Ejemplos de Simplex

Nelson Devia C.

IN3701 - Modelamiento y Optimización
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

2011

Contenidos

Introducción

- Consideremos el siguiente problema de optimización en $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
(P)\ \text{máx} \quad & x_1 + 2x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_2 \leq 3 \\
& -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Lo primero es llevar (P) a su forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 \qquad (R_1) \\
& x_2 + x_4 = 3 \qquad (R_2) \\
& -x_1 + x_2 + x_5 = 3 \qquad (R_3) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Introducción

- Consideremos el siguiente problema de optimización en $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
(P)\ \text{máx} \quad & x_1 + 2x_2 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_2 &\leq 3 \\
-x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- **Matricialmente**:

$$
\text{mín} \quad z = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}'
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}' \geq 0
$$

Introducción

- Consideremos el siguiente problema de optimización en $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{array}{lrl}
(P)\ \text{máx} & x_1 + 2x_2 & \\
 & x_1 + x_2 & \leq 4 \\
 & x_2 & \leq 3 \\
 & -x_1 + x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

- La región factible de (P) es la siguiente:

Inicialización

- El algoritmo necesita una base inicial factible (cualquiera) para comenzar a iterar.
- Recordemos que una base cumple que:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in B$$
$$x_i = 0 \quad \forall i \notin B$$

- Lo más sencillo es comenzar desde la base asociada al origen:

$$x_B = \{x_3, x_4, x_5\}$$
$$x_N = \{x_1, x_2\}$$

- Con esto se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

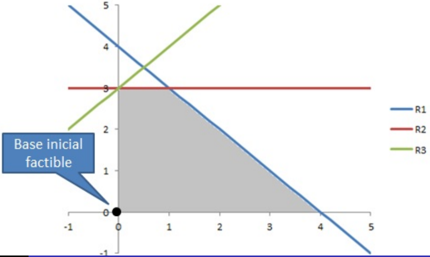
Inicialización

- Conociendo los valores de x_1 y x_2 es fácil determinar los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 4 \\ x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad &= 3 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Con esto se obtiene que:

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_3 = 4 \\ x_4 = 3 \\ x_5 = 3 \end{matrix}$$



Inicialización

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B\overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_2} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_4 \quad x_5} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_2}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_1 & \overline{c}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_2}$$

- Como existen costos reducidos negativos, la base actual no es óptima, luego, se escoge la variable con menor costo reducido para que entre a la base:

  Criterio de entrada a la base: $\min\limits_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$

  - En este caso: $\min\{\overline{c}_1, \overline{c}_2\} = -2$, luego $\mathbf{x_2}$ **entra a la base**.

Inicialización

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_2 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

donde: $\overline{a}_{is}$ es la i-ésima componente de la columna de $\overline{A_N} = A_B^{-1} A_N$ asociada a la columna de la variable que sale (s) y $\overline{b}$ es la i-ésima componente del vector $\overline{b} = A_B^{-1} b$.

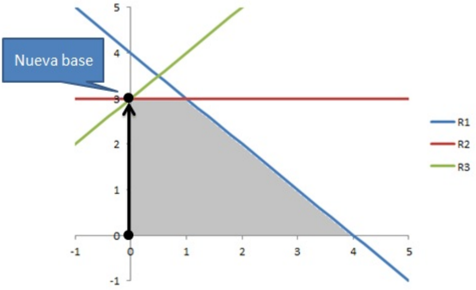
- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i2}>0} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,2}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,2}}, \frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{3,2}} \right\}}_{x_3 \quad x_4 \quad x_5} = \min \underbrace{\left\{ \frac{4}{1}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} \right\}}_{x_3 \quad \mathbf{x_4} \quad \mathbf{x_5}} = 3$$

- Como tenemos un empate, da igual qué variable se elige entre x_4 y x_5.
- Eligiendo arbitrariamente, **$\mathbf{x_5}$ sale de la base**.

Inicialización

- Esto implica que x_2 puede crecer, mientras que x_5 se anula en la nueva base.
- En otras palabras, la restricción $x_2 \geq 0$ deja de ser activa y la restricción $R_3 : -x_1 + x_2 \leq 3$ ahora lo es.



