

Auxiliar 5: Geometría

Jueves 19 de Abril de 2012

Pregunta 1: Degenerancia

Considere un poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n / Ax = b\}$, donde las filas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{mn}$ son linealmente independientes:

1. Suponga que hay 2 bases distintas asociadas a la misma solución básica factible $\bar{x}$. Muestre que esta solución es “degenerada”.
2. Suponga que todas las sbf’s son “no degeneradas”. Sea $x \in P$ tal que exactamente m de sus componentes son positivas. Muestre que x es una solución básica factible. ¿Qué ocurre si eliminamos el supuesto de “no degeneradas”?

Pregunta 2: Puntos extremos

1. Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n / at_i x \leq b_i \forall i = 1, \dots, m\}$. Suponga que u y v son soluciones básicas distintas que satisfacen $a_i^t u = a_i^t v = b_i$, $i = 1, \dots, n-1$ y que los vectores $a_1, \dots, a_{n-1}$ son l.i. (En particular, u y v son adyacentes). Sea $L = \{\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda \in [0, 1]\}$ el segmento que une u y v . Demuestre que $L = \{z \in P : a_i^t z = b_i, i = 1, \dots, n-1\}$.
2. Sea un poliedro P acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea a un vector en $\mathbb{R}^n$ y b un escalar. Definimos $Q = \{x \in P : a_Q^t x = b_Q\}$. Muestre que cada punto extremo de Q o es un punto extremo de P o es una combinación convexa de dos puntos extremos adyacentes de P .

Pregunta 3: Poliedros

Suponga que $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i^t x = b_i, i = 1, \dots, m\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : g_i^t x = h_i, i = 1, \dots, k\}$ son dos representaciones del mismo poliedro no vacío. Suponga que los vectores a_i cubren $\mathbb{R}^n$. Muestre que lo mismo es verdad para los vectores g_i .

Pregunta 4: Poliedros

Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ y x^* una solución básica factible no degenerada. Introducimos las variables de holgura z y construimos el correspondiente poliedro en forma estándar. Muestre que $(x^*, b - Ax^*)$ es una solución básica factible no degenerada de P' .

Pauta Auxiliar 5: Geometría

Jueves 19 de Abril de 2012

Pregunta 1: Degenerancia

Considere un poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n / Ax = b\}$, donde las filas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{mn}$ son linealmente independientes:

1. Suponga que hay 2 bases distintas asociadas a la misma solución básica factible $\bar{x}$. Muestre que esta solución es “degenerada”.
2. Suponga que todas las sbf’s son “no degeneradas”. Sea $x \in P$ tal que exactamente m de sus componentes son positivas. Muestre que x es una solución básica factible. ¿Qué ocurre si eliminamos el supuesto de “no degeneradas”?

Solución

1. Se debe demostrar que $\bar{x}$ es degenerada, es decir, que tiene más de $n - m$ componentes nulas¹.

Sean B_1, B_2 dos bases distintas asociadas a $\bar{x}$.

Por definición sabemos que las variables no básicas toman el valor cero en las bases, luego:

$$\bar{x}_i = 0, \forall i \notin B_1$$

$$\bar{x}_j = 0, \forall j \notin B_2$$

Para las variables básicas: $\bar{x}_i \geq 0, \forall i \in B_1$ y $\bar{x}_j \geq 0, \forall j \in B_2$.

Como las bases son distintas, necesariamente existe $k \in B_1$ tal que $k \notin B_2$ (o viceversa).

Como $k \in B_1$, entonces $\bar{x}_k \geq 0$ (variable básica)

y como $k \notin B_2$, entonces $\bar{x}_k = 0$ (variable no básica)

Pero como ambas bases definen a $\bar{x}$, se tiene que $\bar{x}_k = 0$ con $k \in B_1$, es decir, se tiene una variable básica nula, por lo que hay más de $n - m$ variables nulas en $\bar{x}$, lo que lo hace una solución degenerada.

2. Como $x \in P$ cumple que $Ax = b$, luego $\sum_{i=1}^n A_i x_i = b$

Sean $\{B(1), \dots, B(m)\}$ los índices de las componentes positivas de x .

Como todos los $x_{B(j)} > 0$ y los $x_i = 0, \forall i \notin B$, entonces $\sum_{j=1}^m A_{B(j)} x_{B(j)} = b$ es un sistema “cuadrado” con solución única, lo que implica que las columnas $A_{B(j)}$ son l.i.

Si las m columnas son l.i., entonces las m filas también lo son, por lo que se tienen m restricciones activas l.i. en x . Como ya se tenían $n - m$ variables nulas, se tienen n restricciones activas l.i. en el punto x :

- $A_B x_B = b$ (m restricciones activas)

¹ n es el número de variables y m es el número de restricciones

- $x_N = 0$ ($n - m$ restricciones activas)

Luego, x es una solución básica factible.

Si eliminamos el supuesto de “no degeneradas”, el punto x no será necesariamente una solución básica factible, ya que puede ocurrir que un punto interior tenga m componentes positivas. Basta considerar el punto donde se produce la degenerancia y moverse hacia el interior del poliedro aumentando las variables básicas que son nulas. Con esto se tienen m componentes positivas en un punto interior.

