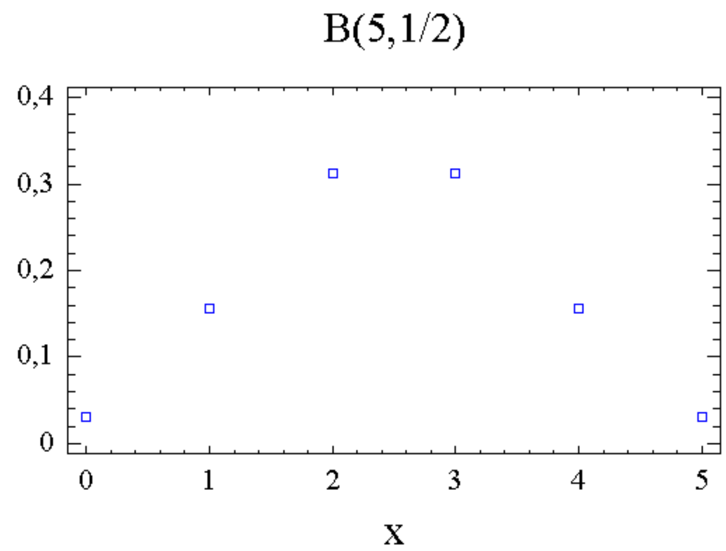
EJERCICIOS RESUELTOS

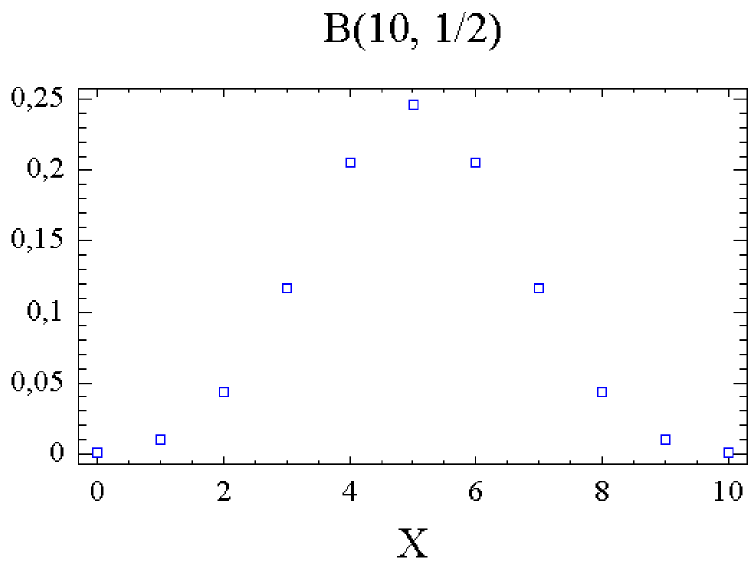
Ejercicio 1 *Representa gráficamente las funciones de probabilidad de una distribución $B(n, \frac{1}{2})$, cuando:*

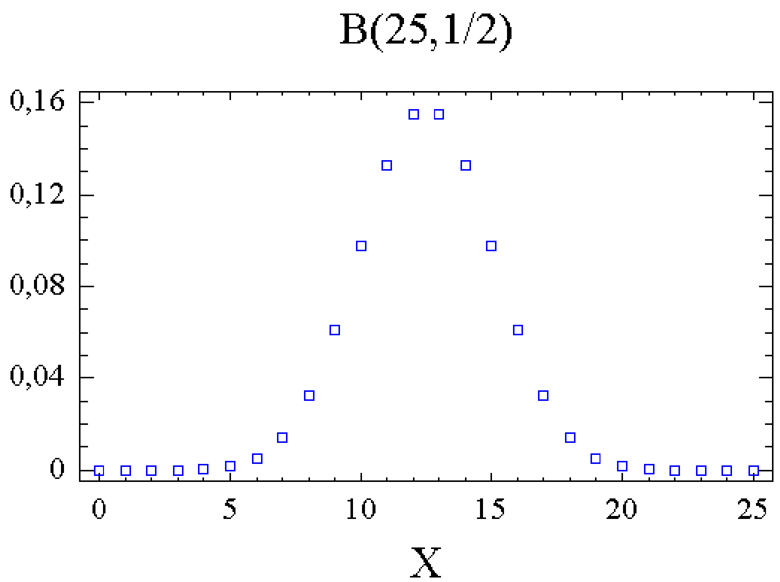
$$\begin{array}{llcl} a) & n & = & 5 \\ b) & n & = & 10 \\ c) & n & = & 25 \\ d) & n & = & 100 \end{array}$$