Iteración 2

- La nueva base queda:

$$\begin{aligned} x_B &= \{x_3, x_4, x_2\} \\ x_N &= \{x_1, x_5\} \end{aligned}$$

- Con esto se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_4 \quad x_2}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_5}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

Iteración 2

- Conociendo los valores de x_1 y x_5 se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad\quad &= 3 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_4 &= 0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

Iteración 2

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B\overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_5} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_4 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_5}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_1 & \overline{c}_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_5}$$

- Como existe un costo reducido negativo, la base actual no es óptima, luego, se escoge la variable con menor costo reducido para que entre a la base:
  Criterio de entrada a la base: $\min\limits_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$
  - En este caso: $\min\{\overline{c}_1, \overline{c}_5\} = -3$, luego $\mathbf{x_1}$ **entra a la base**.

Iteración 2

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_1 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

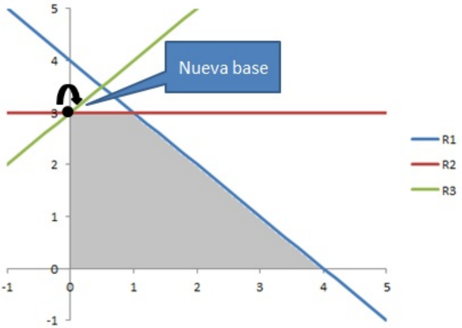
- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i1}>0} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,1}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,1}}, \frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{3,1}} \right\}}_{x_3 \quad x_4 \quad x_2} = \min \underbrace{\left\{ \frac{1}{1}, \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{-1}} \right\}}_{x_3 \quad \mathbf{x_4} \quad \mathbf{x_2}} = 0$$

- Luego, $\mathbf{x_4}$ **sale de la base**.
- Notar que **estamos sobre un punto degenerado** por varias razones:
  - El criterio de salida dio como resultado 0 (lo máximo que podemos movernos en la dirección básica d^1 es 0).
  - El vector $\overline{b}$ tiene una componente nula.
  - El vector x tiene más de 2 componentes nulas ($n - m = 5 - 3 = 2$).

Iteración 2

- Esto implica que x_1 podría crecer hasta que x_4 se anule, lo cual ocurre inmediatamente.
- En otras palabras, la restricción $x_1 \geq 0$ puede dejar de ser activa y la restricción $R_2 : x_2 \leq 3$ continúa siéndolo.



Iteración 3

- La nueva base queda:

$$
\begin{aligned}
x_B &= \{x_3, x_1, x_2\} \\
x_N &= \{x_4, x_5\}
\end{aligned}
$$

- Con esto se tiene que:

$$
A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \left.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}
$$

$$
A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_1 \quad x_2}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_5}, \quad \overline{b} = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}
$$

Iteración 3

- Conociendo los valores de x_4 y x_5 se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad & = 4 \\ x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad & = 3 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad + x_5 & = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{aligned}$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

Iteración 3

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B\overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_5} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_1 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_5}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_4 & \overline{c}_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_5}$$

- Como existe un costo reducido negativo, la base actual no es óptima, luego, se escoge la variable con menor costo reducido para que entre a la base:

  Criterio de entrada a la base: $\min\limits_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$
  - En este caso: $\min\{\overline{c}_4, \overline{c}_5\} = -1$, luego $\mathbf{x_5}$ **entra a la base**.

Iteración 3

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_1 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

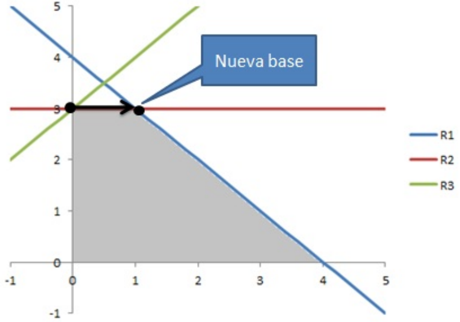
- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i5}>0} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,5}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,5}}, \frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{3,5}} \right\}}_{x_3 \quad x_1 \quad x_2} = \min \underbrace{\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{-1}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}} \right\}}_{\mathbf{x_3} \quad \mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2}} = 1$$

- Luego, $\mathbf{x_3}$ **sale de la base**.

