

IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar 2

22 de Marzo de 2012

- P1.** Considere una comuna cualquiera con I vecindarios, J escuelas, y G niveles en cada escuela. Cada escuela j tiene una capacidad de C_{jg} para algún nivel $g \in G$. En cada vecindario i , la cantidad de estudiantes de un nivel g es S_{ig} . Finalmente, la distancia de la escuela j al vecindario i es d_{ij} . Modelar este problema como uno de programación lineal que tiene como objetivo asignar a todos los estudiantes a las escuelas, minimizando el total de la distancia recorrida por todos los estudiantes. (Puede ignorar el hecho de que el número de estudiantes debe ser entero.)
- P2.** Una empresa constructora de circuitos eléctricos ha comprado un brazo mecánico de modo de automatizar su producción. La construcción de cada circuito requiere hacer N conexiones, las cuales están separadas entre sí. Dada esta separación el brazo demora t_{ij} segundos en ir desde la conexión i a la conexión j . Por último, se sabe que al analizar la construcción de un circuito, el brazo vuelve a una posición inicial para permitir sacar el circuito de la línea productiva. Formule el modelo que permita encontrar el menor tiempo de construcción de cada circuito a fin de aumentar el nivel productivo de la empresa.
- P3.** Un problema fundamental en el diseño urbano es la localización de servicios básicos como colegios, hospitales y áreas recreacionales. En este problema formularemos un modelo simplificado para decidir la localización de estaciones de bomberos en una ciudad.

La ciudad se puede dividir en I distritos, en que cada uno contiene p_i habitantes. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las estaciones de bomberos solo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad. Sea $d_{ij} > 0$ la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j . Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir una estación (en un sitio cabe a lo más una) y además se debe asignar una estación a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener una (y solo una) estación de bomberos asociada. Una estación puede tener más de un distrito asociado. Construir una estación en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j . Además, existe un costo variable que es linealmente proporcional (constante de proporcionalidad es f) a la cantidad total de gente que debe servir la estación. O sea, si se construye una estación en el sitio j , entonces el costo asociado es $c_j + fs_j$, en que s_j es la población total que debe servir la estación ubicada en j (es la suma de las poblaciones de todos los distritos asociados a esa estación). El presupuesto total destinado para construir las estaciones de bomberos es igual a B y no debe ser sobrepasado.

Formule un modelo de programación lineal binaria que minimice la distancia máxima entre un distrito y su respectiva estación.

- P4.** Suponga que usted que trabaja en la Gerencia de Marketing de una empresa y que le han pedido que defina las promociones que se realizarán durante los distintos meses del año para el producto estrella de la empresa. Estas promociones pueden ser, por ejemplo, distintas reducciones de precio (10%, 20%, etc.) por períodos breves, concursos y sorteos, regalos por la compra del producto, entre otros. Para esta planificación, la siguiente información es relevante:
- Cuenta con un presupuesto de B pesos para todo el año.

- En cada mes cuenta con H_m horas hombre de personal (por ejemplo, promotoras y vendedores).
- Existe un conjunto de N promociones posibles del cual usted puede seleccionar hasta n promociones para realizar en cada mes (este conjunto es el mismo para los distintos meses del año).
- Una promoción i ($i = 1 \dots N$) en el mes m necesitará un presupuesto de b_{im} pesos. Además si se realiza una promoción i en el mes m , las ventas aumentarán en vf_{im} pesos en dicho mes además de vu_{im} por cada hora hombre de personal de ventas incluido. (NOTA: Si no se realiza ninguna promoción durante todo el año las ventas serán iguales a v_0).

Formule un problema de programación lineal que al resolverlo le permita determinar el calendario óptimo de promociones, es decir, cuál es el conjunto de promociones que se deben llevar a cabo en cada mes y con qué dotación de personal asignado que le permite a usted maximizar las ventas totales del año.

- P5.** Una empresa de mudanzas dispone de M camiones, donde la capacidad del camión i es V_i . Para un día determinado esta empresa ha contratado mudanzas con N clientes distintos. La carga a transportar del cliente j es R_j .

Cada mudanza debe realizarse mediante un único flete y en cada flete no puede llevarse más de una mudanza. Un mismo camión puede hacer varios fletes en el día, siendo L_i el número máximo de fletes diarios que puede hacer el camión i . Si el camión i hace la mudanza del cliente j se tiene un beneficio B_{ij} .

Además, debe tomarse en cuenta que los clientes s y t deben ser atendidos por camiones diferentes y los clientes v y w deben ser atendidos por un mismo camión en viajes diferentes.

