INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3701: Modelamiento y Optimización
Profs: Richard Weber, Rodrigo Wolf
Coordinador: M. Siebert
Aux: V. Bucarey, N. Devia, P. Obrecht

Auxiliar 7: Dualidad

Lunes 5 de Diciembre de 2011

Pregunta 1: Dualidad y THC

Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{lrcl}
(P) & \text{mín } z = -3x_1 + x_2 & & \\
 & x_1 + x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1 - 2x_2 & \geq & -6 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
 & 5x_1 - x_2 & \leq & 20 \\
 & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Encuentre una cota inferior al valor óptimo de (P) (z^*) mediante una combinación lineal de las restricciones.

b) Formule el problema de optimización que permite encontrar la mejor cota inferior para (P), es decir, el problema dual de (P).

c) Grafique la región factible de (P) y encuentre el óptimo por inspección (x^*, z^*).

d) Encuentre el óptimo del problema dual (D) usando el Teorema de Holgura Complementaria.

e) Reemplace la cuarta restricción por $5x_1 - x_2 \leq 25$ y desarrolle nuevamente *b*), *c*) y *d*). ¿Qué diferencias existen? (PROPUESTO)

Pregunta 2: Demuestre

a) Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente PPL:

$$
\begin{array}{lr}
(P) & \text{mín } c^t x \\
 & Ax \geq c \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Pruebe que si $\overline{x}$ satisface $A\overline{x} = c$ y $\overline{x} \geq 0$, entonces $\overline{x}$ es una solución óptima.

b) Sea el siguiente problema lineal:

$$
\begin{array}{lr}
(P) & \text{mín } q^t x \\
 & Mx \geq -q \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Con M una matriz antisimétrica ($M^t = -M$) de $n \times n$ y q un vector no negativo.
Determine el dual de (P) y demuestre usando el teorema de dualidad que $x = 0$ es una solución óptima de (P).

c) Considere un problema lineal en forma estándar que es infactible, pero se hace factible y tiene solución óptima finita si se omite la última restricción de igualdad. Muestre que el dual del problema original (infactible) es factible y es no acotado.

Pregunta 3: Comente

Sea (P) un problema de maximización y (D) el problema dual correspondiente. Sean:

- (x^*, z^*) la solución óptima y el valor óptimo de (P),
- (y^*, w^*) la solución óptima y el valor óptimo de (D),
- (x, z) una solución factible para (P) y su valor objetivo y
- (y, w) una solución factible para (D) y su valor objetivo

Comente la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) $z^* = w^*$

b) $z \geq w$

c) $z^* \leq w)$ y $z \leq w^*$

d) (P) infactible $\Rightarrow$ (D) infactible

e) (P) tiene solución óptima finita $\Rightarrow$ (D) tiene solución óptima finita

f) (P) no acotado $\Rightarrow$ (D) no acotado

Considere el problema (P) de la parte 1:

g) Reducir el lado derecho de la restricción 1 (b_1) en 1 unidad reducirá z^* en y_1^* unidades.

h) Aumentar el lado derecho de la restricción 4 (b_4) en ϵ unidades reducirá z^* en $\epsilon \cdot y_4^*$ unidades.

i) Aumentar el lado derecho de la restricción 4 (b_4) en 10 unidades reducirá z^* en $10 \cdot y_4^*$ unidades.

j) Vuelva a responder *h*) e *i*) para el caso en que la cuarta restricción se reemplaza por $5x_1 - x_2 \leq 25$.

Anexos

a) Tabla de conversión Primal-Dual

PRIMAL	minimización	maximización	DUAL
Restricciones	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 libre	Variables
Variables	≥ 0 ≤ 0 libre	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	Restricciones

b) Distintas posibilidades para los problemas Primal y Dual

	Óptimo Finito	No Acotado	Infactible
Óptimo Finito	Posible	Imposible	Imposible
No Acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

c) Teorema de Holgura Complementaria

Sean x e y soluciones factibles de los problemas (P) y (D) respectivamente. x e y son soluciones óptimas a sus respectivos problemas si y sólo si se cumple que:

$$y_i \cdot (a_i' x - b_i) = 0 \ \forall i$$
$$x_j \cdot (c_j - y' A_j) = 0 \ \forall j$$

IN3701: Modelamiento y Optimización
Profs: Richard Weber, Rodrigo Wolf
Coordinador: M. Siebert
Aux: V. Bucarey, N. Devia, P. Obrecht

Pauta Auxiliar 7: Dualidad
Lunes 5 de Diciembre de 2011

Pregunta 1: Dualidad y THC

Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{rcl}
(P)\,\text{mín}\ z = -3x_1 + x_2 & & \\
x_1 + x_2 & \geq & 0 \\
x_1 - 2x_2 & \geq & -6 \\
x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
5x_1 - x_2 & \leq & 20 \\
x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Encuentre una cota inferior al valor óptimo de (P) (z^*) mediante una combinación lineal de las restricciones.

