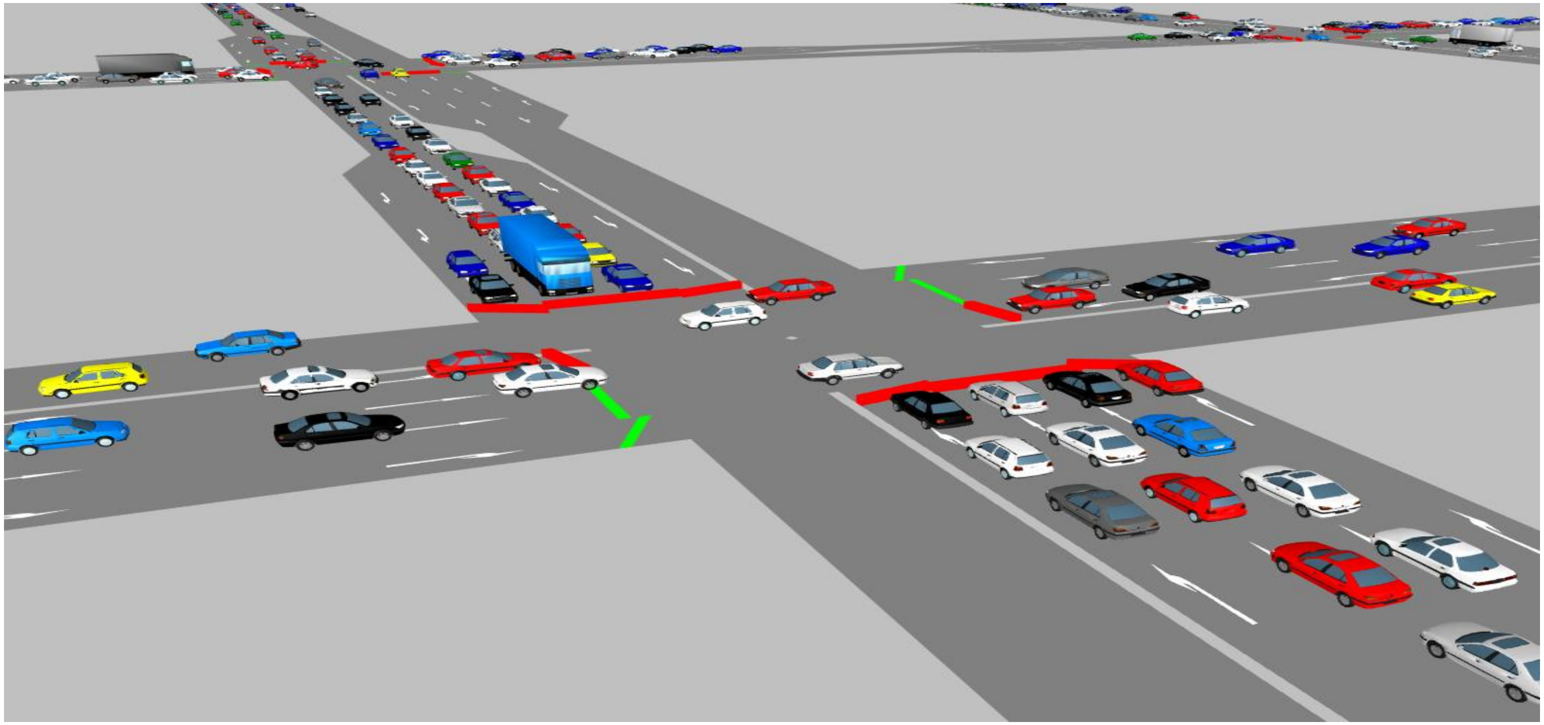


Simulación

¿Qué es una simulación?

- Representación de un *sistema en un computador.*
- Intenta emular el funcionamiento de un *sistema.*
- Usado para evaluar *numéricamente el* comportamiento de sistemas en diversas condiciones.

