Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN3701: Modelamiento y Optimización
Profs: Daniel Espinoza, Roberto Cominetti
Coordinador: N. Padilla
Aux: V. Bucarey, N. Devia, A. Torrico, C. Thraves

Pauta Auxiliar extra C1: Geometría

Lunes 28 de Marzo de 2011

Pregunta 1

Demuestre el siguiente teorema. Sea P un poliedro no vacío y $x^* \in P$. Luego son equivalentes:

a) x^* es un vértice.

b) x^* es un punto extremo de P.

c) x^* es una solución básica factible.

Sol:

- *a) $\Rightarrow$ b)*
  Suponemos que x^* es un vértice de P. Luego $\exists c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'x^* < c'y$ $\forall y \in P$, $y \neq x^*$.
  Supongamos que $\exists y, z \in P$, $y \neq x^*$, $z \neq x^*$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, tal que $x^* = \lambda y + (1-\lambda)z$. Luego, como $c'x^* < c'y$ y $c'x^* < c'z$, entonces $c'x^* < c'(\lambda y + (1-\lambda)z)$, lo cual es una contradicción. Luego x^* no puede expresarse como una combinación lineal convexa de dos puntos diferentes P, así se concluye por definición que x^* es un punto extremo.

- *$\sim$ c) $\Rightarrow \sim$ b)*
  Supongamos que $x^* \in P$ no es una solución básica factible. Sea $I = \{i | a^i x^* = b_i\}$, dado que x^* no es una solución básica factible, entonces no hay n restricciones (vectores a^i) linealmente independientes en la familia a_i con $i \in I$. Luego existe un vector $d \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que $a_i'd = 0$ $\forall i \in I$. Tomemos entonces un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y consideremos los vectores $y = x^* + \varepsilon d$ y $z = x^* - \varepsilon d$. Analicemos para y. Notar que $a_i'y = a_i'x^* = b_i$ $\forall i \in I$. Notemos que para $i \notin I$ tenemos que $a_i'x^* < b_i$ y sea un ε suficientemente pequeño tal que $a_i'y < b_i$ (basta un ε tal que $\varepsilon|a_i'd| < a_i'x^* - b_i$ $\forall i \notin I$). Así $y \in P$. Con un argumento análogo $z \in P$. Así notamos que $x^* = (y+z)/2$, lo que implica que x^* no es un punto extremo.

- *c) $\Rightarrow$ a)*
  Supongamos que el poliedro P lo describimos con las desigualdades de la forma $Ax \geq b$.
  Sea x^* una solución básica factible e $I = \{i | a^i x^* = b_i\}$. Sea $c = \sum_{i \in I} a_i$. Luego:

  $$c'x = \sum_{i \in I} a_i' x^* = \sum_{i \in I} b_i$$

  Más aún para cualquier $x \in P$ e i tenemos que $a_i'x \geq b_i$ y que:

  $$c'x = \sum_{i \in I} a_i' x \geq \sum_{i \in I} b_i$$

  Luego x^* es el óptimo de un problema de minimización $c'x$ sobre P. Mas aún la igualdad de la inecuación anterior se tiene si y solo si $a_i'x = b_i$ $\forall i \in I$. Como x^* es una solución básica factible, entonces hay n restricciones linealmente independientes que son activas en x^*, y x^* es la única solución al sistema de ecuaciones $a_i'x = b_i, i \in I$ (por teorema). Luego x^* es el único mínimo de $c'x$ sobre P, luego x^* es un vértice de P.

Pregunta 2

Se tiene el siguiente poliedro P:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

a) Grafique el poliedro.

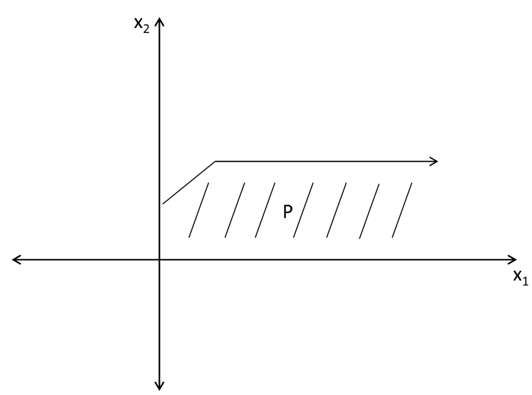
b) Determine los puntos extremos de P.

c) Muestre que el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vértice bajo la definición (puede apoyarse en el gráfico).

d) ¿Existen puntos que sean soluciones básicas pero no factibles? Si es que los hay, justifique claramente por qué.

Sol:

a) Grafique el poliedro.



b) Determine los puntos extremos de P.
Los puntos extremos de P son $\{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{2}\}$.

c) Muestre que el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vértice bajo la definición (puede apoyarse en el gráfico).

Basta ver que existe un vector $c \in R^2$ tal que $c'\binom{0}{1} < c'x \ \forall x \in P \setminus \{\binom{0}{1}\}$. Tomando $c = \binom{2}{-1}$ nos damos cuenta de que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$.

