

Dualidad y Sensibilidad

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

20 de marzo de 2012

Contenidos

- 1 Motivación
- 2 Dualidad y Representación de Poliedros
- 3 Análisis de Sensibilidad

Motivación

- Consideramos

$$(P) : \quad \text{máx} \{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

- Buscamos una forma de **acotar** z_P por arriba.
- Ejemplo:

$$(P) : \quad \text{máx} \left\{ 7x_1 + 9x_2 : \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x \geq 0 \right\}$$

- Sumando ambas restricciones del ejemplo obtenemos $8x_1 + 10x_2 \leq 5$.
- Con esto podemos concluir $z_P \leq 5$.
- ¿Cómo podemos hacer esto en general?
- ¿Qué tan buenas son las cotas encontradas de esta manera?

Motivación

- Consideramos

$$(P) : \quad \text{máx} \{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

- En general buscamos $y \in \mathbb{R}_+^m$ tal que $\sum_{i=1}^m y_i a_i \geq c$
- Note que $y^t b$ es una cota superior para z_P .
- De donde podemos definir el problema de optimización:

$$(D) : \quad \text{mín} \{yb^t : A^t y \geq c^t, y \geq 0\}$$

- (D) es el **problema dual** de (P) , y (P) se dice problema primal.

Theorem (Dualidad Débil)

Para cualquier problema (P) y su dual (D) se tiene que $z_P \leq z_D$.

El dual del dual es equivalente al problema primal.

Problema Dual en forma estándar

- Consideremos (P) en forma estándar:
 $(P) : \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}.$
- (P) es equivalente a
 $(P') : \max\{-cx : Ax \leq b, -Ax \leq -b, x \geq 0\}.$
- El dual de (P') (D') sería

$$(D') : \min\{y_+b^t - y_-b^t : A^ty_+ - A^ty_- \geq -c^t, y_+, y_- \geq 0\}$$

- Note que (D') es equivalente a

$$(D) : \max\{yb^t : A^ty \leq c^t\}$$

- (D) se llama el **dual** de (P) , y por construcción tenemos $z_D \leq z_P$.

Equivalencia de Duales

Theorem (Equivalencia de Duales)

Suponga que tenemos un Problema lineal factible (P), y lo hemos transformado en un problema lineal (P') por una secuencia de operaciones del tipo:

- *Reemplazar una variable libre con la diferencia de dos variables no-negativas.*
- *Reemplazar una desigualdad por una igualdad con una variable de holgura positiva.*
- *Eliminar restricciones de igualdad linealmente dependientes.*

Entonces los duales (D) de (P) y (D') de (P') son equivalentes, es decir, o ambos son infactibles, o ambos tienen el mismo valor óptimo.

Teorema de Dualidad

- Recordemos que para (P) en forma estándar, y (D) su dual, tenemos $z_D \leq z_P$.

Corollary

- Si $z_P = -\infty$ entonces (D) es infactible.
- Si $z_D = \infty$ entonces (P) es infactible.
- Puede ser que $z_P > z_D$?

Theorem (Dualidad Fuerte 1947-1951)

Si P tiene solución óptima, entonces $z_P = z_D$.

- Ind: use algoritmo de simplex y defina $y^t = c_B A_B^{-1}$.
- Note que (P) no acotado $\Rightarrow (D)$ infactible, y que (P) con solución óptima $\Rightarrow (D)$ solución óptima, ¿Qué pasa si (P) es infactible?
 - Existen pares duales/primales infactibles.

Holgura Complementaria

Theorem (Holgura Complementaria)

Considerando $(P) : \max \{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ y su dual $(D) : \min \{yb^t : A^t y \geq c^t, y \geq 0\}$, asumiendo que ambos son factibles, y que x^* es una solución factible de (P) y y^* es una solución factible de (D) .

Entonces $(Ax^* - b)_i y_i^* = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ y $(A^t y^* - c^t)_i x_i^* = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ si y sólo si x^* es óptimo primal y y^* es óptimo dual.

- Ind: Use dualidad fuerte y débil, y la factibilidad de x^* y y^* .

Interpretación económica de las variables duales

- Consideremos (P) en forma estándar, y sea x^* una solución óptima básica no degenerada.
 - Recordemos que $y^* = (c_B A_B^{-1})^t$ es la solución óptima al problema dual y que $cx^* = b^t y^*$.
 - ¿Qué ocurre si perturbamos b a un valor $b + d$ con d tal que $A_B^{-1}(b + d) \geq 0$?
 - B sigue siendo una base óptima.
 - El valor óptimo del problema perturbado es $c_B A_B^{-1}(b + d) = (b + d)^t y^*$.
 - y_i^* representa el cambio en la función objetivo por unidad del recurso b_i que cambiamos.
 - y_i^* se llama **precio sombra** de la restricción $i \in \{1, \dots, m\}$.
 - Note que, por holgura complementaria, sólo restricciones activas en el óptimo pueden tener precios sombras no-negativos.
- ¿Qué sucede si x^* es solución óptima básica degenerada?
 - Podríamos considerar **todas** las bases óptimas y usar un promedio de los duales resultantes.

