El Método Simplex

Nelson Devia C.

IN3701 - Modelamiento y Optimización
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

2011

Basado en Bertsimas, D., Tsitsiklis, J. (1997)
"Introduction to Linear Optimization"
Capítulo 3

Contenidos

1. Introducción
2. Forma Estándar
3. Direcciones Básicas Factibles
4. Método Simplex

Introducción

- Se sabe que si un problema de programación lineal admite solución óptima, entonces existe una solución básica factible (sbf) que es solución óptima de éste.
- Esto implica que:
  - Si el problema tiene solución óptima única, ésta es una solución básica factible[1]
  - Si el problema tiene infinitas soluciones óptimas, al menos una de ellas es una solución básica factible[1]
- El método Simplex aprovecha esto y busca la solución óptima moviéndose de una sbf a otra, a través de las aristas del poliedro factible, en alguna dirección que reduzca los costos.
- En este capítulo se considerará un problema en forma estándar, es decir:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

[1] sbf = vértice o punto extremo del poliedro factible

Condiciones de Optimalidad

- Como todo problema de programación lineal es representado por un poliedro, basta con buscar óptimos locales, ya que en un conjunto convexo todo óptimo local es un óptimo global.

- **Óptimo Local**: Un punto x^* es un óptimo local si ningún punto factible cercano a él lleva a una mejora en la función objetivo.
- Formalmente, x^* es un óptimo local de P si y sólo si:

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap P, \quad c'x \geq c'x^*$$

- Donde $B(x^*, \varepsilon)$ es una bola de radio ε centrada en x^*

Propiedades de la Forma Estándar

- Recordemos que el problema en forma estándar de la primera lámina es una representación matricial del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ & \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- Sean $\mathbf{B(1)}, \ldots, \mathbf{B(m)}$ los índices de las **variables básicas** para una sbf del poliedro factible.
  - Recordar que en una sbf se tiene que $x_i = 0, \forall i \notin B = \{B(1), \ldots, B(m)\}$
- El problema se puede escribir ahora separando las variables básicas de las no básicas...

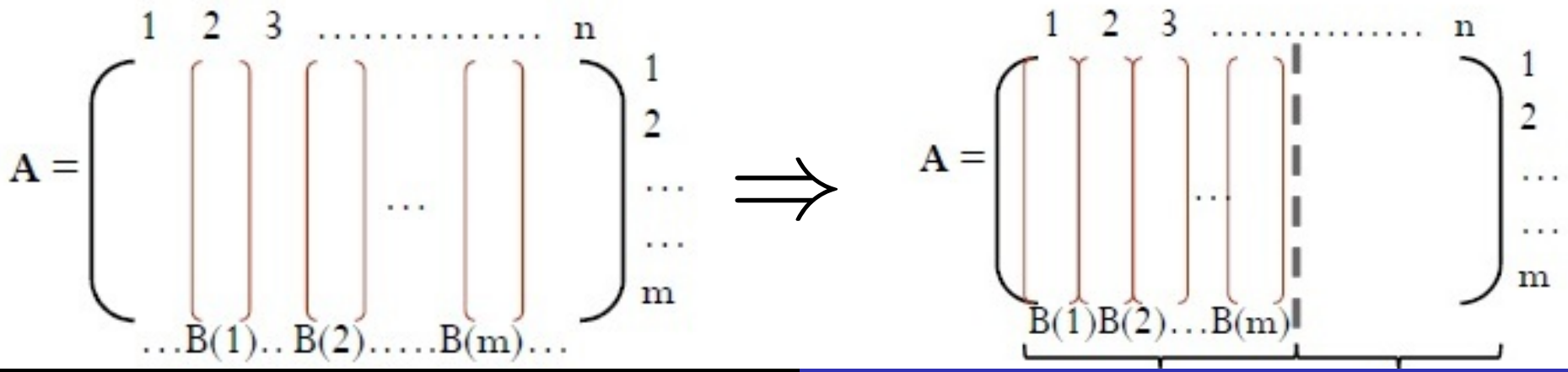
Propiedades de la Forma Estándar

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b \qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m} c_{B(i)} x_{B(i)} + \sum_{i \notin B} c_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} + \sum_{i \notin B} A_i x_i = b \qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

