

Dualidad

Nelson Devia C.

IN3701 - Modelamiento y Optimización
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

2011

Basado en Bertsimas, D., Tsitsiklis, J. (1997)
"Introduction to Linear Optimization"
Capítulo 4

Contenidos

- 1 Introducción
- 2 El Problema Dual
- 3 Teoremas de Dualidad
- 4 Precios Sombra
- 5 Lema de Farkas

Introducción

- Sea el problema de optimización (P) :

$$\begin{aligned}(P) \quad & \text{máx} \quad z = c'x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

- Consideremos la siguiente relajación de (P) :

$$(PR) \quad g(y) = \max_{x \geq 0} [c'x + y'(b - Ax)]$$

- Las restricciones se han reemplazado por penalizaciones en la función objetivo, ponderadas por un vector $y \geq 0$
- Al tener menos restricciones, la región factible de (PR) es más grande o igual que la de (P) , por lo tanto:

$$g(y) \geq z^* = c'x^*$$

donde z^* es el valor óptimo y x^* es la solución óptima de (P) .

- Luego, para todo vector $y \geq 0$, se obtiene una cota superior para (P) .

Introducción

- Luego, la mejor cota que podemos obtener está dada por:

$$\min_{y \geq 0} g(y)$$

- Pero sabemos que:

$$\begin{aligned} g(y) &= \max_{x \geq 0} [c'x + y'(b - Ax)] \\ &= y'b + \max_{x \geq 0} [(c' - y'A)x] \end{aligned}$$

Donde:

$$\max_{x \geq 0} [(c' - y'A)x] = \begin{cases} 0 & \text{si } (c' - y'A) \leq 0 \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}$$

- Por ahora, sólo nos interesa el caso finito, por lo que se tiene que la mejor cota posible para (P) está dada por:

$$\begin{array}{ll} \min & y'b \\ & c' - y'A \leq 0 \\ & y \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} (D) & \min \quad w = b'y \\ & A'y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

El Problema Dual

- El problema original (**P**) se conoce como el **problema primal**, mientras que (**D**) se conoce como el **problema dual** de (**P**).

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{máx} \quad z = c'x \\
 & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \text{mín} \quad w = b'y \\
 & A'y \geq c \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

- En general:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \text{mín} \quad z = c'x \\
 & a'_i x \geq b_i \quad i \in M_1 \\
 & a'_i x \leq b_i \quad i \in M_2 \\
 & a'_i x = b_i \quad i \in M_3 \\
 & x_j \geq 0 \quad j \in N_1 \\
 & x_j \leq 0 \quad j \in N_2 \\
 & x_j \text{ libre} \quad j \in N_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \text{máx} \quad w = b'y \\
 & y_i \geq 0 \quad i \in M_1 \\
 & y_i \leq 0 \quad i \in M_2 \\
 & y_i \text{ libre} \quad i \in M_3 \\
 & A'_j y \leq c_j \quad j \in N_1 \\
 & A'_j y \geq c_j \quad j \in N_2 \\
 & A'_j y = c_j \quad j \in N_3
 \end{aligned}$$

El Problema Dual

- Notar que por cada variable en el problema primal se introduce una restricción en el dual y por cada restricción en el primal, una variable en el dual:

PRIMAL	Minimización	Maximización	DUAL
Restricciones	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 libre	Variables
Variables	≥ 0 ≤ 0 libre	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	Restricciones

Ejemplo

- Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad \text{máx} \quad & z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\
 & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \\
 & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Si elegimos $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, ponderamos las restricciones y las sumamos, obtenemos una cota superior de z para cualquier x factible en (P) :

$$\begin{aligned}
 w &= y_1 \cdot (-x_1 - 2x_2 + x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + x_2 + 4x_3) \leq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \\
 &= 1 \cdot (-x_1 - 2x_2 + x_3) + 2 \cdot (5x_1 + x_2 + 4x_3) \leq 1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \\
 &= 9x_1 + 0x_2 + 9x_3 \leq 22
 \end{aligned}$$

- Sabemos que término a término:

$$z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \leq w = 9x_1 + 0x_2 + 9x_3 \leq 22$$

- Luego, sabemos que $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \leq 22$ para todo $x = (x_1, x_2, x_3)'$ factible en (P) .

Ejemplo

- En particular, el óptimo: $z^* \leq 22$
- La mejor cota está dada por el vector y que resuelva:

- Minimizar el valor de la cota: $(D) \text{ mín } w = 10y_1 + 6y_2$
- Cota para el coeficiente de x_1 : $-y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1)$
- Cota para el coeficiente de x_2 : $-2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2)$
- Cota para el coeficiente de x_3 : $y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3)$
- Multiplicadores positivos: $y_1, y_2 \geq 0$
 - Conservan el sentido de las desigualdades.