b) Formule el problema de optimización que permite encontrar la mejor cota inferior para (P), es decir, el problema dual de (P).

c) Grafique la región factible de (P) y encuentre el óptimo por inspección (x^*, z^*).

d) Encuentre el óptimo del problema dual (D) usando el Teorema de Holgura Complementaria.

e) Reemplace la cuarta restricción por $5x_1 - x_2 \leq 25$ y desarrolle nuevamente b), c) y d). ¿Qué diferencias existen? (PROPUESTO)

Solución:

a) Notar que para que efectivamente se encuentre una cota inferior, las primeras dos restricciones deben multiplicarse por un valor no-negativo, mientras que las demás, por un valor no positivo:
Escojamos $y = (1, 1, -5, 0)$, luego:

$$
\begin{array}{rcll}
(x_1 + x_2 \geq 0) & \cdot 1 & \Longrightarrow & (x_1 + x_2 \geq 0) \\
(x_1 - 2x_2 \geq -6) & \cdot 1 & \Longrightarrow & (x_1 - 2x_2 \geq -6) \\
(x_1 + x_2 \leq 5) & \cdot(-5) & \Longrightarrow & (-5x_1 - 5x_2 \geq -25) \\
(5x_1 - x_2 \leq 20) & \cdot 0 & \Longrightarrow & (0x_1 + 0x_2 \geq 0)
\end{array}
$$

Sumando las restricciones se obtiene:

$$-3x_1 - 6x_2 \geq -31$$

Y como término a término se tiene que:

$$z = -3x_1 + x_2 \geq -3x_1 - 6x_2 \geq -31$$

Notar que como no sabemos el signo de x_1, la única forma de asegurarnos de que esta expresión sea una cota inferior a z es igualando el primer coeficiente a -3.

Se concluye que:

$$z \geq -31$$

para cualquier solución que satisfaga todas las restricciones, en particular, para la solución óptima:

$$z^* \geq -31$$

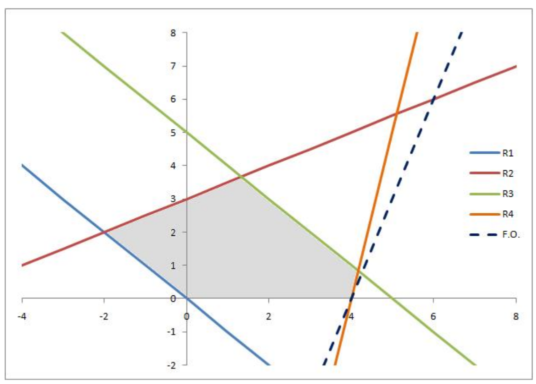
b) El problema dual queda:

$$\begin{array}{lrcl}
(D)\,\text{máx} & w = -6y_2 + 5y_3 + 20y_4 & & \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 & = & -3 \\
 & y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 & \leq & 1 \\
 & y_1, y_2 & \geq & 0 \\
 & y_3, y_4 & \leq & 0
\end{array}$$

- La función objetivo maximiza el valor de la cota formada con el lado derecho de las restricciones.
- La primera restricción obliga a que el coeficiente de x_1 sea igual a -3, para asegurar que sea una cota inferior (no sabemos el signo de x_1).
- La segunda restricción obliga a que el coeficiente de x_2 sea menor o igual a 1, para asegurar que sea una cota inferior (sabemos que $x_2 \geq 0$).
- $y_1, y_2 \geq 0$ para conservar el sentido de la desigualdad (necesitamos que el lado derecho sea menor al lado izquierdo, para que sea cota inferior).
- $y_3, y_4 \leq 0$ para cambiar el sentido de la desigualdad (necesitamos que el lado derecho sea menor al lado izquierdo, para que sea cota inferior).

c) Gráficamente

El óptimo se alcanza en el punto $x^* = (4, 0)$ con un valor óptimo de $z^* = -12$.



d) Teorema de Holgura Complementaria.

$$y_i^* \cdot (a_i' x^* - b_i) = 0 \quad \forall i \tag{1}$$
$$x_j^* \cdot (c_j - {y^*}' A_j) = 0 \quad \forall j \tag{2}$$

