

IN 5204 - Organización Industrial

Repaso curso Estrategia y Teoría de Juegos

Ramiro de Elejalde
(Slides de Ronald Fischer)

CEA, Universidad de Chile

Contenidos esta parte del curso

1 Repaso teoría de juegos

- Equilibrio perfecto en el subjuego (EPS)
- Equilibrio de Bayes-Nash (ENB)
- Equilibrio Débilmente Perfecto de Bayes-Nash (EPBN)

Problemas del equilibrio de Nash

- Multiplicidad de equilibrios.
- No todos los equilibrios igualmente razonables: amenazas no creíbles.
- A menudo consideración dinámica es importante.

Problemas del equilibrio de Nash

- Multiplicidad de equilibrios.
- No todos los equilibrios igualmente razonables: amenazas no creíbles.
- A menudo consideración dinámica es importante.

Ejemplo

(Entrada de competencia)
Monopolio enfrenta potencial entrante, amenaza con guerra de precios si entra.

		\mathcal{E}	
		E	NE
\mathcal{M}	A	20, 20	50, 0
	G	-10, -10	50, 0

Forma extensiva

Para estudiar el problema dinámico:

- 1 **Jugadores** $i \in 1 \dots n$.
- 2 **Árbol** del juego: Nodos y ramas (acciones).
- 3 **Conjuntos de información:** de cada jugador.
- 4 **Estrategias** $s_i \in S_i$ de cada jugador.
- 5 **Pagos** $u_i(s)$ a los jugadores.

Forma extensiva

Para estudiar el problema dinámico:

- 1 **Jugadores** $i \in 1 \dots n$.
- 2 **Árbol** del juego: Nodos y ramas (acciones).
- 3 **Conjuntos de información**: de cada jugador.
- 4 **Estrategias** $s_i \in S_i$ de cada jugador.
- 5 **Pagos** $u_i(s)$ a los jugadores.

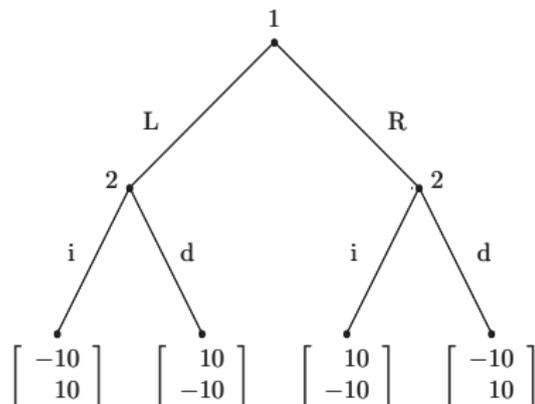


Figura: Juego de la moneda con información.

Forma extensiva

Para estudiar el problema dinámico:

- 1 **Jugadores** $i \in 1 \dots n$.
- 2 **Árbol** del juego: Nodos y ramas (acciones).
- 3 **Conjuntos de información**: de cada jugador.
- 4 **Estrategias** $s_i \in S_i$ de cada jugador.
- 5 **Pagos** $u_i(s)$ a los jugadores.

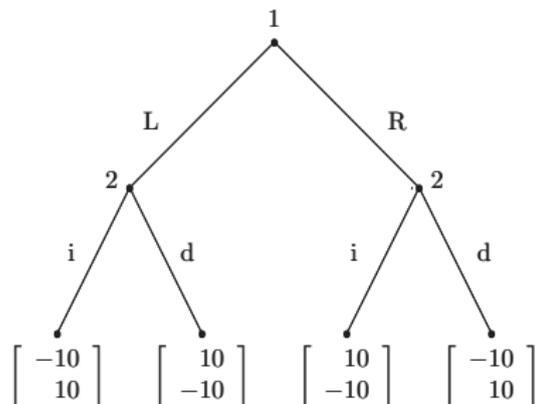


Figura: Juego de la moneda con información.

$$S_1 = (L, R), S_2 = ((i, d), (i, i), (d, i), (d, d))$$

Forma extensiva

Para estudiar el problema dinámico:

- 1 **Jugadores** $i \in 1 \dots n$.
- 2 **Árbol** del juego: Nodos y ramas (acciones).
- 3 **Conjuntos de información:** de cada jugador.
- 4 **Estrategias** $s_i \in S_i$ de cada jugador.
- 5 **Pagos** $u_i(s)$ a los jugadores.

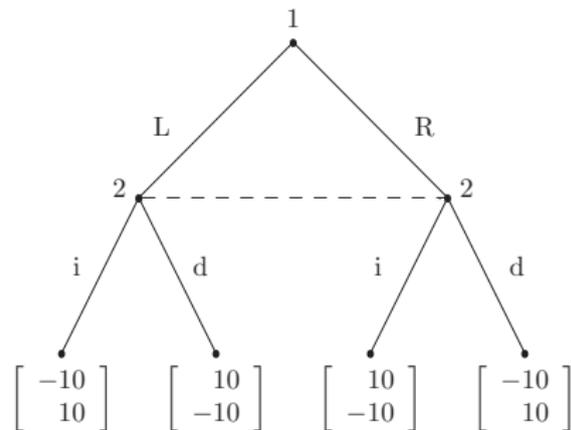


Figura: Juego de la moneda sin información.

Subjuego

Definición

Un subjuego del juego es el subconjunto de nodos y acciones de un juego que:

- 1 *Se origina en un conjunto de información **singleton**.*
- 2 *Comprende todas las ramas y nodos subsiguientes a partir de ese nodo.*
- 3 *No rompe ningún conjunto de información.*

Subjuego

Definición

Un subjuego del juego es el subconjunto de nodos y acciones de un juego que:

- 1 *Se origina en un conjunto de información **singleton**.*
- 2 *Comprende todas las ramas y nodos subsiguientes a partir de ese nodo.*
- 3 *No rompe ningún conjunto de información.*

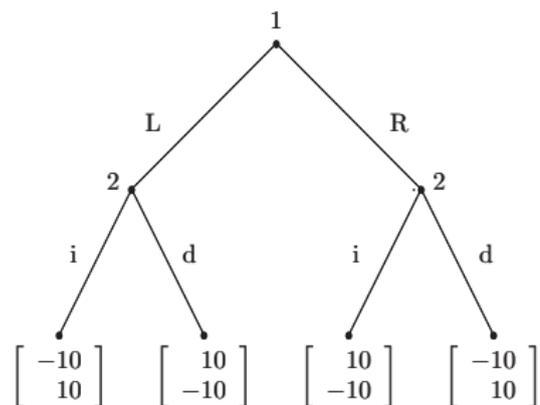


Figura: Juego de la moneda con información.