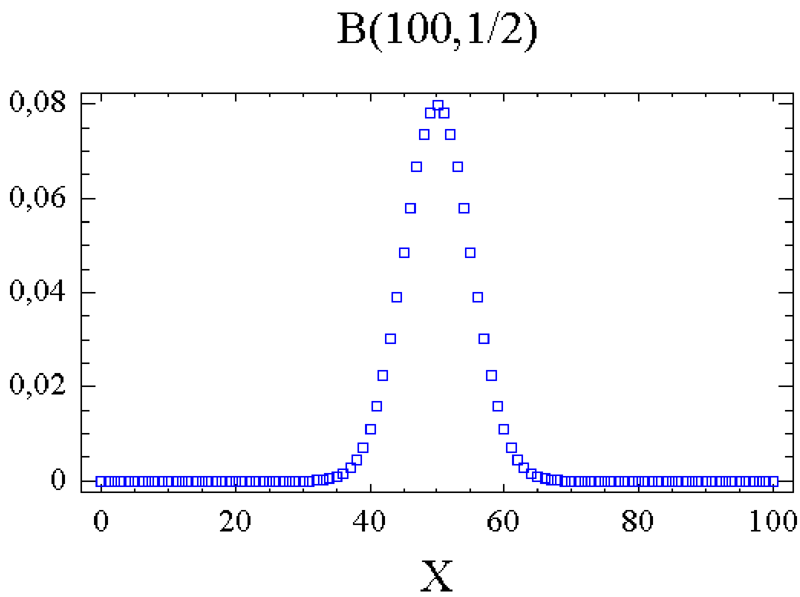
y emite conclusiones al respecto.

Solución.-









Podemos observar como, a medida que aumentamos n, la distribución Binomial tiene un extraordinario parecido con la distribución Normal. Observaríamos el mismo efecto con otras binomiales si bien es cierto que cuanto más cercana sea la probabilidad de éxito p a $\frac{1}{2}$ más rápida será la convergencia de una Binomial a una Normal.

En general, una distribución $B(n,p)$ se parece a una curva normal cuanto mayor es el producto $n \cdot p$.

En virtud del Teorema Central del Límite *(en adelante TCL)* podemos concluir diciendo que:

$$B(n,p) \longrightarrow N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) \quad \textit{cuando } n \longrightarrow +\infty$$

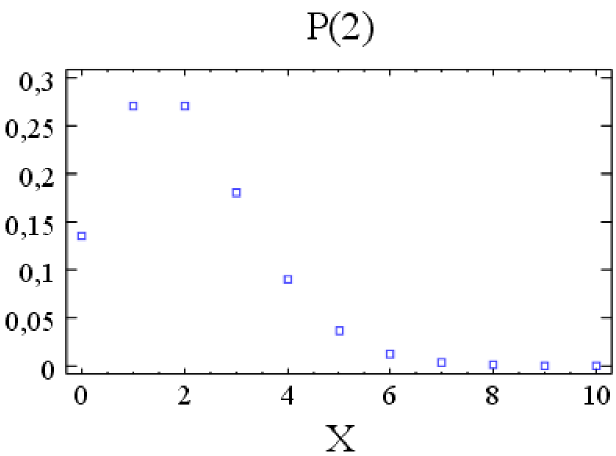
Ejercicio 2 *Comprobar de modo gráfico la aproximación de una distribución $P(10)$ a una Normal, y emitir conclusiones al respecto.*

