Análisis de Sensibilidad

Nelson Devia C.

IN3701 - Modelamiento y Optimización
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

2011

Basado en Bertsimas, D., Tsitsiklis, J. (1997)
"Introduction to Linear Optimization"
Capítulo 5

Contenidos

1. Introducción
2. Variaciones en el vector del lado derecho
3. Variaciones en el vector de coeficientes

Introducción

Consideremos el problema (P) en forma estándar y su dual (D):

$$(P)\ \text{mín} \quad c'x \qquad\qquad (D)\ \text{máx} \quad b'y$$
$$Ax = b \qquad\qquad A'y \leq c$$
$$x \geq 0$$

- Supongamos que tenemos la base óptima de (P) A_B y la solución óptima asociada x^*.
- Si alguno de los coeficientes de b o de c cambia:
  - ¿Se mantiene la base óptima?
  - ¿Cómo calcular la nueva solución óptima sin resolver el problema otra vez?
- Como A_B es la base óptima sabemos que cumple las condiciones de:
  - **Factibilidad:** $\mathbf{x_B = A_B^{-1} b \geq 0}$
  - **Optimalidad:** $\mathbf{\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0}$
- Si al cambiar el problema se siguen cumpliendo ambas condiciones, entonces la base se mantiene óptima.

Variaciones en el vector b

- Supongamos que la i-ésima componente de b es aumentada en δ
  - Equivalentemente b se reemplaza por $b + \delta e_i$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico.
- Nos interesa saber en qué rango se puede mover δ sin que cambie la base óptima.
- Analizamos la **condición de factibilidad**:

$$A_B^{-1}(b + \delta e_i) \geq 0$$
$$x_B + \delta A_B^{-1} e_i \geq 0$$

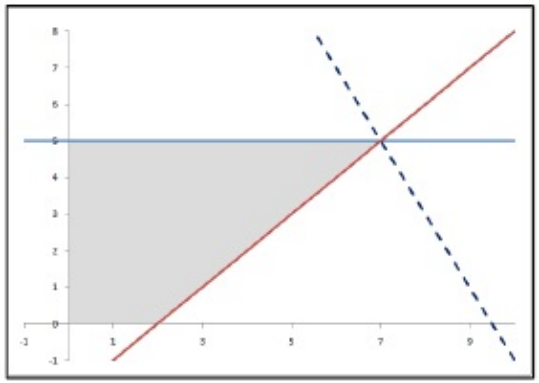
  - Sea g la i-ésima columna de A_B^{-1}, luego: $x_B + \delta g \geq 0$
  - Luego:

$$\delta \begin{cases} \geq \frac{-(x_B)_j}{g_j} & \forall j / g_j > 0 \\ \leq \frac{-(x_B)_j}{g_j} & \forall j / g_j < 0 \end{cases} \Rightarrow \max_{\mathbf{j/g_j>0}} \left\{ \frac{-(\mathbf{x_B})_\mathbf{j}}{\mathbf{g_j}} \right\} \leq \delta \leq \min_{\mathbf{j/g_j<0}} \left\{ \frac{-(\mathbf{x_B})_\mathbf{j}}{\mathbf{g_j}} \right\}$$

Variaciones en el vector b

- Analizamos la **condición de optimalidad**:
  - Como los costos reducidos no dependen del vector b, no se ven afectados:
$$\overline{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0$$
  - El nuevo costo óptimo está dado por:
$$c'_B A_B^{-1}(b + \delta e_i) = y'^* b + \delta y_i$$
donde y^* es la solución óptima del problema dual, también conocida como el precio sombra.
- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Variaciones en el vector b

En forma esándar:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & -2x_1 - x_2 & & \\ & x_2 + x_3 & & = 5 \\ & x_1 - x_2 & + x_4 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0 \end{array}$$

- La base óptima es: $x_B = \{x_1, x_2\}$, $x_N = \{x_3, x_4\}$ con $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- **Factibilidad**:

$$A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

- **Optimalidad**:

$$c_N' - c_B' A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Variaciones en el vector b