Subjuego

Definición

Un subjuego del juego es el subconjunto de nodos y acciones de un juego que:

- 1 *Se origina en un conjunto de información **singleton**.*
- 2 *Comprende todas las ramas y nodos subsiguientes a partir de ese nodo.*
- 3 *No rompe ningún conjunto de información.*

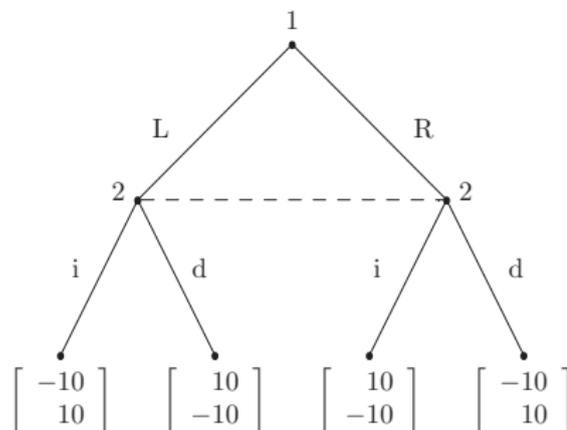


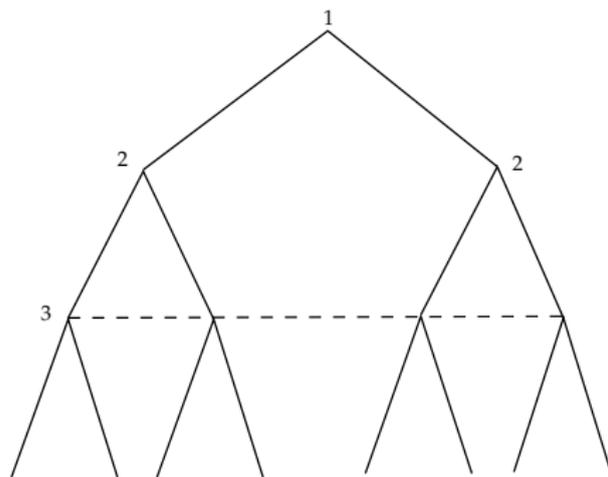
Figura: Juego de la moneda sin información.

Subjuego

Definición

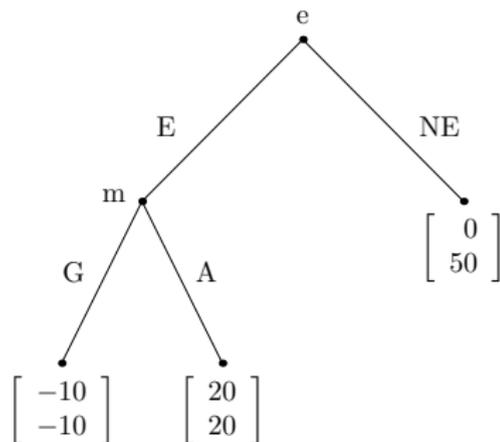
Un subjuego del juego es el subconjunto de nodos y acciones de un juego que:

- 1 *Se origina en un conjunto de información **singleton**.*
- 2 *Comprende todas las ramas y nodos subsiguientes a partir de ese nodo.*
- 3 *No rompe ningún conjunto de información.*



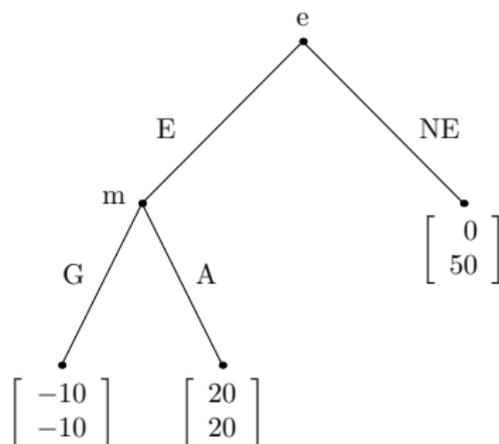
Equilibrio perfecto en el subjuego

Entrada de competencia en forma extensiva.



Equilibrio perfecto en el subjuego

Entrada de competencia en forma extensiva.

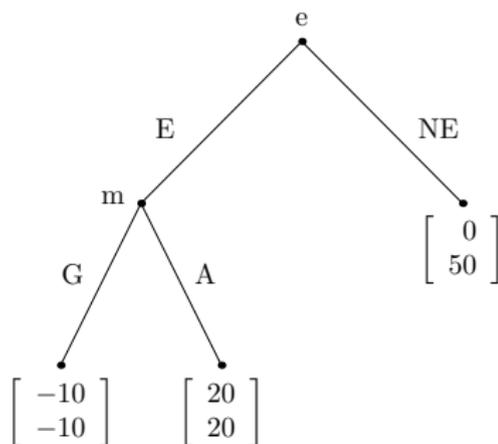


Definición

Un equilibrio es *perfecto en el subjuego* (EPS) si en cada subjuego, el equilibrio en el subjuego es Nash.

Equilibrio perfecto en el subjuego

Entrada de competencia en forma extensiva.