Iteración 3

- Esto implica que x_5 puede crecer hasta que x_3 se anule.
- En otras palabras, la restricción $R_3 : -x_1 + x_2 \leq 3$ puede dejar de ser activa, mientras que la restricción $R_1 : x_1 + x_2 \leq 4$ ahora lo es.



Iteración 4

- La nueva base queda:

$$
\begin{aligned}
x_B &= \{x_5, x_1, x_2\} \\
x_N &= \{x_4, x_3\}
\end{aligned}
$$

- Con esto se tiene que:

$$
A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \left.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}
$$

$$
A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_5 \quad x_1 \quad x_2}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_3}, \quad \overline{b} = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}
$$

Iteración 4

- Conociendo los valores de x_4 y x_3 se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 3 \\
-x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_5 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array}$

Iteración 4

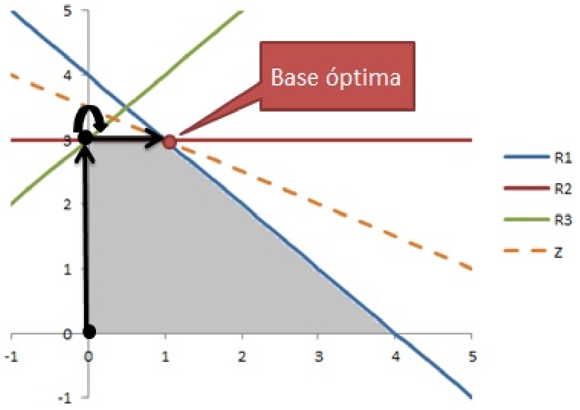
- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B \overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_3} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{x_5 \quad x_1 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_3}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_4 & \overline{c}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_4 \quad x_3}$$

- Como todos los costos reducidos son no negativos, estamos en la base óptima:
  - $x_B^* = \{x_5, x_1, x_2\}$, $x_N^* = \{x_4, x_3\}$
  - $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* & x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $z^* = c'_B x_B^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}' = -7$

Solución Óptima de (P)



Fase I

- El algoritmo Simplex garantiza encontrar la solución óptima de un problema lineal o una dirección de crecimiento infinito (si el problema es no acotado).
- Para esto necesita una Base Inicial Factible de la cual comenzar a iterar.
- Cuando el origen es factible, es fácil encontrar una base inicial asociada a ese punto, dejando las variables originales fuera de la base (porque valen 0) y formando la base con las variables de holgura, cuyas columnas son claramente l.i.:
- Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad z = -x_1 - 2x_2 & \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad & = 4 \\
x_2 \qquad + x_4 \qquad & = 3 \\
-x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Fase I

- En general, si tenemos un problema (P) del tipo:

$$\begin{aligned} (P)\, \text{mín}\, z = \quad & c'x \\ & Ax \quad \leq b \\ & x \quad \geq 0 \end{aligned}$$

  con $b \geq 0$, siempre se tiene que $x = 0$ es una solución factible.

- Luego, agregando las variables de holgura (s) se tiene que:

$$\begin{aligned} (P)\, \text{mín}\, z = \quad & c'x \\ & Ax + s \quad = b \\ & x, s \quad \geq 0 \end{aligned}$$

- En este nuevo problema $x = 0$ y $s = b$ es una solución factible y la base $x_B = s$ y $x_N = x$ es una base inicial factible.

Fase I

- ¿Qué pasa cuando el origen no es factible?

$$
\begin{aligned}
(P)\ \min z = \quad & c'x \\
& A^1x \quad \leq b^1 \\
& A^2x \quad \geq b^2 \\
& x \quad \geq 0
\end{aligned}
$$

  con $b^1, b^2 \geq 0$ (con algún i tal que $b^2_i > 0$) y A^1, A^2 matrices de $m^1 \times n$ y $m^2 \times n$, respectivamente.

- No existe una Base Inicial Factible trivial como en el caso anterior.

$$
\begin{aligned}
(P)\ \min z = \quad & c'x \\
& A^1x + s^1 \quad = b^1 \\
& A^2x - s^2 \quad = b^2 \\
& x, s^1, s^2 \quad \geq 0
\end{aligned}
$$

- En este caso $x = 0$, $s^1 = b^1$ y $s^2 = -b^2$ no es una solución factible.

