IN3701 - Guía de Problemas Resueltos de Geometría de Programación Lineal v1.0

Acá va una pequeña guía con problemas resueltos de Geometría en Programación Lineal con problemas básicamente extraídos del libro Introduction to Linear Optimization, Bertsimas D. y Tsitsiklis J, que es la bibliografía base del curso.

Además de este material, es IMPORTANTE que revisen las demostraciones de equivalencia entre Solución Básica Factible, Punto Extremo, y Vértice.

Definiciones Importantes:

Conjunto Convexo: Un conjunto $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R^n}$ se dice convexo si para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}$,

$$\alpha \epsilon [0,1], \alpha x + (1-\alpha) y \epsilon S$$

Poliedro: Un poliedro es un conjunto S, $S \subseteq R^n$, que puede ser descrito en la forma

$$S = \{x \mid Ax \leq b\ , A \epsilon M^{mxn}, b \epsilon R^m\}$$

Poliedro en forma Estándar: Un poliedro de forma estándar es un poliedro de la forma:

$$P = \{x \mid Ax = b\ , x \geq 0, A \epsilon M^{mxn}, b \epsilon R^m\}$$

Este poliedro es muy importante en el desarrollo del método SIMPLEX.

Punto Extremo: Sea **P** un poliedro. Un vector **x** es un punto extremo de **P** si no existen $y, z \in P,\ \lambda \epsilon [0,1]$, que cumplan con $x = \lambda y + (1-\lambda) z$. Es decir, **x** no puede ser escrito como combinación convexa de **y** e **z**.

Vértice: Sea **P** un poliedro. Un vector **x** es un vértice de **P** si existe **c** que cumpla con $c'x < c'y, \forall y \in P, y \neq x$.

Solución Básica: Sea **P** un poliedro. Un vector **x*** es una solución básica de P si cumple con las siguientes condiciones:

i. Todas las restricciones de igualdad son activas en **x*.**
ii. En el resto de las restricciones que son activas en **x*** , hay n que son l. i.

Si el vector **x*** además satisface todas las demás restricciones, entonces al vector **x*** se le denomina **solución básica factible.**

Solución degenerada: Una solución básica **x*** se dice degenerada si más de n restricciones son activas en **x***. En un poliedro en forma estándar es equivalente a decir que la solución básica tiene más de n-m componentes iguales a cero.

Problema 1

Demuestre que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo. Utilizando esto demuestre que todo poliedro es un conjunto convexo.

Sol.:

1. Sean $S_i, i = 1, \dots, n$ conjuntos convexos. Debemos probar que $S' = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ es un conjunto convexo, o sea que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}', \forall \alpha \epsilon [0,1], \alpha x + (1-\alpha) y \epsilon S'$.

Tomemos un par de puntos $x, y \in S'$, como pertenece a la intersección de conjuntos, pertenece a cada S_i. Luego, como S_i es un conjunto convexo cumple con:

$$x, y \in S_i \subseteq S', \forall \alpha \epsilon [0,1], \alpha x + (1-\alpha) y \epsilon S_i \subseteq S'.$$

Por lo tanto, $S' = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ es un conjunto convexo.

2. Para probar que todo poliedro es un conjunto convexo tomemos un escalar cualquiera **b**, y un vector **a.**

Consideremos el conjunto $A = \{x|\ a'x \geq b\}$. Probaremos que este conjunto es convexo:

Sea $x, y \in A$, y sea $\lambda \epsilon [0,1]$. Luego se tiene que:

$$a'(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda a'x + (1-\lambda) a'y \geq \lambda b + (1-\lambda) b = b$$

Entonces $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$, luego A es convexo. Como un poliedro se puede construir como la intersección finita de conjuntos de la forma de A, entonces se concluye que todo poliedro es un conjunto convexo.

Problema 2

Determine si el conjunto de todos los $(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2$ que satisfacen:

$$\begin{gathered} x\cos(\theta) + y\,sen(\theta) \leq 1 \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{gathered}$$

Es un conjunto convexo. ¿Es este conjunto un poliedro?

Solución:

Veamos si este conjunto, que denotaremos con la letra S, es convexo.

