Curso de Economía Industrial

Ronald Fischer
CEA-DII
Universidad de Chile

Marzo 2011

Contenidos

Forma normal de un juego

Definición (Un juego en forma normal es:)

1. *Jugadores racionales* $i \in 1, \ldots, n$.
2. *Estrategias* $s_i \in S_i$ *de cada jugador.* $s \equiv (s_i)_{i=1}^n \in S = \prod_{i=1}^n S_i$ *es una combinación de estrategias.*
3. *Pagos* $u_i(s)$ *a cada jugador.*

		Jugador 2	
		L	M
Jugador 1	T	2,2	2,0
	B	3,0	0,9

Conceptos de solución

Definición

Una estrategia s_i^* de un jugador i es mejor respuesta a s_{-i} si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i$$

Definición

Una estrategia s_i^* del jugador i es dominante si es mejor respuesta ante todas las estrategias de los demás jugadores:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_i,\ \forall s_{-i}.$$

con desigualdad estricta para algún s_i.

Un juego con estrategia dominante

		Jugador 2	
		L	M
Jugador 1	T	$-10, 10$	$10, 10$
	B	$10, -10$	$-10, 10$

Un juego con estrategia dominante

Jugador 2

Jugador 1		L	M
	$\boldsymbol{T}$	$\mathbf{-10, 10}$	$\mathbf{10, 10}$
	B	$10, -10$	$-10, 10$

Más ...

Ejemplo (La apuesta de Pascal)

El argumento de B. Pascal para la existencia de Dios:

Más ...

Ejemplo (La apuesta de Pascal)

El argumento de B. Pascal para la existencia de Dios:
No creer en Dios implica que si existe, el no creyente va al infierno. Si no existe, no pasa nada. Si cree en Dios y Dios existe, el creyente va al cielo. Si no existe, no pasa nada. $\Rightarrow$ *Creer en Dios es dominante.*

Estrategias dominadas

Definición

Una estrategia s_i *es* débilmente dominada *por* s_i' *si,* $\forall s_{-i}$*, se tiene que* $u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$*, con desigualdad estricta para al menos un* s_{-i}*.*

Una estrategia es estrictamente dominada si todas las desigualdades anteriores son estrictas.

Equilibrio en estrategias dominantes

Definición

Una combinación de estrategias $s^* = (s_i^*)_{i=1}^n$ es un equilibrio en estrategias dominantes si cada s_i^* es dominante.

Cuadro: Dilema del prisionero

Reo 1 \ Reo 2	C	NC
C	-9, -9	0, -10
NC	-10, 0	-1,-1

Equilibrio en estrategias dominantes

Definición

Una combinación de estrategias $s^* = (s_i^*)_{i=1}^n$ es un equilibrio en estrategias dominantes si cada s_i^* es dominante.

El problema es que no siempre existe.

Cuadro: Dilema del prisionero

Reo 1 \ Reo 2	C	NC
C	-9, -9	0, -10
NC	-10, 0	-1,-1

Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas

- Se eliminan todas las estrategias estrictamente dominadas de 1.
- En el nuevo juego, se eliminan las estrategias dominadas de 2, y así hasta que no se puede continuar.
- No siempre único, puede depender del orden de eliminación.

Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas

- Se eliminan todas las estrategias estrictamente dominadas de 1.
- En el nuevo juego, se eliminan las estrategias dominadas de 2, y así hasta que no se puede continuar.
- No siempre único, puede depender del orden de eliminación.

Cuadro: Batalla del Mar de Bismark

Kenney \ Imamura	Norte	Sur
Norte	2,-3/2	2,-2
Sur	1,-1	3,-3

Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas

- Se eliminan todas las estrategias estrictamente dominadas de 1.
- En el nuevo juego, se eliminan las estrategias dominadas de 2, y así hasta que no se puede continuar.
- No siempre único, puede depender del orden de eliminación.

Cuadro: Batalla del Mar de Bismark

		Imamura	
		Norte	Sur
Kenney	Norte	2,-3/2	~~2,-2~~
	Sur	1,-1	~~3,-3~~

Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas

- Se eliminan todas las estrategias estrictamente dominadas de 1.
- En el nuevo juego, se eliminan las estrategias dominadas de 2, y así hasta que no se puede continuar.
- No siempre único, puede depender del orden de eliminación.