Fase I

- En general, no es directo encontrar una Base Inicial Factible y se necesita resolver un problema de optimización auxiliar para hacerlo.
- Consideremos el siguiente problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} (P)\ \min z = \quad & c'x \\ & Ax \quad = b \\ & x \quad \geq 0 \end{aligned}$$

  donde asumimos sin pérdida de generalidad que $b \geq 0$.
- Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ un vector de **variables artificiales** no negativas. Definimos el problema auxiliar:

$$\begin{aligned} (PF1)\ \min \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ & Ax + y \quad = b \\ & x, y \quad \geq 0 \end{aligned}$$

- En este nuevo problema $x = 0$ e $y = b$ es una solución básica factible y la correspondiente matriz básica es la identidad.

Fase I

- Notar que si $y = 0$ se recupera la región factible del problema original (P).
- En otras palabras, si la solución óptima de este problema es 0, la base óptima de $(PF1)$ corresponde a una base factible de (P).
- Por otro lado, si el óptimo de este problema no es 0, entonces no es posible eliminar las variables artificiales (y) del sistema:

$$\begin{aligned} Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

- Esto implica que el sistema:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

  no tiene solución.
- Si esto sucede, **el problema original (P) es infactible**.

Fase I

- Luego, el problema de Fase I $(PF1)$ se resuelve usando Simplex a partir de la base dada por $x_B = y$, $x_N = x$.
- Idealmente se obtiene que $y^* = 0$ sacando las variables artificiales de la base, obteniendo una base que sólo depende de las variables originales (x).
- Sin embargo, si el óptimo de $(PF1)$ es degenerado, puede ocurrir que $y^* = 0$ con algún y_i dentro de la base.
- Si la base óptima $x_B^P F1$ no contiene variables artificiales, se utiliza esta misma base para comenzar a resolver el problema original.
- De lo contrario, si existen variables artificiales en la base óptima y_B, se debe modificar la función objetivo original:

$$
\begin{aligned}
(P)\ \min z = \quad & c'x + M \sum_{i/y_i \in B} y_i \quad & M \gg 1 \\
& Ax & = b \\
& x, y_B & \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo Fase I

- Consideremos el siguiente problema de optimización en $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{array}{lll}
(P)\ \text{máx} & x_1 + 2x_2 & \\
& x_1 + x_2 & \leq 4 \\
& x_2 & \leq 3 \\
& -x_1 + x_2 & \leq 3 \\
& x_1 + x_2 & \geq 1 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

- Lo primero es llevar (P) a su forma estándar:

$$
\begin{array}{llr}
\text{mín} & z = -x_1 - 2x_2 & \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 & (R_1) \\
& x_2 + x_4 = 3 & (R_2) \\
& -x_1 + x_2 + x_5 = 3 & (R_3) \\
& x_1 + x_2 - x_6 = 1 & (R_4) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 &
\end{array}
$$

Ejemplo Fase I

- Agregando las variables artificiales, se formula el problema de Fase I:

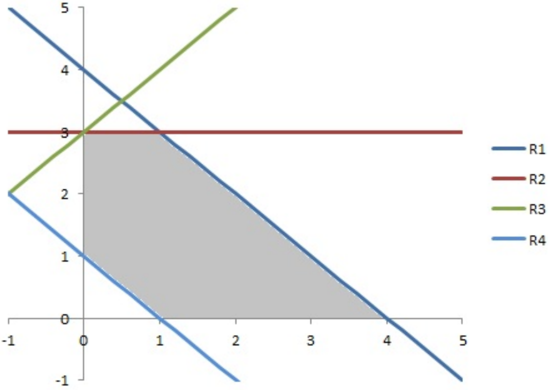
$$
\begin{array}{lrcl}
(PF1)\ \text{mín} & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + y_1 & = 4 & (R_1) \\
& x_2 \quad + x_4 \qquad\qquad + y_2 & = 3 & (R_2) \\
& -x_1 + x_2 \qquad + x_5 \qquad\qquad + y_3 & = 3 & (R_3) \\
& x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_6 \qquad\qquad + y_4 & = 1 & (R_4) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

- Se elige la Base Inicial Factible trivial:

$$
\begin{aligned}
x_B &= \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \\
x_N &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo Fase I

- La región factible de este problema es la siguiente:



donde el origen no es un punto factible.

