (1-p)(4q + 3 - 3q)$$
$$U_1(p,q) = p(3 + 2q) + (1-p)(3 + q)$$
$$U_1(p,q) = p(q) + (3 + q)$$

Con esto, la funcion de mejor respuesta del jugador 1 es:

$$Br_1(q) = \begin{cases} p = 1 & si \quad q > 0 \\ p \in [0,1] & si \quad q = 0 \end{cases}$$

Análogamente para el jugador 2:

$$U_2(p,q) = q(2p + 3 - 3p) + (1-q)(3p + 2 - 2p)$$
$$U_2(p,q) = q(3 - p) + (1-q)(2 + p)$$
$$U_2(p,q) = q(1 - 2p) + (2 + p)$$

Con esto, la funcion de mejor respuesta del jugador 2 es:

$$Br_2(p) = \begin{cases} q = 1 & si \quad p < 1/2 \\ q \in [0,1] & si \quad p = 1/2 \\ q = 0 & si \quad p > 1/2 \end{cases}$$

Los equilibrios seran aquellos en que las mejores respuestas se induzcan mutuamente, es decir, los perfiles (σ_1^*, σ_2^*) tal que:

$$Br_i(Br_{-i}(\sigma_i^*)) = \sigma_i^* \qquad \forall i$$

Los equilibrios se pueden ver gráficamente en la Figura 6. Los puntos de intersección de ambas mejores respuestas serán los EN.

La curva azul representa la mejor respuesta de 1 y la curva roja la del jugador 2.

Figura 6.

En esta figura se puede notar que existe toda una zona de intersección de las curvas, por lo que habrá infinitos equilibrios mixtos.

Por lo tanto, se verifica facilmente que los siguientes perfiles son equlibrios de Nash:

$$EN_{puros} = \{(A, D)\}$$
$$EN_{mixtos} = \{((p, 1-p), (0, 1)) \mid p \in (1/2, 1]\}$$