Solución.-

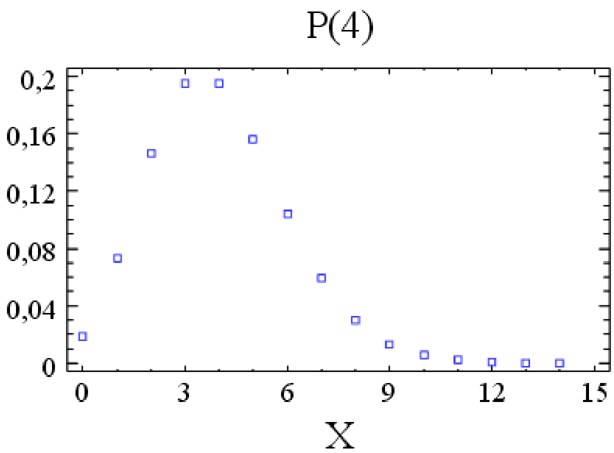
Hemos visto que la suma de n variables de Poisson independientes de parámetro λ se distribuyen como una Poisson de parámetro $n \cdot \lambda$. Por tanto podemos interpretar la distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 10$ como la suma de cinco variables independientes Poisson de parámetro $\lambda = 2$.
Sean

$$X_i \sim P(2) \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

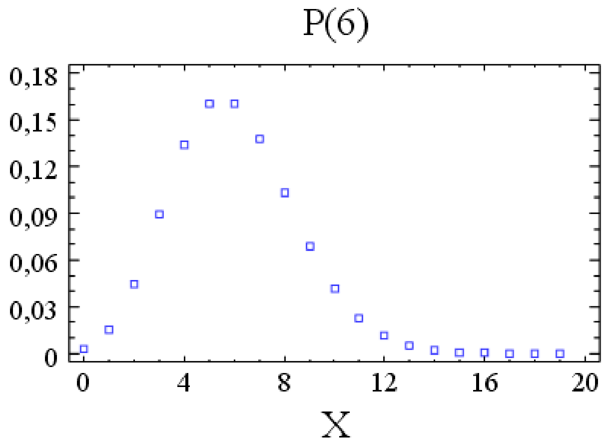
$Y = X_1 \sim P(2)$, siendo la representación gráfica de su f.d.p.:



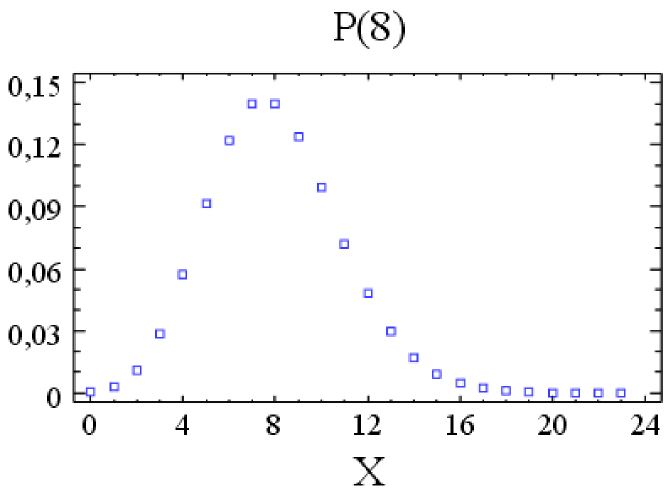
$Y = X_1 + X_2 \sim P(4)$, siendo la representación gráfica de su f.d.p.:



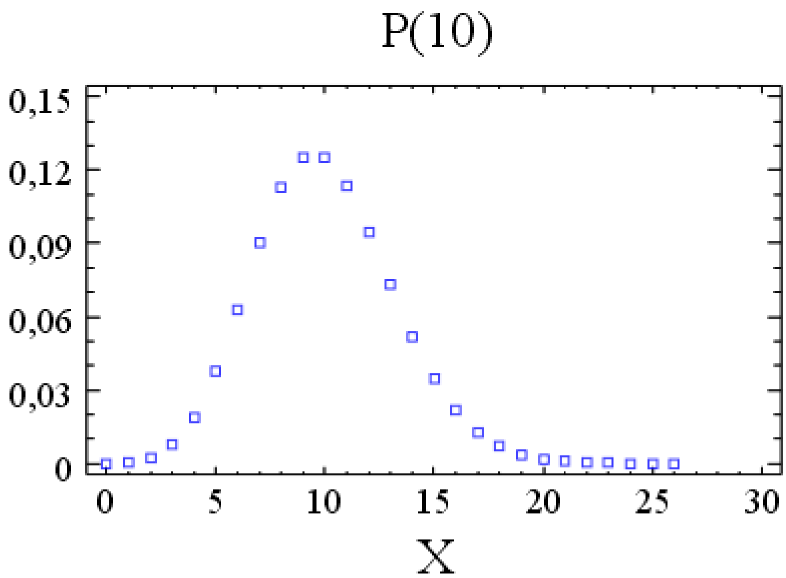
$Y = X_1 + X_2 + X_3 \sim P(6)$, siendo la representación gráfica de su f.d.p. :