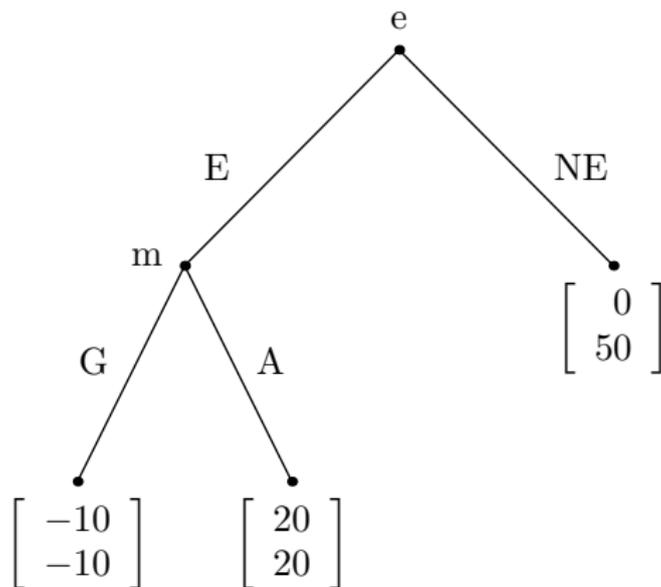


Definición

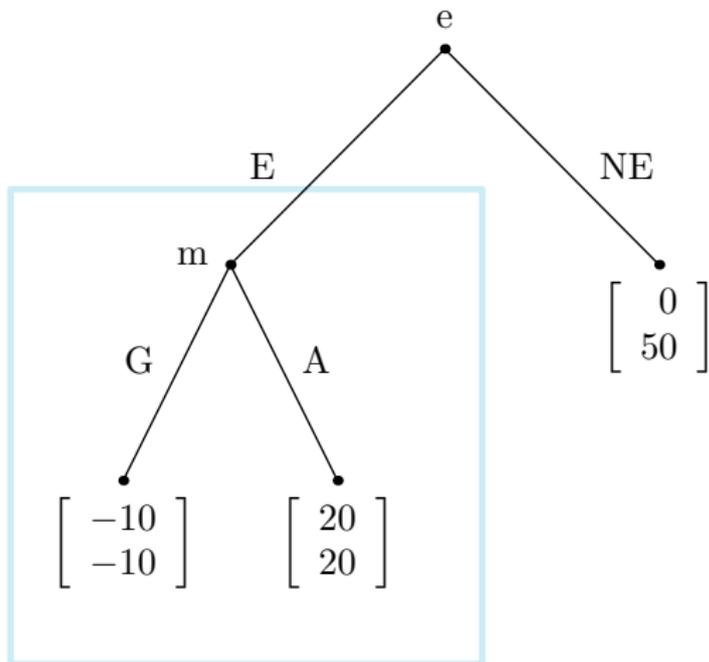
Un equilibrio es **perfecto en el subjuego** (EPS) si en cada subjuego, el equilibrio en el subjuego es Nash.

- Siempre existe
- Único, en juegos con información perfecta.
- En juegos de información perfecta, se usa el método de **inducción hacia atrás**

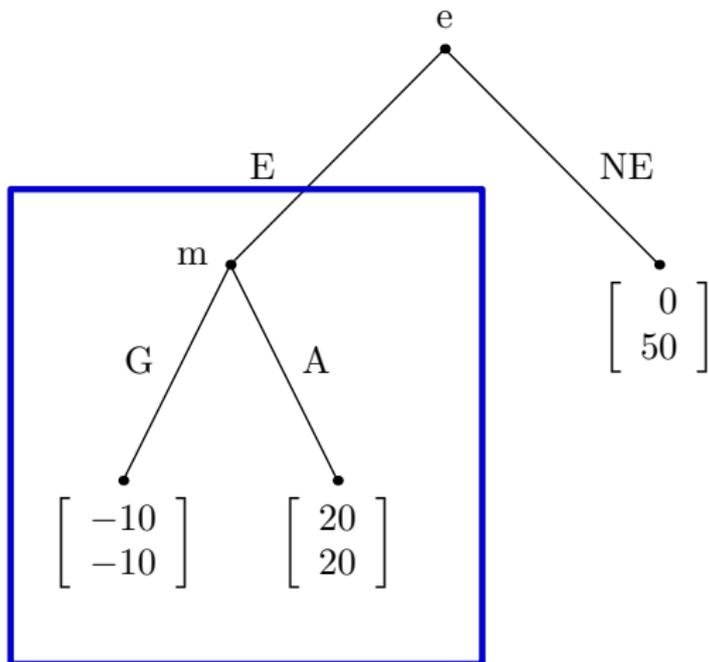
Entrada de competencia y EPS



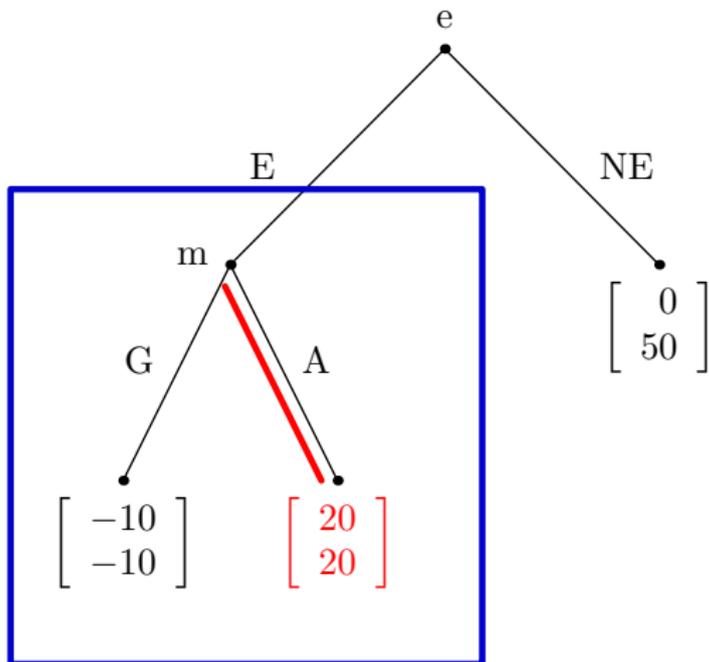
Entrada de competencia y EPS



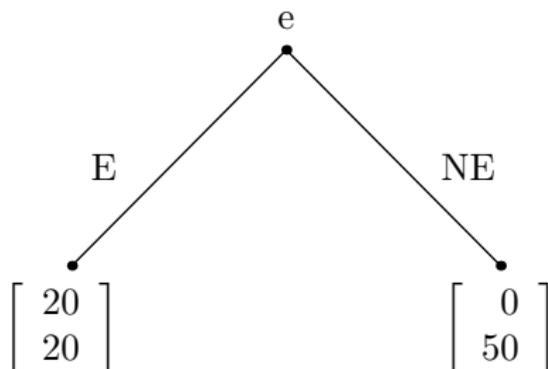
Entrada de competencia y EPS



Entrada de competencia y EPS

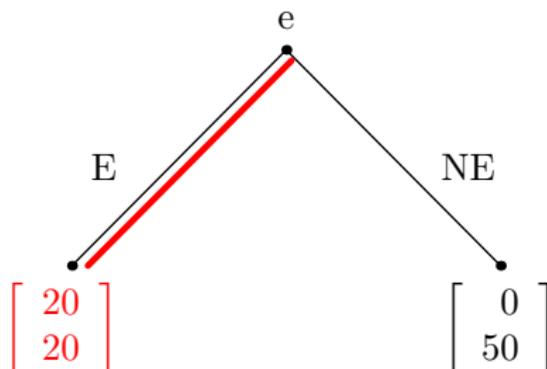


Entrada de competencia y EPS



El juego reducido:

Entrada de competencia y EPS



El juego reducido: El EPS es (E, A) .

Aplicación: caso Codelco-Anglo

- En 2008 con Enami casi quebrada, CODELCO adquiere opción de compra por hasta un 49% de Anglo Sur a un precio de una fórmula. [▶ Ir a Historia Los Bronces](#)

Aplicación: caso Codelco-Anglo

- En 2008 con Enami casi quebrada, CODELCO adquiere opción de compra por hasta un 49 % de Anglo Sur a un precio de una fórmula. [▶ Ir a Historia Los Bronces](#)
- En octubre de 2011, Codelco y Mitsui acuerdan crédito de US\$ 6.750MM para comprar 49 % de los Bronces. Codelco le vendería un 24.5 % para pagar crédito.

Aplicación: caso Codelco-Anglo

- En 2008 con Enami casi quebrada, CODELCO adquiere opción de compra por hasta un 49 % de Anglo Sur a un precio de una fórmula. [▶ Ir a Historia Los Bronces](#)
- En octubre de 2011, Codelco y Mitsui acuerdan crédito de US\$ 6.750MM para comprar 49 % de los Bronces. Codelco le vendería un 24.5 % para pagar crédito.
- Valor real de los Bronces es muy superior al de la fórmula, y Codelco podría recibir más de US\$ 3.500 netos.

Aplicación: caso Codelco-Anglo

- En 2008 con Enami casi quebrada, CODELCO adquiere opción de compra por hasta un 49 % de Anglo Sur a un precio de una fórmula. [▶ Ir a Historia Los Bronces](#)
- En octubre de 2011, Codelco y Mitsui acuerdan crédito de US\$ 6.750MM para comprar 49 % de los Bronces. Codelco le vendería un 24.5 % para pagar crédito.
- Valor real de los Bronces es muy superior al de la fórmula, y Codelco podría recibir más de US\$ 3.500 netos.
- Anglo se niega, vende un 24.5 % a Mitsubishi, ofreciendo el resto a Codelco, que recibiría más de US\$ 1.750 MM netos.

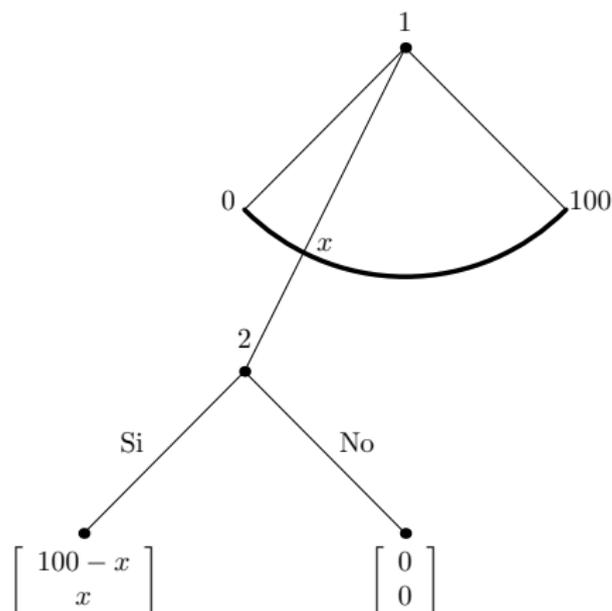
Aplicación: caso Codelco-Anglo

- En 2008 con Enami casi quebrada, CODELCO adquiere opción de compra por hasta un 49 % de Anglo Sur a un precio de una fórmula. [▶ Ir a Historia Los Bronces](#)
- En octubre de 2011, Codelco y Mitsui acuerdan crédito de US\$ 6.750MM para comprar 49 % de los Bronces. Codelco le vendería un 24.5 % para pagar crédito.
- Valor real de los Bronces es muy superior al de la fórmula, y Codelco podría recibir más de US\$ 3.500 netos.
- Anglo se niega, vende un 24.5 % a Mitsubishi, ofreciendo el resto a Codelco, que recibiría más de US\$ 1.750 MM netos.
- Anglo acusa luego a Codelco de violar contrato \Rightarrow opción es nula.

Aplicación: caso Codelco-Anglo

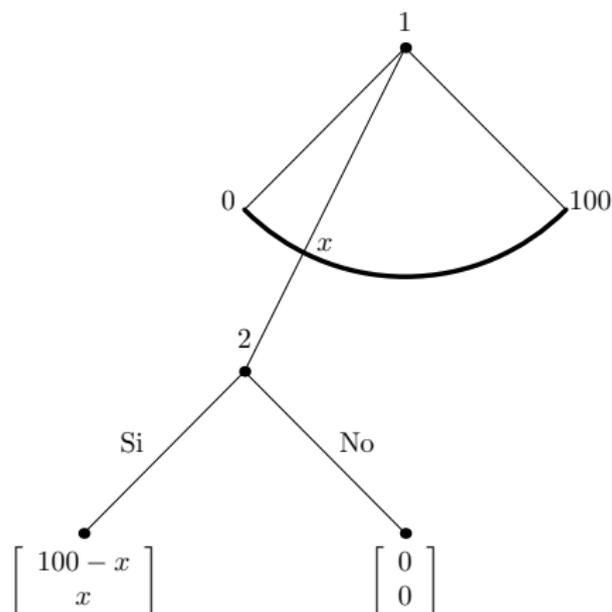
- En 2008 con Enami casi quebrada, CODELCO adquiere opción de compra por hasta un 49 % de Anglo Sur a un precio de una fórmula. [▶ Ir a Historia Los Bronces](#)
- En octubre de 2011, Codelco y Mitsui acuerdan crédito de US\$ 6.750MM para comprar 49 % de los Bronces. Codelco le vendería un 24.5 % para pagar crédito.
- Valor real de los Bronces es muy superior al de la fórmula, y Codelco podría recibir más de US\$ 3.500 netos.
- Anglo se niega, vende un 24.5 % a Mitsubishi, ofreciendo el resto a Codelco, que recibiría más de US\$ 1.750 MM netos.
- Anglo acusa luego a Codelco de violar contrato \Rightarrow opción es nula.
- Diferencia entre las interpretaciones es de US\$ 1.750 MM. ¿Que va a pasar?

