Unidad 1

a. Probabilidades y Estadística

CLASE N° 5

IN3401

SEMESTRE OTOÑO, 2012

Características de las v.a

Parámetros v.a.

- La función de densidad o la distribución de probabilidad de una v.a. contiene exhaustivamente toda la información sobre la variable.

- Sin embargo resulta conveniente resumir sus características principales con unos cuantos valores numéricos. Estos son, fundamentalmente la *esperanza* y la *varianza*.

- Diferenciamos entre v.a. discretas y continuas.

Esperanza

- **V.a. discretas**: es la suma del producto de la probabilidad de cada suceso por el valor de dicho suceso. Si todos los sucesos son de igual probabilidad la esperanza es la media.

- Para una variable aleatoria discreta con valores posibles x_1, x_2 ... x_n, la esperanza se calcula como:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Esperanza

- **V.a. continuas**: la esperanza se calcula mediante la integral de todos los valores y la función de densidad:

$$\mu = E(X) = \int_{\Omega} x f(x) dx$$

- La esperanza es un operador lineal:

$$E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b$$

Varianza

- La **varianza** se define como la esperanza de la transformación $[X-E(X)]^2$: $E([X-E(X)]^2)$.

- La **desviación estándar σ** es la raíz cuadrada de la varianza.

- **V.a. discretas**:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x_i)]$$

Varianza(2)

El número de casas que Ponder Real Estate vendió mensualmente varió de 5 a 20 junto con la frecuencia de cada nivel de ventas que aparece en las dos primeras columnas de la tabla que se muestra a continuación.

(1) Número de meses	(2) Casas (x_i)	(3) $P(x_i)$	(4) $(x_i)\ P(x_i)$	(5) $(x_i-\mu)^2\ P(x_i)$
3	5			
7	8			
4	10			
5	12			
3	17			
2	20			
24				

El Sr. Ponder espera que estas cifras reflejen un incremento en el número promedio de ventas, por encima del 7.3 que vendió en meses anteriores, y una reducción en la variabilidad de las ventas mensuales que habían sido de $\sigma = 5.7$. De lo contrario, él ha decidido vender el negocio y convertirse en un bufón de rodeo. ¿Qué consejo puede ofrecerle al Sr. Ponder?

Varianza

- **V.a. continuas:** integrar

$$\sigma^2 = \int_\Omega (x_i - \mu)^2 f(x)\,dx$$

- **Propiedades:**

$\boldsymbol{\sigma}^2 = E(X^2) - E(X)^2$

$V(aX+b) = a^2\, \boldsymbol{\sigma}^2\,(X)$

Distribuciones Truncadas

- Ej: *"La longitud de las varillas fabricadas por una máquina es una variable aleatoria X distribuida según* f_X*. Si nos quedamos solamente con las varillas que miden más de 2cm, ¿cómo se distribuye la longitud de las varillas que quedan?"*

- La nueva distribución excluye la probabilidad de la condición, por lo que la nueva distribución no suma/integra 1.Es necesario corregir la distribución dividiendo por la probabilidad de la condición y excluyendo los valores descartados.

Distribuciones Truncadas(2)

- Ej (cont):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 < x < 5 \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$$

- Condición: X>2

$$\mathbb{P}(X > 2) = \int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^5 \frac{1}{4}dx = \frac{3}{4}$$

- Se excluyen los valores descartados:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} & 2 < x < 5 \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$$

Distribuciones Truncadas(3)

- Ej (cont): Se corrige la distribución dividiendo por la probabilidad del suceso:

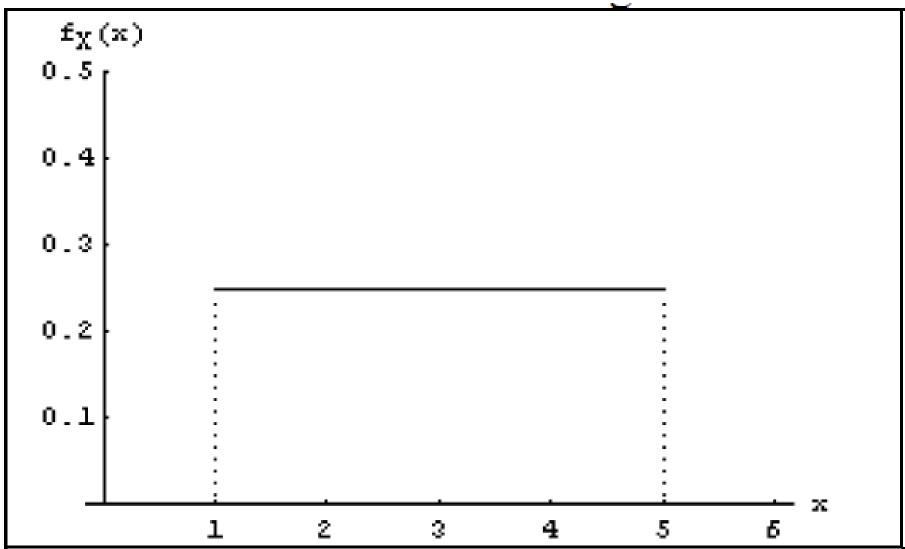
$$f_{x|x>2} = \begin{cases} \dfrac{1/4}{a} & 2 < x < 5 \\ 0 & \forall \; otro \; x \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & 2 < x < 5 \\ 0 & \forall \; otro \; x \end{cases}$$

- Verificamos que es efectivamente una distribución:

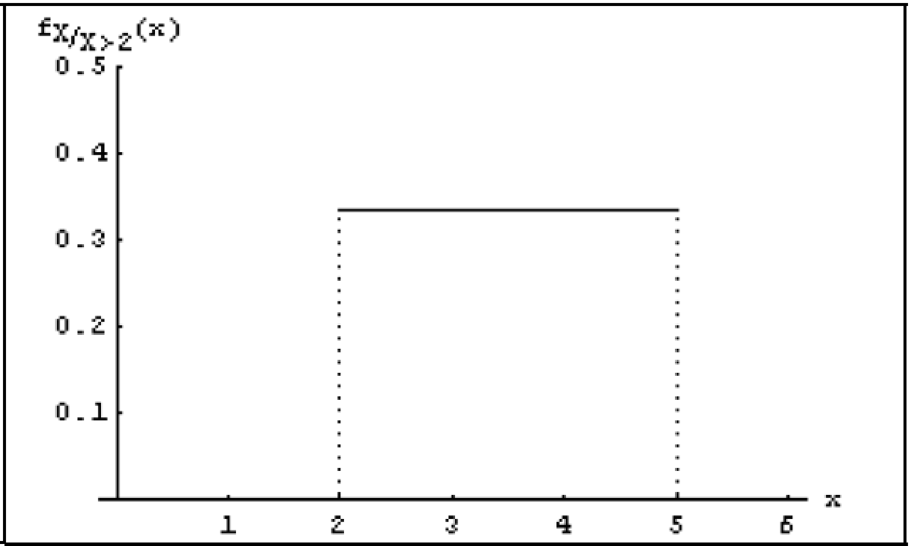
$$\int_{\Omega} f_{x|x>2}(x)dx = \int_{2}^{5} \frac{1}{3} dx = 1$$

Distribuciones Truncadas(4)

- Gráficamente:



$f_X(x)$



$f_{X/X>2}(x)$

Distribuciones Truncadas(5)

- Ej 2(v.a. discretas): Se tienen piezas de tipo 1, 2, 3 y 4, ubicadas, mezcladas, en una caja. El experimento consiste en tomar una pieza al azar de la caja. Hay un 20% de piezas tipo 1, 40% de tipo 2, 3% de tipo 3, y 10% de tipo 4. Luego alguien se toma el trabajo de quitar todas las piezas tipo 3 de la caja. ¿Cómo se distribuye X ahora?