Cuadro: Batalla del Mar de Bismark

		Imamura	
		Norte	Sur
Kenney	Norte	2,-3/2	~~2,-2~~
	Sur	~~1,-1~~	~~3,-3~~

Equilibrio de Nash

Definición

Un equilibrio de Nash es s^* tal que $\forall i, \forall s_i \in S_i$

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Problemas: A veces no existe, a veces hay múltiples equilibrios.

Equilibrio de Nash

Definición

Un equilibrio de Nash es s^* tal que $\forall i, \forall s_i \in S_i$

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Problemas: A veces no existe, a veces hay múltiples equilibrios.

Cuadro: El juego del gallina

1 \ 2	Sigue	Desvía
Sigue	-100, -100	10, 0
Desvía	0, 10	1,1

Equilibrio de Nash

Definición

Un equilibrio de Nash es s^* tal que $\forall i, \forall s_i \in S_i$

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Problemas: A veces no existe, a veces hay múltiples equilibrios.

Cuadro: El juego del gallina

1 \ 2	Sigue	Desvía
Sigue	-100, -100	10, 0
Desvía	0, 10	1,1

Otro ejemplo

Jugador 2

		L	C	R
Jugador 1	T	$-1,-1$	$1,3$	$3,0$
	B	$1,0$	$0,1$	$0,3$

1. ¿Hay una estrategia dominante?
2. ¿Hay un equilibrio de Nash en estrategias puras?

Otro ejemplo

Jugador 2

Jugador 1		L	C	R	RR
	T	$-1,0$	$1,0$	$2,3$	$2,3$
	B	$0,1$	$3,2$	$0,1$	$3,2$

1. ¿Hay estrategias estrictamente dominadas?
2. Encuentre los equilibrios de Nash.
3. Encuentre le conjunto de estrategias que sobreviven a la eliminación iterada de estrategias dominadas.

Estrategias mixtas y equilibrios de Nash

Definición

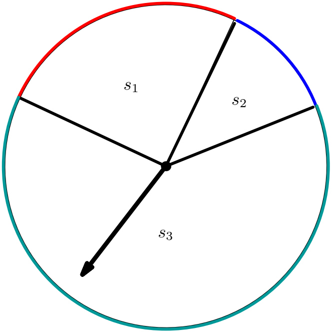
Una ***estrategia mixta*** $\sigma_i = (\sigma_i(s_i^1), \ldots, \sigma_i(s_1^{m_i}))$ *es una distribución de probabilidad sobre las* m_i *estrategias de* i.

es una ***combinación de estrategias mixtas***.

Estrategias mixtas y equilibrios de Nash

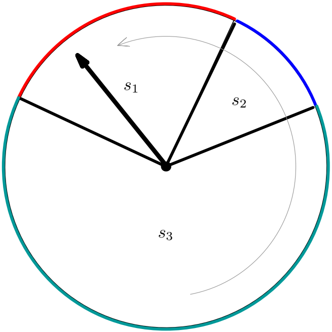
Definición

Una *estrategia mixta* $\sigma_i = (\sigma_i(s_i^1), \dots, \sigma_i(s_1^{m_i}))$ *es una distribución de probabilidad sobre las* m_i *estrategias de* i.



es una *combinación de estrategias mixtas*.

Estrategias mixtas y equilibrios de Nash



Definición

Una *estrategia mixta* $\sigma_i = (\sigma_i(s_i^1), \ldots, \sigma_i(s_1^{m_i}))$ *es una distribución de probabilidad sobre las* m_i *estrategias de* i.

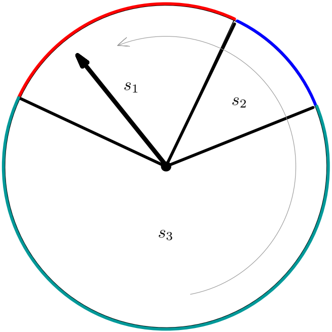
es una *combinación de estrategias mixtas*.

Estrategias mixtas y equilibrios de Nash

Definición

Una *estrategia mixta* $\sigma_i = (\sigma_i(s_i^1),\ldots,\sigma_i(s_1^{m_i}))$ *es una distribución de probabilidad sobre las* m_i *estrategias de* i.