Sea $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ vectores en este conjunto. Sea $\lambda \epsilon [0,1]$. Luego,

$$\lambda \overrightarrow{x_1} + (1-\lambda) \overrightarrow{x_2} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \\ \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \end{pmatrix}$$

Entonces debemos verificar que:

1. $[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \cos(\theta) + [\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2] sen(\theta) \leq 1 \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
2. $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \geq 0$

3. $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \geq 0$

Probaremos primero 2, pues 3 se realiza de manera análoga:

Dado que $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in S$, luego $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Entonces:

$$\lambda x_1 \geq 0 \qquad\qquad \lambda \epsilon [0,1]$$

$$(1-\lambda)x_2 \geq 0 \qquad\qquad \lambda \epsilon [0,1]$$

Luego sumando ambas restricciones se tiene que:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0 \blacksquare$$

Ahora falta verificar 1. Sea $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]cos(\theta) + [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]sen(\theta) =$$

$$\lambda x_1 cos(\theta) + (1-\lambda)x_2 cos(\theta) + \lambda y_1 sen(\theta) + (1-\lambda)y_2 sen(\theta) =$$

$$\lambda(x_1 cos(\theta) + \lambda y_1 sen(\theta)) + (1-\lambda)(x_2 cos(\theta) + y_2 sen(\theta)) \leq$$

$$\lambda + (1-\lambda) = 1$$

Por lo tanto 3 se verifica. Luego este conjunto S es un conjunto convexo.

Sin embargo tenemos infinitas restricciones, luego no podemos describir este conjunto como un poliedro. Acá yo creo que más que tener infinitas restricciones, te dicen que esa restricción es para algún θ ∈[0,π/2], y por lo tanto fijas un valor y eso te define el S, y la gracias que x e y la cumplen para cualquier valor de que fijes.

Problema 3

Sea P el poliedro descrito en por las siguientes restricciones:

$$x_1 - x_2 \geq 0$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

1. Escriba P en su forma estándar.

2. Dé un método para encontrar soluciones básicas, y utilícelo para encontrar estas. ¿Son todos los puntos encontrados vértices y puntos extremos? ¿Hay alguna base degenerada?

Solución:

1. Un poliedro en forma estándar, es un poliedro de la forma, $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \ , x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{mxn}, b \in \mathbb{R}^m\}$.

Lo importante de los poliedros en forma estándar, es que todo poliedro puede ser representado por un poliedro de estas características a través de las variables de holgura y relaciones de no negatividad.

En este caso, el poliedro de forma estándar quedaría de la forma:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 0$$
$$x_2 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_6 = 10$$
$$x_1 = x_1' - x_1''$$
$$x_2 = x_2' - x_2''$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

O equivalentemente,

$$(x_1' - x_1'') - (x_2' - x_2'') - x_3 = 0$$
$$-2\,(x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2'') + x_4 = 0$$
$$(x_2' - x_2'') + x_5 = 5$$
$$2\,(x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2'') + x_6 = 10$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

A=

x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6
1	-1	-1	+1	-1	0	0	0
-2	+2	+1	-1	0	1	0	0
0	0	1	-1	0	0	1	0
2	-2	1	-1	0	0	0	1

$$x = \begin{vmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{vmatrix}$$

2. Un procedimiento para construir soluciones básicas:

1. Elija m columnas linealmente independientes $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$
2. Sea $x_i = 0$, para todo i $\neq$ B(1), …, B(m).
3. Resuelva el sistema Ax=b para las incógnitas $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$

Por ejemplo, en este caso tenemos que m=4. Luego elijamos

$$A_{B(1)} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \; A_{B(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \; A_{B(3)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \; A_{B(4)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Correspondientes a las variables $x_{3,}x_4, x_5$ y x_6

Luego hacemos x_1'=0, x_1''=0 x_2'=0 x_2''=0.

Ahora falta resolver el sistema $A_B x_B = b$. Claramente la solución de este problema es:

$$x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Como $x_B \geq 0$ entonces es una solución básica factible, y por ende es un vértice y un punto extremo. Notar que si algún $x_i < 0, i = B(1), \dots, B(m)$, entonces la solución básica encontrada no es factible, y por ende no es vértice, ni punto extremo, puesto que no pertenece al poliedro.

Además podemos ver que tenemos una base degenerada puesto que tenemos que las variables básicas x_3 y x_4 son iguales a cero. (n=8, m = 4, n – m = 4, y hay 6 variables iguales a cero).

Problema 4

Considere el problema de forma estándar $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$. Suponga que la matriz $A \in R^{mxn}$ es de rango completo. Para cada una de las siguientes afirmaciones establezca si es verdadera o es falsa. Si es verdadera, demuéstrela, si es falsa de un contraejemplo:

a. Si n=m+1, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.
b. El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.
c. Toda solución óptima posee a lo más m componentes no cero.
d. Si hay más de una solución, entonces el cardinal de las soluciones óptimas es no numerable.
e. Si hay más de una solución óptima, entonces hay al menos dos soluciones básicas factibles óptimas.