Considerando el semiespacio $S = \{x \in R^2 | \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x \geq -1\}$, notamos que si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in P$, entonces en particular $x_1 \geq 0$ y que $-x_1 + x_2 \leq 1$, restando ambas restricciones, tenemos que $2x_1 - x_2 \geq -1$, por lo cual $P \subseteq S$.

Considerando el hiperplano $H = \{x \in R^2 | \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x = -1\}$, notamos (gráficamente) $P \cap H = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Luego, para todos los demás puntos $x \in P \setminus \{\binom{0}{1}\}$, se tendrá la desigualdad estricta.

d) ¿Existen puntos que sean soluciones básicas pero no factibles? Si es que los hay, justifique claramente por qué.
Sí, el punto $\binom{-1}{0}$, que corresponde a las 2 primeras restricciones activas y son linealmente independientes. No es factible, pues no pertenece al poliedro, pues viola la tercera restricción.

Pregunta 3

Sabemos que cada problema de programación lineal.

Sabemos que cada problema de programación lineal puede ser convertido a su problema equivalente en la forma estándar. También sabemos que un poliedro no vacío en su forma estándar tiene al menos un punto extremo. Entonces podemos concluir que cualquier poliedro no vacío tiene al menos un punto extremo. Explique por qué este razonamiento es incorrecto.
Sol:

Este razonamiento falla porque al pasar de un poliedro cualquiera a un poliedro en su forma estándar, uno introduce variables, que son las que provocan la existencia de estos puntos extremos. Veamos el siguiente ejemplo:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

Entonces el poliedro equivalente en forma estándar sería introduciendo una variable de holgura, y dos variable para x_1 y x_2 que son irrestrictas: Imponemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' - x_1'' \\ x_2 &= x_2' - x_2'' \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_1' - x_1'' + x_2' - x_2'' + x_3 &= 3 \\ x_1 &= x_1' - x_1'' \\ x_2 &= x_2' - x_2'' \\ x_1', x_1'', x_2', x_2'', x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

El cuál está en forma estándar, posee un punto extremo, en cambio el primer poliedro no posee un punto extremo.

Pregunta 4

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ una colección de vectores en R^m.

a) Sea

$$C = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i | \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0\}$$

Pruebe que cualquier elemento de C puede ser expresado en la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ con $\lambda_i \geq 0$ y con a lo más m componentes λ_i distintas de cero.
Hint: Considere el conjunto.

$$A = \{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in R^n | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\}$$

¿Qué tipo de conjunto es?

b) Sea P la envoltura convexa de los vectores A_i:

$$P = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\}$$

Muestre que cada elemento de P puede ser expresado de la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0 \quad \forall i$, con a lo más $m+1$ coeficientes λ_i distintos de cero.

Sol:

a) Sea $y \in C \subseteq R^m$. Entonces se escribe de la forma $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, para algunos $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$. Consideremos el conjunto

$$A = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\}$$

Este conjunto es un poliedro en su forma estándar (en vez de tener variable vector x, es un vector λ. Además es no vacío puesto que $y \in C$, entonces existe al menos un vector $\lambda \in R^n$ que pertenece a A.
Entonces como ese conjunto es un poliedro en su forma estándar se sabe que tiene al menos un punto extremo.
Sea $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$ un punto extremo de este poliedro. Entonces sabemos que existe un conjunto $B = \{B(1), ..., B(m)\} \subseteq \{1, ..., n\}$ tales que para $B(i) \notin B$, entonces $\lambda_{B(i)} = 0$.
Por lo tanto existen a lo más m componentes de $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$ que son distintas de cero.

b) De manera similar a la anterior.
Sea $y \in P \subseteq R^m$. Entonces se escribe de la forma $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, para algunos $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
Consideremos el conjunto:

$$D = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0\}$$

Nuevamente este es un poliedro en su forma estándar con $m+1$ restricciones. Las primeras m restricciones vienen dadas por $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y$, y la última restricción viene dada por $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. D es no vacío puesto que y pertenece a P (o sea, existe un punto que cumple al menos las $m+1$ condiciones). Por lo tanto, D tiene al menos un punto extremo.
Sea $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$ un punto extremo de ese poliedro. Entonces sabemos que existe un conjunto $B = \{B(1), ..., B(m+1)\} \subseteq \{1, ..., n\}$ tales que para $B(i) \notin B$, entonces $\lambda_{B(i)} = 0$.
Por lo tanto existen a lo más $m+1$ componentes de $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$ que son distintas de cero.

Pregunta 5

Determine si el conjunto de todos los $(x, y) \in R^2$ que satisfacen:

$$\begin{aligned} x\cos(\theta) + y\sin(\theta) &\leq 1 \qquad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Es un conjunto convexo. ¿Es este conjunto un poliedro?