- Se tiene la siguiente distribución:

$$P_X(x) = \begin{cases} 2/10 & x = 1 \\ 4/10 & x = 2 \\ 3/10 & x = 3 \\ 1/10 & x = 4 \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$$

Distribuciones Truncadas(5)

- Ej 2: condición X ≠ 3 $\quad \mathbb{P}(X \neq 3) = \dfrac{7}{10}$

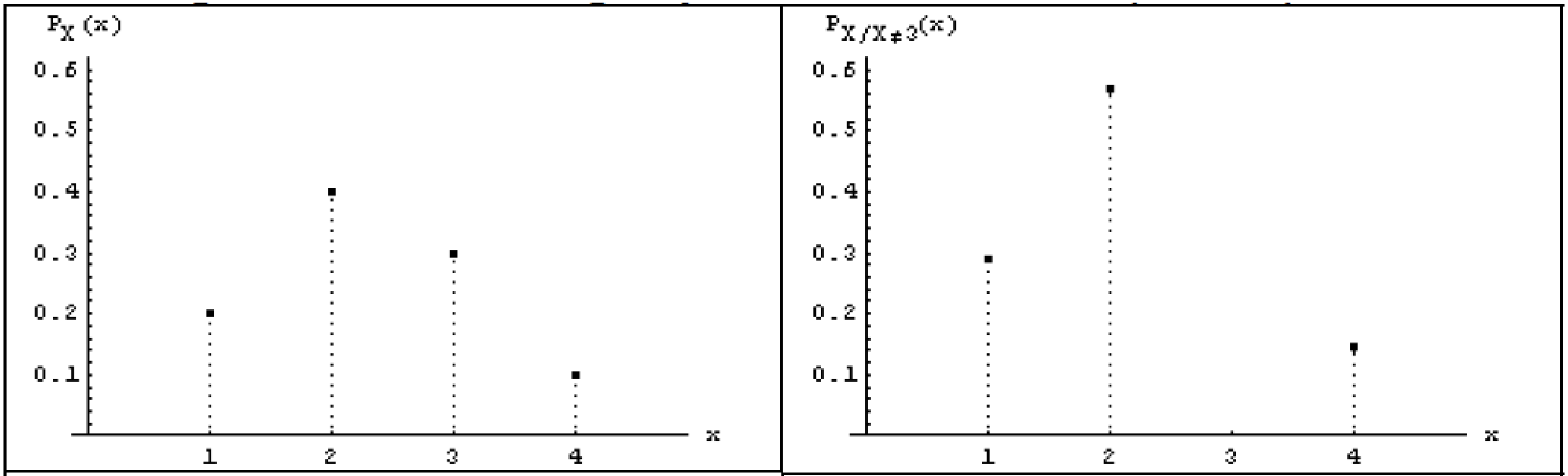
- Función con dominio restringido

$$P_X(x) = \begin{cases} 2/10 & x = 1 \\ 4/10 & x = 2 \\ 1/10 & x = 4 \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$$

- Corrección de la distribución: $P_{X/X\neq 3}(x) = \begin{cases} 2/7 & x = 1 \\ 4/7 & x = 2 \\ 1/7 & x = 4 \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$

Distribuciones Truncadas(6)

- Gráficamente:



$P_X(x)$ $P_{X/X\neq 3}(x)$

Distribución conjunta

- Se deben cumplir los mismos supuestos que para variables unidimensionales:

$$P(x_i, y_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_i) = 1 \qquad \int_{\Omega}\int_{\Omega'} f(x,y)dxdy = 1$$

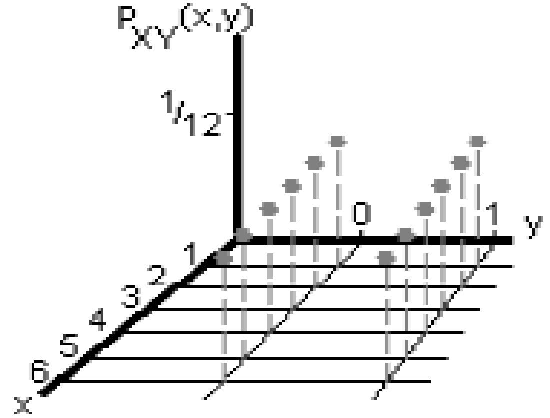
- La interpretación de la función de densidad conjunta es una función bidimensional.

Distribución conjunta(2)

- Ej: X: el número que sale al tirar un dado.

  Y: la cantidad de caras que salen al tirar una moneda.

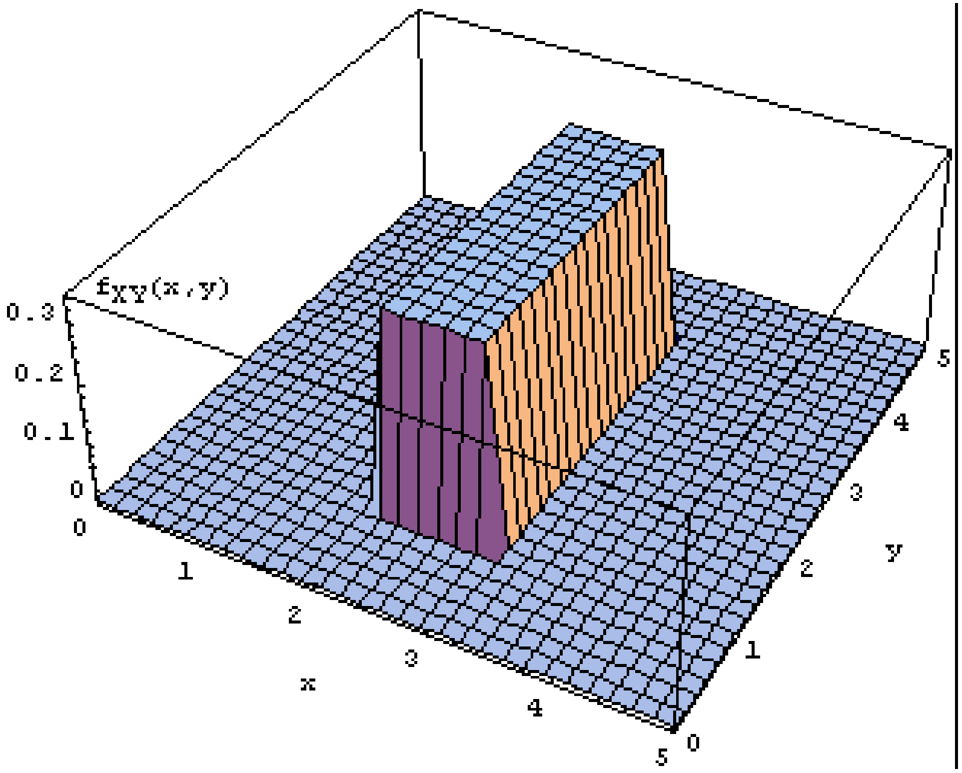
		Y	
	P_{XY}	0	1
X	1	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	2	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	3	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	4	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	5	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	6	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$



Distribución conjunta(2)

- Ej 2: Caso continuo:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 2 < x < 3, 1 < y < 4 \\ 0 & \forall \text{ otro } x \end{cases}$$



Distribución Marginal

- Cada componente de una variable aleatoria bidimensional es una variable aleatoria unidimensional en sí misma.
- Nos puede interesar conocer la distribución de una componente por separado, sin tener en cuenta a la otra componente.
- Eso se denomina "marginar", y la distribución de la variable unidimensional por separado se llama "distribución marginal".

Distribución Marginal(2)

- (v.a. discretas) Sea la variable aleatoria bidimensional XY distribuida según $P_{XY}(x,y)$, la distribución marginal de X es:

$$P_X(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)$$

- Análogamente, la distribución marginal de Y es:

$$P_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j)$$

Distribución Marginal(3)

- (v.a. continuas) Sea la variable aleatoria bidimensional XY distribuida según $f_{XY}(x,y)$, la distribución marginal de X es:

$$f_X(x) = \int_{\Omega'} f(x,y)dy$$

- Análogamente, la distribución marginal de Y es:

$$f_Y(y) = \int_{\Omega} f(x,y)dx$$

Distribución Marginal(4)

- **Ej 1:** Si la distribución conjunta es:

P_{XY}		Y	
		20	**30**
X	**1**	0,1	0,3
	2	0,4	0,2

Vamos a hallar la distribución de X.

Primero enumeramos los valores posibles de X: 1; 2.
Y ahora para cada valor posible de X, aplicamos la fórmula.

$$P_X(1) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} P_{XY}(1, y) = P_{XY}(1,20) + P_{XY}(1,30) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

$$P_X(2) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} P_{XY}(2, y) = P_{XY}(2,20) + P_{XY}(2,30) = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

Entonces obtuvimos:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0,4 & x = 1 \\ 0,6 & x = 2 \\ 0 & \forall \text{ otro } x \end{cases}$$

Distribución Marginal(5)

Ahora hallemos la distribución de Y:
Primero enumeramos los valores posibles de Y: 20; 30.
Y ahora para cada valor posible de X, aplicamos la fórmula.

$$P_Y(20) = \sum_{x=-\infty} P_{XY}(x,20) = P_{XY}(1,20) + P_{XY}(2,20) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$$

$$P_Y(30) = \sum_{x=-\infty} P_{XY}(x,30) = P_{XY}(1,30) + P_{XY}(2,30) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$$

Entonces obtuvimos:

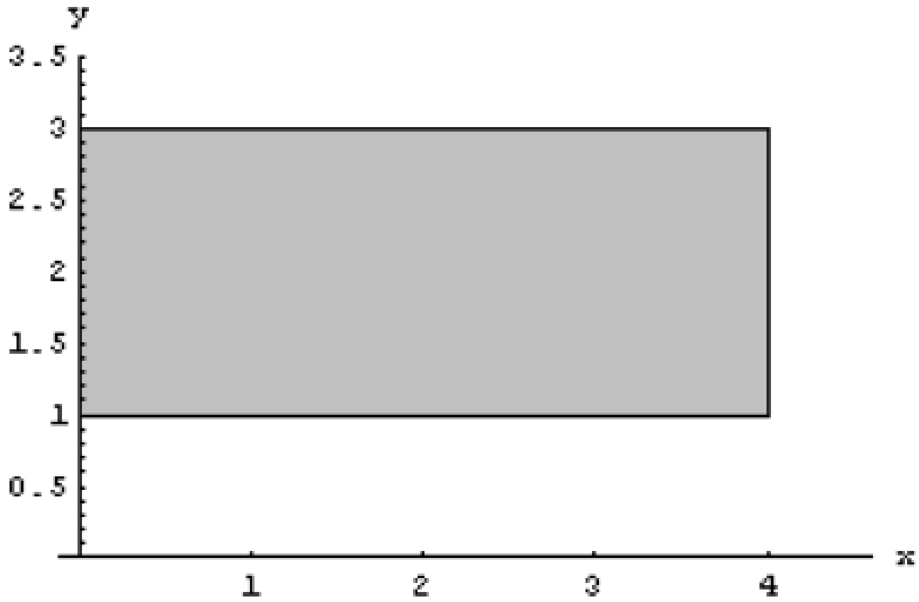
$$P_Y(y) = \begin{cases} 0{,}5 & y = 20 \\ 0{,}5 & y = 30 \\ 0 & \forall \text{ otro } y \end{cases}$$

P_{XY}		Y		
		20	**30**	
X	**1**	0,1	0,3	*0,4*
	2	0,4	0,2	*0,6*
		0,5	*0,5*	

Distribución Marginal(5)

- Ej 2

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & 0<x<4\,,1<y<3\\ 0 & \forall\ otro\ x,y\end{cases}$$



Distribución Marginal(6)

- Ej 2: Distribución marginal de X: se aplica la fórmula al único intervalo relevante (0 < x < 4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{1}^{3} \frac{1}{8}\,dy = \frac{1}{4}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 < x < 4 \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$$

Distribución Marginal(7)

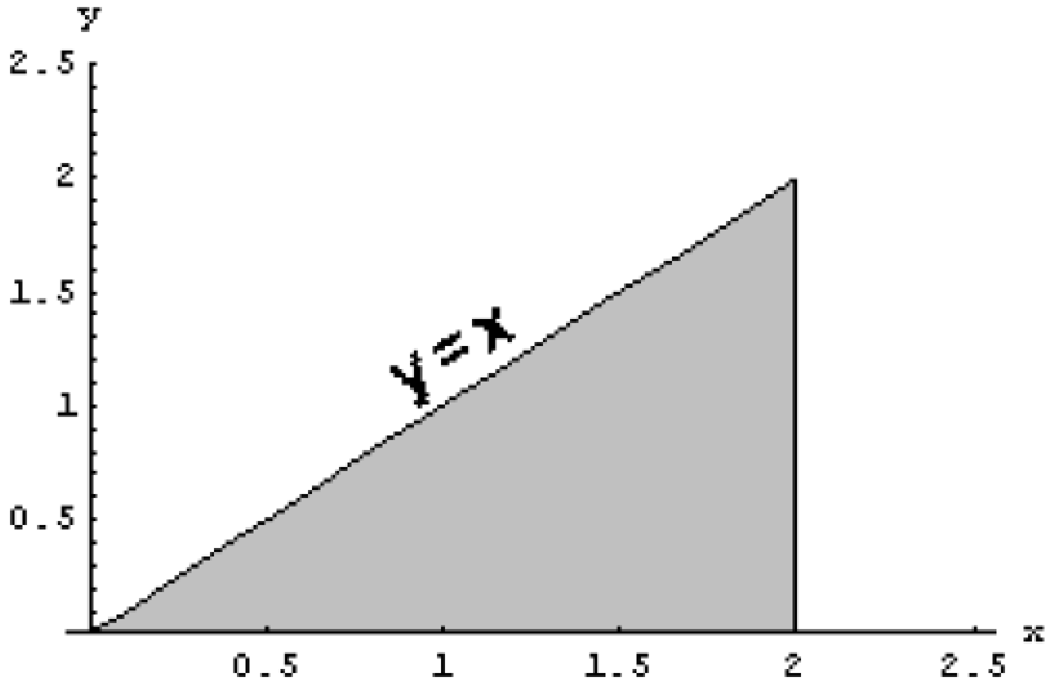
- Ej 2: Distribución marginal de Y: se aplica la fórmula al único intervalo relevante (1 < y < 3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & 1 < y < 3 \\ 0 & \forall\ otro\ y \end{cases}$$

Distribución Marginal(8)

- Ej 3:



$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{4} & 0<x<2\,,\,0<y<x\\ 0 & \forall\ otro\ x,y\end{cases}$$

Distribución Marginal(9)

- Ej 3: Distribución marginal de X: se aplica la fórmula al único intervalo relevante (0 <x< 2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{x+y}{4}\,dy = \frac{3x^2}{8} \qquad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{8} & 0 < x < 2 \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$$

- Distribución marginal de Y: se aplica la fórmula al único intervalo relevante (0 < y < 2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_y^2 \frac{x+y}{4}\,dx = \frac{4+4y-3y^2}{8} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{4+4y-3y^2}{8} & 0 < y < 2 \\ 0 & \forall\ otro\ y \end{cases}$$

Covarianza

- Introducimos el concepto de probabilidad conjunta, cuando dos v.a. pueden tomar simultáneamente ciertos valores concretos (caso discreto):

$$P(x_i, y_i) = [\mathbb{P}(X = x_i) \cap \mathbb{P}(Y = y_i)]$$

- La covarianza refleja la relación lineal de 2 v.a. X e Y:

$$\boldsymbol{\sigma}\,(X,Y) = E(\mathrm{XY}) - E(\mathrm{X})\,E(\mathrm{Y})$$

Covarianza(2)

Donde:

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_i P(x_i, y_i)$$ caso v.a. discretas

$$E(XY) = \int_{\Omega} \int_{\Omega'} xy\, f(x, y) dx dy$$ caso v.a. continuas

- Correlación de Pearson:

$$\rho(X, Y) = \frac{\sigma(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Distribuciones Condicionales.

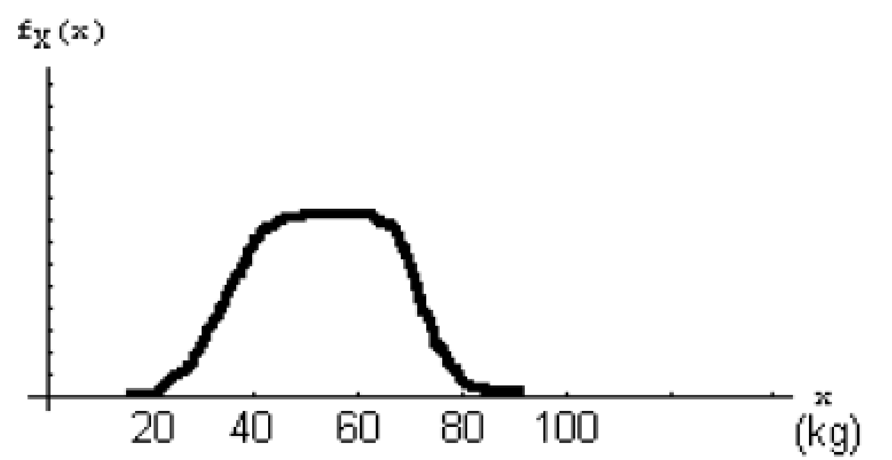
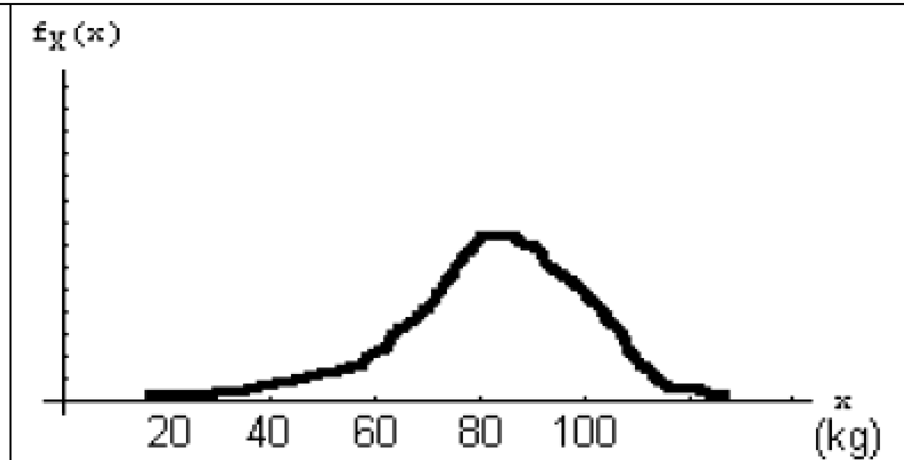
- Supongamos que tenemos las v.a. *peso* y *altura*.

- Intuitivamente, si conocemos el valor que tomó una de las v.a. al hacer el experimento, eso nos modificará la distribución de probabilidad de la otra variable aleatoria.