Juego del ultimátum



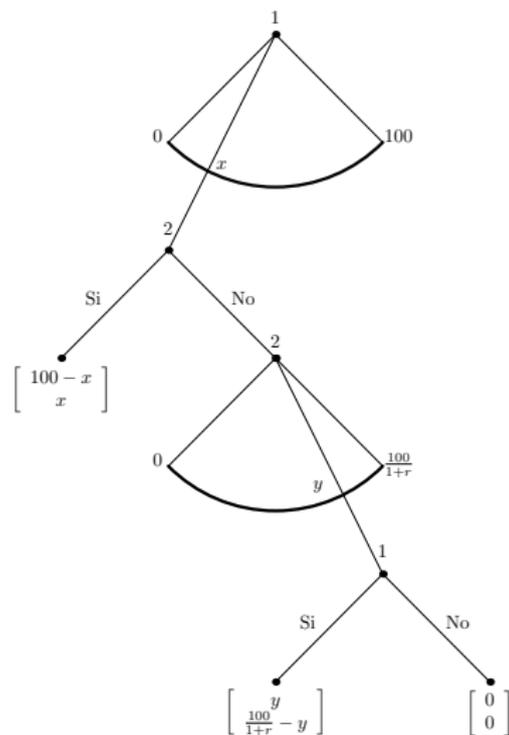
- Estrategias de 1:
 $x \in [0, 1]$
- Estrategias de 2: elegir \bar{x} tal que elige Si, si $x \geq \bar{x}$ (ó $f(x) : [0, 1] \mapsto \{Si, No\}$).

Juego del ultimátum



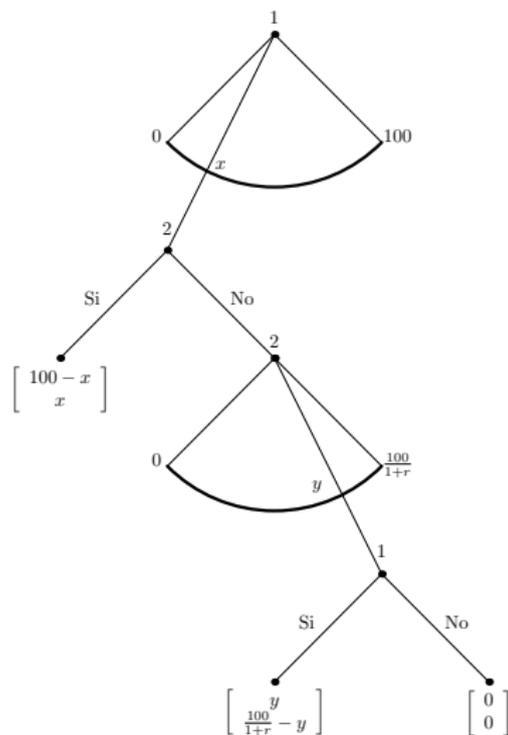
- Estrategias de 1:
 $x \in [0, 1]$
- Estrategias de 2: elegir \bar{x} tal que elige Si, si $x \geq \bar{x}$ (ó $f(x) : [0, 1] \mapsto \{Si, No\}$).
- Eq de Nash:
 $\forall x^* \in [0, 100]$,
 $\{x; Si, si oferta \geq x^*\}$ es un equilibrio (o sea $\bar{x} = x^*$).
- ¿Cuál es el único EPS?
 $\{0; Si, si oferta \geq 0\}$

Juego del ultimátum con dos etapas



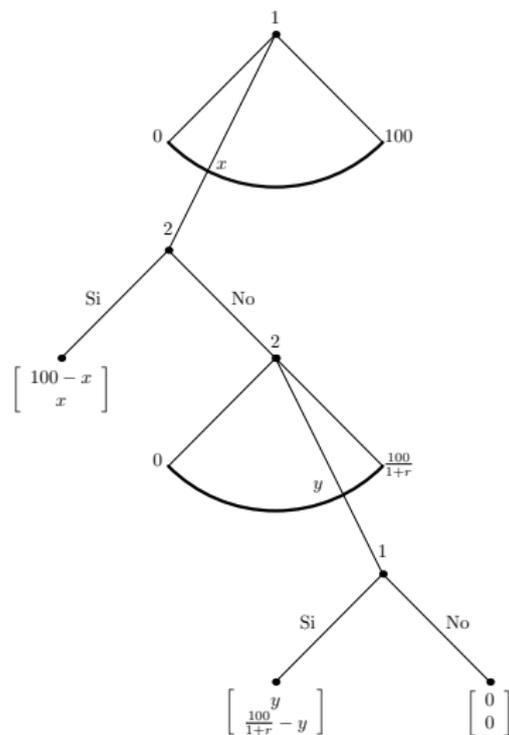
- $1/(1+r)$: costo de esperar.