Luego (1) implica que:

$$\begin{array}{rrrr}
y_1^* \cdot (x_1 + x_2 - 0) = 0 \Rightarrow & y_1^* \cdot (4 + 0 - 0) = 0 \Rightarrow & 4y_1^* = 0 \Rightarrow & y_1^* = 0 \\
y_2^* \cdot (x_1 - 2x_2 - (-6)) = 0 \Rightarrow & y_2^* \cdot (4 + 0 - (-6)) = 0 \Rightarrow & 10y_2^* = 0 \Rightarrow & y_2^* = 0 \\
y_3^* \cdot (x_1 + x_2 - 5) = 0 \Rightarrow & y_3^* \cdot (4 + 0 - 5) = 0 \Rightarrow & -y_3^* = 0 \Rightarrow & y_3^* = 0 \\
y_4^* \cdot (5x_1 - x_2 - 20) = 0 \Rightarrow & y_4^* \cdot (5 \cdot 4 + 0 - 20) = 0 \Rightarrow & 0y_4^* = 0 \Rightarrow & y_4^* \leq 0 \ \text{libre}
\end{array}$$

Luego (2) implica que:

$$\begin{array}{rcl}
4 \cdot (-3 - (y_1^* + y_2^* + y_3^* + 5y_4^*)) = 0 & \Longrightarrow & y_1^* + y_2^* + y_3^* + 5y_4^* = -3 \\
0 \cdot (1 - (y_1^* - 2y_2^* + y_3^* - y_4^*)) = 0 & \Longrightarrow & \text{nada}
\end{array}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que el óptimo se alcanza en el punto $y^* = (0, 0, 0, -3/5)$ con un valor óptimo de $w^* = -12$.

e) Propuesto.

Pregunta 2: Demuestre

a) Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente PPL:

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{mín } & c^t x \\ Ax &\geq c \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Pruebe que si $\overline{x}$ satisface $A\overline{x} = c$ y $\overline{x} \geq 0$, entonces $\overline{x}$ es una solución óptima.

Solución:
Sea (D) el dual de (P):

$$\begin{aligned} (D) \quad \text{máx } & c^t y \\ Ay &\leq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

y sea $\overline{y}$ tal que:

$$\begin{aligned} A\overline{y} &= c \qquad / \cdot cA^{-1} \\ c\overline{y} &= cA^{-1}c \end{aligned}$$

Por enunciado:

$$\begin{aligned} A\overline{x} &= c \qquad / \cdot cA^{-1} \\ c\overline{x} &= cA^{-1}c \\ c\overline{x} &= c\overline{y} \end{aligned}$$

Como $\overline{y}$ es factible en (D), por dualidad débil se tiene:

$$\begin{gathered} c\overline{y} \leq cx \quad \forall x \text{ factible en } (P) \\ c\overline{x} \leq cx \quad \forall x \text{ factible en } (P) \\ \overline{x} \text{ es óptimo de } (P) \end{gathered}$$

b) Sea el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{mín } & q^t x \\ Mx &\geq -q \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Con M una matriz antisimétrica ($M^t = -M$) de $n \times n$ y q un vector no negativo.
Determine el dual de (P) y demuestre usando el teorema de dualidad que $x = 0$ es una solución óptima de (P).

Solución:

El dual de (P) es el mismo (P) debido a la antisimetría de M:

$$\begin{aligned} (D) \quad \text{máx } & -q^t y \\ M^t y &\leq q \\ y &\geq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} (D) \quad \text{mín } & q^t y \\ My &\geq -q \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Claramente $x = 0$ es una solución factible para (P) con un valor objetivo de $z = 0$, por lo que, por dualidad débil: $z = 0 \geq w = -q^t y$, $\forall y$ factible en (D).

A su vez, $y = 0$ es una solución factible para (D) con un valor objetivo de $w = 0$, por lo que, por dualidad débil: $w = 0 \leq z = q^t x$, $\forall x$ factible en (P).

Luego, se tiene que $x = 0$ es solución óptima de (P) y, obviamente, $y = 0$ también es solución óptima de (D).

c) Considere un problema lineal en forma estándar que es infactible, pero se hace factible y tiene solución óptima finita si se omite la última restricción de igualdad. Muestre que el dual del problema original (infactible) es factible y es no acotado.

Solución: Llamaremos (P) al problema original en forma estándar:

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{mín } & c^t x \\ Ax &= b \\ a_{m+1} x &= b_{m+1} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz de $m \times n$ y a_{m+1} un vector fila de $1 \times n$.
Sea (P_1) el problema (P) sin la última restricción:

$$\begin{aligned} (P_1) \quad \text{mín } & c^t x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Como (P_1) tiene solución óptima finita, entonces, por el teorema de dualidad fuerte, su dual, también la tiene. Llamaremos (D_1) a su dual:

$$\begin{aligned} (D_1) \quad \text{máx } & b^t y \\ A^t y &\leq c \end{aligned}$$