- Conociendo función de densidad conjunta de las dos variables aleatorias, podemos obtener la distribución marginal del peso. Pero si conociéramos que la variable altura tomó el valor 1.90m, ¿la distribución marginal del peso que teníamos sigue siendo válida?

Distribuciones Condicionales(2).

- No, Seguramente, la masa de probabilidad del peso tenderá a distribuirse más hacia los valores más altos:

	
Distribución marginal de la variable peso, es decir, sin saber nada de la altura.	Distribución de la variable peso, sabiendo que la variable altura tomó el valor 1.90

Distribuciones Condicionales(3).

- Se define entonces la función de densidad condicional:

- Caso 2 v.a. discretas *X* e *Y*:

$$P_{X/Y}(x,y)=\frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

- Caso 2 v.a. continuas *X* e *Y*:

$$f_{X/Y}(x,y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Independencia de v.a.

- Intuitivamente, X e Y son independientes si $f_{X/Y}(x,y)$ es idéntica para todos los posibles valores de y.

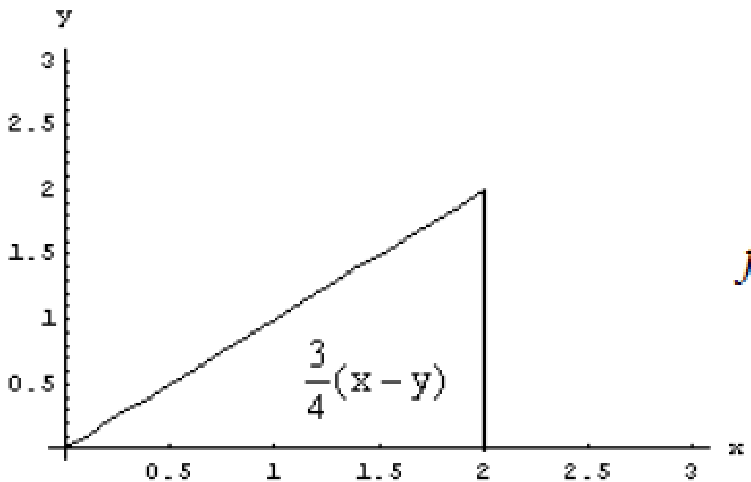
- Por ejemplo, que la distribución del peso es idéntica para los distintos valores de altura (claramente no se cumple).

- Si $f_{X/Y}(x,y)$ no depende de y, entonces es en realidad $f_X(x)$, es decir, la distribución marginal de X.

Independencia de v.a.(2)

Para X, Y variables aleatorias continuas:	**Para X, Y variables aleatorias discretas:**
X e Y son estadísticamente independientes <=> $f_{X/Y}(x,y) = f_X(x)$ <=> $f_{Y/X}(x,y) = f_Y(y)$ <=> $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$	X e Y son estadísticamente independientes <=> $P_{X/Y}(x,y) = P_X(x)$ <=> $P_{Y/X}(x,y) = P_Y(y)$ <=> $P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

- Ej 1:



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x-y) & 0<x<2, 0<y<x \\ 0 & \forall \; otro \; x, y \end{cases}$$

Independencia de v.a.(3)

Marginamos:

$$f_X(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\int_{0}^{2}\frac{3}{4}(x-y)\,dy=\frac{3}{8}x^2$$

lo cual vale para 0 < x < 2.

$$f_Y(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx=\int_{y}^{2}\frac{3}{4}(x-y)\,dy=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}y^2-y+1\right)$$

lo cual vale para 0 < y < 2. Tenemos entonces:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & 0<x<2\\ 0 & \forall\ otro\ x\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}y^2-y+1\right) & 0<y<2\\ 0 & \forall\ otro\ y\end{cases}$$

Independencia de v.a.(4)

Multiplicándolas se obtiene que el valor es:

$$\frac{3}{8}x^2\,\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}y^2-y+1\right)=\frac{9}{16}x^2\left(\frac{1}{4}y^2-y+1\right)$$

Y el dominio es $0 < x < 2 \cap 0 < y < 2$.

Se ve claramente que ni los valores ni el dominio coinciden con los de la función conjunta original. Luego, **X e Y no son independientes**.

Ej 2:

Tenemos las variables aleatorias discretas X e Y, cuya distribución conjunta es:

		Y		
X	**P_{XY}**	**1**	**2**	**3**
	1	0.08	0.12	0.2
	2	0.12	0.18	0.3

Independencia de v.a.(5)

Hallamos las distribuciones marginales:

X	P_{XY}	Y: 1	Y: 2	Y: 3	P_X
	1	0.08	0.12	0.2	0.4
	2	0.12	0.18	0.3	0.6
P_Y		0.2	0.3	0.5	---

Si multiplicamos las distribuciones marginales obtenemos:

X	$P_X P_Y$	Y: 1	Y: 2	Y: 3
	1	0.08	0.12	0.2
	2	0.12	0.18	0.3

Vemos que $P_X P_Y = P_{XY}$ $\forall$ x, y. Por lo tanto X e Y **son independientes**.

Esperanza Condicional

- Podemos obtener la esperanza de una distribución condicional de la misma manera que para el caso unidimensional:

- Caso 2 v.a. discretas X e Y:

$$E(X/Y) = \mu_{X/Y} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \, P_{X/Y}(x,y)$$

- Caso 2 v.a. continuas X e Y:

$$E(X/Y) = \mu_{X/Y} = \int_{\Omega} x \, f_{X/Y}(x,y) \, dx$$

Percentiles

- El percentil *p* de una variable aleatoria *X* es número más pequeño, que denominaremos x_u que cumple:

$$p = P\{X \leq x_u\} = F(x_u)$$

- el percentil es, por tanto, el valor de la variable aleatoria para el cual la función de distribución acumulada toma el valor *p*.

Distribuciones Discretas - Binomial

- Ensayo de Bernoulli: Es un experimento que puede arrojar 2 resultados posibles. A uno de los resultados se lo denomina arbitrariamente "éxito" y al otro "fracaso".

- El ensayo de Bernoulli lleva asociada una probabilidad (de éxito). Ej: tirar un dado, donde el éxito es sacar 5:

- P[éxito]=1/6;   P[fracaso]=1-1/6=5/6

- Un *proceso de Bernoulli* considera *n* ensayos de Bernoulli independientes

Distribuciones Discretas – Binomial(2)

- La probabilidad de obtener k éxitos en un proceso de Bernoulli de n ensayos se distribuye Binomial(n,p):

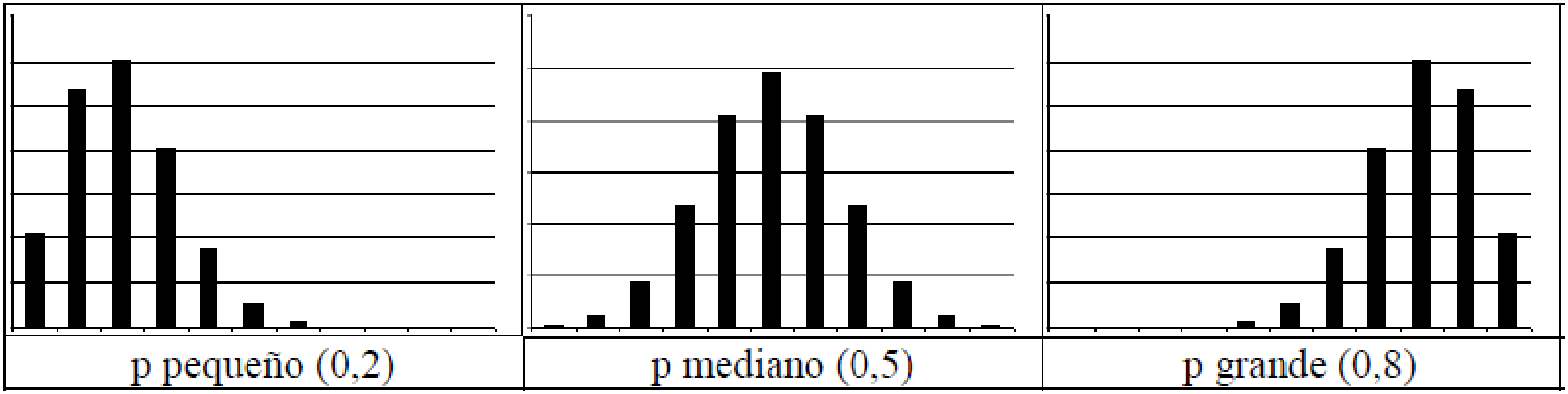
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Esto se cumple cuando $0 \leq k \leq n$. Para los valores restantes de k esta probabilidad es cero.

