



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN3701: Modelamiento y Optimización
Profs: Daniel Espinoza, Roberto Cominetti
Coordinador: N. Padilla
Aux: V. Bucarey, N. Devia, A. Torrico, C. Thraves

Auxiliar extra C1: Geometría

Lunes 28 de Marzo de 2011

Pregunta 1

Demuestre el siguiente teorema. Sea P un poliedro no vacío y $x^* \in P$. Luego son equivalentes:

- a) x^* es un vértice.
- b) x^* es un punto extremo de P .
- c) x^* es una solución básica factible.

Pregunta 2

Se tiene el siguiente poliedro P :

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

- a) Grafique el poliedro.
- b) Determine los puntos extremos de P .
- c) Muestre que el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vértice bajo la definición (puede apoyarse en el gráfico).
- d) ¿Existen puntos que sean soluciones básicas pero no factibles? Si es que los hay, justifique claramente por qué.

Pregunta 3

Sabemos que cada problema de programación lineal puede ser convertido a su problema equivalente en la forma estándar. También sabemos que un poliedro no vacío en su forma estándar tiene al menos un punto extremo. Entonces podemos concluir que cualquier poliedro no vacío tiene al menos un punto extremo. Explique por qué este razonamiento es incorrecto.

Pregunta 4

Sea A_1, A_2, \dots, A_n una colección de vectores en R^m .

- a) Sea

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \right\}$$

Pruebe que cualquier elemento de C puede ser expresado en la forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ con $\lambda_i \geq 0$ y con a lo más m componentes λ_i distintas de cero.

Hint: Considere el conjunto.

$$A = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = y, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0\}$$

¿Qué tipo de conjunto es?

b) Sea P la envoltura convexa de los vectores A_i :

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \right\}$$

Muestre que cada elemento de P puede ser expresado de la forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$, donde $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \quad \forall i$, con a lo más $m+1$ coeficientes λ_i distintos de cero.

Pregunta 5

Determine si el conjunto de todos los $(x, y) \in R^2$ que satisfacen:

$$\begin{aligned} x \cos(\theta) + y \sin(\theta) &\leq 1 & \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Es un conjunto convexo. ¿Es este conjunto un poliedro?

Pregunta 6

Suponga que usted es el dueño de la fábrica de viagra "*Mandinga no puede*", y sabe que debe satisfacer la demanda que enfrenta para los próximos T meses. Esta demanda la ha estimado en D_t unidades para el mes t . Actualmente la empresa presenta los siguientes costos de producción:

- Un costo fijo de K para cada mes.
- Un costo unitario de producción de c_t para cada mes.

Además, cuenta con una capacidad máxima de producción de Q_m unidades igual para todos los períodos, y en cualquier período puede decidir cambiar la tecnología de producción que está siendo utilizada, lo cual modificaría los costos unitarios de producción a c_t^a , con $c_t^a < c_t$; y la capacidad máxima de la empresa a Q_m^t . La implantación de esta nueva tecnología obliga a la empresa a incurrir en un costo de I .

Cabe destacar que una vez que se ha realizado el cambio tecnológico no es posible regresar a la tecnología original, la inversión es realizada una única vez y que el producto no se puede almacenar en bodega.

Adicionalmente, usted posee convenios con la competencia que le permiten comprar unidades de un producto terminado a un precio de P , con $P > c_t$ para todo t . Con esta información responda:

1. Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar las acciones que se deben realizar a lo largo del período de planificación con el fin de minimizar los costos en que debe incurrir la empresa para satisfacer la demanda
2. ¿Cómo cambia su respuesta si ahora se permite realizar inventario de productos, asumiendo un costo asociado de b_t por unidad almacenada desde el período t al $t+1$, y un inventario máximo de B unidades?