  - Sistema: conjunto de entidades (por ejemplo máquinas o personas), que interactúan para lograr algún fin lógico.
  - Estado: conjunto de variables que describen un sistema en un momento.

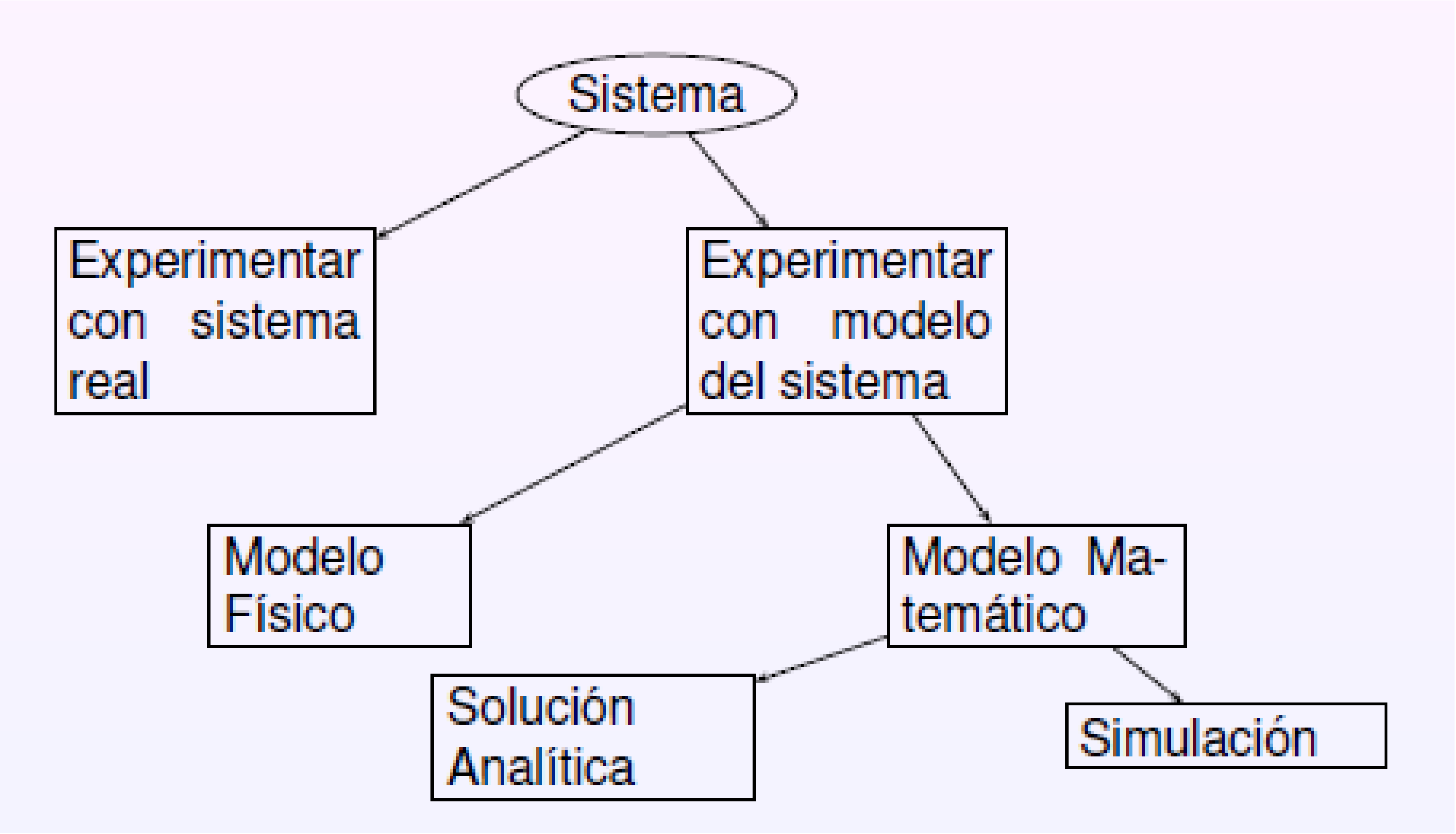
¿Qué es una simulación?