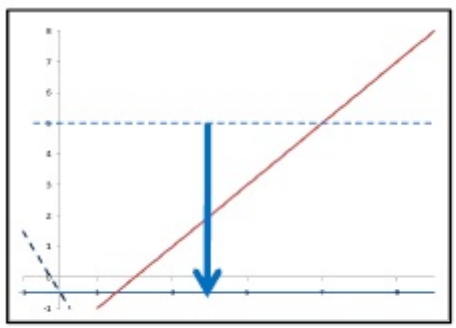
- Si cambiamos $\mathbf{b_1}$:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 - x_2 & & \\ & x_2 + x_3 & & = \mathbf{b_1} \\ & x_1 - x_2 \quad + x_4 & & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0 \end{aligned}$$

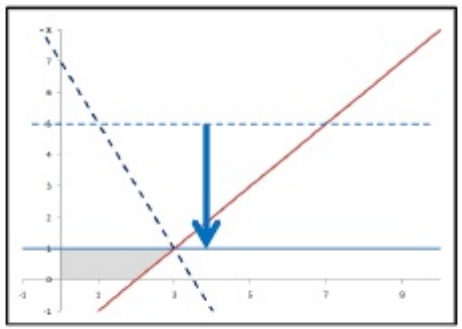
- Factibilidad:

$$A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 \geq -2 \\ b_1 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \mathbf{b_1 \geq 0}$$

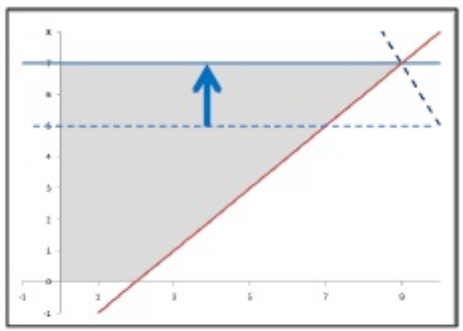
- Es decir, para cualquier b_1 no negativo, la base se mantiene óptima.



$b_1 = -0{,}5$ (infactible)



$b_1 = 1$ (base aún óptima)



$b_1 = 7$ (base aún óptima)

Variaciones en el vector b

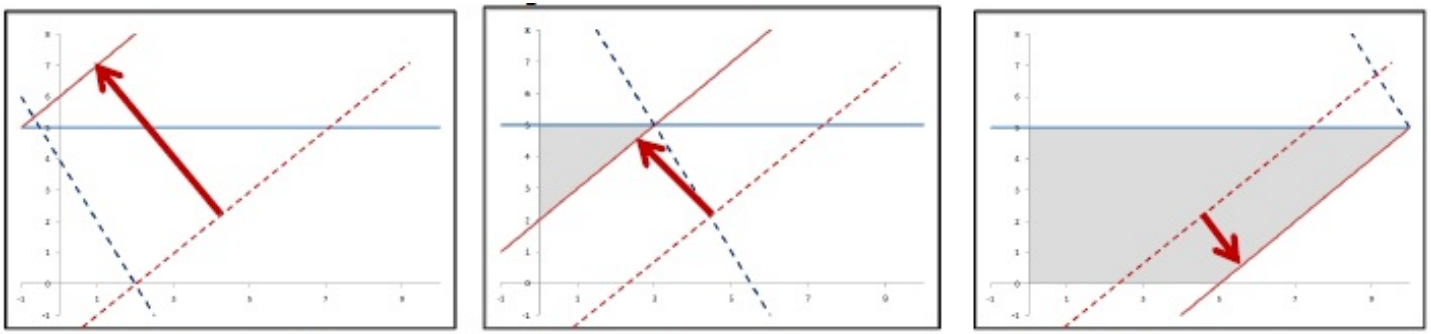
- Si cambiamos $\mathbf{b_2}$:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 - x_2 & & \\ & x_2 + x_3 & & = 5 \\ & x_1 - x_2 \quad + x_4 & & = \mathbf{b_2} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0 \end{aligned}$$

- Factibilidad:

$$A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + b_2 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{b_2 \geq -5}$$

- Es decir, para cualquier $b_2 \geq -5$, la base se mantiene óptima.