- En términos matriciales, lo que se hizo fue reordenar las columnas de la matriz A y las componentes de los vectores c y x, de manera que se obtenga el mismo resultado:



Propiedades de la Forma Estándar

$$c' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & [\ ] & [\ ] \ldots & [\ ] & \end{bmatrix}$$

$$\ldots B(1) \ldots B(2) \ldots\ldots B(m) \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$c' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ [\ ] & [\ ] & \ldots & [\ ] & \end{bmatrix}$$

$$B(1)B(2)\ldots B(m)$$

$$c_B \qquad c_N$$

$$x = \begin{pmatrix} & \ldots \\ [\ ] & B(1) \\ & \ldots \\ [\ ] & B(2) \\ & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ [\ ] & B(m) \\ & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} [\ ] & B(1) \\ [\ ] & B(2) \\ \ldots & \ldots \\ [\ ] & B(m) \end{bmatrix} x_B$$

$$x_N$$

Propiedades de la Forma Estándar

- Ahora el problema se puede escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\text{mín} \quad c_B' x_B + c_N' x_N \tag{1}$$
$$A_B x_B + A_N x_N = b \tag{2}$$
$$x \geq 0 \tag{3}$$

- Sabemos que en una **sbf**, la matriz A_B es de rango completo y, por lo tanto, es invertible. Luego, de la ecuación (2) se tiene:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \tag{4}$$

  - Sean $\overline{b} = A_B^{-1} b, \quad \overline{A}_N = A_B^{-1} A_N$, por lo tanto:

$$x_B = \overline{b} - \overline{A}_N x_N$$

  - En las **sbf's** se tiene que $\mathbf{x_N = 0}$, luego $\mathbf{x_B = \overline{b}}$

Costos Reducidos

- Reemplazando la ecuación (4) en (1) se tiene:

$$c_B'(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N' x_N$$
$$c_B'A_B^{-1}b + (c_N' - c_B'A_B^{-1}A_N)x_N$$
$$c_B'A_B^{-1}b + \overline{c}_N' x_N$$

  - Donde llamamos **costos reducidos** a:

$$\overline{\mathbf{c}}_\mathbf{N}' = \mathbf{c}_\mathbf{N}' - \mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{A}_\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_\mathbf{N} \quad (5)$$

  - Notar que estos costos consideran los costos de las variables no básicas (c_N') y una componentde de los costos de las variables básicas ($-c_B'A_B^{-1}A_N$), que depende de las columnas de A asociadas a las variables no básicas (A_N).

Costos Reducidos

- Luego el problema de optimización queda:

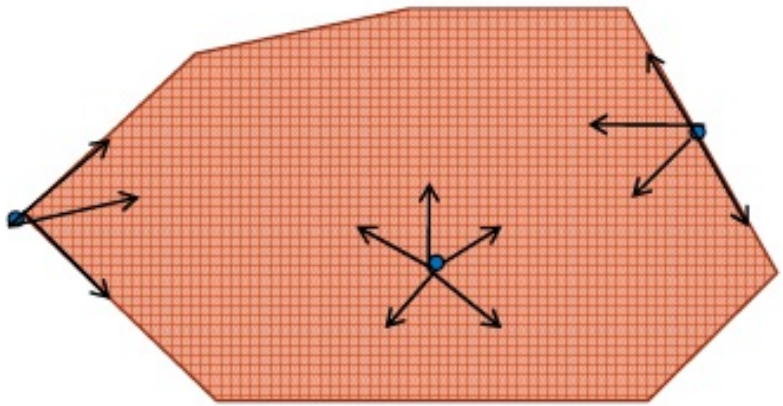
$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_B' A_B^{-1} b + \overline{c}_N' x_N \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Notar que el término $c_B' A_B^{-1} b$ es una constante para el problema.
- El óptimo de este problema depende de los costos reducidos:
  - Si **todos los costos reducidos son no negativos**, el óptimo se alcanza para $x_N = 0$ y, por lo tanto, la base (B) es la base óptima para el problema.
  - Si **existe una componente i negativa en los costos reducidos**, significa que se obtiene un beneficio al aumentar el valor de x_i, por lo que ésta debería dejar de ser una variable no básica (entraría a la base) y, por lo tanto, la base actual no es óptima.