Notación: $\sigma \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.
es una *combinación de estrategias mixtas*.



Más definiciones

Definición

El pago a i se la combinación de estrategias σ es:
$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \left(\Pi_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s)$

-

Definición

Una estrategia σ_i del jugador i es mejor respuesta a σ_{-i} si
$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i', \sigma_{-i}), \ \forall \sigma_i'$.

-

Repaso Clase 3

1. Estrategias mixtas, combinación de.
2. Pago esperado a una combinación de estrategias mixtas

Repaso Clase 3

1. Estrategias mixtas, combinación de.
2. Pago esperado a una combinación de estrategias mixtas

Repaso Clase 3

1. Estrategias mixtas, combinación de.
2. Pago esperado a una combinación de estrategias mixtas

Ejemplo

- *Chequeos de velocidad y alcolhemias.*
- *Impuestos internos y revisiones*

Mejor respuesta y dominancia en estrategias mixtas

Definition

Una estrategia σ_i del jugador i es *mejor respuesta* a σ_{-i} si $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$, $\forall \sigma'_i$.

Definition

Una estrategia σ_i del jugador i es *estrictamente dominada* si existe σ'_i tal que $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < U_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$, $\forall \sigma_{-i}$

Mejor respuesta y dominancia en estrategias mixtas

Definition

Una estrategia σ_i del jugador i es *mejor respuesta* a σ_{-i} si $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$, $\forall \sigma'_i$.

Definition

Una estrategia σ_i del jugador i es *estrictamente dominada* si existe σ'_i tal que $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < U_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$, $\forall \sigma_{-i}$

Ejemplo

- *Localización de chequeos de velocidad y alcolhemias.*
- *A quiénes revisa impuestos revisiones*

Propiedades

1. Una estrategia σ está dominada (estrictamente) por la estrategia σ', si su valor esperado frente a las estrategias *puras* de los rivales ($s_{-i} \in S_{-i}$) es menor. (¡Demostrar!)
2. $\Rightarrow$ una estrategia pura s_i está dominada estrictamente por una estrategia mixta σ_i, si lo está para $s_{-i} \in S_{-i}$.

Ejemplo de una pura estrategia dominada por una estrategia mixta

Jugador 2

		L	R
Jugador 1	T	$10,1$	$0,4$
	M	$4,2$	$4,3$
	D	$0,5$	$10,2$

- La estrategia T es buena contra L y mala contra R, y D es lo contrario.
- M es intermedia contra R y D.
- M está dominada por $\sigma_1 = (1/2, 0, 1/2)$.
- Pese a que no está dominada por ninguna de las estrategias puras.

Equilibrio de Nash en Estrategias mixtas

Definición

Un equilibrio de Nash es una combinación de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *tal que*

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \; \forall i, \; \forall \sigma_i$$

Un resultado importante

Lemma (Caracterización de equilibrios de Nash)

σ^* es un equilibrio de Nash si y solo si para todo jugador i, si la probabilidad asignada por σ_i^* a una estrategia s_i^j es positiva, entonces s_i^j es mejor respuesta a σ_{-i}^*.

Un resultado importante

Lemma (Caracterización de equilibrios de Nash)

σ^* es un equilibrio de Nash si y solo si para todo jugador i, si la probabilidad asignada por σ_i^* a una estrategia s_i^j es positiva, entonces s_i^j es mejor respuesta a σ_{-i}^*.

Ejemplo

En el juego del gallina hay tres equilibrios de Nash: (S,D), (D,S) y una estrategia mixta: $\sigma_1 = \sigma_2 = (9/109, 100/109)$. La probabilidad de choque es $< 1\,\%$.

Ejemplo

El caso de los gasoductos.

Definición: juego en forma extensiva

1. Jugadores $i \in 1 \ldots n$ racionales.
2. Árbol del juego: nodos asignados a jugadores y ramas (acciones).
3. Conjuntos de información: información que posee cada jugador en su nodo.
4. Estrategias $s_i \in S_i$ de cada jugador.
5. Pagos u_i a los jugadores.