- Además se tiene E(X)=np y V(X)=$np(1-p)$

Distribuciones Discretas – Binomial(3)

- Aspecto de la distribución binomial:



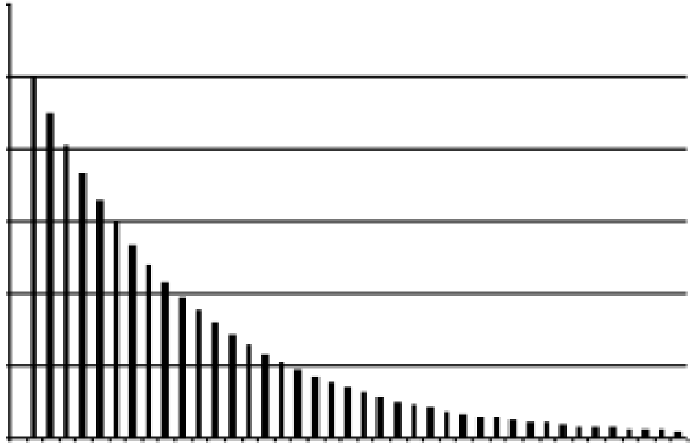
- Importante señalar que todos los valores entre 0 y n tienen probabilidad no nula, aunque la probabilidad de los valores cercanos a n será muy pequeña si p es chico, y la probabilidad de los valores cercanos al 0 será muy pequeña si p es grande.

Distribuciones Discretas – Geométrica

- La probabilidad de obtener el primer éxito en el intento número x se distribuye geométrica(p):

$$\mathbb{P}(X = x) = p \quad (1 - p)^{x-1}$$

- Además se tiene E(X)=*1/p* y V(X)=*(1-p)/p²*
- Aspecto:



Distribuciones Discretas – Pascal

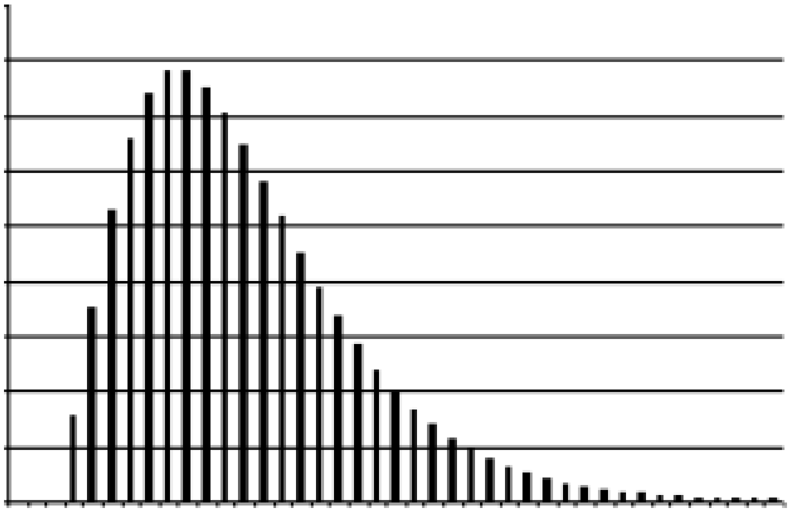
- "¿Cuál es la probabilidad de obtener el k-ésimo éxito en el intento número x?“
- **X** se distribuye **Pascal(k , p):**

$$P(X=x)=\begin{cases}\binom{x-1}{k-1}p^k.(1-p)^{x-k} & x\geq k\\ 0 & \forall\ otro\ x\end{cases}$$

- Además se tiene E(X)=k/p y V(X)=k$(1-p)/p^2$

Distribuciones Discretas – Pascal(2)

- Aspecto



- Todos los valores menores que k tienen probabilidad nula. A partir de k, la probabilidad crece con mayor o menor velocidad dependiendo de p, y luego de llegar al valor más probable, decrece lenta y asintóticamente hacia el 0.

Distribuciones Discretas – Poisson

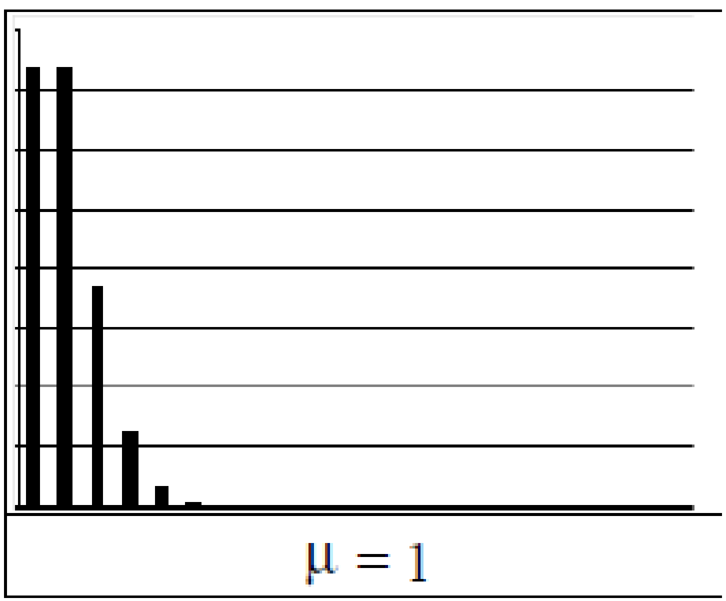
- "¿Cuál es la probabilidad de obtener x eventos en un intervalo de tiempo?"
- La distribución de Poisson usa el parámetro $\mu = \lambda T$, donde T es la longitud del intervalo, y λ es la cantidad esperada de eventos por unidad de tiempo, entonces μ resulta ser la media.
- **X:Poisson(μ)**

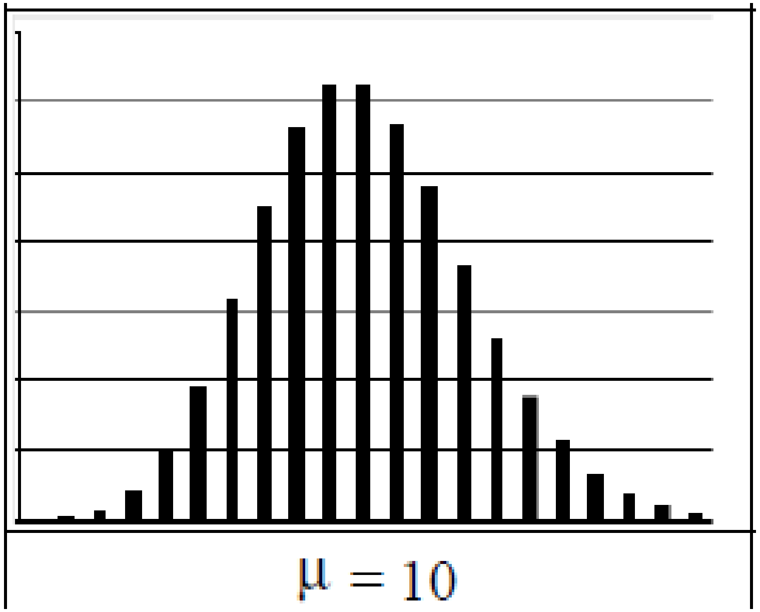
$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Distribuciones Discretas – Poisson(2)

- La esperanza y varianza de una distribución de Poisson: $E(X)= \mu$ y $V(X)= \mu$

- Aspecto:

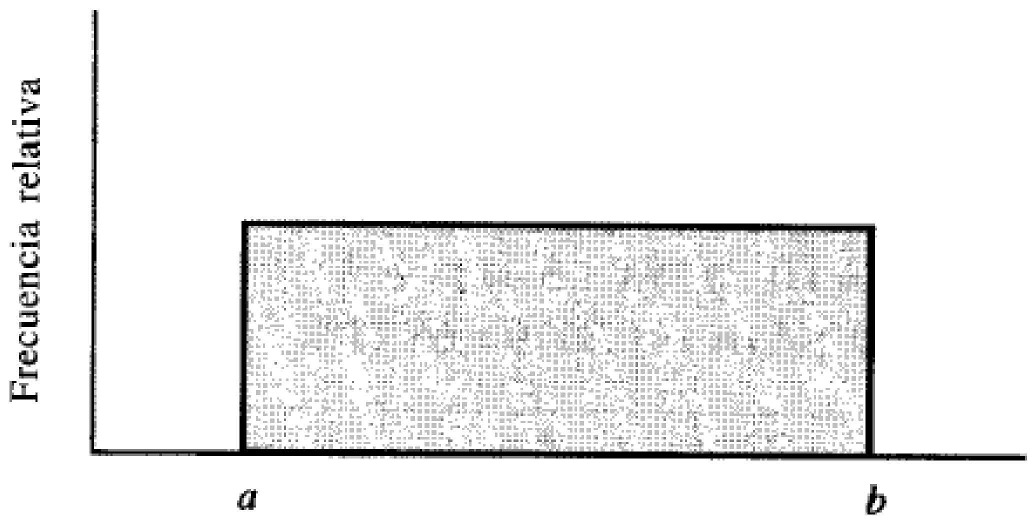




Distribuciones Continuas– Uniforme

- En una distribución uniforme las probabilidades son las mismas para todos los posibles resultados

- Aspecto: Uniforme (a,b)



Distribuciones Continuas– Uniforme(2)