$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim P(8)$, siendo la representación gráfica de su f.d.p.:



$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \sim P(10)$, siendo la representación gráfica de su f.d.p.:



Podemos observar como efectivamente si X se distribuye según una Poisson de parámetro 10, entonces por el TCL ,X se puede aproximar a una Normal $N(10, \sqrt{10})$. En general sabemos que :

$$P(\lambda) \simeq N(\lambda, \sqrt{\lambda}) \quad \textit{y la aproximación se considera buena si } \lambda > 5$$

Ejercicio 3 *En una disribución* $B(200, 0.3)$ *calcular* $p[X \geq 85]$.

Solución.-

Si realizásemos el cálculo utilizando la distribución binomial tendríamos que calcular:

$$p[X \geq 85] = 1 - p[X < 85] = 1 - \sum_{i=1}^{84} \binom{200}{i} (0.3)^i \cdot (0.7)^{200-i}$$

con el consiguiente costo computacional.

Para calcular esta probabilidad realicemos la aproximación de una distribución Binomial a una distribución Normal. Sabemos que n es suficientemente grande y que p no es cercano a cero, por tanto:

$$X \sim B(n, p) \simeq N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) \tag{5.1}$$

$$X \sim B(200, 0.3) \simeq N(60, 6.48) \sim X'$$

Aplicando la correspondiente corrección de continuidad, tenemos:

$$p[X \geq 85] \simeq p[X' \geq 85 - 0.5] = p[X' \geq 84.5]$$

Tipificando resulta:

$$p[X \geq 85] \simeq p[X' \geq 84.5] = p\left[\frac{X' - 60}{6.48} \geq \frac{84.5 - 60}{6.48}\right] = p\left[Z \geq 3.78\right] \text{ , siendo } Z \sim N(0, 1).$$

Buscando en la tabla de la $N(0, 1)$, tenemos:

$$p[X \geq 85] \simeq p\left[Z \geq 3.78\right] = 1 - p\left[Z < 3.78\right] = 1 - 0.99992 = \mathbf{0.00008}$$

Ejercicio 4 *Una moneda corriente se lanza 150 veces. Determinar la probabilidad de que salgan entre 70 y 80 caras.*

Solución.-

Si resolviésemos el ejercicio utilizando la distribución binomial, tendríamos que:

$$\text{si } X \equiv \text{ Números de Caras al lanzar una moneda 150 veces}$$

$$X \sim B(150, 1/2)$$

Por tanto la solución del problema viene dada por:

$$p\left[70 \leq X \leq 80\right] = \sum_{k=70}^{80} p\left[X = k\right]$$

$$p\left[70 \leq X \leq 80\right] = \sum_{k=70}^{80} \binom{150}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{150-k} = \mathbf{0.63084}$$

Resolvamos el ejercicio utilizando el TCL como aplicación a la hora de aproximar la distribución Binomial por la Normal.

En virtud de la expresión 5.1 , tenemos que:

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p = \frac{150}{2} = 75 \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\frac{150}{4}} = 6.1237 \end{aligned}$$

Sea

$$X' \sim N(75, 6.12)$$

Para calcular $p\left[70 \leq X \leq 80\right]$, suponiendo los datos continuos para poder aplicar la aproximación a una normal, tendremos que realizar la correción de continuidad:

$$p\left[70 \leq X \leq 80\right] \simeq p\left[70 - 0.5 \leq X \leq 80 + 0.5\right] = p\left[69.5 \leq X \leq 80.5\right]$$