Juego del ultimátum con dos etapas



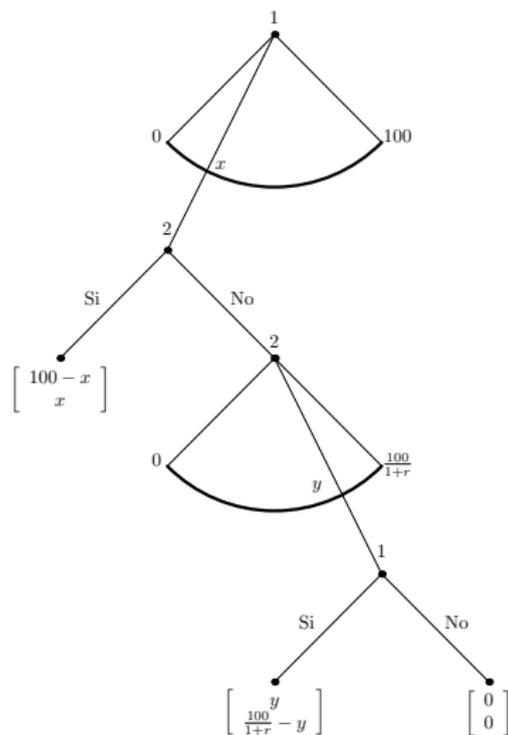
- ¿Cuál es el EPS?

Juego del ultimátum con dos etapas



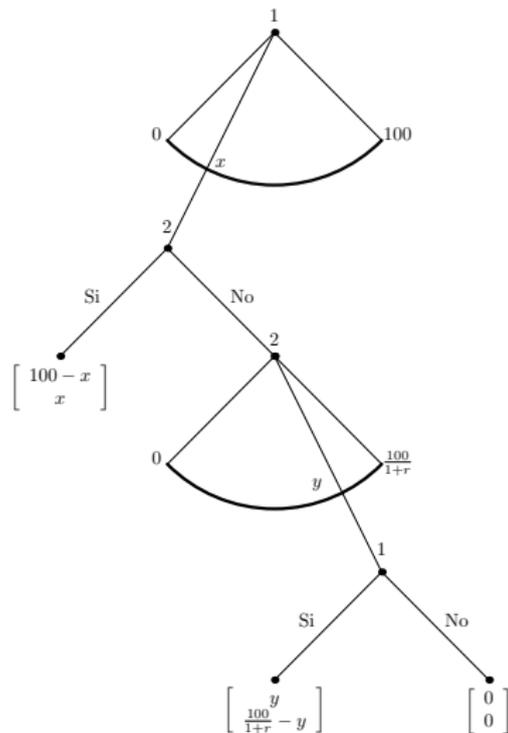
- ¿Cuánto dura el juego?

Juego del ultimátum con dos etapas



- ¿Cómo se generaliza al caso de n períodos?

Juego del ultimátum con dos etapas



- Si $\delta = 1/(1+r)$,

$$x = \frac{1}{1+\delta}, y = \frac{\delta}{1+\delta}$$

Problemas del modelo y sus aplicaciones

- 1 Solución instantánea.
- 2 No hay quiebre de negociación.

Problemas del modelo y sus aplicaciones

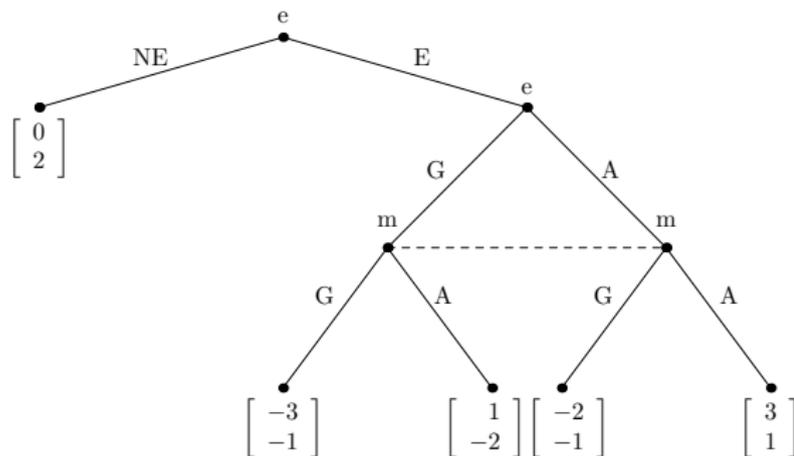
- 1 Solución instantánea.
- 2 No hay quiebre de negociación.
- 1 ¿Tal vez hay incertidumbre que requiere tiempo para despejarse? ¿Se puede incorporar como un factor.
- 2 ¿Tal vez la incertidumbre, antes de despejarse, implica posiciones incompatibles?

Son motivos para no llegar a acuerdos rápidamente.

Aplicación al caso Codelco–Anglo

- Hay presiones sobre las partes:
 - Del público en Codelco
 - De los accionistas en Anglo
- Aún demasiada incertidumbre judicial.
- Dado que es caro **tardar** y que es costosa la **incertidumbre**.
- Lo más probable es un acuerdo en algunos meses.
- Es probable que Codelco se queda con lo que tiene (US\$ 1750+ MM) más una fracción del resto: US\$ 1750+ MM.

Información imperfecta y EPS: Entrada de Competencia II



- Muestre que hay tres equilibrios, pero solo uno es EPS.

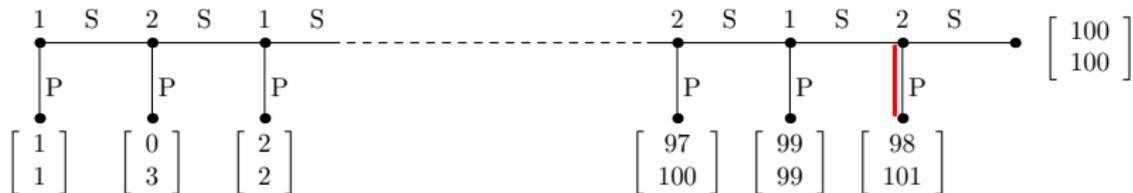
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



El único EPS tiene resultado $(1, 1)$.

La inducción hacia atrás tiene resultados contraintuitivos.

Información imperfecta

Definición

Un juego es de *información imperfecta* cuando algunos CI tienen más de un nodo.

- Problema: EPS pierde fuerza en ese caso.

Definición

Un juego es de *información incompleta* si los jugadores no conocen todo el juego (los pagos a los demás, por ejemplo).

- Problema: Juego no está bien definido \Rightarrow la **transformación de Harsany**.