Sea y^* la solución óptima de (D_1), luego debe satisfacer: $A^t y^* \leq c$
Si llamamos (D) al problema dual de (P):

$$\begin{aligned} (D) \quad \text{máx } & b^t y + b_{m+1} y_{m+1} \\ A^t y + a^t_{m+1} y_{m+1} &\leq c \end{aligned}$$

se tiene la solución factible trivial: $y = y^*, y_{m+1} = 0$, es decir $\overline{y} = (y^*, 0)$ es factible en (D)

Luego, como (P) no tiene solución óptima finita, por el teorema de dualidad fuerte (D) tampoco la tiene y sólo puede ser infactible o no acotado[1]. Pero como $\overline{y}$ es una solución factible, se concluye que (D) es un problema no acotado.

Pregunta 3: Comente

Sea (P) un problema de maximización y (D) el problema dual correspondiente. Sean:

[1] Ver anexo b) en el enunciado

(x^*, z^*) la solución óptima y el valor óptimo de (P),

(y^*, w^*) la solución óptima y el valor óptimo de (D),

(x, z) una solución factible para (P) y su valor objetivo y

(y, w) una solución factible para (D) y su valor objetivo

Comente la veracidad de las siguientes afirmaciones:

Solución:

a) $\mathbf{z^* = w^*}$
Teorema de Dualidad Fuerte: Esta afirmación es cierta sólo si (P) y (D) tienen solución óptima finita.

b) $\mathbf{z \geq w}$
Falso, el problema de maximización siempre está "por debajo"del problema de minimización, luego $z \leq w$. (Teorema de Dualidad Débil)

c) $\mathbf{z^* \leq w}$ **y** $\mathbf{z \leq w^*}$
Verdadero, casos particulares del Teorema de Dualidad Débil.

d) **(P) infactible $\Rightarrow$ (D) infactible**
Falso, si (P) es infactible, (D) puede ser infactible o no acotado.

e) **(P) tiene solución óptima finita $\Rightarrow$ (D) tiene solución óptima finita**
Verdadero, Teorema de Dualidad Fuerte

f) **(P) no acotado $\Rightarrow$ (D) no acotado**
Falso, si (P) es no acotado entonces (D) es infactible. (Corolario del Teorema de Dualidad Débil)

Considere el problema (P) de la parte 1:

g) **Reducir el lado derecho de la restricción 1 ($\mathbf{b_1}$) en 1 unidad reducirá $\mathbf{z^*}$ en $\mathbf{y_1^*}$ unidades.**
Verdadero (OJO, para este caso particular). Reducir b_1 hace crecer la región factible, por lo que la solución óptima podría mejorar si la restricción 1 fuese activa en el punto óptimo. Como este no es el caso, el valor óptimo no mejora y la variable dual óptima asociada $y_1^* = 0$ sí corresponde al **precio sombra** de esta restricción.

h) **Aumentar el lado derecho de la restricción 4 ($\mathbf{b_4}$) en ϵ unidades reducirá $\mathbf{z^*}$ en $\epsilon \cdot \mathbf{y_4^*}$ unidades.**
Verdadero para este caso. La restricción 4 es activa en el óptimo, por lo que aumentar su lado derecho permite mejorar marginalmente la función objetivo a una tasa y_4^*. Luego, esta afirmación es verdadera para un ϵ suficientemente pequeño.

i) **Aumentar el lado derecho de la restricción 4 ($\mathbf{b_4}$) en 10 unidades reducirá $\mathbf{z^*}$ en $\mathbf{10y_4^*}$ unidades.**
Falso, el precio sombra y_4^* es una tasa marginal de mejora, por lo que no puede generalizarse para crecimientos muy grandes de b_4. Para este caso particular, la tasa de mejora $y_4^* = \frac{-3}{5}$ es válida sólo hasta un crecimiento de 5 unidades de b_4.

j) **Vuelva a responder h) e i) para el caso en que la cuarta restricción se reemplaza por $\mathbf{5x_1 - x_2 \leq 25}$.**
En este caso se tiene que el punto óptimo $x^* = (5, 0)$ es un **punto degenerado**, por lo que tiene 3 restricciones activas (2 de las restricciones más la no-negatividad de x_2). Luego, se tendrán 2 variables óptimas duales libres (y_3^* e y_4^*), es decir, que pueden ser no nulos. Sin embargo, la interpretación de estos valores ya no corresponden a los respectivos precios sombra, ya que al aumentar por separado una de estas restricciones el punto óptimo no cambia (sólo deja de ser degenerado) y por ende, el valor óptimo de la función objetivo no mejora. (EL DESARROLLO QUEDA PROPUESTO)

Dudas y/o Comentarios a
Nelson Devia
ndevia@ing.uchile.cl