Por último, debe considerarse que si el camión M no fuera asignado a mudanza alguna en este día, entonces puede contratarse para él un flete interurbano si así conviniera, cuyo destino puede ser La Calera, Valparaíso o Rancagua. El beneficio del camión M al efectuar este único flete del día está dado por la expresión $B + xb$, donde B y b son constantes y x representa la distancia a recorrer en el viaje. La distancia a La Calera, Valparaíso y Rancagua es D_1 , D_2 y D_3 respectivamente.

Con estos antecedentes construya un modelo matemático de programación lineal que asegure atender a todos los clientes y que maximice el beneficio diario de esta empresa.

- P6.** La empresa de zapatos MEDIAHORA desea planificar su producción e inventarios para los próximos T períodos de modo de cumplir con la demanda esperada de sus clientes. Para esto, ha agregado sus productos en K familias y dispone de un estudio que predice que la demanda esperada por productos de la familia k en el período t será d_{kt} . La empresa sabe que el cuello de botella en el proceso productivo es la cantidad de horas de artesanos, siendo A_t la cantidad de horas de artesanos disponibles en el período t . Esta cantidad por temas de capacitación, no puede aumentar ni disminuir en el horizonte. Se sabe además que cada unidad de los productos pertenecientes a la familia k consume a_k horas de artesano.

La empresa posee una bodega con capacidad para almacenar B unidades en cada período. El costo de almacenar cada unidad de productos pertenecientes a la familia k en el período t es b_{kt} . Sin embargo, también existe la posibilidad de almacenar en bodegas de terceros, sin límite, pero a un costo por unidad para los productos pertenecientes a la familia k en el período t igual a g_{kt} .

- Plantee un modelo de programación lineal que permita encontrar la estrategia óptima para el problema de MEDIAHORA. ¿Qué tipo de modelo de programación lineal obtuvo?
- Comente la validez del modelo si g_{kt} fuese menor que b_{kt} , pero asumiendo que por política de la empresa la bodega de terceros solo se puede ocupar cuando se ha copado la bodega propia. ¿Qué tipo de modelo estima necesario en este caso? ¿Por qué?

IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar 2

22 de Marzo de 2012

P1. • Variables de decisión:

(a) x_{ijg} : cantidad de alumnos del vecindario i que va a la escuela j en el nivel g .

• Restricciones:

(a) La cantidad de alumnos en un nivel no puede sobrepasar la capacidad total,

$$\sum_{i \in I} x_{ijg} \leq C_{jg} \quad \forall j \in J, g \in G$$

(b) Debo asignar a todos los alumnos de los vecindarios en su nivel,

$$\sum_{j \in J} x_{ijg} = S_{ig} \quad \forall i \in I, g \in G$$

• Función Objetivo:

$$\min \sum_{i,j} \left(\sum_{g \in G} x_{ijg} \right) d_{ij}$$

• Naturaleza de las variables:

$$x_{ijg} \geq 0 \quad \forall i, j, g$$

P2. • Variables de decisión:

(a) x_{ij} : 1 si se conecta i con j , 0 si no.

• Restricciones:

(a) Cada conexión debe tener sólo una "entrada":

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

(b) Cada conexión debe tener sólo una "salida":

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

(c) No debo tener ciclos disjuntos (subtour elimination):

FORMA 1

$$\forall \emptyset \neq S \subset \{1, \dots, N\}, \quad \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1$$

FORMA 2

$$\forall \emptyset \neq S \subset \{1, \dots, N\}, |S| \geq 2 \quad \sum_{i \neq j, i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$$

FORMA 3 (sequential formulation)

Definimos variables adicionales

u_i : número de la secuencia en que i fue visitado,

entonces la restricción es:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i \neq j \in \{2, \dots, N\}$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}$$

- **Función Objetivo:**

$$\min \sum_{i,j} x_{ij} t_{ij}$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

P3. • Variables de decisión:

- x_{ij} : 1 asigno al distrito i una estación de bomberos en j , 0 si no.
- y_j : 1 si la estación se construye en j , 0 si no.
- s_j : cantidad de gente atendida por la estación j .
- z : distancia máxima entre un distrito y una bomba.

- **Restricciones:**

- (a) Cada distrito debe tener sólo una estación:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$

- (b) La estación j se construye sólo si fue asignada:

$$y_j \geq x_{ij} \quad \forall i, j$$

- (c) Respetar presupuesto:

$$\sum_j y_j c_j + f s_j \leq B$$

- (d) Cantidad de gente que debe ser servida por cada bomba:

$$s_j = \sum_i x_{ij} p_i \quad \forall j$$

- (e) Establecer la máxima distancia recorrida

$$z \geq x_{ij} d_{ij} \quad \forall i, j$$

- **Función Objetivo:**

$$\min z$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

$$s_j, z \geq 0$$

P4. • Variables de decisión:

- x_{im} : 1 si se asigna la promoción i al mes m , 0 si no.
- y_{im} : cantidad de personal asignado a la promoción i en el mes m .