Iteración 1 de Fase I

- Usando la base:

$$\begin{aligned} x_B &= \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \\ x_N &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \end{aligned}$$

- Se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

Iteración 1 de Fase I

- Conociendo los valores de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad + y_1 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 \qquad\qquad\qquad + y_2 \qquad\qquad &= 3 \\
-x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 \qquad\qquad\qquad + y_3 \quad &= 3 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad - x_6 \qquad\qquad\quad + y_4 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= 3 \\ y_3 &= 3 \\ y_4 &= 1 \end{aligned}$

Iteración 1 de Fase I

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B \overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6}$$

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{-4} & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad \mathbf{x_2} \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6}$$

- **Criterio de entrada a la base**: $\min_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$
  - En este caso: $\mathbf{x_2}$ **entra a la base**.

Iteración 1 de Fase I

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_2 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i2}>0} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,2}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,2}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{3,2}}, \frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{4,2}} \right\}}_{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4} = \min \underbrace{\left\{ \frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} \right\}}_{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \mathbf{y_4}} = 1$$

- Luego, $\mathbf{y_4}$ **sale de la base**.

Iteración 2 de Fase I

- La nueva base queda:

$$x_B = \{y_1, y_2, y_3, x_2\}$$
$$x_N = \{x_1, y_4, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

- Se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \left.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad x_2}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6}, \quad \overline{b} = \left.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

Iteración 2 de Fase I

- Conociendo los valores de $x_1, y_4, x_3, x_4, x_5, x_6$ se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + y_1 \qquad\qquad &= 4\\
x_2 \quad + x_4 \qquad\qquad + y_2 \qquad &= 3\\
-x_1 + x_2 \qquad + x_5 \qquad\qquad + y_3 \quad &= 3\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_6 \qquad\qquad + y_4 &= 1\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_1 &= 0\\ y_4 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_4 &= 0\\ x_5 &= 0\\ x_6 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 3\\ y_2 &= 2\\ y_3 &= 2\\ x_2 &= 1 \end{aligned}$

Iteración 2 de Fase I

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B\overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6}$$

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -1 & -1 & \mathbf{-3} \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad \mathbf{x_6}}$$

- **Criterio de entrada a la base**: $\min\limits_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$
  - En este caso: $\mathbf{x_6}$ **entra a la base**.

Iteración 2 de Fase I

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_6 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i6}>0} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,6}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,6}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{3,6}}, \frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{4,6}} \right\}}_{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad x_2} = \min \underbrace{\left\{ \frac{3}{1}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-1}} \right\}}_{y_1 \quad \mathbf{y_2} \quad \mathbf{y_3} \quad \mathbf{x_2}} = 2$$

- Elegimos arbitrariamente entre las variables que empatan. Luego, **$\mathbf{y_2}$ sale de la base**.

Iteración 3 de Fase I

- La nueva base queda:

$$x_B = \{y_1, x_6, y_3, x_2\}$$
$$x_N = \{x_1, y_4, x_3, x_4, x_5, y_2\}$$

- Se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{y_1 \quad x_6 \quad y_3 \quad x_2}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad y_2}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

Iteración 3 de Fase I

- Conociendo los valores de $x_1, y_4, x_3, x_4, x_5, y_2$ se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + y_1 \qquad\qquad &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 \qquad\qquad + y_2 \qquad &= 3 \\
-x_1 + x_2 \qquad + x_5 \qquad\qquad + y_3 \quad &= 3 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_6 \qquad\qquad + y_4 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ x_6 &= 2 \\ y_3 &= 0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

Iteración 3 de Fase I

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B \overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad y_2} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{y_1 \quad x_6 \quad y_3 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad y_2}$$

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{-1} & 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad \mathbf{x_3} \quad x_4 \quad \mathbf{x_5} \quad y_2}$$

- **Criterio de entrada a la base**: $\min_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$
  - En este caso, elegimos entre las variables que empatan y $\mathbf{x_3}$ **entra a la base**.

Iteración 3 de Fase I

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_3 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i3}>0} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,3}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,3}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{3,3}}, \frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{4,3}} \right\}}_{y_1 \quad x_4 \quad y_3 \quad x_2} = \min \underbrace{\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{0}}, \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}} \right\}}_{\mathbf{y_1} \quad \mathbf{x_4} \quad \mathbf{y_3} \quad \mathbf{x_2}} = 1$$

- Luego, $\mathbf{y_1}$ **sale de la base**.