Por ejemplo: Atención de clientes en un Banco

- Sistema: *el conjunto de clientes, cajeros,*colas, y procedimientos predenidos (FIFO, etc.) que describen la operación.

- V*ariables de estado: el número* de clientes en cada cola, el número de cajeros, y el estado de cada cajero (ocupado / desocupado).,

Formas de estudiar un sistema



Tipos de sistemas de simulación

- *Discreto: si sus variables de estado* cambian sus valores en un conjunto numerable de instantes de tiempo (Ej.: M/M/s).
- Continuo: *si sus variables de estado* cambian continuamente en el tiempo (Ej.: El sistema solar).
- Est*ático: si el tiempo en el no juega* ningún rol (Ej.: Simulaciones tipo montecarlo, estimar π).
- D*inámico: si este evoluciona a medida* que el tiempo pasa.
- D*eterminista: si su evolución temporal* esta definida completamente por las condiciones iniciales (Ej.: Sistema de ecuaciones diferenciales).
- Est*ocástico si tiene componentes* descritos en términos probabilísticos, o donde existe incertidumbre en la entrada o en el proceso mismo del sistema (M/M/s).

Simulación de eventos discretos

Nos interesan simuladores de eventos discretos, dinámicos y estocásticos

- Se asume modelo dinámico que cambia variables de estado una cantidad numerable de veces.
- Un evento es un acontecimiento instantáneo que puede cambiar el estado del sistema. (e.g. M/M/s)
  - Variables de estado: largo de cola (tiempo de llegada), y estado del servidor.
  - Tipos de *eventos: llegada de clientes, salida de clientes*.
- En general, podríamos considerar eventos que no cambian las variables de estado de un sistema:
  - Un evento que marca el fin de la simulación.
  - Cambio en las reglas de operación del sistema.

Mecanismos de avance de tiempo

- Necesitamos conocer el tiempo *simulado*.
- *Reloj de Simulación:* Tiempo interno del sistema.
  - Incremento Fijo: los eventos ocurren en el conjunto

$$T_{\text{sim}} \in \{t_0, t_0 + \Delta, t_0 + 2\Delta, \ldots\}$$

  - Incremento por evento: los eventos pueden ocurrir en cualquier momento (Tsim real, cantidad numerable)