Transformación de Harsany y Eq. de Nash Bayes

- Introduce un nuevo jugador: **Naturaleza**.
- Cada jugador tiene tipos θ_i correspondiendo a los distintos valores de sus pagos.
- Naturaleza elige un tipo de cada jugador.
- Las estrategias de i dependen de su tipo: $s_i(\theta_i)$.
- En el ENB cada jugador maximiza la utilidad esperada dado las estrategias (que dependen de los tipos) de los demás.

Juegos de Información Incompleta

Definición (Juegos de Información Incompleta o juegos Bayesianos)

Por lo menos un jugador tiene incertidumbre sobre los pagos de los otros jugadores. Ejemplos: Subastas, licitaciones, competencia en precios con incertidumbre en costos, etc.

- 1 *Jugadores racionales $i \in 1, \dots, n$.*
- 2 *Tipos (para cada jugador). $\theta_i \in \Theta_i$.*
- 3 *Distribución de tipos es conocimiento común. $p(\theta_1, \dots, \theta_n)$.*
- 4 *Acciones $a_i \in A_i$ de cada jugador.*
- 5 *Pagos $u_i(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n; \theta_i)$ a cada jugador.*

Definiciones

Definición (Estrategias)

Una estrategia para el jugador i define una acción para cada tipo θ_i del jugador i : $s_i(\theta_i) : \Theta_i \mapsto A_i$.

Definición (Creencias)

Cada jugador i utiliza las reglas de Bayes para formar creencias sobre los tipos de los otros jugadores dado el tipo del jugador i :

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{p(\theta_i, \theta_{-i})}{\sum_{\theta_{-i}} p(\theta_i, \theta_{-i})}$$

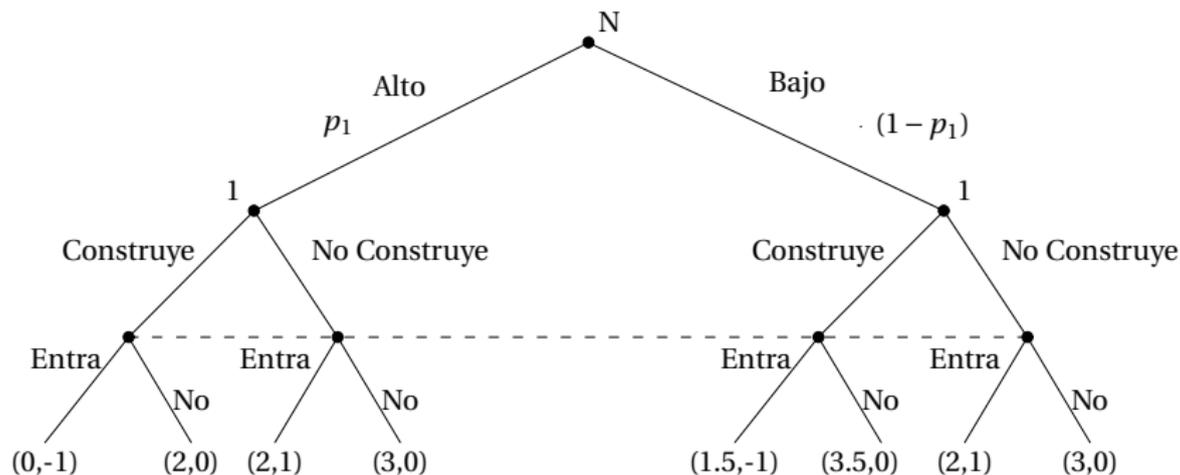
Definiciones

Definición (Equilibrio de Bayes-Nash)

En un juego Bayesiano, las estrategias $(s_1^(\cdot), \dots, s_n^*(\cdot))$ forman un equilibrio de Bayes-Nash si para cada jugador i y para cada tipo de i θ_i , la estrategia de i $s_i^*(\theta_i)$ resuelve:*

$$\text{Max}_{a_i} \sum_{\theta_{-i}} u_i(s_1^*(\theta_1), \dots, a_i, \dots, s_n^*(\theta_n)) p_i(\theta_{-i} | \theta_i)$$

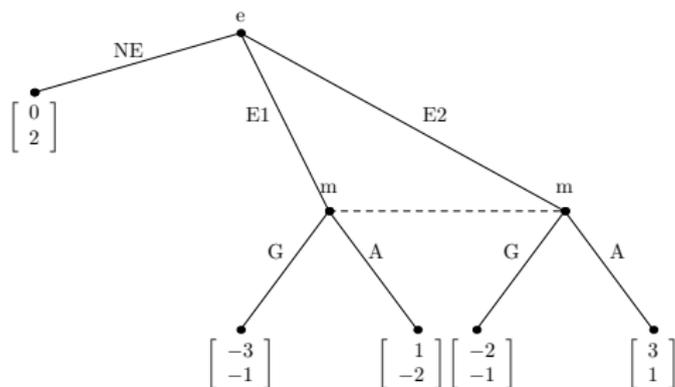
Ejemplo: Entrada de competencia



$$BN = \{s_1(c^H), s_1(c^L), s_2\}$$

$$= \{NC, C, NE\} \text{ para } p_1 \in [0, 1/2] \cup \{NC, NC, E\} \text{ para } p_1 \in [0, 1]$$

Información imperfecta y EPS: Entrada de Competencia II



- Una modificación trivial de entrada de competencia II.
- Al tener solo un subárbol, EPS no discrimina entre equilibrios de Nash. ¿Cuáles son?

Equilibrio Débilmente Perfecto de Bayes-Nash (EPBN)

Definición

Un **sistema de creencias** (μ) son las probabilidades que asigna un jugador a estar en un nodo particular de uno de sus conjuntos de información. Un jugador i al que le toca jugar en uno de sus conjuntos de información $H_i \in \mathcal{H}_i$ no singleton, cree que tiene una cierta probabilidad a que su ubicación real es uno nodo particular de H_i .