Dirección Factible

- Una **dirección factible** es aquella dirección en la que es posible moverse sin salir inmediatamente del poliedro.
- Formalmente, dado un poliedro P y un punto $x \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, un vector $d \in \mathbb{R}^n$ es una dirección factible en x si:

$$\exists \theta > 0 / x + \theta d \in P$$



Dirección Básica Factible

- Sea x una sbf y $B = \{B(1), \ldots, B(m)\}$ los índices de las variables básicas. Sabemos que:

$$x_B = \overline{b}$$
$$x_i = 0 \quad \forall i \notin B$$

- Supongamos que queremos movernos desde **x** a otro punto **y**, eligiendo una de las variables no básicas j (que inicialmente vale 0) y aumentando su valor sin modificar las demás variables no básicas.
- Usaremos la dirección:

$$d^j = (d^j_B | d^j_N)'$$
$$d^j_B = (d^j_{B(1)}, \ldots, d^j_{B(m)})'$$
$$d^j_N = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)'$$

  - Donde d^j_N tiene todas sus componentes nulas excepto la j-ésima, que vale 1.
  - Llamaremos a $\mathbf{d^j}$ la **j-ésima dirección básica.**

Dirección Básica Factible

- Ahora nos movemos en la dirección d^j hacia el nuevo punto y:

$$y = x + \theta d^j, \quad \theta > 0$$

- Es decir:

$$y_B = x_B + \theta d_B^j$$
$$y_N = x_N + \theta d_N^j$$

- Como queremos movernos por dentro del poliedro, sólo nos interesan los puntos factibles, es decir, se necesita que:

$$Ay = b \Leftrightarrow A(x + \theta d^j) = b$$

- Como x es factible ($Ax = b$), se necesita que $Ad^j = 0$:

$$Ad^j = \sum_{i=1}^{n} A_i d_i^j = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} d_{B(i)}^j + A_j = A_B d_B^j + A_j = 0$$

- Despejando, se obtiene la j-ésima dirección básica factible:

$$d_B^j = -A_B^{-1} A_j$$

Dirección Básica Factible

- Al moverse en una dirección d^j también se debe verificar si se mantiene la no negatividad de las variables

$$y \geq 0 \Leftrightarrow x + \theta d^j \geq 0$$

  - Las **variables no básicas**, que inicialmente valen 0, no sufren cambios, excepto por la variable x_j, la que sólo puede aumentar, ya que $d^j_j = 1$ y $\theta > 0$.

$$\begin{aligned} y_i = x_i + \theta \cdot 0 \Rightarrow \quad & y_i = x_i \qquad i \notin B, i \neq j \\ y_j = x_j + \theta \cdot 1 \Rightarrow \quad & y_j = x_j + \theta \end{aligned}$$

Dirección Básica Factible

- Para las **variables básicas** hay 2 casos:
  - El punto x es no degenerado, lo que implica que $x_B > 0$ y para un θ suficientemente pequeño:

$$y_B = x_B + \theta d_B^j \geq 0$$

  - El punto x es degenerado, es decir, existe $x_{B(i)} = 0$ y puede ocurrir que la componente $d_{B(i)}^j$ sea negativa, violando inmediatamente la no negatividad para cualquier valor de θ:

$$y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta d_{B(i)}^j < 0$$

    - Con:

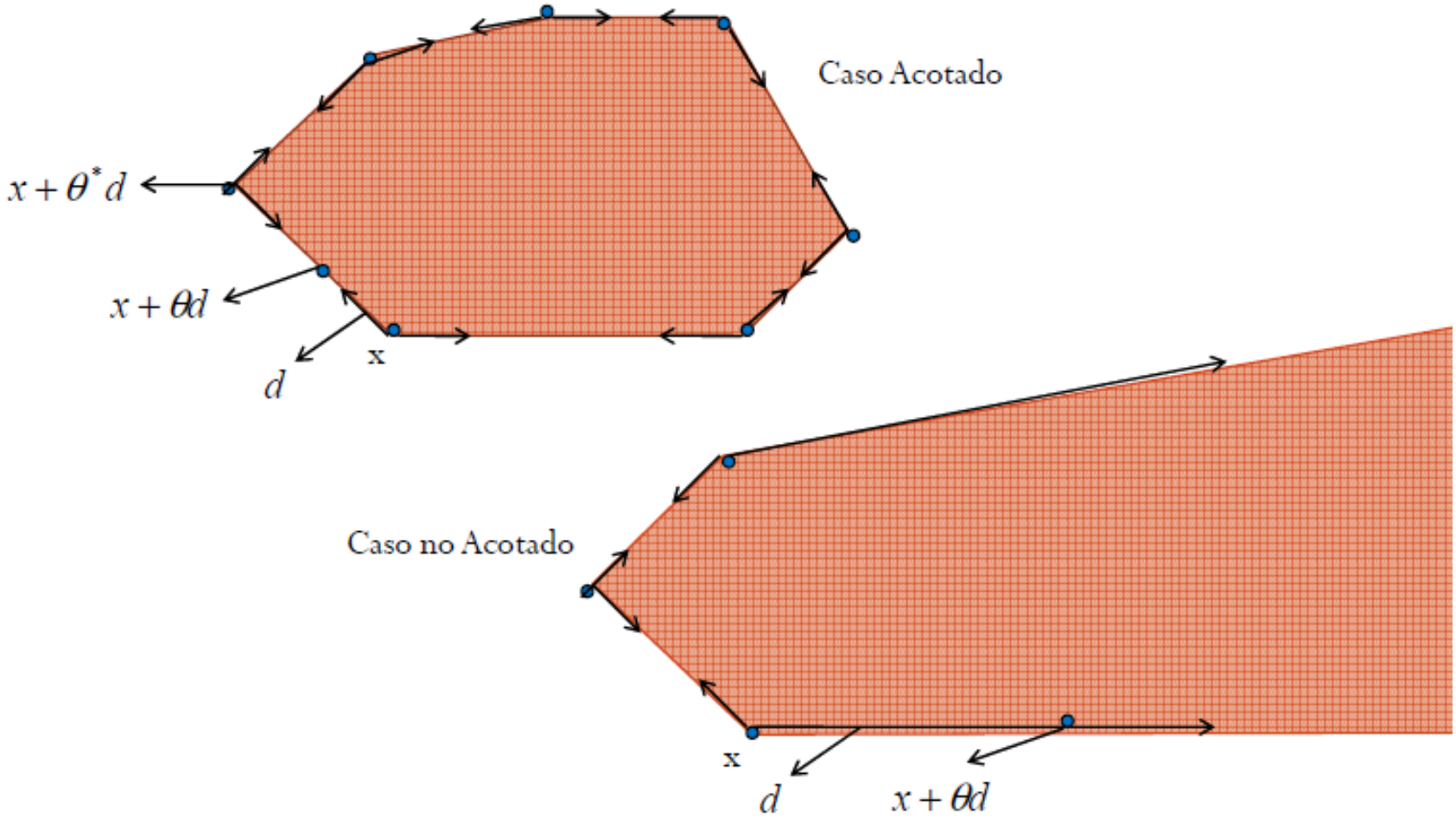
$$d_{B(i)}^j = (-A_B^{-1} A_j)_{B(i)} < 0 \qquad (6)$$

Dirección Básica Factible

- La función objetivo en el nuevo punto queda dada por
$$c'y = c'(x + \theta d^j)$$
- Luego, al movernos en esta dirección, la tasa de cambio en la función objetivo estará dada por $c'd^j$
$$c'd^j = c'_B d^j_B + c_j$$
- Reemplazando d_B de la ecuación (6) se recupera el costo reducido de la variable no básica j
$$c'd^j = c'_j - c'_B A_B^{-1} A_j = \overline{c}'_j$$

  - Luego, si el costo reducido de la variable j es negativo, conviene moverse en la j-ésima dirección básica, ya que la función objetivo disminuye.
  - Si es positivo, no conviene moverse en esa dirección, pues se empeora el valor de la función objetivo.
  - Si es cero, es indiferente el moverse en esa dirección.