Lema de Farkas

- Un problema relacionado (y anterior) a optimización es, dado un poliedro, determinar si es factible.
- La forma más sencilla del problema puede escribirse como ¿Cuándo $P := \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ tiene solución factible?

Theorem (Lema de Farkas 1896)

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces exactamente una de las dos proposiciones es cierta:

- 1 Existe $x \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $Ax = b$.
- 2 Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^t A \geq 0$ y $y^t b < 0$.

- ¿Cuál es la interpretación geométrica de este resultado?
- Esto es un caso particular del teorema de separación de conjuntos convexos.

Conos

Definition (Conos)

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **cono** si $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in C$ se tiene que $\lambda x \in C$.

Definition (Conos Polidrales)

Un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice poliedral si existe $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}$.

Theorem (Conos punteados)

Sea C un cono poliedral en $\mathbb{R}^n$ definido por $a_i x \geq 0 : i = 1, \dots, m$. Entonces, las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

- 1 0 es un punto extremo de C .
- 2 C no contiene una línea.
- 3 Existe $B = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ tal que $\{a_i\}_{i \in B}$ es un conjunto l.i.

Rayos y Rayos Extremos

Definition (Cono de Recesión)

Dado $P = \{x : Ax \geq b\}$, y $\bar{x} \in P$, definimos el **cono de recesión** de P en x como $P_o(\bar{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n : A(\bar{x} + \lambda d) \geq b, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+\}$.

- Note que $P_o(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}$.

Definition (Rayo Extremo)

Dado C un cono poliedral, y $x \in C \setminus \{0\}$. x se dice **rayo extremo** si hay $n - 1$ restricciones activas l.i. en x . Si C es el cono de recesión de P , x se dice rayo extremo de P .

Theorem (Óptimos en Conos poliedrales)

Consideremos $(P) : \min\{cx : Ax \geq 0\}$. El problema es no acotado si y sólo si existe un rayo extremo d con $cd < 0$.

- Ind: Considere $P' := \{x : Ax \geq 0, cx \geq -1\}$.

Rayos extremos y problemas no acotados

Theorem (Óptimos no acotado en poliedros)

Consideremos el problema $(P) : \min\{cx : Ax \geq b\}$ y asuma que $\{x : Ax \geq b\}$ posee al menos un punto extremo.

Entonces (P) es no acotado si y sólo si existe un rayo extremo d de P que satisface $cd < 0$.

- Considere el problema dual de (P) , modifique la función objetivo por la función nula y tome el dual de problema resultante.
- Para concluir aplique el teorema anterior.
- Note que el conjunto de rayos extremos de un poliedro es finito.

Theorem (Representación de Poliedros)

Sea $P = \{x : Ax \geq b\}$ un poliedro no vacío con al menos un punto extremo.

Sea $V := \{x^i\}_{i=1}^v$ el conjunto de todos los puntos extremos de P .

Sea $R := \{w^i\}_{i=1}^r$ el conjunto de todos los rayos extremos de P .

Definimos

$$Q := \left\{ \sum_{i=1}^v x^i \lambda_i + \sum_{i=1}^r w^i \mu_i : \lambda, \mu \geq 0, \sum_{i=1}^v \lambda_i = 1 \right\}$$

Entonces $Q = P$.

- Claramente $Q \subseteq P$ (¿Por qué?).
- Suponga que esta contenidos estrictamente.
- Busque hiperplano p separando punto en P no contenido en Q .
- Minimice p en P y concluya.

Conjuntos generados finitamente

Definition (Conjuntos finitamente generados)

Dados $V = \{x^i\}_{i=1}^v, R = \{w^i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{R}^n$, se dice que

$$Q := \left\{ \sum_{i=1}^v x^i \lambda_i + \sum_{i=1}^r w^i \mu_i : \lambda, \mu \geq 0, \sum_{i=1}^v \lambda_i = 1 \right\}$$

es **finitamente generado**

Corollary

Todo poliedro es finitamente generado

Theorem (Poliedros y conjuntos finitamente generados)

Todo conjunto finitamente generado es un poliedro

- Ind: Considere maximizar 0 sobre Q y su dual para caracterizar $x \in Q$.

Sensibilidad

- Consideremos $(P) : \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ en forma estándar y $(D) : \max\{b^t y : A^t y \leq c\}$ su dual, y sea B base óptima.
- $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N) = (A_B^{-1}b, 0)$ y $\bar{y} = A_B^{-t}c_B^t$ son soluciones óptimas de (P) y (D) respectivamente.
- Cualquier cambio en A, b, c que mantenga la factibilidad de $\bar{x}$ y de $\bar{y}$ mantiene la optimalidad de B .
- ¿Si agregamos una nueva variable x_{n+1} con vector columna A_{n+1} ?
- ¿Si agregamos nueva restricción?
 - Si se viola, podemos hacer algo?
 - Idea de simplex dual.
- Cambios en b solo afectan factibilidad primal.
- Cambios en c solo afectan factibilidad dual.
- Cambios en A_i con $i \in N$ solo afectan factibilidad dual.