- La media está a mitad de camino de los puntos extremos:

$$E(x) = \mu = \frac{a + b}{2}$$

- Varianza: $\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$

- Función de densidad: f $= \frac{1}{b - a}$

Distribuciones Continuas– Exponencial

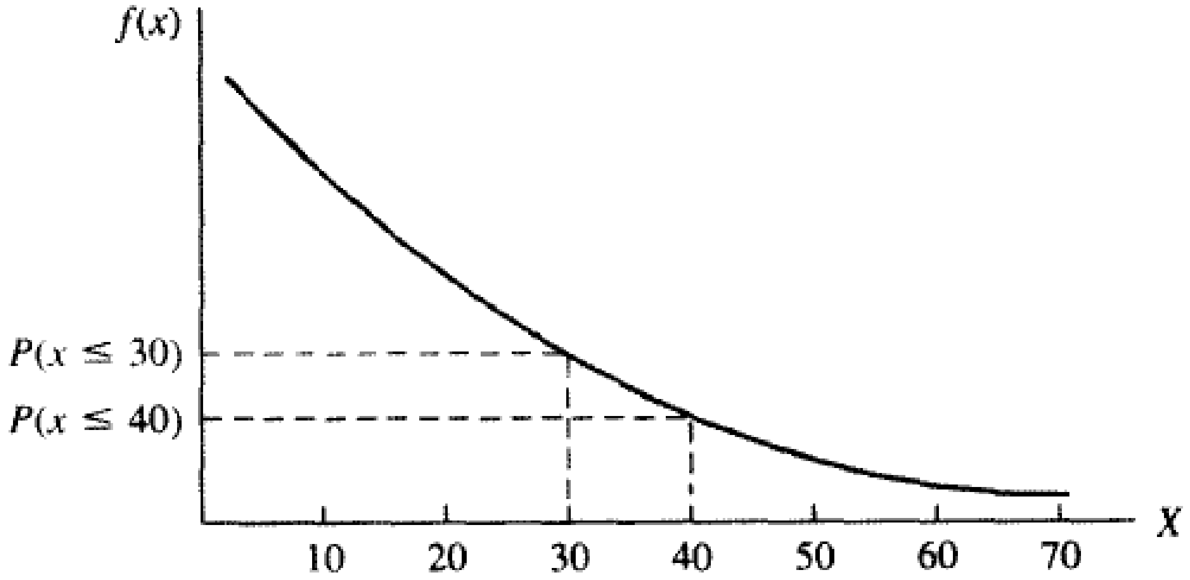
- Mientras que la distribución de Poisson describe las tasas de llegadas (personas, camiones, etc) dentro de un período de tiempo, la dist. Exponencial estima el lapso entre arribos

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}$$

- La esperanza y varianza de una distribución Exponencial: E(X)= μ y V(X)= μ

Distribuciones Continuas– Exponencial(2)

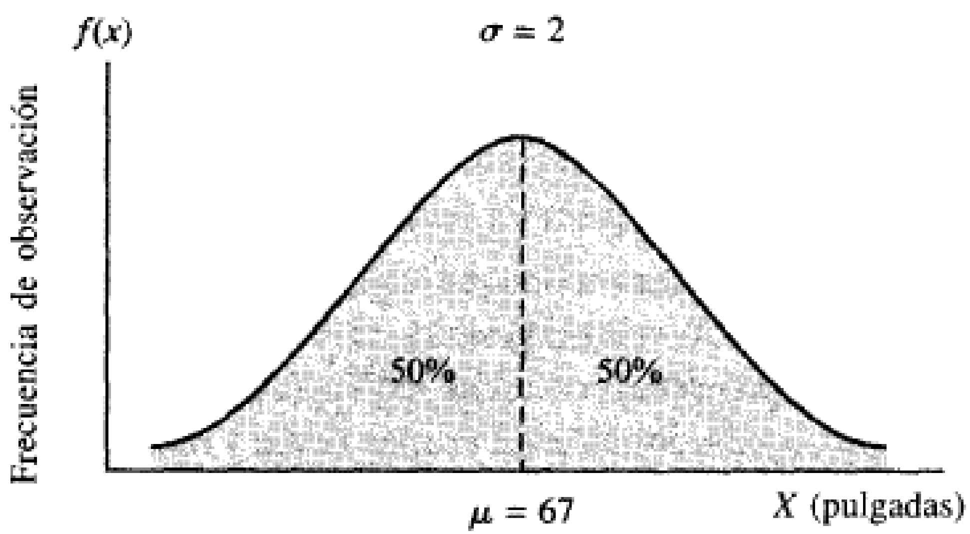
- Aspecto



Distribuciones Continuas– Normal

- En forma simple, la distribución normal (datos continuos) se asocia una curva simétrica en forma de campana

- Está caracterizada por dos parámetros: $N(\mu,\sigma^2)$



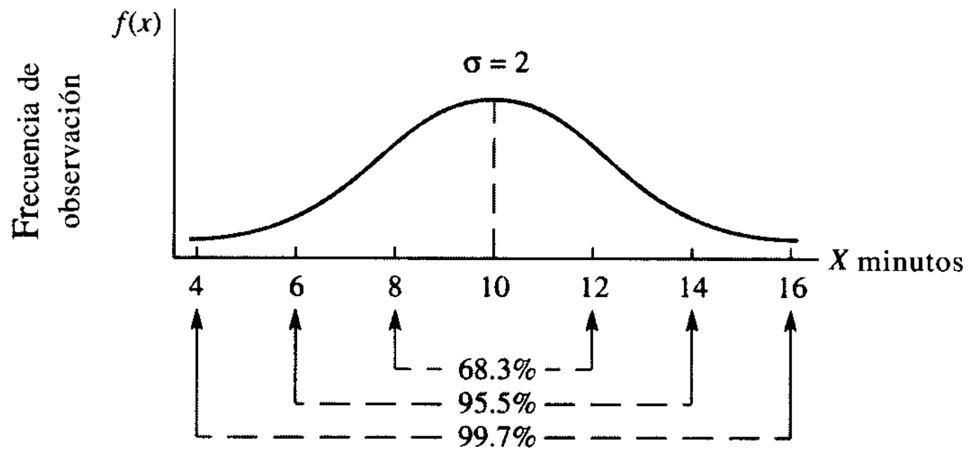
Distribuciones Continuas– Normal (2)

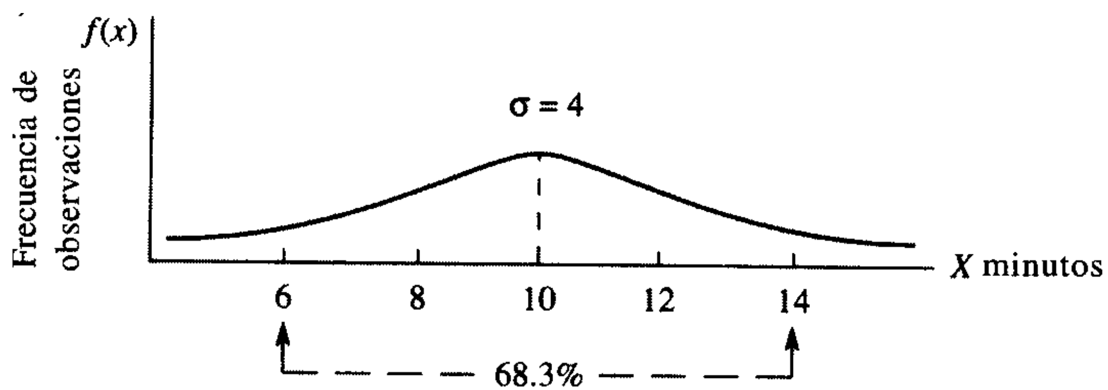
- **Distribución Normal y Regla Empírica:** La regla empírica dice que si se incluyen todas las observaciones que están a una desviación estándar de la media, éstas serán el 68.3% de todas las observaciones.

- De la misma manera: 95.5% de los datos están dentro de dos desv. estándar y 99.7% de las obs. están dentro de tres desv. estándar.

Distribuciones Continuas– Normal (3)

- Ejemplo:





Distribuciones Continuas– Normal(4)

- Normal tipificada o estándar: permite analizar las propiedades de la Normal sin depender de parámetros:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- El valor de Z se puede interpretar como el número de desviaciones estándar a las que una observación está por encima o por debajo de la media.

- Para obtener la probabilidad de un evento se debe ir a la tabla de la normal estándar.

Distribuciones Continuas– Normal(5)

- Ej:

TelCom Satellite presta servicios de comunicación a los negocios del área metropolitana de Chicago. Los funcionarios de la compañía han aprendido que la transmisión satélite promedio es de 150 segundos, con una desviación estándar de 15 segundos. Los tiempos parecen estar distribuidos normalmente.

Para estimar de manera apropiada la demanda del cliente por sus servicios y establecer una estructura de tarifas que maximice las utilidades corporativas, TelCom debe determinar qué tan probable es que algunas llamadas se presenten. El director de servicios desea que usted proporcione estimados de la probabilidad de que una llamada dure:

a. Entre 125 y 150 segundos.

b. Menos de 125 segundos.