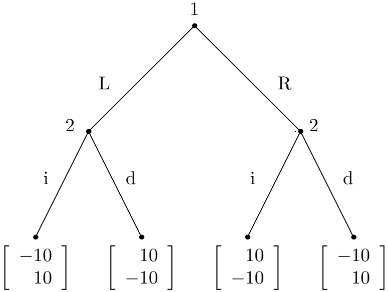


Figura: El juego de la moneda con información completa.

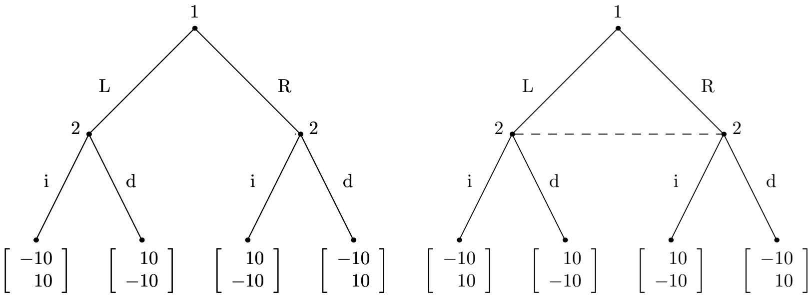


Figura: El juego de la moneda con y sin información.

Otro juego

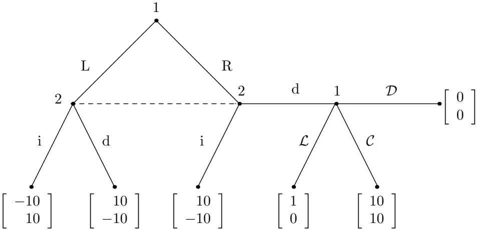


Figura: Un juego con dos etapas.

Otro juego

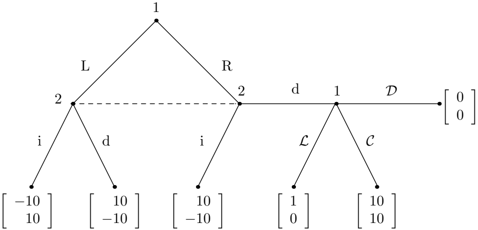


Figura: Un juego con dos etapas.

$$S_2 = \{i, d\}$$

$$S_1 = \{(L, \mathscr{L}), (L, \mathscr{C}), (L, \mathscr{D}), (D, \mathscr{L}), (D, \mathscr{C}), (D, \mathscr{D})\}$$

Además . . .

- Se puede definir mejor respuesta, y demás conceptos de estrategias puras.
- Se puede definir la idea de estrategia mixta, estrategia dominada y de equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Repaso

- Equilibrio en estrategias mixtas. Caracterización.
- Problemas de equilibrios de Nash cuando son múltiples: entrada de competencia.
- Juegos en forma extensiva (árbol del juego, conjuntos de información).
- Las definiciones de Mejor respuesta, eq. de Nash, estrategia mixta son las mismas.

Hoy

1. Una nueva vuelta los problemas de los equilibrios dde Nash.
2. Equilibrio perfecto en el subjuego y sus propiedades.
3. Ejemplos: el juego del ultimatum, entrada de competencia II y III.

Volviendo a los problemas del equilibrio de Nash . . .

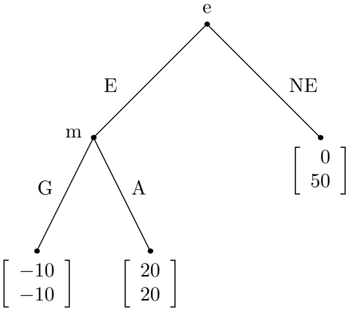


Figura: Juego de entrada de competencia

Volviendo a los problemas del equilibrio de Nash ...

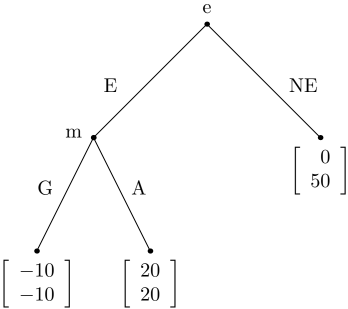


Figura: Juego de entrada de competencia

- Dos equilibrios de Nash: (NE, G) y (E, A).
- ¿Cuál es más razonable?

Perfección en el subjuego

Definición

Un subárbol del juego es el subconjunto de nodos y ramas que se origina en un conjunto de información que es singleton.