- **Restricciones:**

- (a) Respetar el presupuesto anual:

$$\sum_{i,m} x_{im} b_{im} \leq B$$

- (b) Cantidad máxima de empleados a utilizar en cada mes:

$$\sum_i y_{im} \leq H_m \quad \forall m$$

- (c) Sólo asigno personal a la promoción i si ésta fue asignada al mes m :

$$y_{im} \leq Cx_{im} \quad \forall i, m$$

donde C es una constante mucho mayor que 1. En este caso el máximo valor que puede tomar C es H_m .

- (d) Cantidad máxima de promociones cada mes:

$$\sum_i x_{im} \leq n \quad \forall m$$

- **Función Objetivo:**

$$\max \sum_{i,m} (x_{im}vf_{im} + y_{im}vu_{im}) + v_0$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$\begin{aligned} x_{im} &\in \{0, 1\} \quad \forall i, m \\ y_{im} &\geq 0 \end{aligned}$$

- P5.** • **Variables de decisión:**

- x_{ij} : 1 si se asigna el camión i al cliente j , 0 si no.
- y_{ik} : 1 si se asigna el camión i al cliente interurbano k , 0 si no.

- **Restricciones:**

- (a) Capacidad de los camiones:

$$R_j x_{ij} \leq V_i \quad \forall i, j$$

- (b) Cada mudanza debe realizarse por un único flete:

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

- (c) Cantidad máxima de fletes por camión:

$$\sum_j x_{ij} \leq L_i \quad \forall i$$

- (d) Clientes s y t deben ser atendidos por camiones diferentes:

$$x_{is} + x_{it} \leq 1 \quad \forall i$$

- (e) Clientes v y w deben ser atendidos por un mismo camión en viajes diferentes:

$$x_{iv} = x_{iw} \quad \forall i$$

- (f) Si un camión hace un viaje interurbano, entonces no realiza más flete durante el día:

$$\sum_j x_{ij} \leq L_i(1 - y_{ik}) \quad \forall i, k$$

- (g) Sólo es un viaje interurbano:

$$\sum_k y_{ik} \leq 1 \quad \forall i$$

- **Función Objetivo:**

$$\max \sum_{ij} B_{ij}x_{ij} + \sum_i \sum_{k=1}^3 y_{ik}(B + bD_k)$$

- **Naturaleza de las variables:**

$$x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k$$

P6. (a) • Variables de decisión:

- x_{kt} : cantidad producida para la familia k en el período t .
- y_{kt} : cantidad inventario en la bodega propia para el tipo k al termino del período t .
- z_{kt} : cantidad inventario en la bodega de terceros para el tipo k al termino del período t .

• Restricciones:

i) Capacidad de producción:

$$\sum_k a_k x_{kt} \leq A_t \quad \forall t$$

ii) Flujo de Producción:

$$y_{k,t-1} + z_{k,t-1} + x_{k,t} = d_{k,t} + y_{k,t} + z_{k,t} \quad \forall k, t$$

iii) Capacidad de Bodega:

$$\sum_k y_{kt} \leq B \quad \forall t$$

• Función Objetivo:

$$\min \sum_{k,t} (b_{kt} y_{kt} + g_{kt} z_{kt})$$

• Naturaleza de las variables:

$$x_{kt}, y_{kt}, z_{kt} \geq 0 \quad \forall k, t$$

- (b) Si el modelo que se obtuvo en la parte anterior se mantiene, más la condición que $g_{kt} < b_{kt}$, entonces se comenzarían a ocupar primero las bodegas de terceros, y como tienen capacidad infinita nunca se usarían las bodegas propias. Dado esto, hay que imponer un par de restricciones con el objetivo de llenar las bodegas propias primero. Supongamos que

y_t : inventario bodega propia en t para cualquier producto

z_t : inventario bodega de terceros en t para cualquier producto

$$\delta_t : 1 \text{ si } y_t = B, 0 \text{ si } y_t < B$$

Dado esto, las nuevas restricciones son

$$(B - y_t) \leq (1 - \delta_t)C_1$$

donde C_1 es una constante mucho mayor que 1. Esto funciona ya que si $\delta_t = 1$, entonces $y_t \geq B$, y por las condiciones del problema original se tiene $y_t = B$. Por último agregamos la siguiente restricción,

$$z_t \leq \delta_t C_2$$

donde C_2 es una constante mucho mayor que cero, y se obliga a que $z_t \geq 0$ cuando $\delta_t = 1$ (es decir, la variable z_t se “libera”).