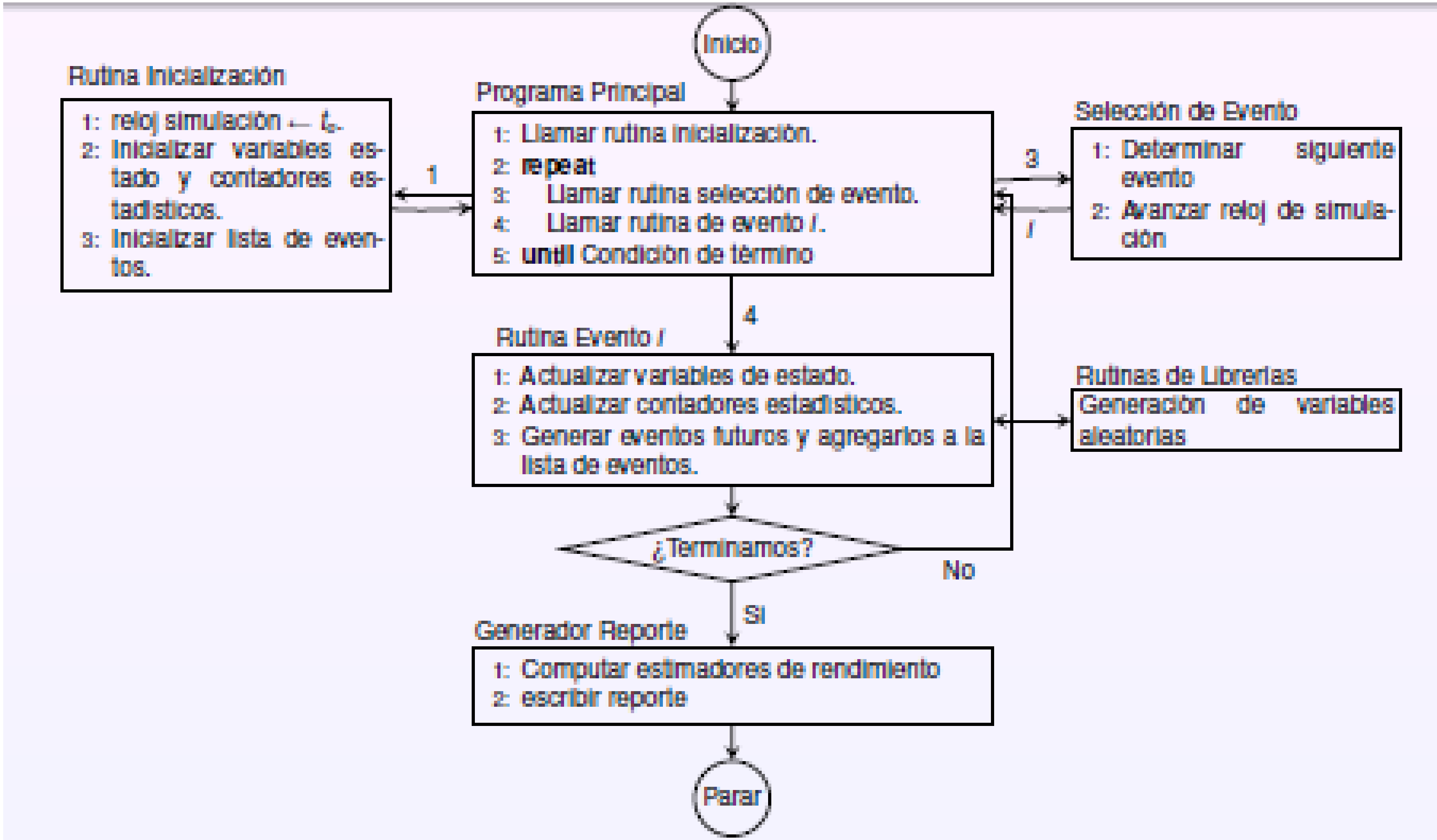
Componentes y Organizacion

- Variables de Estado: Conjunto de variables de que describen el sistema
- Reloj de simulación: Variable que guarda el tiempo en el sistema.
- Lista de eventos: Lista (parcial) de eventos por realizarse
- Contadores Estadísticos: Variables que guardan los indicadores relevantes del sistema.
- Inicialización: Subrutina que inicializa modelo en t_o.
- Selección de evento: Subrutina que determina siguiente evento a realizarse.

Componentes y Organizacion

- **Rutinas de evento**: Subrutina que actualiza el sistema cuando un evento ocurre.
- **Rutinas Auxiliares**: Generación de variables aleatorias, etc.
- **Generador de Reporte**: Subrutina que al concluir simulación calcula estimadores de medidas de desempeño (basándose en estadísticos).
- **Programa Principal**:
  1. Lee parámetros de entrada, inicializa el sistema,
  2. lLama a la rutina de selección de eventos hasta finalizar simulación
  3. Llama a rutina de reporte.

Simulador de Eventos Discreto



Ejemplo: Simulando politicas de inventario

- Simulemos una política de inventario *(S; s) de* revisión mensual, con costos por mantener items en bodega *h* y back-orders *b*.

- Demandas espaciadas *iid ~ exp(0,1), cantidades* {1, 2, 3, 4} con probabilidades {1/6, 1/3,1/3, 1/6}.