- Nota:
 - Se puede formular este problema a partir de (P) más fácilmente usando la tabla de la lámina 6

Ejemplo

- Matricialmente:

- Primal:**

$$\begin{aligned}(P) \quad \text{máx} \quad z &= (3 \quad -2 \quad 7) \cdot (x_1 \quad x_2 \quad x_3)' \\ &\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &(x_1 \quad x_2 \quad x_3)' \geq 0\end{aligned}$$

- Dual:**

$$\begin{aligned}(D) \quad \text{mín} \quad w &= (10 \quad 6) \cdot (y_1 \quad y_2)' \\ &\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &(y_1 \quad y_2)' \geq 0\end{aligned}$$

El Dual del Dual

Teorema:

- Sea un problema de minimización (P) y su correspondiente problema dual (D) . Si se obtiene el problema dual de (D) se recupera el problema original (P) .
- En otras palabras:

“El dual del dual es el primal”

$$\begin{aligned}(P) \quad \text{máx} \quad & z = c'x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(D) \quad \text{mín} \quad & w = b'y \\ & A'y \geq c \\ & y \geq 0\end{aligned}$$

Teoremas de Dualidad

- **Teorema de Dualidad Débil**

- Sea x una solución factible de un problema de minimización primal (P) e y , una solución factible del problema de maximización dual (D), entonces:

$$w = b'y \leq z = c'x$$

- En otras palabras:
 - w es una cota inferior para cualquier solución factible de (P)
 - z es una cota superior para cualquier solución factible de (D)

- **Corolario 1**

- Si (P) es no acotado, es decir: $z^* = -\infty$, entonces (D) es infactible.
- Si (D) es no acotado, es decir: $w^* = +\infty$, entonces (P) es infactible.

- **Corolario 2**

- Si $b'y = c'x$, entonces x e y son soluciones óptimas de los problemas primal y dual, respectivamente.

Teoremas de Dualidad

Ejemplo:

- Solución factible de (P) :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 7$$

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{máx} \quad & z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \\ & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Solución factible de (D) :

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow w = 22$$

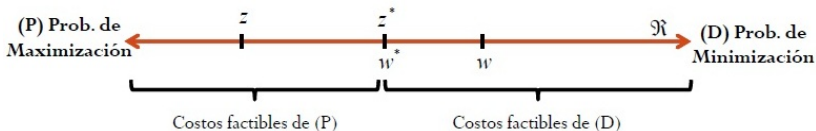
$$\begin{aligned} (D) \quad \text{mín} \quad & w = 10y_1 + 6y_2 \\ & -y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1) \\ & -2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2) \\ & y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3) \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Dualidad débil} \Rightarrow z \leq w$$

Teoremas de Dualidad

• Teorema de Dualidad Fuerte

- Si un problema de programación dual tiene una solución óptima, también la tiene su dual y los respectivos costos óptimos son iguales: $z^* = w^*$



• Posibilidades para el primal y el dual:

	Óptimo Finito	No Acotado	Infactible
Óptimo Finito	Posible	Imposible	Imposible
No Acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

Teoremas de Dualidad

Ejemplo:

- Solución factible de (P) :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 10,5$$

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{máx} \quad & z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \\ & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Solución factible de (D) :

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 10,5 \end{pmatrix} \Rightarrow w = 22$$

$$\begin{aligned} (D) \quad \text{mín} \quad & w = 10y_1 + 6y_2 \\ & -y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1) \\ & -2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2) \\ & y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3) \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Dualidad fuerte} \Rightarrow z^* = w^*$$

Teorema de Holgura Complementaria

- Sean x e y soluciones factibles para el problema primal y dual, respectivamente. Los vectores x e y son soluciones óptimas de sus respectivos problemas si y sólo si:

$$y_i \cdot (a'_i x - b_i) = 0 \quad \forall i$$
$$(c_j - y' A_j) \cdot x_j = 0 \quad \forall j$$

- En otras palabras:
 - La i -ésima variable dual es cero o la i -ésima restricción primal es activa.
 - y
 - La j -ésima variable primal es cero o la j -ésima restricción dual es activa.
- Permite encontrar el óptimo del problema primal a través del óptimo del problema dual.

¡El dual puede ser más fácil de resolver!