$b_2 = -6$ (infactible) $b_2 = -2$ (base aún óptima) $b_2 = 5$ (base aún óptima)

Variaciones en el vector c

- Supongamos que la j-ésima componente de c es aumentada en δ
  - Equivalentemente c se reemplaza por $c + \delta e_j$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico.
- Nos interesa saber en qué rango se puede mover δ sin que cambie la base óptima.
- Analizamos la **condición de factibilidad**:
  - Al variar c, la región factible no cambia y no se afecta la factibilidad: $A_B^{-1} b \geq 0$
- Analizamos la **condición de optimalidad**: $\overline{c}' = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0$
  - Si c_j es el costo de una variable no básica, c_B no cambia y se tiene la condición:

$$c'_j + \delta \geq c'_B A_B^{-1} A_j$$

  - Equivalentemente, usando los costos reducidos: $\delta \geq -\overline{c}'_j$

Variaciones en el vector c

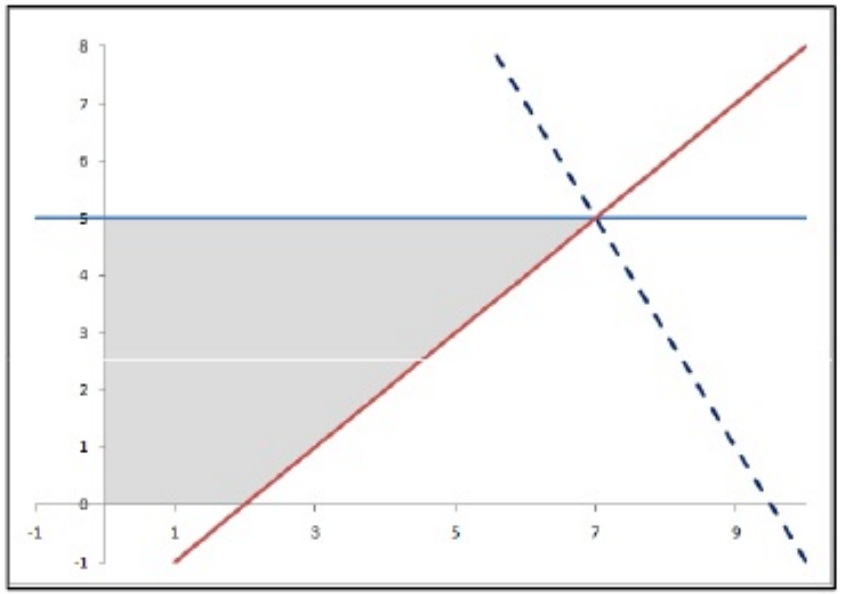
- Si c_j es el costo de una variable básica y cambia a $c_j + \delta$
  - Equivalentemente, los costos de las variables básicas ahora son: $c_B + \delta e_k$ donde $j = B(k)$, la k-ésima variable básica.
- Se tiene que:
$$(c_B + \delta e_k)' A_B^{-1} A_N \leq c_N'$$
- Luego,
$$\delta (A_B^{-1} A_N)_k \leq \bar{c}_N'$$
- Sea q la k-ésima fila de $(A_B^{-1} A_N)$:

$$\delta \begin{cases} \leq \frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} & \forall i / q_i > 0 \\ \geq \frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} & \forall i / q_i < 0 \end{cases} \Rightarrow \max_{i/q_i<0} \left\{ \frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} \right\} \leq \delta \leq \min_{i/q_i>0} \left\{ \frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} \right\}$$

Variaciones en el vector c

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



En forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 - x_2 \\ & x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Al variar los coeficientes de la función objetivo se cambia su pendiente.