Entonces:

$$p\left[70 \leq X \leq 80\right] \simeq p\left[69.5 \leq X \leq 80.5\right] = p\left[69.5 \leq X' \leq 80.5\right]$$

tipificando la variable $X' \sim N(75, 6.12)$,tenemos:

$$p\left[69.5 \leq X' \leq 80.5\right] = p\left[\frac{69.5-75}{6.12} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{80.5-75}{6.12}\right]$$

$$p\left[69.5 \leq X' \leq 80.5\right] = p\left[-0.9886 \leq Z \leq 0.8986\right] \text{ , siendo } Z \sim N(0,1).$$

operando resulta que,

$$p\left[69.5 \leq X' \leq 80.5\right] = p\left[Z \leq 0.8986\right] - p\left[Z \leq -0.8986\right] = p\left[Z \leq 0.8986\right] - (1 - p\left[Z \leq 0.8986\right])$$

$$p\left[69.5 \leq X' \leq 80.5\right] = 2 \cdot p\left[Z \leq 0.8986\right] - 1$$

finalmente buscamos en la tabla de la $N(0,1)$,

$$p\left[69.5 \leq X' \leq 80.5\right] = 2 * 0.8133 - 1 = \mathbf{0.626\,6}$$

Podemos obsevar que el valor obtenido por este procedimiento de aproximación es muy parecido al valor 0.63 obtenido utilizando la distribución Binomial.

Ejercicio 5 *Supongamos que el 2.5% de los artículos producidos en una fábrica son defectuosos. Hallar la probabilidad de que haya menos de 3 artículos defectuosos en una muestra de 100 artículos.*

Solución.-

Aplicamos, al igual que el ejercicio anterior, la distribución binomial para $n = 100$ y $p = 0.025$, siendo X la v.a. que indica el número de artículos defectuosos en una muestra de 100.

$$X \sim B(100, 0.025)$$

Resulta que:

$$p\,[X < 3] = p\,[X = 0] + p\,[X = 1] + p\,[X = 2]$$

$$p\,[X < 3] = \binom{100}{0}(0.025)^0 * (0.975)^{100} + \binom{100}{1}(0.025)^1 * (0.975)^{99} + \binom{100}{2}(0.025)^2 * (0.975)^{98}$$

$$p\,[X < 3] = \mathbf{0.5421}$$

Si hubiésemos aproximado la $B(100, 0.025)$ por la normal $N(2.5, 1.56)$ (*véase 5.1*) tendríamos:

$$p\,[X < 3] \simeq p\,[X' < 2.5] = p\left[Z < \frac{2.5 - 2.5}{1.56}\right] = p\,[Z < 0] = 0.5$$

Podemos observar que este valor difiere mucho del obtenido utilizando la propia distribución binomial. Ésto ocurre porque al ser $p = 0.025$ y $n \cdot p = 2.5 < 5$ la aproximación de la binomial por la normal no es buena; sin embargo, tal y como vimos en el tema anterior, sí podríamos aproximar la distribución binomial por la de Poisson.

Ejercicio 6 *Sean X_i variables independientes e idénticamente distribuidas según una $U(0,1)$, $i = 1, 2, 3, ..., 35$. Calcula la probabilidad de que la suma de estas 35 v.a. uniformes tome un valor inferior a 20.5*

Solución.-

Como las variables X_i son independiéntes e idénticamente distribuidas, podemos aplicar el teorema central del límite en la forma de Lindeberg-Levy. Por tanto:

$$\frac{\sum_{i=1}^{35} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1) \quad \textit{en ley.}$$

Como $n \geq 30$, podemos considerar aceptable la aproximación de la v.a. $\sum_{i=1}^{35} X_i$ por una $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

Por tanto:

$$p\left[\sum_{i=1}^{35} X_i < 20.5\right] \simeq p\left[\frac{\sum_{i=1}^{35} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{20.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] \simeq p\left[Z < \frac{20.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]$$

donde μ y σ es la media y la desviación típica poblacional de una v.a. $U(0,1)$, que resultan:

$$\mu = \int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$\sigma = +\sqrt{\left(\int_0^1 x^2 dx\right) - \left(\int_0^1 x dx\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Sustituyendo y tipificando tenemos que:

$$p\left[\sum_{i=1}^{35} X_i < 20.5\right] \simeq p\left[Z < \frac{20.5 - 35 * \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{35}}\right] = p\left[Z < 1.7566\right]$$

$$p\left[\sum_{i=1}^{35} X_i < 0.75\right] \simeq p\left[Z < 1.7566\right] = \mathbf{0.9599}$$