- Cuando una orden se coloca, el tiempo de llegada es distribuido como U[1/2,1], y el costo variable por pedido es *v* por unidad.

Generando Variables Aleatorias

- Se asume que existe un generador de numeros pseudo-aleatoreos $f() \sim U[0,1]$.
- Dada una distribuición acumulada $F(x) = P(X \leq x)$, generaremos un valor aleatoreo usando $x = F^{-1}(f())$
- ¿Cuándo funciona?
  - Si *F es estrictamente creciente.*
  - Podemos hacerlo si *F es discreta, o si* tiene *saltos*

- *Ejemplo:* $X \sim exp(\beta)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad F^{-1}(u) = -\beta \log(1-u)$$

Generando Variables Aleatorias

- Aplicable a composición convexa de variables aleatoreas.

$$F(x) = \sum_{i \in N} p_i F_i(x), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i \in N} p_i = 1$$

- Generar número *j tal que P(j)* = p_j .
- Retornar X *con distribuición* F_j .

Generando Variables aleatorias multidimensionales

- Tenemos X *con densidad* $f\,(x)$ *a soporte acotado* S.
- Definimos $c = máx\ \{f\,(x) : x \in S\ \}$.
- Generar x *uniformemente en* S.
- Generar Y *uniformemente en* $[0; c]$
- Retornar x *si* $Y \leq f\,(x)$, *si no, generar nuevamente* x *e* Y.

- Útil cuando otros métodos son difícil de implementar.
- Dependiendo de f *puede requerir muchas* generaciones de números aleatoreos.

Elementos de Estadistica

$$E(X) = \int_{Dom(X)} x f(x) dx$$

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Si X,Y son independientes Cov(X,Y) = 0. La reciproca no es cierta.

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Estimadores

- Consideramos $X_i : i = 1,\ldots,n$ una muestra de X.

$$\overline{X}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- $\overline{X}(n)$ es un estimador insesgado de E(X).

$$E\left(\overline{X}(n)\right) = E(X), \qquad Var\left(\overline{X}(n)\right) = \frac{1}{n}Var(X)$$

$$S^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}(n)\right)^2$$

- $S^2(n)$ es un estimador insesgado de Var(X).

Teorema Central del Límite

- Dados $\{X_i\}_{i \in N}$ variables aleatoreas iid con

  $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2$.

- Sean $$Z_n = \frac{\overline{X}(n) - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma}, \qquad F_n(z) = P(Z_n \le z)$$

- Teorema Central del Límite

$$\lim_{n \to \infty} F_n(z) = \Phi(z) \ ,$$

$$\text{donde} \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2} dy$$

- TCL basicamente dice: $Z_n \sim N(0,1)$ cuando n es grande

Teorema Central del Límite

- En la práctica es dificil conocer σ^2
- Definimos $$t_n = \frac{\overline{X}(n) - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{S^2(n)}}$$
- Se puede demostrar que t_n tambien converge a $N(0, 1)$.
- Utilizamos estos estadísticos para construir intervalos de confianza

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq t_n \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Intervalos de Confianza