Variaciones en el vector c

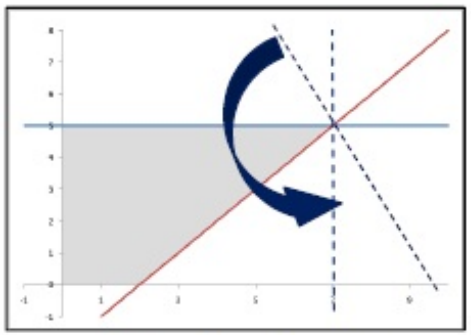
- Si cambiamos $\mathbf{c_1}$:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c_1} x_1 - x_2 & \\ & x_2 + x_3 & = 5 \\ & x_1 - x_2 + x_4 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{aligned}$$

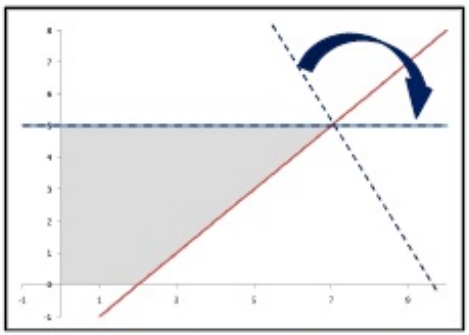
- Optimalidad:

$$\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N = (0 \quad 0) - (c_1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1 - c_1 \quad -c_1) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} c_1 \leq 1 \\ c_1 \leq 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{c_1 \leq 0}$$

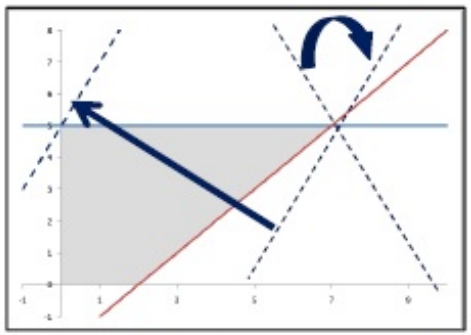
- Es decir, para cualquier c_1 negativo, la base se mantiene óptima.



c_1 =-200 (base aún óptima)



c_1 =0 (base aún óptima)



c_1 =2 (la base óptima cambió)

Variaciones en el vector c

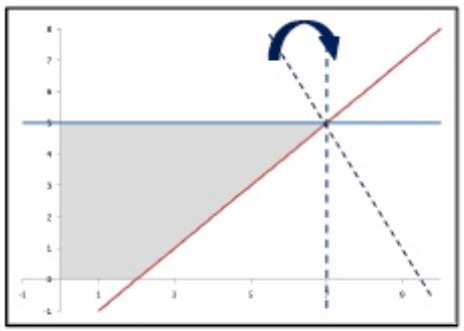
- Si cambiamos $\mathbf{c_2}$:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 + \mathbf{c_2}x_2 & \\ & x_2 + x_3 & = 5 \\ & x_1 - x_2 + x_4 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{aligned}$$

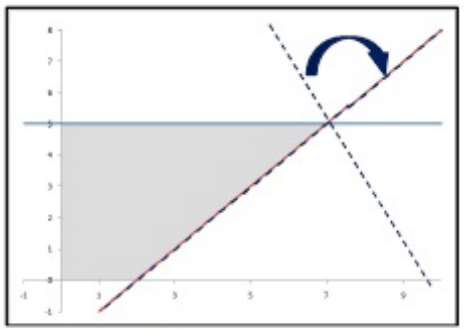
- Optimalidad:

$$\begin{aligned} \bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N &= (0 \quad 0) - (-2 \quad c_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2 - c_2 \quad 2) \geq 0 \Rightarrow \mathbf{c_2 \leq 2} \end{aligned}$$

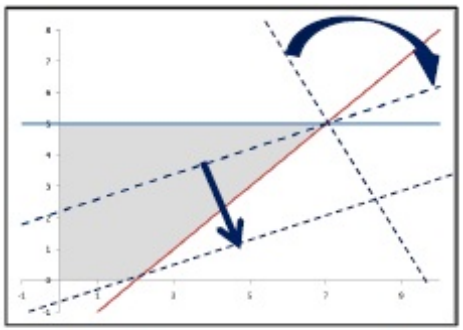
- Es decir, para cualquier $c_2 \leq 2$, la base se mantiene óptima.



$c_2 = 0$ (base aún óptima)



$c_2 = 2$ (base aún óptima)



$c_2 = 3$ (la base óptima cambió)

Dudas y/o Comentarios a:
ndevia@ing.uchile.cl