Solución:

a. Verdadero:

Como P está en forma estándar, tiene al menos un punto extremo v_0. Si no existe otro vértice, existe solo un vértice y el resultado se cumple.

Supongamos que existe otro punto extremo v_i. Definamos $d_i = v_i - v_0$, el cual satisface con $Ad_i = 0$. $(Ad_i = A(v_i - v_0) = Av_i - Av_0 = b - b = 0)$.

Pero la dimensión de $\{d \,|Ad = 0\} = n - m = m + 1 - m = 1$, por lo que existe un $d_0 \neq 0$, tal que $d_i = \alpha_i d_0$ para cualquier d_i.

Sea $\alpha_\infty = \max\{\alpha_i |\ v_i\ es\ punto\ extremo\}$, y sea v_∞ donde se alcanza el máximo (El cual existe pues el conjunto $\{\ \alpha_i | v_i\ es\ punto\ extremo\}$ es no vacio, y es acotado puesto que el número de puntos extremos es acotado). Entonces si $\alpha_i < \alpha_\infty$, tenemos que v_i es una combinación lineal convexa de v_0 y v_∞. Luego $\alpha_i = \alpha_\infty \quad \forall i$, por lo que el conjunto de puntos extremos tiene cardinalidad 2 $(v_0\ y\ v_\infty)$

b. Falso:

Basta con tomar $P = \{x \in R^n\}$ y minimizar $z = -e_i$ donde e_i es el i- ésimo vector canónico. En este caso los óptimos es el conjunto $\{x \in R^n |\ x_i = 0\}$, que es no acotado.

c. Falso

Basta considerar:

$$\min -x_1 - x_2 \quad (\max x_1 + x_2)$$

$$x_1 \ + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

El punto (½, ½) es el óptimo y posee más de una componente no cero.

d. Verdadero

Si existe más de una solución entonces existen a lo menos 2 soluciones, que llamaremos $x_1 \ y \ x_2$. Luego por convexidad, todas las combinaciones convexas son soluciones, es decir $\{x \ | x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \ \in [0,1]\}$ también son soluciones.

Luego,

$$|\{x\text{:}\, x \ es \ soluci\acute{o}n\}| \geq |\{\lambda\text{:}\, \lambda \ \in [0,1]\}|$$

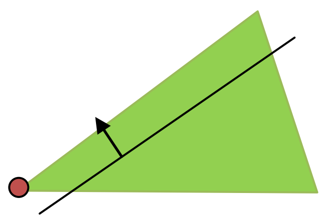
Por ende el conjunto de soluciones es no numerable.

e. Falso

Considere $P = \{x \in R^n, x_i \geq 0 \ \ i = 1, \dots, n\}$ y minimizar $z = -e_i$ donde e_i es el i- ésimo vector canónico. P posee solo un punto extremo ($\vec{x} = \vec{0}$), y el conjunto de soluciones óptimas posee más de dos puntos.

Para que quede más claro, para poder concluir que si hay varios óptimos, no necesariamente hay más de dos soluciones básicas factibles.

Supongamos que la región es infinita hacia la derecha, y que sólo existe un vértice, si la función objetivo es paralela a uno de los lados habrán infinitos óptimos, pero sólo un vértice es decir sola una sola solución factible.



Problema 5

Sabemos que cada problema de programación lineal puede ser convertido a su problema equivalente en la forma estándar. También sabemos que un poliedro no vacio en su forma estándar tiene al menos un punto extremo. Entonces podemos concluir que cualquier poliedro no vacio tiene al menos un punto extremo. Explique por qué este razonamiento es incorrecto.

Solución:

Este razonamiento falla por que al pasar de un poliedro cualquiera a un poliedro en su forma estándar, uno introduce variables, que son las que provocan la existencia de estos puntos extremos.

Veamos el siguiente ejemplo:

$$x_1 + \ x_2 \leq 3$$

Claramente este poliedro no tiene ningún punto extremo.

Entonces el poliedro equivalente en forma estándar sería introduciendo una variable de holgura, y dos variable para x1 y x2 que son irrestrictas:

$$x_1 = x_1' - x_1''$$
$$x_2 = x_2' - x_2''$$

Luego,

$$x_1' - x_1'' + x_2' - x_2'' + x_3 = 3$$
$$x_i \geq 0$$

Claramente (0, 0, 0, 0, 3) es un punto extremo, pero el original no.