- De lo anterior, se concluye que $P(l(n) \leq \mu \leq u(n)) = 1 - \alpha$

donde

$$l(n) = \overline{X}(n) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

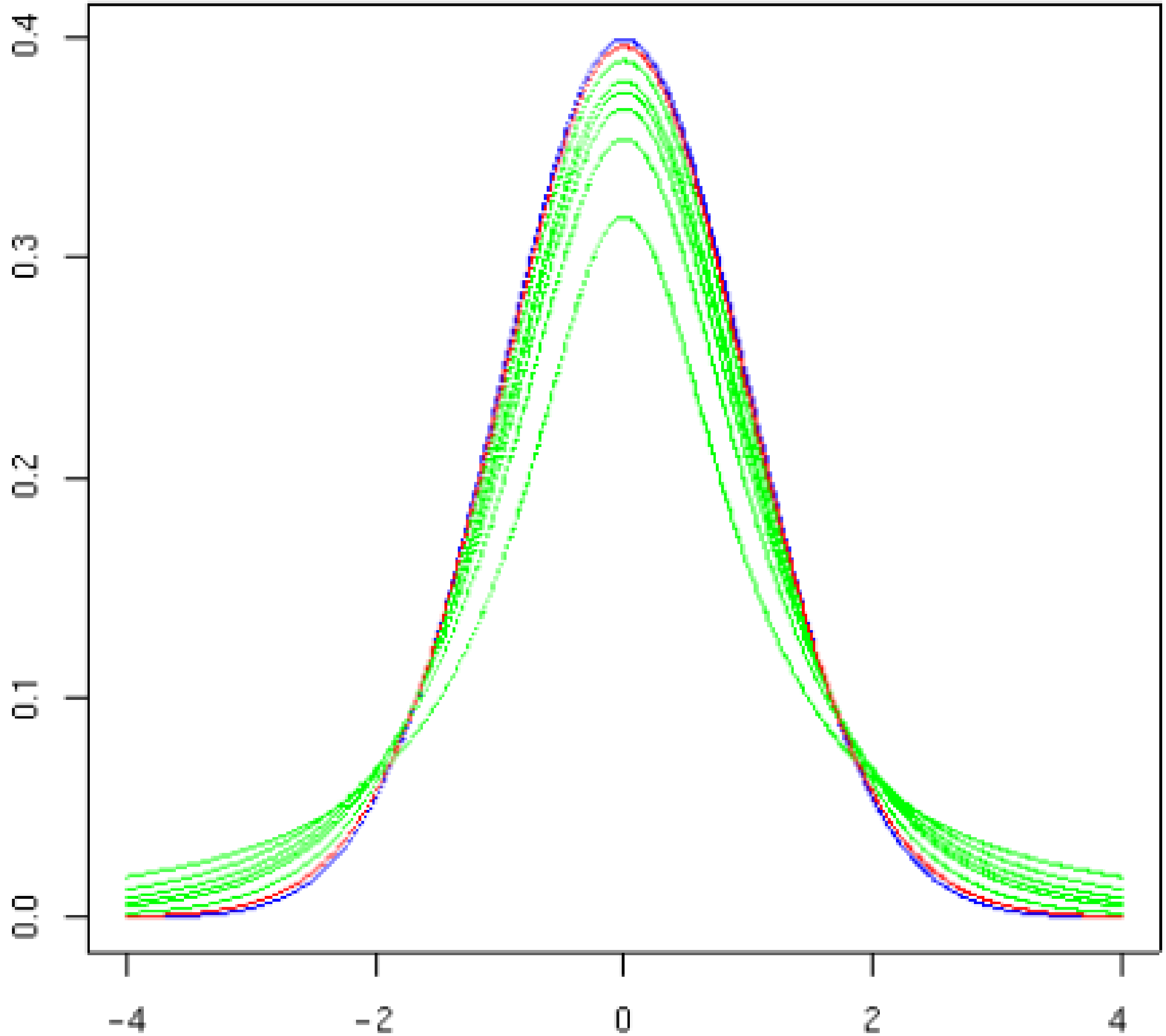
$$u(n) = \overline{X}(n) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

- En otras palabras, cuando n es grande, con probabilidad 1-α tenemos que

$$\mu \in \left[\overline{X}(n) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}, \overline{X}(n) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}\right]$$

- ¿Qué significa n grande?

t-student para distintos n



Indistinguible para n=30

Intervalos de Confianza

- Intervalos de confianza derivados de la T-student.
- Distinto número de muestras n = 5, 10, 20, y 40.
- Consideramos X_i iid con distintas distribuciones.
- Comparamos cobertura real del intervalo estimado a
- 90% sobre 500 repeticiones.