Perfección en el subjuego

Definición

Un subárbol del juego es el subconjunto de nodos y ramas que se origina en un conjunto de información que es singleton.

Definición

Un equilibrio de Nash es perfecto en el subjuego (EPS) si en cada subárbol, el equilibrio restringido al subárbol es un equilibrio de Nash.

Perfección en el subjuego

Definición

Un subárbol del juego es el subconjunto de nodos y ramas que se origina en un conjunto de información que es singleton.

Definición

Un equilibrio de Nash es perfecto en el subjuego (EPS) si en cada subárbol, el equilibrio restringido al subárbol es un equilibrio de Nash.

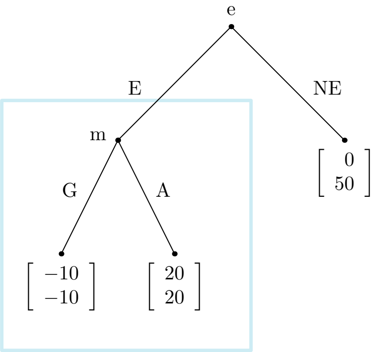
Ejemplo

En el juego de entrada de competencia, (NE, G) no es EPS.

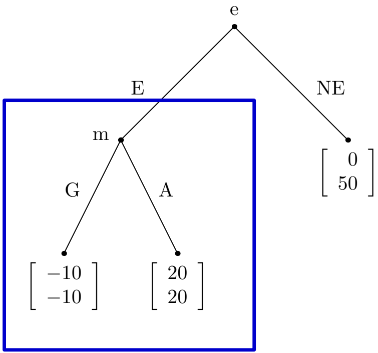
Propiedades de un EPS

1. Siempre existe. ¿Porqué?
2. En juegos de información perfecta, es único.
3. En juegos de información perfecta, se usa el método de inducción hacia atrás.

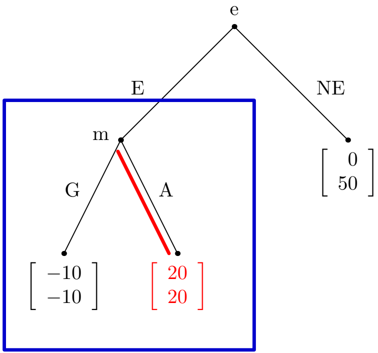
Inducción hacia atrás: Entrada de competencia



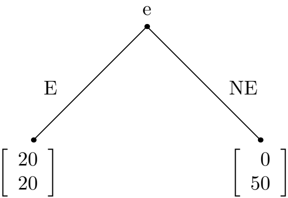
Inducción hacia atrás: Entrada de competencia



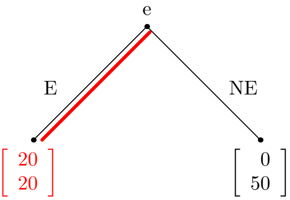
Inducción hacia atrás: Entrada de competencia



Inducción hacia atrás: Entrada de competencia



Inducción hacia atrás: Entrada de competencia

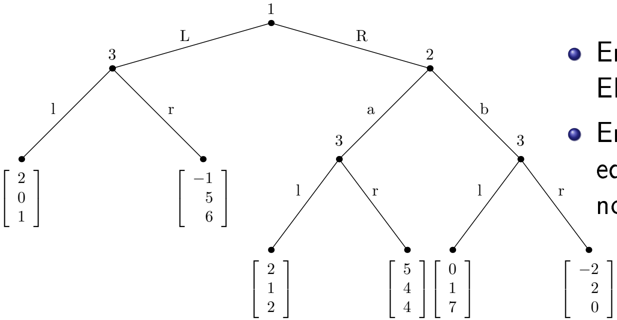


El juego reducido

Inducción hacia atrás: Entrada de competencia

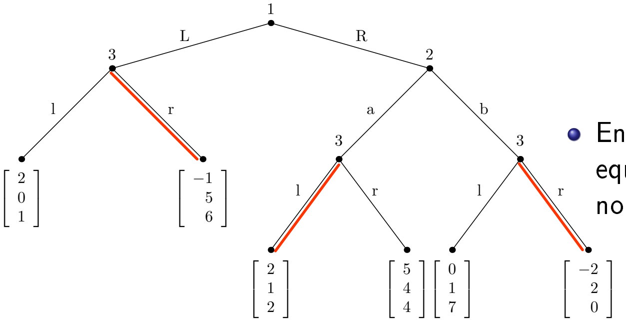
El EPS es (E, A).