Ejercicio 7 *Si lanzamos un dado cúbico 100 veces . ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea mayor o igual que 300? ¿Y la probabilidad de que sea igual a 400?*

Solución.-

Sean las variables X_i , $i = 1, 2, ..., 100$ independientes e idénticamente distribuidas según una ley uniforme discreta $U(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Al igual que en el ejercicio anterior, aplicando el *TCL* en la forma de *Lindeberg-Levy*, se tiene que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1) \quad \textit{en ley.}$$

Como $n \geq 30$, podemos considerar aceptable la aproximación de la v.a. $\sum_{i=1}^{35} X_i$ por una $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

Aplicando la corrección de continuidad:

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 300\right] \simeq p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i > 299.5\right]$$

Por tanto:

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i > 299.5\right] = p\left[\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{299.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = p\left[Z > \frac{299.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]$$

donde μ y σ es la media y la desviación típica poblacional de una v.a. discreta $U(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, que resulta:

$$\mu = \sum_{k=1}^{6} k \cdot p[X = k] = \sum_{k=1}^{6} k * \frac{1}{6} = 3.5$$

$$\sigma = +\sqrt{\sum_{k=1}^{6} (k - \mu)^2 \cdot p[X = k]} = +\sqrt{\sum_{k=1}^{6} (k - 3.5)^2 * \frac{1}{6}} = 1.707$$

Sustituyendo tenemos que:

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 300\right] \simeq p\left[Z > \frac{299.5 - 100 * 3.5}{1.707 * \sqrt{100}}\right] = p\left[Z > -2.958\right]$$

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i > 299.5\right] \simeq p\left[Z < 2.95\right] = \mathbf{0.9984}$$

Para calcular la probabilidad de que la suma de las caras sea igual a 400, actuaremos del mismo modo: Corrección de continuidad:

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i = 400\right] = p\left[399.5 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 400.5\right]$$

Realizando la aproximación a la normal:

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i = 400\right] \simeq p\left[\frac{399.5 - 100 * 3.5}{1.707 * \sqrt{100}} < Z < \frac{400.5 - 100 * 3.5}{1.707 * \sqrt{100}}\right] = p\left[2.89 < Z < 2.95\right]$$

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i = 400\right] \simeq p\left[2.89 < Z < 2.95\right] = p\left[Z < 2.95\right] - p\left[Z < 2.89\right]$$

Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$,

$$p\left[\sum_{i=1}^{100} X_i = 400\right] \simeq 0.9984 - 0.9981 = \mathbf{0.0003}$$

Ejercicio 8 *Supongamos que tenemos 50 representantes de cierto partido político, en una convención nacional, de los cuales 30 apoyan al candidato A y 20 al candidato B. En dicha convención se plantea llevar a cabo una encuesta para detectar la preferencia de los votantes con respecto a los candidatos A y B que ocuparán un puesto en la administración pública. Si se toma una muestra de 1000 ciudadanos, ¿cuál es la probabilidad de que 550 o más de los votantes indiquen una preferencia por el candidato A, si la población, con respecto a los candidatos se encuentra igualmente dividida?*

Solución.-

Sea Y la variable aleatoria que representa el número de ciudadanos que tienen preferencia por el candidato A.

