Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN3701: Modelamiento y Optimización
Profs: Daniel Espinoza, Roberto Cominetti
Coordinador: N. Padilla
Aux: V. Bucarey, P. Lemus, P. Obrecht, N. Riquelme

Control 1 – 2012

Pregunta 1

La fábrica Victorio produce distintos tipos de galletas diferenciadas por contenido calórico, ingredientes y sabores. Cada tipo de galleta $i \in I$ está orientado a un segmento específico de consumidores y se vende a un precio p_i. Para las próximas T semanas se estiman demandas $\{d_{it}\}_{t=1}^{T}$ por cada tipo de galleta i, las cuales deben ser satisfechas de forma exacta.

Cada unidad de galletas de tipo i contiene una cantidad $B_{ij} \geq 0$ del ingrediente $j \in J$. Al instante $t = 0$ la fábrica dispone de un inventario inicial en bodega de I_j^0 unidades de cada ingrediente j. En caso de necesidad se puede comprar cantidades adicionales del ingrediente j a un costo unitario $c_{jt} > 0$ el cual varía en el tiempo. La bodega tiene capacidad suficiente para almacenar los ingredientes sobrantes de una semana a otra sin mayores costos de almacenamiento ni mermas.

(a) (4 ptos) Formule un PPL que permita maximizar las utilidades.
(b) (1 pto) Asumiendo que $|J| = 1$, y el stock inicial es nulo, describa la cantidad exacta de ingredientes comprada en cada período en la solución óptima.
(c) (1 pto) Generalice su respuesta anterior para el caso de varios insumos pero con stock inicial nulo. ingredientes.

Pauta Pregunta 1

Variables de Decisión

- x_{it} = cantidad de galletas de tipo i producidas durante el período t.
- y_{jt} = unidades de ingredientes j adquiridas durante la semana t.
- z_{jt} = unidades de ingredientes j almacenadas al final de la semana t.

Función objetivo

$$\text{máx} \sum_{it} p_i x_{it} \quad - \sum_{jt} c_{jt} y_{jt}$$

Restricciones

1. Satisfacer demanda

$$x_{it} = d_{it} \quad \forall i \in I, \forall t = 1, \ldots, T$$

2. Conservación de inventario

$$z_{jt} = z_{j(t-1)} + y_{jt} - \sum_{i} B_{ij} x_{it} \quad \forall j \in J, \forall t = 1, \ldots, T$$

3. Inventario inicial

$$z_{j0} = I_j^0 \quad \forall j \in J$$

4. Naturaleza de las variables

$$x_{it}, y_{jt}, z_{jt} \geq 0$$

Solución óptima

Dado que la producción $x_{it} = d_{it}$ está fija, el problema se reduce a minimizar los costos de adquisición de ingredientes $\sum_{jt} c_{jt} y_{jt}$. Ahora bien, dado que no hay costo de almacenaje ni restricción de capacidad, lo más conveniente es adquirir los insumos en el momento en que estén más baratos, y almacenarlos para su uso posterior.

Más precisamente, sea $m_{jt} = \sum_i B_{ji} d_{it}$ la cantidad de ingrediente j requerida para la producción de la semana t. Reduzcamos sucesivamente las cantidades $m_{j1}, m_{j2}, \ldots$ hasta lo que se alcance a cubrir con el inventario inicial I_j^0, de modo de encontrar las necesidades efectivas de compra $\hat{m}_{jt}$ del ingrediente j para el período t. Esta cantidad $\hat{m}_{jt}$ conviene adquirirla en aquella semana previa $s_t \in \{1, \ldots, t\}$ en que se observe el menor precio c_{js}. Sumando todas estas cantidades obtenemos el total del ingrediente j a ser comprado cada semana s, a saber

$$y_{js} = \sum_t \{\hat{m}_{jt} : s_t = s\}.$$

Los inventarios óptimos z_{js} se deducen directamente de la ecuación de conservación.

Pregunta 2

Un productor de almendras debe seleccionar a que clientes atender, para lo cual cuenta con un único vehículo de capacidad V. Cada cliente $i = 1, \ldots, n$ requiere un volumen V_i que desea recibir antes del instante T_i. El beneficio por atender al cliente i es de $B_i > 0$ pesos, menos un descuento de $d > 0$ pesos por cada minuto de atraso. En caso de no ser atendido se incurre en una multa $M_i > 0$ por no satisfacer el pedido. Se desea determinar que clientes atender y en que orden, sabiendo que el vehículo debe regresar a la fábrica ($i = 0$) al final de la jornada. El tiempo de traslado desde j hasta i es t_{ji} y el costo en bencina es de $c_{ji} > 0$ pesos.

Considere variables binarias para decidir si el cliente i es atendido, y otras que indiquen si se realiza un viaje desde j a i. Utilice asimismo variables continuas para representar el instante en que se visita cada cliente i y el eventual retraso.