Un ejemplo con tres jugadores



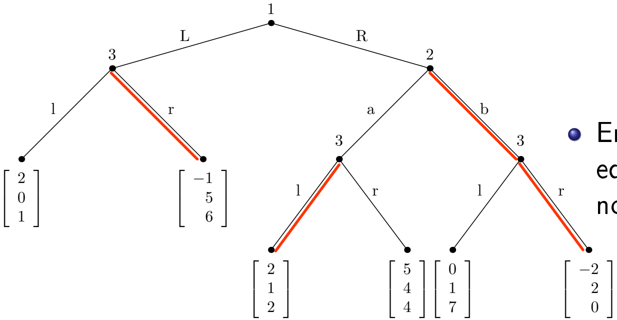
- Encuentre el EPS.
- Encuentre un equilibrio que no es EPS.

Un ejemplo con tres jugadores



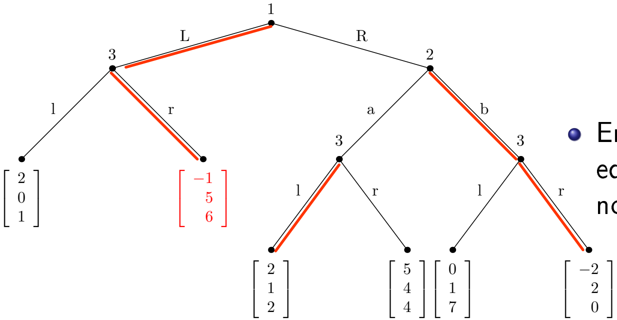
- Encuentre un equilibrio que no es EPS.

Un ejemplo con tres jugadores



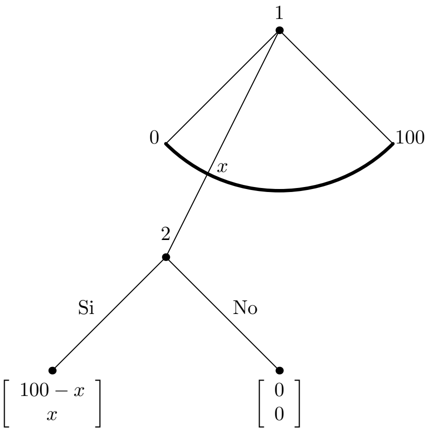
- Encuentre un equilibrio que no es EPS.

Un ejemplo con tres jugadores



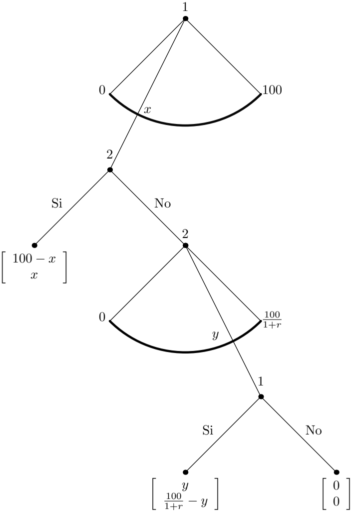
- Encuentre un equilibrio que no es EPS.

Aplicaciones: El juego del ultimátum



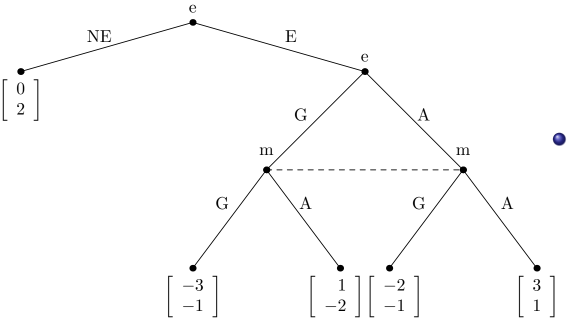
- 1 hace una oferta para dividir \$100.
- 2 puede aceptar o rechazar la oferta.
- Muestre que $\forall x \in (0,100]$, $(x, \text{Si oferta} \geq x)$ es un equilibrio.
- Encuentre el (único) EPS.