Dirección Básica Factible



Condiciones de Optimalidad

- Sea x una sbf y sea $\overline{c}_N$ el vector de costos reducidos correspondiente a una base B asociada a x:
  - Si $\overline{c}_N \geq 0$, entonces x es óptimo.
  - Si x es óptimo y no degenerado, entonces $\overline{c}_N \geq 0$.
- Una base B se dice óptima si cumple factibilidad y no negatividad de los costos reducidos:
  - **Factibilidad**:

$$Ax = b \Rightarrow A_B x_B = b \Rightarrow x_B = A_B^{-1} b$$

$$\overline{b} = A_B^{-1} b \geq 0$$

  - **Costos reducidos no negativos**:

$$\overline{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0$$

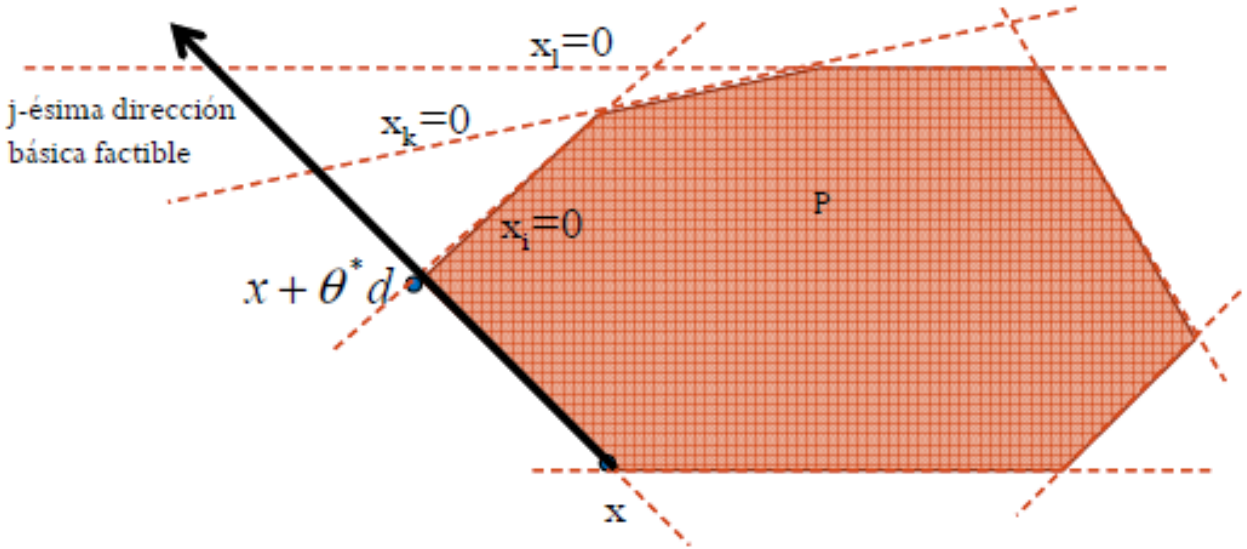
Desarrollo del Método Simplex

- Hasta ahora sabemos:
  - Verificar si la sbf actual es óptima.
  - Cómo movernos desde una sbf a través de la j-ésima dirección básica factible.
- Falta por saber:
  - Cuánto moverse a lo largo de la j-ésima dirección básica factible.
  - Cómo escoger esta dirección.
- En lo que sigue asumiremos que todas las sbf son no degeneradas.