Teorema de Holgura Complementaria

Ejemplo:

$$(D) \text{ mín } w = 10y_1 + 6y_2$$

$$-y_1 + 5y_2 \geq 3$$

$$-2y_1 + y_2 \geq -2$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 7$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$(P) \text{ máx } z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

Teorema de Holgura Complementaria (THC)

$$y_1^* \cdot (-x_1^* - 2x_2^* + x_3^* - 10) = 0$$

$$y_2^* \cdot (5x_1^* + x_2^* + 4x_3^* - 6) = 0$$

$$(3 + y_1^* - 5y_2^*) \cdot x_1^* = 0$$

$$(-2 + 2y_1^* - y_2^*) \cdot x_2^* = 0$$

$$(7 - y_1^* - 4y_2^*) \cdot x_3^* = 0$$



$$0 \cdot (-x_1^* - 2x_2^* + x_3^* - 10) = 0$$

$$1,75 \cdot (5x_1^* + x_2^* + 4x_3^* - 6) = 0$$

$$(3 + 0 - 5 \cdot 1,75) \cdot x_1^* = 0$$

$$(-2 + 2 \cdot 0 - 1,75) \cdot x_2^* = 0$$

$$(7 - 0 - 4 \cdot 1,75) \cdot x_3^* = 0$$

Precios Sombra

- Consideremos el problema en forma estándar:

$$\begin{aligned}(P) \quad & \text{máx} \quad c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

- Supongamos que existe una sbf óptima no degenerada x , luego:
 $x_B = A_B^{-1}b > 0$, con A_B la base asociada.
- Si añadimos una perturbación d en b lo suficientemente pequeña:

$$x_B = A_B^{-1}(b + d) > 0$$

- Los costos reducidos no cambian al variar b
($\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N$), luego la base permanece óptima.
- El costo óptimo original era:

$$\begin{aligned}c'x^* &= c'_B x_B + c'_N x_N \quad (\text{con } x_N = 0 \text{ y } x_B = A_B^{-1}b) \\ c'x^* &= c'_B A_B^{-1}b\end{aligned}$$

- Por dualidad fuerte se sabe que: $c'x^* = y'^*b$

Precios Sombra

- Luego, la solución óptima del problema dual equivale a:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1}$$

- El costo óptimo luego de la perturbación d cambia a:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' \mathbf{x}^* &= \mathbf{c}_B' \mathbf{A}_B^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{d}) \\ &= \mathbf{y}^{*'} (\mathbf{b} + \mathbf{d}) \\ &= \mathbf{y}^{*'} \mathbf{b} + \sum_{i=1}^n y_i^* d_i \end{aligned}$$

- Con esto se concluye que cada componente y_i^* del vector óptimo dual $\mathbf{y}^*$ puede interpretarse como el **costo marginal (precio sombra)** de aumentar en una unidad la i -ésima componente del vector $\mathbf{b}$.

Precios Sombra

(P) máx $z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3$ $-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10$ $5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	(D) mín $w = 10y_1 + 6y_2$ $-y_1 + 5y_2 \geq 3$ $-2y_1 + y_2 \geq -2$ $y_1 + 4y_2 \geq 7$ $y_1, y_2 \geq 0$
$z^* = 10,5$ $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,75 \end{pmatrix}$	$w^* = 10,5$ $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

- Aumentar $b_2 = 6$ en (P) en 1 unidad genera un mejoramiento de la función objetivo de 1,75 unidades: $z^* = 12,25$
 - ¡Aumentar $b_1 = 10$ no sirve de nada! (marginalmente), ya que esa restricción no es activa en el óptimo.
- Aumentar $c_3 = 7$ en (D) en 1 unidad genera un empeoramiento de la función objetivo de 1,5 unidades: $w^* = 12$
 - ¡Estamos minimizando!
 - ¡Aumentar c_1 ó c_2 no sirve de nada! (marginalmente)

Lema de Farkas

- Se pretende demostrar que la infactibilidad de un sistema de inecuaciones lineales es equivalente a la factibilidad de otro sistema de inecuaciones lineales relacionado.
- En otras palabras, el segundo sistema **certifica la infactibilidad** del primero.
- Por ejemplo, consideremos el sistema:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

y supongamos que existe y tal que:

$$y'A \geq 0$$

$$y'b < 0$$

- Post-multiplicando por un $x \geq 0$ se tiene que: $y'Ax \geq 0$
- Como $y'b < 0$ la única opción es que: $Ax \neq b \quad \forall x \geq 0$

Lema de Farkas

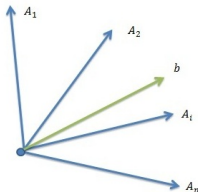
Lema:

Sea A una matriz de dimensiones $m \times n$ y sea b un vector en $\mathbb{R}^m$. Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes alternativas:

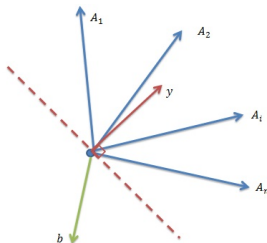
- (a) Existe algún $x \geq 0$ tal que $Ax = b$.
- (b) Existe algún vector y tal que $y'A \geq 0$ y $y'b < 0$

Gráficamente:

- (a) El vector b es una combinación lineal positiva de las columnas A_i .



- (b) Existe un hiperplano y que separa al vector b de todas las columnas A_i .



Dudas y/o Comentarios a:
ndevia@ing.uchile.cl