El juego del ultimátum con dos etapas



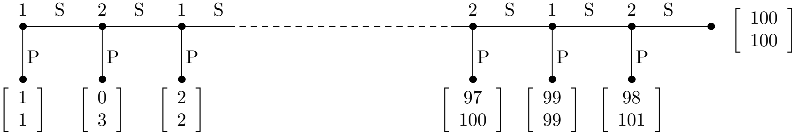
- Si el jugador 2 no acepta la oferta de 1, puede hacer una contraoferta.
- Encuentre equilibrios no EPS y el único EPS.
- Generalice al caso de 3 y más períodos.

Información imperfecta y EPS: Entrada de Competencia II

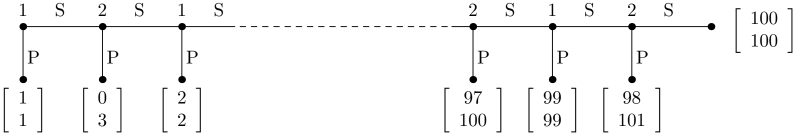


- Muestre que hay tres equilibrios, pero solo uno es EPS.

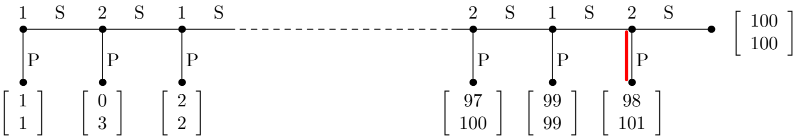
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



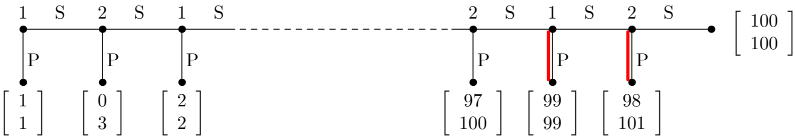
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



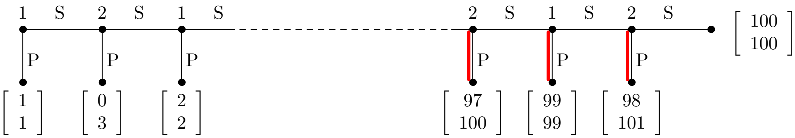
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



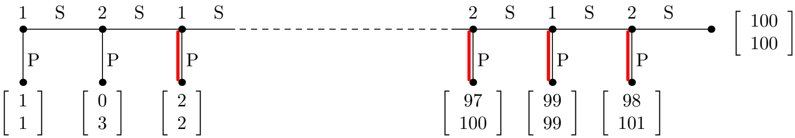
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



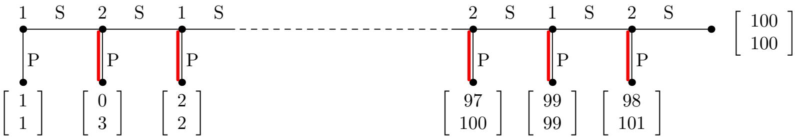
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



Problemas del EPS: el juego del cienpiés



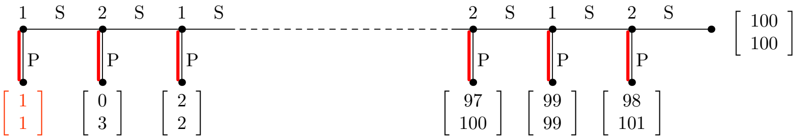
Problemas del EPS: el juego del cienpiés



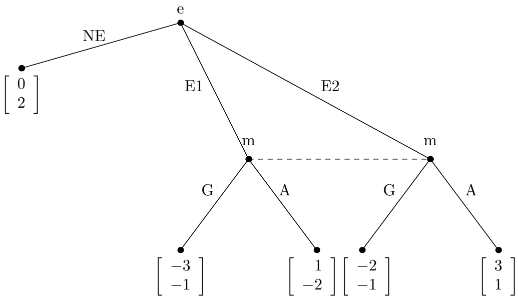
El único EPS tiene resultado (1,1).

La inducción hacia atrás tiene resultados contraintuitivos.