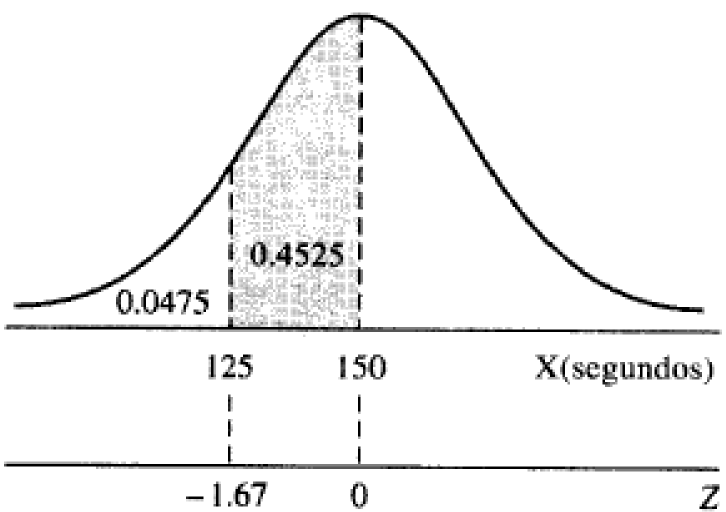
c. Entre 145 y 155 segundos.

d. Entre 160 y 165 segundos.

Distribuciones Continuas– Normal(6)

- a) 0.4525

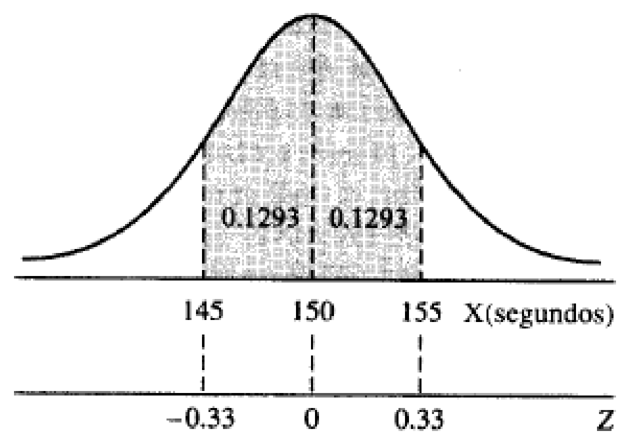
$$Z = \frac{125 - 150}{15} = -1.67$$



b)0.5-0.4525=0.0475

c) 0.2586

$$Z = \frac{145 - 150}{15} = -0.33$$



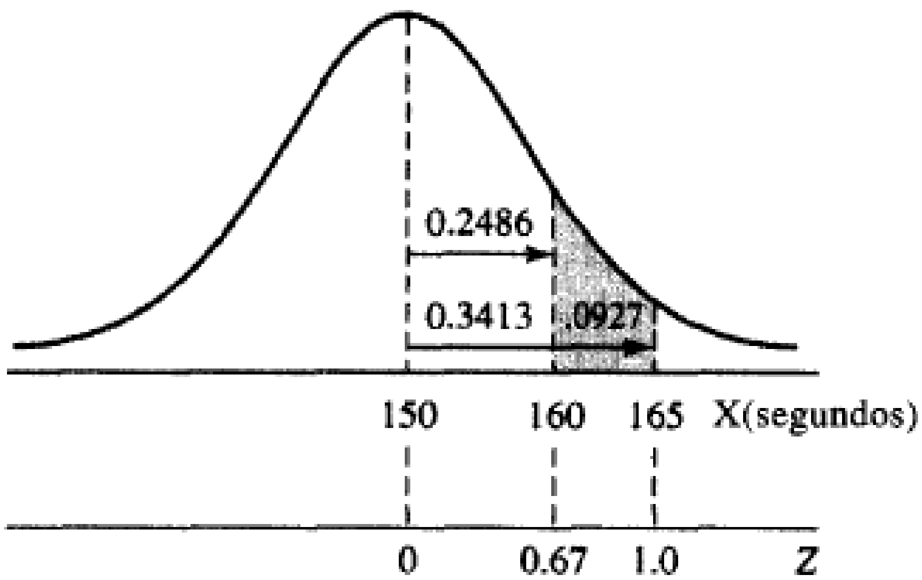
Distribuciones Continuas– Normal(7)

- d)

Con $Z = 1$, el área es 0.3413. Para hallar el área entre 150 y 160,

$$Z = \frac{165 - 150}{15}$$
$$= 1$$

$$Z = \frac{160 - 150}{15}$$
$$= 0.67$$



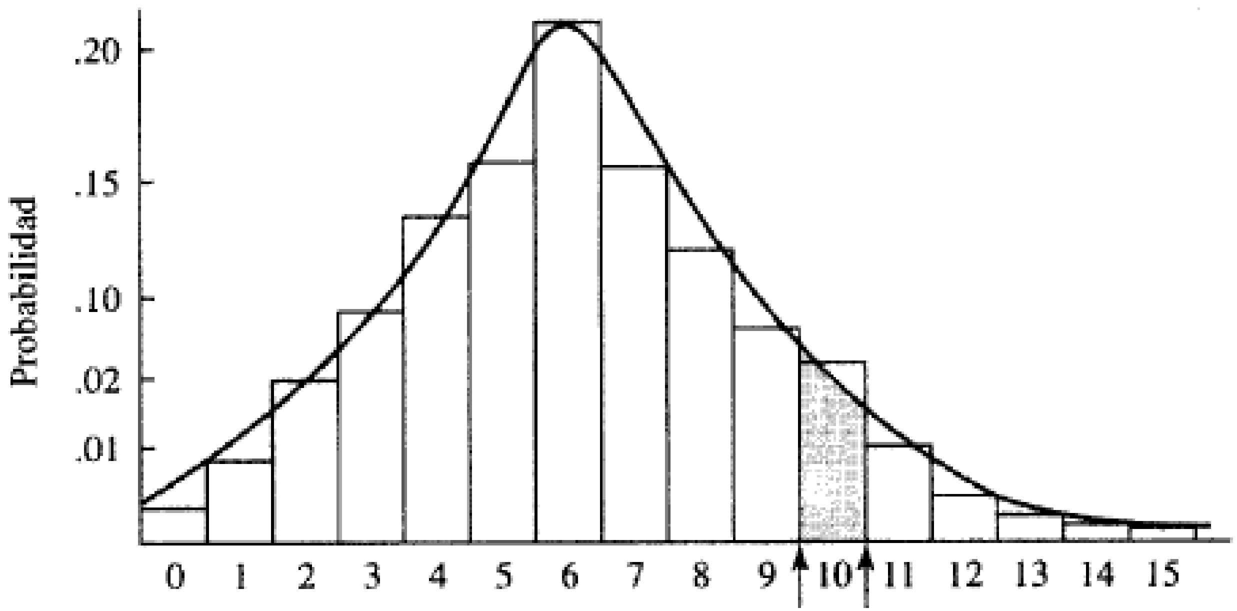
para un área de 0.2486. Por tanto,

$$P(160 \leq X \leq 165) = 0.3413 - 0.2486 = 0.0927.$$

Distribuciones Continuas– Normal(8)

- si n es suficientemente grande una dist. binomial puede aproximarse a una normal de parámetros μ=np y

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$



Distribuciones Continuas– Normal(9)

- Función de densidad (estandarizada):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

- Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

- FDA:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Distribuciones Continuas– chi-cuadrado

- La distribución χ^2 con *k* grados de libertad se utiliza comúnmente para inferencia estadística, y representa la distribución de la suma de los cuadrados de k v.a. normales estándar independientes $X_1 \ldots X_k$.