Dist	ν	n=5	n=10	n=20	n=40
Normal	0.00	0.910	0.902	0.898	0.900
Exponencial	2.00	0.854	0.878	0.870	0.890
Chi^2	2.83	0.810	0.830	0.848	0.890
Lognormal	6.18	0.758	0.768	0.842	0.852
Hiper-exp	6.43	0.584	0.586	0.682	0.774

Intervalos de Confianza

- Donde ν es una medida de simetria de la distribución:

$$\nu = \frac{1}{\sigma^3} E\left[(X - E(X))^3 \right]$$

- Simetría de una distribuición es un factor importante al momento de determinar cuando *n* es suficientemente grande en el contexto del TCL.

- No se debe mirar solamente μ, si no que también σ^2 al describir una distribución.

¿Variables iid?

- Consideremos un sistema de simulación donde hay sólo una medida de desempeño, reportada en distintos puntos J durante la simulación.
- Suponga además que ejecuta *n* corridas independientes de la simulación.
- Esto define X_{ij} con i ∈ {1,...,n} y j ∈ J.
- Podemos considerar $\{X_{ij}\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ como variables iid.
- Desafortunadamente $\{X_{ij}\}_{j \in J}$ en la práctica no son independientes, usualmente tienen correlación positiva.

Ejemplo: Tiempo Medio a Falla

- Sistema con 3 componentes 1, 2 y 3
- Sistema funciona mientras 1 funcione y 2 o 3 funcionen.
- Si G_i es el tiempo de falla de la componente *i*, tenemos

$$G_i \sim \text{Weibull}\,(0.5, 1)$$

- Estimar el tiempo promedio a la falla:

$$G = \min\{G_1, \max\{G_2, G_3\}\}$$

Ejemplo: Tiempo Medio a Falla

- Estimar el tiempo promedio a la falla:

$$G = \min\{G_1, \max\{G_2, G_3\}\}$$

n	cobertura	intervalo 90 %	medio ancho
5	0.708	$\pm$0.033	1.16
10	0.750	$\pm$0.032	0.82
20	0.800	$\pm$0.029	0.60
40	0.840	$\pm$0.027	0.44

Métodos de Reducción de Varianza

- ¿Porqué es importante reducir la varianza?
- El resultado de un simulador esta en

$$\left[\overline{X}(n) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}, \overline{X}(n) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}\right]$$

donde (si x_i son iid) tenemos $E\left(S^2(n)\right) = Var(X) = nVar\left(\overline{X}(n)\right)$

- A menor varianza del estimador, mas ajustado el intervalo
  - Más precisión
  - Menos trabajo

Reducción de Varianza I

Utilizar números aleatorios comunes

- Se utiliza cuando se comparan dos o mas sistemas y nos interesa

$$\theta = E\left(X^m\right) - E\left(X^n\right)$$

  donde X^m y X^n son los estadísticos de los distintos sistemas

- Ejemplo: Suponga que evalúa un cambio en la operación de cajeros en un banco.
- Sea X^m y X^n los tiempos de espera total de clientes del banco antes y despues del cambio en operación respectivamente.
- Podemos $E[X^m]$ y $E[X^n]$ a partir de simulaciones $X_1^m, \ldots, X_r^m$ y $X_1^n, \ldots, X_r^n$ respectivamente

Reducción de Varianza I

- Alternativa 1 $$\overline{\theta} = \overline{X^m} - \overline{X^n}$$
  $$Var\left(\overline{\theta}\right) = Var\left(\overline{X^m}\right) + Var\left(\overline{X^n}\right)$$
- Alternativa 2 (variables dependientes) $Z_i = X_i^m - X_i^n$ tq Z_i i.i.d.
  $$\overline{\theta^d} = \overline{Z} = \tfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} z_i$$
  $$Var\left(\overline{\theta^d}\right) = Var\left(\overline{X^m}\right) + Var\left(\overline{X^n}\right) - \tfrac{2}{r}Cov(X^m, X^n)$$
- Varianza se reduce si Cov(X^m ,X^n) es mayor.
  - los mismos números aleatorios al generar X_i^m y X_i^n
  - la misma sequencia de arrivos a ambos servidores
  - la misma sequencia en U[0; 1] para generar números