Problemas del EPS: el juego del cienpiés

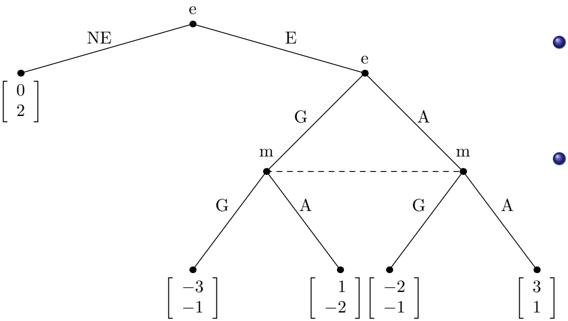


Información imperfecta y EPS: Entrada de Competencia II'



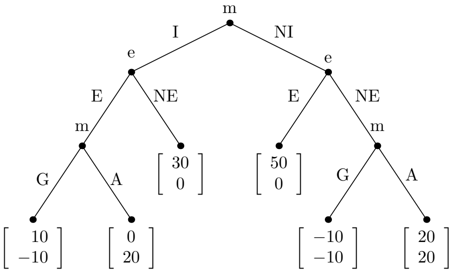
- Una modificación trivial de entrada de competencia II.
- Al tener solo un subárbol, EPS no discrimina entre equilibrios de Nash. ¿Cuáles son?

Información imperfecta y EPS: Entrada de Competencia II'

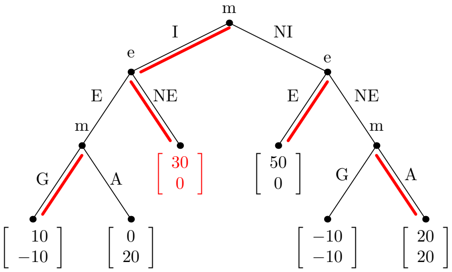


- Una modificación trivial de entrada de competencia II.
- Al tener solo un subárbol, EPS no discrimina entre equilibrios de Nash. ¿Cuáles son?

Entrada de competencia III: Inversión como defensa

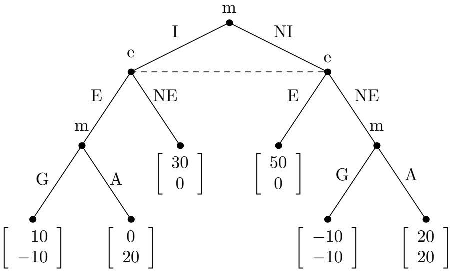


Entrada de competencia III: Inversión como defensa



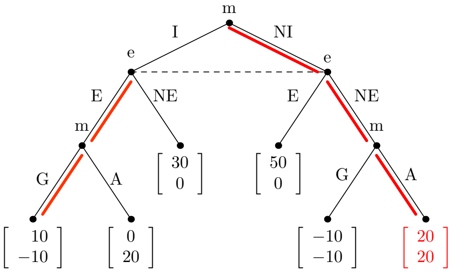
El monopolista puede invertir para prevenir la entrada. En el EPS no hay entrada e inversión ineficiente.

Entrada de competencia III: Inversión como defensa



El juego con inversión no observable: Ahora $s_1 = (I, G, A)$ no es mejor respuesta a $s_2 = E$.

Entrada de competencia III: Inversión como defensa



El equilibrio sin inversión y con entrada ahora es EPS. A veces es mejor saber menos.

Información imperfecta

Definición

Un juego es de información imperfecta cuando algunos CI tienen más de un nodo.

-
- Problema: EPS pierde fuerza en ese caso.

Definición

Un juego es de información incompleta si los jugadores no conocen todo el juego (los pagos a los demás, por ejemplo).

-
- Problema: Juego no está bien definido $\Rightarrow$ la transformación de Harsany.

Transformación de Harsany y Eq. de Nash Bayes

- Introduce un nuevo jugador: Naturaleza.
- Cada jugador tiene tipos θ_i correspondiendo a los distintos valores de sus pagos.
- Naturaleza elige un tipo de cada jugador.
- Las estrategias de i dependen de su tipo: $s_i(\theta_i)$.
- En el ENB cada jugador maximiza la utilidad esperada dado las estrategias (que dependen de los tipos) de los demás.

Un ejemplo: el juego de la moneda modificado