(a) (1 pto) Formule la función objetivo a maximizar

(b) (5 ptos) Formule las siguientes restricciones como desigualdades lineales

- un cliente es atendido ssi hay un viaje hasta él
- si llegamos hasta un cliente debemos salir de él
- hay un solo tour y debe pasar por la fábrica
- la carga no puede superar la capacidad del vehículo
- si se viaja de i a j los arribos deben ser compatibles con el tiempo de traslado
- relación entre los retrasos y los tiempos de arribo

Pauta Pregunta 2

Variables de decisión

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } i \text{ es atendido} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo va desde } j \text{ a } i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$t_i = \text{instante de arribo al cliente } i$$

$$s_i = \text{retraso en atender al cliente } i$$

Función objetivo

$$\text{máx} \sum_i [y_i B_i - ds_i - (1 - y_i)M_i] - \sum_{ji} x_{ji} c_{ji}$$

Restricciones

- un cliente es atendido ssi hay un viaje hasta él

$$y_i = \sum_j x_{ji} \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

- si llegamos hasta un cliente debemos salir de él

$$\sum_j x_{ji} = \sum_j x_{ij} \quad \forall j = 0, \ldots, n$$

- hay un solo tour y debe pasar por la fábrica

$$\sum_{j,i \in S} x_{ji} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq \{1, \ldots, n\}, S \neq \phi$$

  Notar que no debe incluir el nodo de la fábrica $i = 0$ pues la solución es un sub-ciclo (es decir, se debe prohibir solo los sub-ciclos que no incluyan a la fábrica)
- la carga no puede superar la capacidad del vehículo

$$\sum_i V_i y_i \leq V$$

- si se viaja de j a i los arribos deben ser compatibles con el tiempo de traslado

$$t_i \geq t_j + x_{ji} t_{ji} - (1 - x_{ji})M \quad \forall i, j = 0, \ldots, n$$

  con M una constante suficientemente grande ($M = \sum_{ji} t_{ji}$).

- relación entre retrasos y tiempos de arribo

$$s_i \geq t_i - T_i \quad ; \quad s_i \geq 0$$

Pregunta 3

1. Considere $P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}$.
   a) (1pto) Demuestre que si $x \in P$ y existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $0 < x_i < 1$, entonces x no es un vértice de P.
   b) (2pto) Demuestre que si $x \in \{0,1\}^n$, entonces x es un punto extremo de P.
   c) (1pto) Demuestre que $V := \{x \in P : x \text{ es punto extremo de } P\}$ satisface que $|V| = 2^n$.
2. (1pto) Demuestre que $L_n^2 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq t^2\}$ es un conjunto convexo.
3. (1pto) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa (i.e., satisfaciendo $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$ se tiene que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$). Demuestre que $S := \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq z\}$ es un conjunto convexo.

Pauta Pregunta 3

1. Consideramos $P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}$.
   a) Sea $x \in P$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $0 < x_i < 1$. Definimos $\delta = \min\{x_i, 1 - x_i\}$, note que $\delta > 0$ por hipótesis. Definimos $z^+ = x + \delta e_i$ y $z^- = x - \delta e_i$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$. Note que $z_j^+ = x_j$ para todo $j \neq i$, por lo que $0 \leq x_j = z_j^+ \leq 1$. Por otro lado $0 \leq x_i \leq z_i^+ = x_i + \delta \leq x_i + (1 - x_i) = 1$, lo que demuestra que $z^+ \in P$; análogamente, podemos demostrar que $z^- \in P$. Por último, $\frac{1}{2}z^+ + \frac{1}{2}z^- = x + e_i\frac{1}{2}\{\delta - \delta\} = x$; lo que demuestra que x no es un punto extremo de P, lo que es equivalente a que x no sea un vértice de P.
   b) Consideramos $x \in \{0,1\}^n$; claramente $0 \leq x_i \leq 1$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$; lo que demuestra que $x \in P$. Para demostrar que es un punto extremo, demostraremos que es una solución básica factible de P. Factibilidad ya fue chequeada; para ver que es solución básica; note que para cada componente i de x tenemos que $x_i = 0$ o $x_i = 1$; es decir, ya sea la restricción $e_i x = 0$ o la restricción $e_i x = 1$ es activa para cada i; y el sistema de restricciones activas se ve como $e_i x = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$; o visto en forma matricial como $Ix = x$; claramente la matriz I es de rango completo (equivalentemente, los vectores $\{e_i\}_{i=1}^n$ son linealmente independientes), por lo que el sistema tiene solución única, demostrando que x es una solución básica factible, y por o tanto, un punto extremo de P.
   c) Sea $x \in P$; si $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : 0 < x_i < 1$, por lo anterior, sabemos que x no es punto extremo y por lo tanto no esta en V; si no, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $x_i \in \{0,1\}$, por lo que $V = \{0,1\}^n$, de donde $|V| = 2^n$.
2. Sean $(y, t_y), (x, t_x) \in L_n^2$ y $\lambda \in [0,1]$, tenemos que $(z, t_z) = \lambda(x, t_x) + (1-\lambda)(y, t_y)$

satisface que $\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\leq \|\lambda x\|_2^2 + \|(1-\lambda)y\|_2^2 + 2\|\lambda x\|_2 \|(1-\lambda)y\|_2 = (\|\lambda x\|_2 + \|(1-\lambda)y\|_2)^2 \leq (\lambda t_x + (1-\lambda t_y)^2 = t_z^2$. Lo que demuestra que $(z, t_z) \in L_n^2$

3. Sean $(x, z_x), (y, z_y) \in S$ y $\lambda \in [0,1]$, definimos $(w, z_w) = \lambda(x, z_x) + (1-\lambda)(y, z_y)$. Demostraremos que $(w, z_w) \in S$. Notemos que $f(w) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $\leq \lambda z_x + (1-\lambda) z_y = z_w$, lo que demuestra que $(w, z_w) \in S$.