Equilibrio Debilmente Perfecto de Bayes-Nash (EPBN)

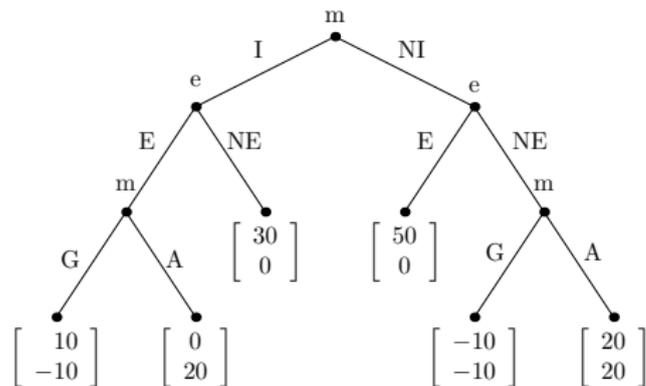
Definición

El Equilibrio Debilmente Perfecto de Bayes-Nash (EPBN) consta de una **combinación de estrategias** σ y un **sistema de creencias** μ tal que:

- 1 La combinación de estrategias σ es **secuencialmente racional**, es decir en cada conjunto de información H_i , cuando le toca jugar al jugador i maximiza su utilidad esperada, dado μ y las estrategias que siguen los demás jugadores
- 2 Las creencias μ son **consistentes**, es decir dada una combinación de estrategias σ , la probabilidad condicional de alcanzar el nodo x en el conjunto de información H_i es (por la regla de Bayes):

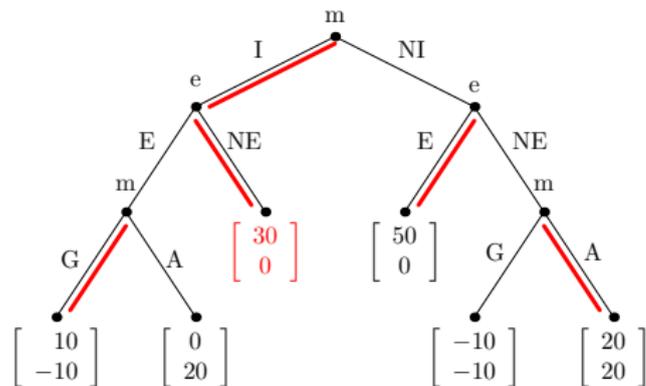
$$\Pr(x|H_i, \sigma) = \frac{\Pr(x|\sigma)}{\Pr_{x' \in H_i}(x'|\sigma)}$$

Entrada de competencia III: Inversión como defensa

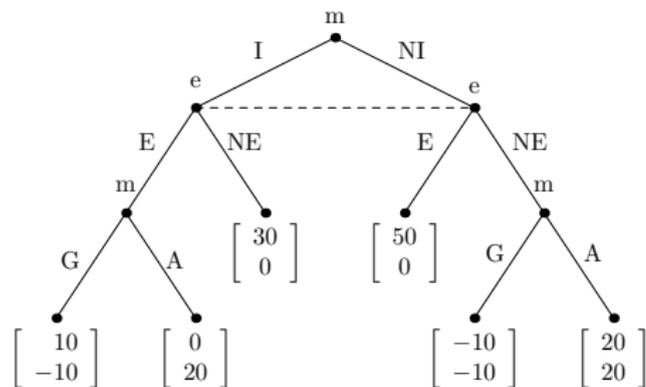


El monopolista puede invertir para prevenir la entrada. En el EPS no hay entrada e inversión ineficiente.

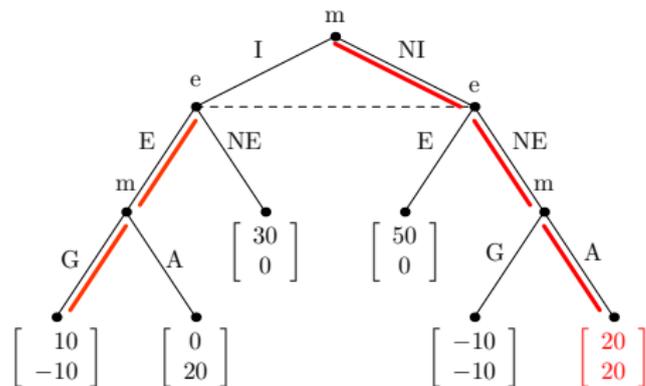
Entrada de competencia III: Inversión como defensa



Entrada de competencia III: Inversión como defensa

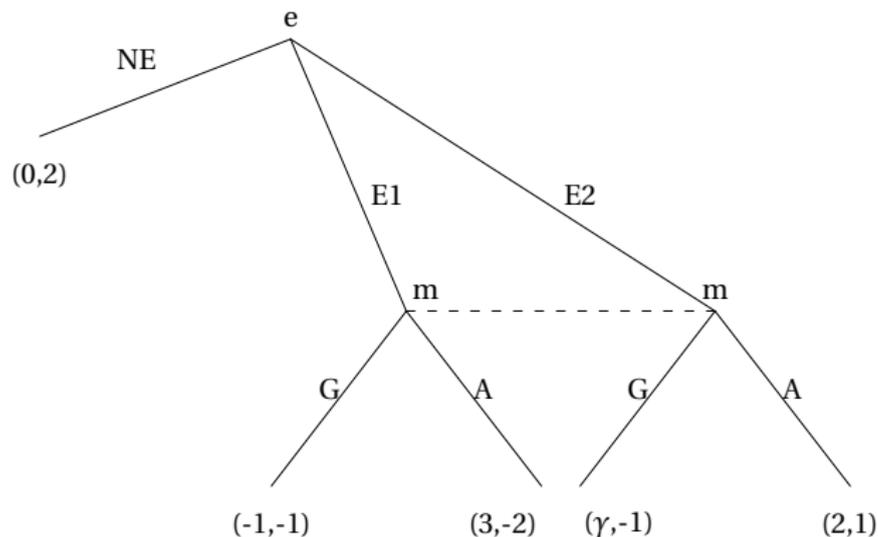


Entrada de competencia III: Inversión como defensa



El juego con inversión no observable: Ahora $s_1 = (I, G, A)$ no es mejor respuesta a $s_2 = E$. El equilibrio sin inversión y con entrada ahora es EPS. **A veces es mejor saber menos.**

Ejemplo: Entrada de competencia



$$EPNB = \{(\sigma_{NE}, \sigma_{E1}, \sigma_{E2}) = (0, 2/3, 1/3) \\ \sigma_G = 1/(\gamma + 2), \quad \mu_1 = \frac{2}{3}\}$$

Historia Los Bronces

[← Volver](#)