Sol:

Veamos si este conjunto es un conjunto que denotaremos con la letra S es convexo.
Sea x_1, x_2 vectores en este conjunto. Sea $\lambda \in [0, 1]$. Luego,

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix}$$

Entonces debemos verificar que:

$$\begin{aligned}
[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]\cos(\theta) + [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]\sin(\theta) &\leq 1 \qquad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] && (1)\\
\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 &\geq 0 && (2)\\
\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 &\geq 0 && (3)
\end{aligned}$$

Probaremos primero 2, pues 3 se realiza de manera análoga: Dado que $x_1, x_2 \in S$, luego $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 &\geq 0 \qquad \lambda \in [0,1]\\
(1-\lambda)x_2 &\geq 0 \qquad \lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

Luego sumando ambas restricciones se tiene que:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0$$

Ahora falta verificar 1. Sea $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned}
[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]\cos(\theta) + [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]\sin(\theta) &= \lambda x_1 \cos(\theta) + (1-\lambda)x_2\cos(\theta) + \lambda y_1 \cos(\theta) + (1-\lambda)y_2\cos(\theta)\\
&= \lambda(x_1\cos(\theta) + y_1\sin(\theta)) + (1-\lambda)(x_2\cos(\theta) + y_2\sin(\theta))\\
&\leq \lambda + (1-\lambda)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto 3 se verifica. Luego este conjunto S es un conjunto convexo. Sin embargo tenemos infinitas restricciones, luego no podemos describir este conjunto como un poliedro.

Pregunta 6

Suponga que usted es el dueño de la fábrica de viagra *"Mandinga no puede"*, y sabe que debe satisfacer la demanda que enfrenta para los próximos T meses. Esta demanda la ha estimado en D_t unidades para el mes t. Actualmente la empresa presenta los siguientes costos de producción:

- Un costo fijo de K para cada mes.
- Un costo unitario de producción de c_t para cada mes.

Además, cuenta con una capacidad máxima de producción de Q_m unidades igual para todos los períodos, y en cualquier período puede decidir cambiar la tecnología de producción que está siendo utilizada, lo cual modificaría los costos unitarios de producción a c_t^a , con $c_t^a < c_t$; y la capacidad máxima de la empresa a Q_m^t . La implantación de esta nueva tecnología obliga a la empresa a incurrir en un costo de I.
Cabe destacar que una vez que se ha realizado el cambio tecnológico no es posible regresar a la tecnología original, la inversión es realizada una única vez y que el producto no se puede almacenar en bodega.
Adicionalmente, usted posee convenios con la competencia que le permiten comprar unidades de un producto terminado a un precio de P, con $P > c_t$ para todo t. Con esta información responda:

1. Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar las acciones que se deben realizar a lo largo del período de planificación con el fin de minimizar los costos en que debe incurrir la empresa para satisfacer la demanda
2. ¿Cómo cambia su respuesta si ahora se permite realizar inventario de productos, asumiendo un costo asociado de b_t por unidad almacenada desde el período t al $t+1$, y un inventario máximo de B unidades?

Sol:

1. a) Variables:
   α^t: 1 si decide producir en el mes t, 0 si no.
   x^t: cantidad de unidades producidas con tecnología antigua en el periodo t.
   w^t: cantidad de unidades producidas con tecnología nueva en el periodo t.
   β^t: 1 si se decide cambiar la tecnología en el periodo t (al inicio de este).
   y^t: cantidad de unidades compradas a la competencia en el periodo t.

   b) Función objetivo:
   Minimizar los costos totales:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} (K\alpha^t + Py^t + c_t x^t + c_t^a w^t + I\beta^t)$$

   c) Restricciones:
      a) Cambiar a lo más una vez de tecnología en el horizonte de evaluación.

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^t \leq 1$$

      b) Satisfacer la demanda

$$y^t + x^t + w^t \geq D^t \qquad \forall t = 1, ..., T$$

      c) Producir solamente si se decide hacerlo.

$$M\alpha^t \geq x^t + w^t \qquad \text{con } M = D^t \qquad \forall t = 1, ..., T$$

      d) No sobrepasar capacidad con tecnología antigua

$$x^t \leq Q_m(1 - \sum_{\theta < t} \beta^\theta) \qquad \forall t = 1, ..., T$$

      e) No sobrepasar capacidad con tecnología nueva

$$w^t \leq Q_m^t \sum_{\theta \leq t} \beta^\theta \qquad \forall t = 1, ..., T$$

      f) Naturaleza de las variables

$$\alpha^t, \beta^t \in \{0, 1\} \quad x^t, y^t, w^t \geq 0 \qquad \forall t = 1, ..., T$$

2. En caso de que pueda manejarse inventario entre periodos es necesario agregar una nueva variable:
   l^t: cantidad de inventario guardada desde el periodo t al periodo $t + 1$.
   Las restricciones de satisfacción de demanda (b) y naturaleza de variables se modifican quedando:

$$y^t + x^t + w^t + l^{t-1} \geq D^t + l^t \qquad \forall t = 1, ..., T$$

$$l^t \geq 0 \qquad \forall t = 1, ..., T$$

   Además, se debe agregar la restricción sobre capacidad máxima de bodegaje en cada periodo:

$$l^t \leq B \qquad \forall t = 1, ..., T$$

   Por último, la función objetivo queda:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} (K\alpha^t + Py^t + c_t x^t + c_t^a w^t + I\beta^t + b^t l^t)$$