Desarrollo del Método Simplex

- Supongamos que en la sbf x se tiene que el j-ésimo costo reducido es negativo. Luego, es conveniente moverse en la j-ésima dirección básica factible (d^j).
- Como al moverse en esta dirección se está reduciendo el valor de la función objetivo, conviene moverse lo máximo posible, manteniendo la factibilidad. Luego, se escoge θ^* que cumple:

$$\theta^* = \text{máx}\{\theta \geq 0 / x + \theta d^j \in P\}$$



Desarrollo del Método Simplex

- La única forma en que se viola la factibilidad del problema al moverse en una **dirección básica factible** es haciendo negativa alguna de las componentes del nuevo punto. Luego, hay 2 casos:
  - Si $d^j \geq 0$ entonces $y = x + \theta d^j$ nunca se hace infactible y se tiene que $\theta^* = +\infty$ (problema no acotado)
  - Si $d_i^j < 0$ para alguna componente i, entonces

$$y_i = x_i + \theta d_i^j \geq 0 \Rightarrow \theta \leq -\frac{x_i}{d_i^j}$$

  - Esto debe cumplirse para todo i tal que $d_i^j < 0$, luego:

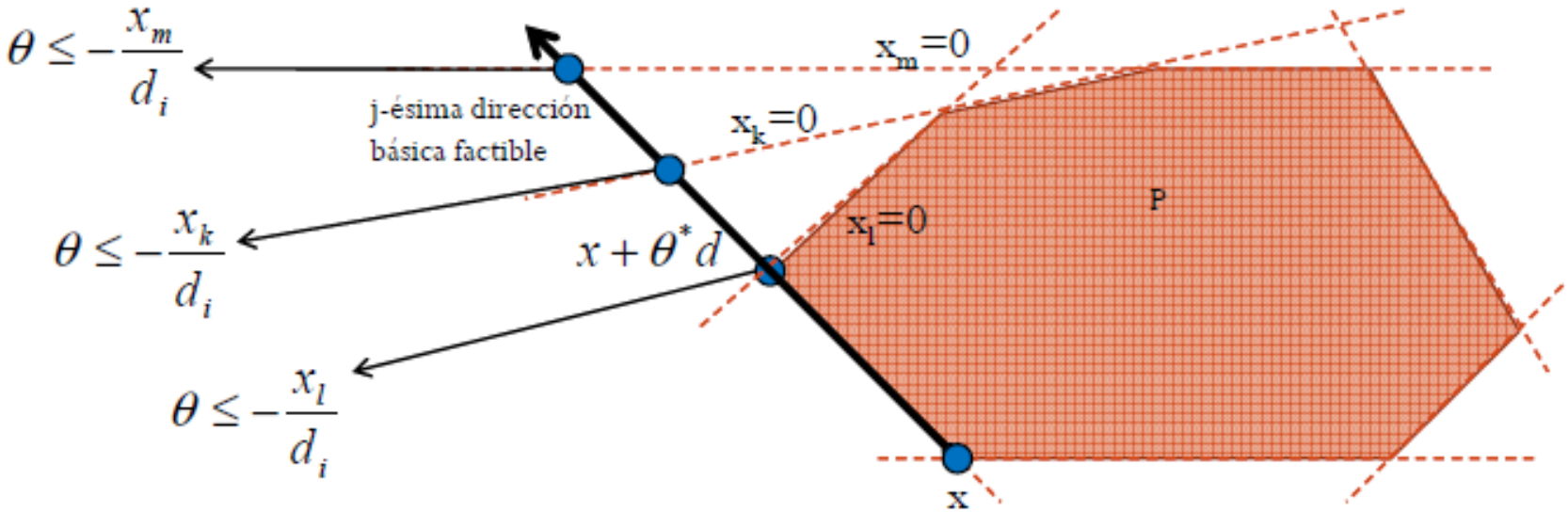
$$\theta^* = \min_{i/d_i^j<0} \left\{ -\frac{x_i}{d_i^j} \right\}$$

Desarrollo del Método Simplex

- Como $d_i^j = (-A_B^{-1}A_j)_i = -(\overline{A}_j)_i$ se tiene que:

$$\theta^* = \min_{i/(\overline{A}_j)_i > 0} \left\{ \frac{x_i}{(\overline{A}_j)_i} \right\} = \min_{i/(\overline{a}_{ij} > 0} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ij}} \right\}$$

- Donde $\overline{a}_{ij}$ es la i-ésima componente de la j-ésima columna de la matriz $\overline{A}_N = A_B^{-1}A_N$