Reducción de Varianza II

Método de Variable de Control

- Para estimar μ tenemos un simulador que entrega variables aleatorias
  - *X tal que E(X) = μ*
  - *Z con E(Z) conocido*

- Estimadores insesgados de μ
  - *X*
  - $X_C = X + c(Z - E(Z))$ *para todo c*

Reducción de Varianza II

- Este estimador tiene una varianza

$$Var(X_c) = Var(X) + c^2 Var(Z) + 2cCov(X,Z)$$

- La cual se minimiza cuando el parámetro c vale

$$c^* = -\frac{Cov(X,Z)}{Var(Z)}$$

y que da una varianza mínima de

$$Var(X_c) = Var(X) - \frac{Cov(X,Z)^2}{Var(Z)}$$

X_c reduce varianza si $Cov(X,Z) \neq 0$

Reducción de Varianza II

- Método requiere
  - Estimador insesgado X de E(X)=μ
  - Variable de control, Z, tq E(Z) sea conocido y Cov(X,Z) ≠0
- *Dado un simulador que entrega X_i y Z_i i=1,…,n (E(Z) conocido) el método usa el estimador insesgado*

$$\overline{X_c}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i + c^*(Z_i - E(Z))\right)$$

$$S_c^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i + c^*(Z_i - E(Z)) - \overline{X_c}(n)\right)^2$$

$$\mu \in \left[\overline{X_c}(n) - k_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_c^2(n)}{n}}, \overline{X_c}(n) + k_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_c^2(n)}{n}}\right] \text{ con prob.} 1-\alpha$$

Reducción de Varianza II

- ¿Cómo determinamos c*?

$$c^* = -\frac{Cov(X,Z)}{Var(Z)}$$

- hacer *p corridas piloto y estimar*

$$Cov(X,Z) \sim \tfrac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}\left(X_i - \overline{X}(p)\right)\left(Z_i - \overline{Z}(p)\right)$$

$$Var(Z) \sim \tfrac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}\left(Z_i - \overline{Z}(p)\right)^2$$

Reducción de Varianza II

- Ejemplo: Queremos estimar $E(e^{(U+W)^2})$ con $U,W \sim U[0;1]$ independientes.

- Posibles variables de control
  - $Z_1 = U + W$
  - $Z_2 = (U + W)^2$
- Note que $E(Z_1) = 1$ y $E(Z_2) = 7/6$

Reducción de Varianza II

Matlab Code for Estimating $\theta = \mathrm{E}[e^{(U+W)^2}]$

```
> % Do pilot simulation first
> p=100; n=1000;
> u=rand(p,1);  w=rand(p,1);  y=exp((u+w).^2);  z2 = (u+w).^2;
> cov_est=cov([y z2])

 cov_est =
          31.3877    4.1800
           4.1800    0.6960

> c_est = - cov_est(1,2)/cov_est(2,2)

 c_est =  -6.0061

> % Now do main simulation
> u = rand(n,1); w=rand(n,1);  y = exp((u+w).^2);  z2 = (u+w).^2;
> v = y + c_est*(z2 - 7/6);
> mean(y), std(y)     % Check the mean and std of usual estimator

 ans =   5.0340    6.2507

> mean (v), std(v)     % Check the mean and std of new estimator

 ans =   4.9329    3.1218

> % Now compute confidence intervals
> CI = [mean(v) - 1.96*std(v)/sqrt(n), mean(v) +  1.96*std(v)/sqrt(n)]

  CI =   4.7394    5.1263
```