Iteración 4 de Fase I

- La nueva base queda:

$$
\begin{aligned}
x_B &= \{x_3, x_6, y_3, x_2\} \\
x_N &= \{x_1, y_4, y_1, x_4, x_5, y_2\}
\end{aligned}
$$

- Se tiene que:

$$
A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}
$$

$$
A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_6 \quad y_3 \quad x_2}, \quad
\overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad x_5 \quad y_2}, \quad
\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}
$$

Iteración 4 de Fase I

- Conociendo los valores de $x_1, y_4, y_1, x_4, x_5, y_2$ se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad + y_1 \qquad\qquad &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 \qquad\qquad\qquad + y_2 \qquad &= 3 \\
-x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 \qquad\qquad + y_3 \quad &= 3 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_6 \qquad\qquad + y_4 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_4 &= 0 \\ y_1 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_6 &= 2 \\ y_3 &= 0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

Iteración 4 de Fase I

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B \overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad x_5 \quad y_2} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_6 \quad y_3 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad x_5 \quad y_2}$$

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{-1} & 2 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad \mathbf{x_5} \quad y_2}$$

- **Criterio de entrada a la base**: $\min\limits_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$
  - En este caso, $\mathbf{x_5}$ **entra a la base**.

Iteración 4 de Fase I

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_5 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}} \right\}$$

- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i5}>0} \underbrace{\left\{ \frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,5}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,5}}, \frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{3,5}}, \frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{4,5}} \right\}}_{x_3 \quad x_4 \quad y_3 \quad x_2} = \min \underbrace{\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{0}}, \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}} \right\}}_{\mathbf{x_3} \quad \mathbf{x_4} \quad \mathbf{y_3} \quad \mathbf{x_2}} = 1$$

- Luego, $\mathbf{y_3}$ **sale de la base**.

Iteración 5 de Fase I

- La nueva base queda:

$$\begin{aligned} x_B &= \{x_3, x_6, x_5, x_2\} \\ x_N &= \{x_1, y_4, y_1, x_4, y_3, y_2\} \end{aligned}$$

- Se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_2}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad y_3 \quad y_2}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

Iteración 5 de Fase I

- Conociendo los valores de $x_1, y_4, y_1, x_4, y_3, y_2$ se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad + y_1 \quad\quad\quad &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 \quad\quad\quad + y_2 \quad\quad &= 3 \\
-x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 \quad\quad\quad + y_3 \quad &= 3 \\
x_1 + x_2 \quad\quad\quad - x_6 \quad\quad\quad + y_4 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Con esto se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
y_4 &= 0 \\
y_1 &= 0 \\
x_4 &= 0 \\
y_3 &= 0 \\
y_2 &= 0
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_3 &= 1 \\
x_6 &= 2 \\
x_5 &= 0 \\
x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

Iteración 5 de Fase I

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B\overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

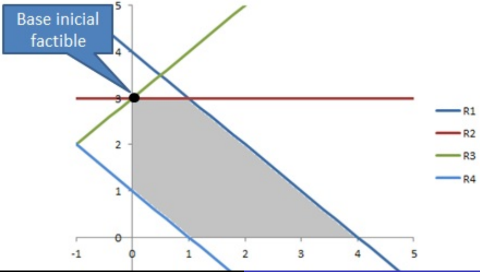
$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad y_3 \quad y_2} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad y_3 \quad y_2}$$

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad y_4 \quad y_1 \quad x_4 \quad y_3 \quad y_2}$$

- Como todos los costos reducidos son no negativos estamos en la base óptima de $(PF1)$. Luego:
  - $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
  - $y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - $x_B^* = \{x_3, x_6, x_5, x_2\}$

Fase II de Simplex

- Como se tiene que la solución óptima de $(PF1)$ entrega:
  - $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
  - $y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - $x_B^* = \{x_3, x_6, x_5, x_2\}$
- Estamos en el punto $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}$ del problema original.
- La base inicial factible asociada a este punto es $x_B^* = \{x_3, x_6, x_5, x_2\}$.
- Se comienza la Fase II que consiste en aplicar Simplex a partir de la solución de Fase I, sin considerar las variables artificiales.