Desarrollo del Método Simplex

- Ahora estamos en $y = x + \theta^* d^j$
  - Notar que la variable no básica x_j ya no es nula y ahora vale:

$$y_j = x_j + \theta^* d^j = 0 + \theta^* \cdot 1 = \theta^*$$

  - Notar también que la variable básica x_l ahora es nula:

$$\theta^* = -\frac{x_l}{d_l^j} \Rightarrow y_l = x_l + \left(-\frac{x_l}{d_l^j}\right) \cdot d_l^j = 0$$

- Esto hace que la variable x_j reemplace a x_l en la base.
  - Se dice que **x_j entra a la base** y **x_l sale de la base**.
- **Teorema**:
  - La nueva matriz $\hat{A}_{B(i)} = \begin{cases} A_{B(i)} & i \neq l \\ A_j & i = l \end{cases}$ tiene columnas l.i. y, por lo tanto, también es una matriz básica.
  - El punto $y = x + \theta^* d^j$ es la sbf asociada a la matriz $\hat{A}_B$

Una Iteración de Simplex

1. Comenzamos con una base $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ y una sbf x asociada.
2. Calcular los costos reducidos para todas las variables no básicas ($j \notin B$):
$$\overline{c}'_j = c'_j - c'_B A_B^{-1} A_j$$
   - Si todos son no negativos, entonces la base actual es óptima y el algoritmo termina.
   - Si no, escoger algún j con $\overline{c}'_j < 0$.
3. Calcular la j-ésima dirección básica factible $d^j = -A_B^{-1} A_j$.
   - Si ninguna de sus componentes es negativa, entonces el problema es no acotado (el óptimo es $-\infty$) y el algoritmo termina.

Una Iteración de Simplex

4. Si alguna componente de d^j es negativa, encontrar:

$$\theta^* = \min_{\{i \in B / d_i^j < 0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i^j} \right\}$$

5. Sea l tal que $\theta^* = -\frac{x_l}{d_l^j}$.
   - Formar una nueva base reemplazando la columna A_l con A_j.
   - Las componentes de la nueva sbf y están dadas por:

$$y_j = \theta^*$$
$$y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^* d_{B(i)}^j$$

Finitud de Simplex

Teorema:

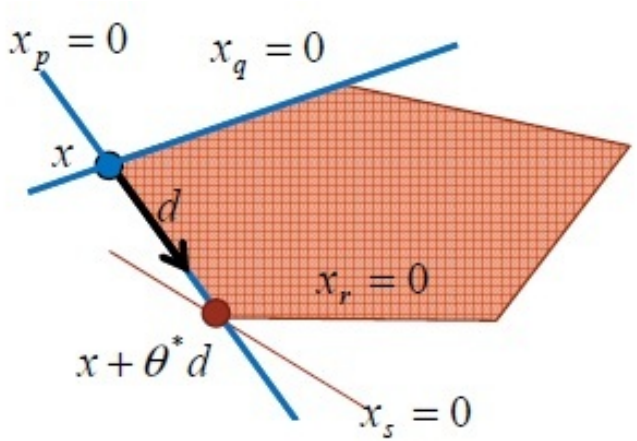
- Asumiendo que el conjunto factible es no vacío y que todas las sbf's son no degeneradas, entonces el método Simplex termina en un número finito de iteracíones y entrega una de las siguentes posibilidades:
  - Una **base B óptima** y su correspondiente sbf x^* óptima.
  - Una dirección d de crecimiento factible e infinito. Luego, el problema es **no acotado** y el costo óptimo es $-\infty$.