Pregunta 2: Puntos extremos

1. Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^t x \leq b_i \forall i = 1, \dots, m\}$. Suponga que u y v son soluciones básicas distintas que satisfacen $a_i^t u = a_i^t v = b_i$, $i = 1, \dots, n - 1$ y que los vectores $a_1, \dots, a_{n-1}$ son l.i. (En particular, u y v son adyacentes). Sea $L = \{\lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda \in [0, 1]\}$ el segmento que une u y v . Demuestre que $L = \{z \in P : a_i^t z = b_i, i = 1, \dots, n - 1\}$.
2. Sea un poliedro P acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea a un vector en $\mathbb{R}^n$ y b un escalar. Definimos $Q = \{x \in P : a^t x = b\}$. Muestre que cada punto extremo de Q o es un punto extremo de P o es una combinación convexa de dos puntos extremos adyacentes de P .

Solución

1. Sea $x \in L$, luego $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ con $\lambda \in [0, 1]$. Premultiplicando por $a_i^t, i = 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} a_i^t x &= \lambda a_i^t u + (1 - \lambda) a_i^t v \\ a_i^t x &= \lambda b_i + (1 - \lambda) b_i \\ a_i^t x &= b_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n - 1$$

Como x es combinación convexa de dos puntos de P , x también pertenece a P , luego puede ser representado por:

$$x \in \{z \in P : a_i^t z = b_i, i = 1, \dots, n - 1\}$$

2. Sea x un punto extremo de Q . Luego existen n restricciones l.i. activas en x , de las cuales $a^t x = b$ es una de ellas. Luego existen al menos $n - 1$ restricciones de P activas en x , las cuales son l.i. por el supuesto de rango completo.

Si la restricción Q es l.d. con las de P , implica de las n restricciones activas en x eran todas de P , por lo que x es un punto extremo de P .

De lo contrario, sea $a_i^t x \geq b_i$ las restricciones de P , donde:

$$a_i^t x = b_i, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

Sean u y v dos puntos extremos adyacentes de P que satisfacen:

$$a_i^t u = a_i^t v = b_i, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

Luego por la parte (1) podemos escribir x como:

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v \quad \lambda \in [0, 1]$$

Por lo que es una combinación convexa.

Pregunta 3: Poliedros

Suponga que $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i^t x = b_i, i = 1, \dots, m\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : g_i^t x = h_i, i = 1, \dots, k\}$ son dos representaciones del mismo poliedro no vacío. Suponga que los vectores a_i cubren $\mathbb{R}^n$. Muestre que lo mismo es verdad para los vectores g_i .

Solución

Como $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i x \leq b_i \forall i = 1, \dots, m\}$ es un poliedro no vacío y $(\{a_i\}_{i=1}^m) = \mathbb{R}^n$, entonces P tiene un vértice. Como $P = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i^t x = h_i, i = 1, \dots, k\}$, y P tiene un vértice, necesariamente el conjunto de restricciones que lo define contiene un conjunto l.i. de tamaño n , por lo que $(\{g_i\}_{i=1}^k) = \mathbb{R}^n$.

Pregunta 4: Poliedros

Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ y x^* una solución básica factible no degenerada. Introducimos las variables de holgura z y construimos el correspondiente poliedro en forma estándar. Muestre que $(x^*, b - Ax^*)$ es una solución básica factible no degenerada de P' .

Solución

Primero debemos darnos cuenta que P no está en su forma estándar, por lo que no podemos argumentar que x^* tiene m componentes positivas.

Luego de esto, tenemos que $x^* \geq 0$, ya que es un punto factible de P , y por lo tanto también se tiene que $b - Ax^* \geq 0$, por definición de P . Con esto tenemos la no-negatividad de $(x^*, b - Ax^*)$ en P' , es decir $Ax + z = b$.

En efecto, tomando el par $(x^*, b - Ax^*)$ se tiene que :

$$Ax + z = Ax^* + b - Ax^* = b$$

Para revisar la no degenerancia, revisamos la cantidad q de restricciones de P que se cumplen con igualdad en x^* :

- Si $q = m$ se tiene que $Ax^* = b$ y como x^* debe definirse por n restricciones de igualdad, se tiene que $m - n$ restricciones de $x^* \geq 0$ deben cumplirse con igualdad, por lo que $n - m$ componentes de x^* deben ser nulas. Como $z = b - Ax^* = 0$, se tiene que las m componentes de z son nulas, luego el par $(x, z) = (x^*, b - Ax^*)$ tiene n componentes nulas y, por lo tanto, tiene m componentes positivas, luego es no-degenerado.
- Si $q = m - 1$ se tiene que $a_j^t x^* = b_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \setminus k$ y $a_k^t x^* \leq b_k$ para algún k , y como x^* debe definirse por n restricciones de igualdad, se tiene que $n - m + 1$ componentes de x^* deben ser nulas. Como $z = b - Ax^*$, entonces $z_k = b_k - a_k^t x^* \geq 0$ y $z_j = b_j - a_j^t x^* = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus k$, luego se tiene que $m - 1$ componentes de z son nulas, entonces el par $(x, z) = (x^*, b - Ax^*)$ tiene n componentes nulas y, por tanto, tiene m componentes positivas, luego es no degenerado.
- En general si $q = m - p$, sea G el conjunto de restricciones de $Ax^* = b$ y sea $I \subseteq G$ el conjunto de de las restricciones que se cumplen con igualdad ($|I| = m - p$). Se tiene que $a_j^t x^* = b \quad \forall j \in I$ y $a_k^t x^* = 0 \quad \forall k \in G \setminus \{I\}$ y $z_j = b_j - a_j^t x^* = 0 \quad \forall j \in I$, se tiene que $m - p$ componentes de z son nulas, luego el par $(x^*, b - Ax^*)$ tiene n componentes nulas y, por lo tanto, tiene m componentes positivas, luego es no degenerado.