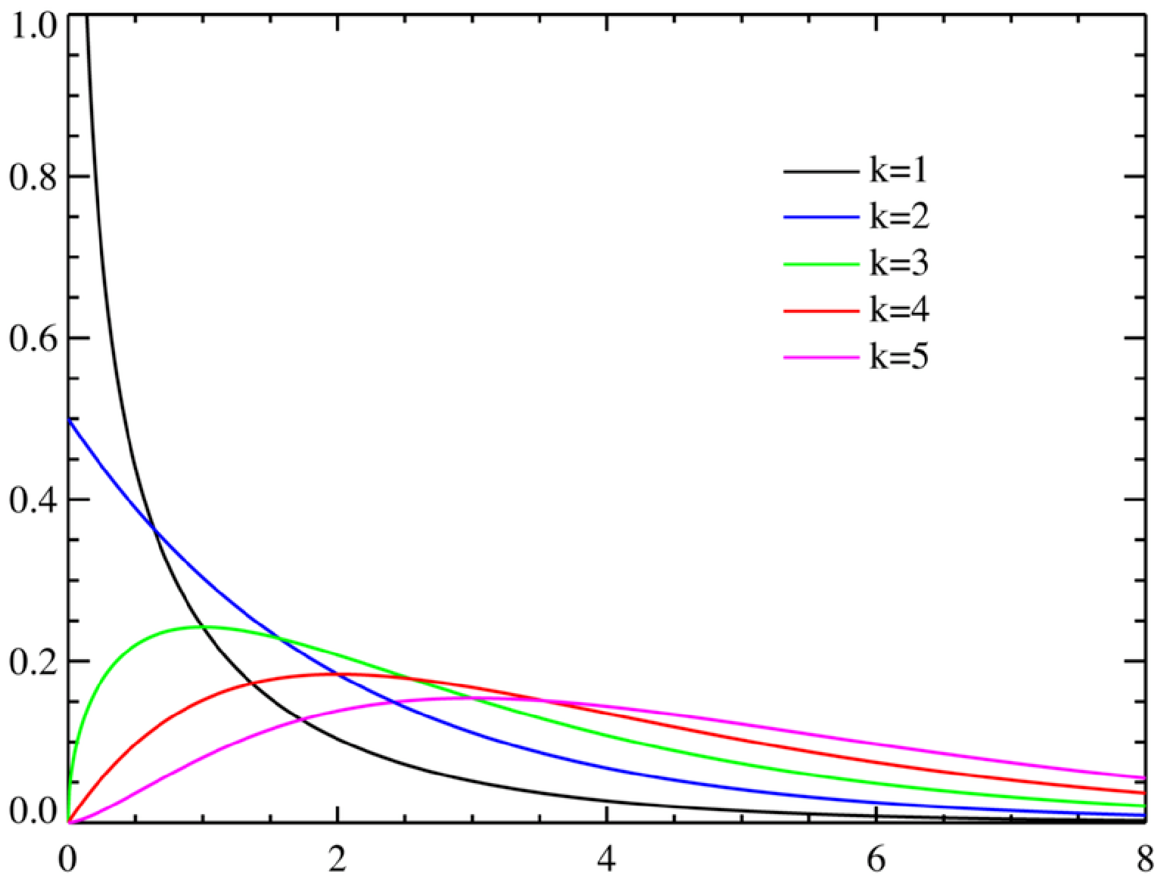
$$Q = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \qquad Q \sim \chi^2(k).$$

- Función de densidad (Γ=función Gamma):

$$f(x;\, k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\, x^{k/2-1} e^{-x/2}\, 1_{\{x\geq 0\}},$$

Distribuciones Continuas– chi-cuadrado(2)

- Aspecto:



Distribuciones Continuas– F-Fisher

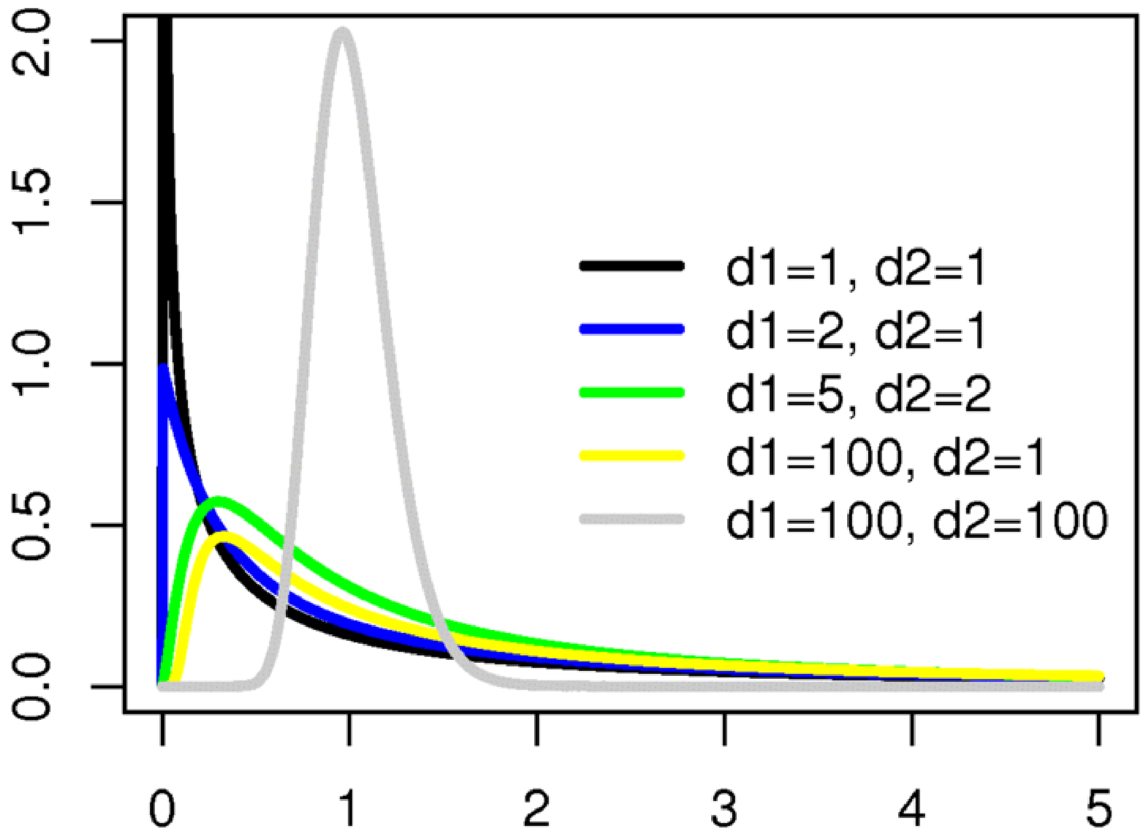
- Derivada de la distribución χ^2, también se utiliza frecuentemente en la estadística inferencial. También conocida como F de Snedecor.

- La distribución nace del cociente de dos variables U_1 y U_2 independientes distribuidas χ^2 con d_1 y d_2 grados de libertad respectivamente:

$$\frac{U_1/d_1}{U_2/d_2} \sim F(d_1,d_2)$$

Distribuciones Continuas– F-Fisher(2)

- Aspecto



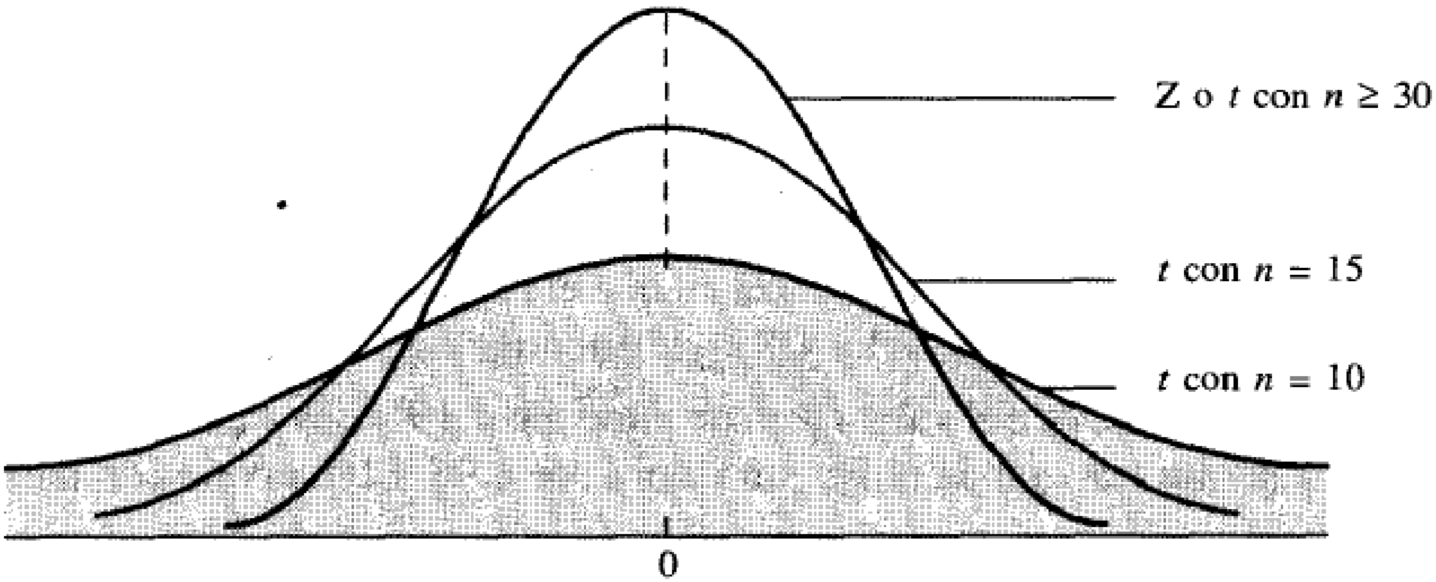
Distribuciones Continuas– t-Student

- Similar a la distribución normal (simétrica, forma de campana), se suele utilizar en muestras pequeñas.
- Se caracteriza por una varianza mayor a la normal y dependiente de los grados de libertad (el número de observaciones de la muesta).
- La distribución t proviene del ratio: ($V \sim \chi^2$ con ν g.l)

$$\frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} = Z\sqrt{\nu/V}$$

Distribuciones Continuas– t-Student

- La distribución t tiende a Z cuando *n* aumenta:



- Varianza: $$\frac{\nu}{\nu - 2} \text{ for } \nu > 2$$