Simplex con Degenerancia

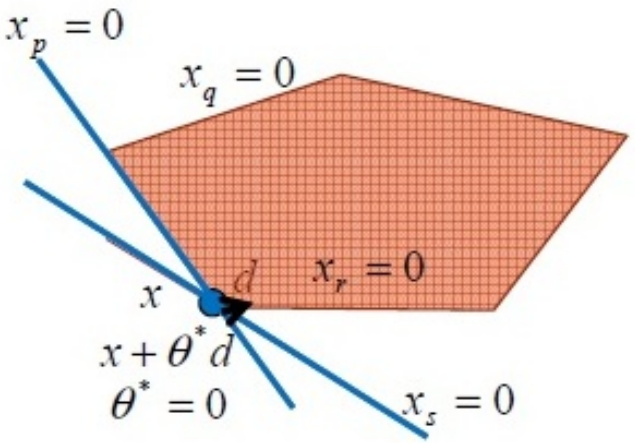
- Si se usa exactamente el mismo algoritmo en presencia de degenerancia pueden ocurrir las siguientes posibilidades:
  - Si $\theta^* > 0$ puede ocurrir que más de una de las variables básicas se anule en el nuevo punto $y = x + \theta^* d^j$. Como sólo una de ellas sale de la base y la otra se mantiene en ella valiendo cero, la nueva sbf es degenerada.
  - Si la sbf actual **x** es degenerada puede ocurrir que $\theta^* = 0$, con lo cual la nueva sbf **y** es la misma que **x** ($y = x$). En este caso, a pesar de que se obtiene una base distinta, se mantiene la misma sbf asociada a ambas bases.

Simplex con Degenerancia

- Al moverse a $y = x + \theta^* d^j$ se tiene que hay 2 variables que se anulan: $x_r = 0$ y $x_s = 0$
  - Luego, puede escogerse cualquiera de ellas para salir de la base.

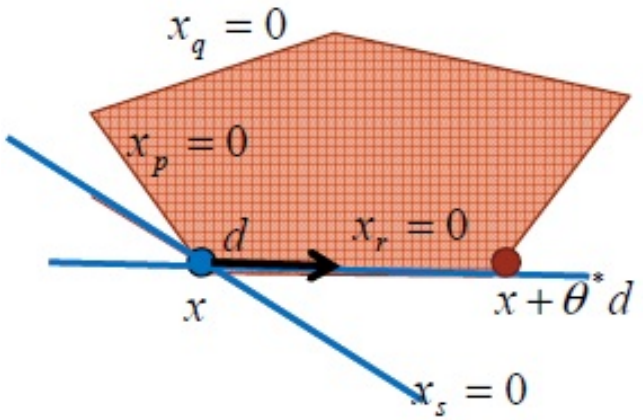


- Al intentar moverse en la dirección d^j, se tiene que $\theta^* = 0$
  - Luego, el nuevo punto corresponde al mismo punto anterior.

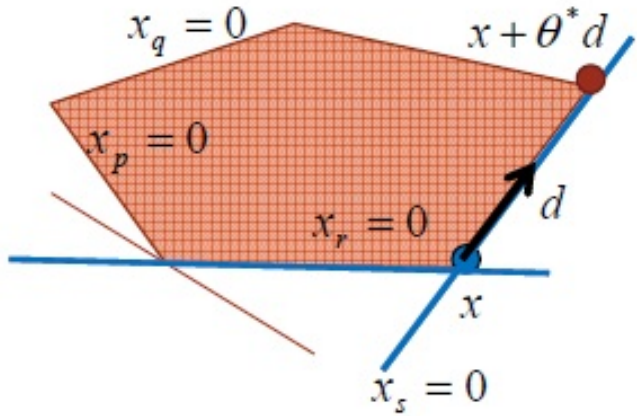


Simplex con Degenerancia

- En estas condiciones el algoritmo puede, eventualmente, volver a la base inicial y quedar atrapado en un loop infinito.



- Para evitar esto se utilizan las llamadas **reglas de pivoteo**, las cuales sirven para elegir qué variables entran y salen de la base en cada iteración.



Simplex con Degenerancia

- **Criterios de entrada a la base**:
  - Escoger la variable que tenga el **mínimo costo reducido**.
    - Asegura la máxima tasa de mejora en la función objetivo en cada iteración.
  - Escoger la primera variable que tenga costo reducido negativo en orden lexicográfico.
    - Es mucho más simple y tiene menor costo computacional.

- **Criterios de salida de la base**:
  - Si hay más de una variable que se anula en la nueva sbf, escoger la primera en orden lexicográfico.

- Usando estos criterios se garantiza que el método Simplex no se quede atrapado en un loop.

Dudas y/o Comentarios a:
ndevia@ing.uchile.cl