Iteración 1 de Fase II

- La base queda:

$$\begin{aligned} x_B &= \{x_3, x_6, x_5, x_2\} \\ x_N &= \{x_1, x_4\} \end{aligned}$$

- Con esto se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \left.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{array}{cccc} x_3 & x_6 & x_5 & x_2 \end{array}},, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{array}{cc} x_1 & x_4 \end{array}}, \quad \overline{b} = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

Iteración 1 de Fase II

- Conociendo los valores de x_1 y x_4 se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 4\\
x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 3\\
-x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 \quad &= 3\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad - x_6 &= 1\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_6 &= 2 \\ x_5 &= 0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

- Notar que estamos en un punto degenerado, ya que se tiene que $x_5 = 0$ siendo una variable básica.

Iteración 1 de Fase II

- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B \overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_4}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_1 & \overline{c}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_4}$$

- **Criterio de entrada a la base**: $\min_{i \notin B} \{\overline{c}_i\}$
  - En este caso, $\mathbf{x_1}$ **entra a la base**.

Iteración 1 de Fase II

- **¿Qué variable sale de la base?**
- Se busca la primera variable básica que se anula cuando x_1 crece: **Criterio de salida de la base**:

$$\min_{\overline{a}_{is}>0}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{a}_{is}}\right\}$$

- En este caso:

$$\min_{\overline{a}_{i1}>0}\underbrace{\left\{\frac{\overline{b_1}}{\overline{a}_{1,1}},\frac{\overline{b_2}}{\overline{a}_{2,1}},\frac{\overline{b_3}}{\overline{a}_{3,1}},\frac{\overline{b_4}}{\overline{a}_{3,1}}\right\}}_{x_3\quad x_6\quad x_5\quad x_2}=\min\underbrace{\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{-1}},\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{-1}},\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}}\right\}}_{\mathbf{x_3}\quad\mathbf{x_6}\quad\mathbf{x_5}\quad\mathbf{x_2}}=1$$

- Luego, $\mathbf{x_3}$ **sale de la base**.

Iteración 2 de Fase II

- La nueva base queda:

$$x_B = \{x_1, x_6, x_5, x_2\}$$
$$x_N = \{x_3, x_4\}$$

- Con esto se tiene que:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \left.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

$$A_B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_2}, \quad \overline{A_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_4}, \quad \overline{b} = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

Iteración 2 de Fase II

- Conociendo los valores de x_3 y x_4 se determinan los valores de las otras variables, a partir del sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
x_2 \quad + x_4 \qquad\quad &= 3 \\
-x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 \quad &= 3 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_6 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Con esto se obtiene que: $\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_6 &= 3 \\ x_5 &= 1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

Iteración 2 de Fase II

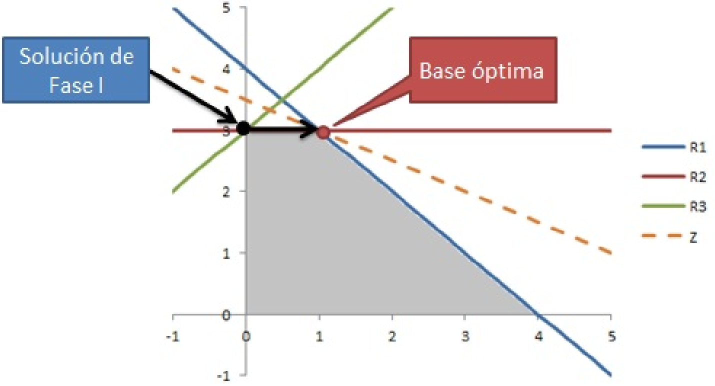
- **¿La base actual es óptima?**
  - Para esto se calculan los costos reducidos, dados por: $\overline{c}'_N = c'_N - c'_B\overline{A_N}$
  - En este caso se tiene que:

$$\overline{c}'_N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{x_1 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_4}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_3 & \overline{c}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{x_3 \quad x_4}$$

- Como todos los costos reducidos son no negativos, estamos en la base óptima:
  - $x_B^* = \{x_1, x_6, x_5, x_2\}$, $x_N^* = \{x_3, x_4\}$
  - $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* & x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
  - $z^* = c'_B x_B^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}' = -7$

Solución Óptima de (P)



Dudas y/o Comentarios a:
ndevia@ing.uchile.cl