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i \qquad \textit{siendo} \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el ciudadano } i \text{ vota A} \\ 0 & \text{si el ciudadano } i \text{ no vota A} \end{cases}$$

Tenemos por tanto que

$$\left.\begin{array}{c} X_i \sim Be\left(\frac{1}{2}\right) \\ X_i \quad\ \ Indep. \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim B\left(\frac{1}{2}, 1000\right)$$

En tal situación se tiene que la media de Y es $np = 500$ y su desviación típica $\sqrt{np(1-p)} = 15.81$. La probabilidad de que $Y \geq 550$ se puede aproximar, dado que n es suficietemente grande, por la distribución Normal. Por tanto si realizámos la correspondiente corrección de continuidad, tendremos:

$$p[Y \geq 550] \simeq p\left[Z \geq \frac{549.5 - 500}{15.81}\right] = p[Z \geq 3.13]$$

Resultando:

$$p[Y \geq 550] \simeq 1 - p[Z \leq 3.13] = \mathbf{0.0009}$$

Ejercicio 9 *Un dado cúbico corriente se lanza 200 veces. Hallar la probabilidad de que el lado 5 salga entre 30 y 33 veces.*

Solución.-

Sea X la v.a. que nos indica el número de veces que sale el lado 5. Entonces:

$$X \sim B(200, 1/6)$$

Buscamos

$$p[30 \leq X \leq 33]$$

si consideramos la correción de continuidad entonces:

$$p[30 \leq X \leq 33] \simeq p\left[29.5 \leq X' \leq 33.5\right]$$

Por tanto, realizando la aproximación normal de una distribución binomial, resulta:

$$p[30 \leq X \leq 33] \simeq p\left[\frac{29.5 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{33.5 - \mu}{\sigma}\right]$$

siendo

$$\mu = n \cdot p = 200 * \frac{1}{6} = 33.33$$

$$\sigma = +\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 * \frac{1}{6} * \frac{5}{6}} = 5.27$$

Sustituyendo:

$$p[30 \leq X \leq 33] \simeq p\left[\frac{29.5 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{33.5 - \mu}{\sigma}\right] = p[-0.726 \leq Z \leq 0.032]$$

$$p[30 \leq X \leq 33] \simeq p[Z \leq 0.032] - p[Z \leq -0.726] = p[Z \leq 0.032] + p[Z \leq 0.726] - 1$$

$$p[30 \leq X \leq 33] \simeq 0.5120 + 0.7642 - 1 = \mathbf{0.2762}$$

Ejercicio 10 *En una clase de 40 alumnos la probabilidad de que una persona utilice gafas es 0.25 , ¿cuál es la probabilidad de que menos de 10 alumnos utilicen lentes ?*

Solución.-

Sea

$$X \equiv \textit{Número de alumnos que utilizan gafas}$$

entonces

$$X \sim B(40, 0.25)$$

como $n \cdot p = 10$ podemos aproximar la distribución binomial por la normal.

Corrección de continuidad:

$$p\left[X < 10\right] = p\left[X \leq 9\right] \simeq p\left[X' \leq 9.5\right]$$

$$p\left[X < 10\right] \simeq p\left[X' \leq 9.5\right] \simeq p\left[Z \leq \frac{9.5-\mu}{\sigma}\right]$$

siendo $\mu = n \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$,

$$p\left[X < 10\right] \simeq p\left[Z \leq \frac{9.5-\mu}{\sigma}\right] = p\left[Z \leq \frac{9.5-(40*0.25)}{\sqrt{40*0.25*0.75}}\right] = p\left[X \leq -0.182\right]$$

$$p\left[X < 10\right] \simeq 1 - p\left[X \leq 0.182\right] = 1 - 0.5714 = \mathbf{0.4286}$$

Ejercicio 11 *Un día visitamos el Casino y decidimos jugar a la ruleta. Nuestra apuesta va a ser siempre al negro y cada apuesta de 3 euros. Llevamos 60 euros y queremos calcular la probabilidad de que tras jugar 80 veces consigamos doblar nuestro dinero.*

Solución.-

Cada jugada es una variable independiente que sigue el modelo de distribución de Bernouilli.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \textit{Salir Negro} \\ 0 & \textit{Salir Rojo} \end{cases}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} p &= p[X_i = 1] = 0.485 \\ 1-p &= p[X_i = 0] = 0.515 \end{aligned}$$

Hagamos notar que en el juego de ruleta la probabilidad de "no salir negro" es mayor ya que puede salir rojo o el cero.

La media y varianza de cada variable Bernoulli

$$\begin{aligned} \mu &= p = 0.485 \\ \sigma &= \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{0.25} = 0.5 \end{aligned}$$

Aplicando el TCL en la forma de Lindeberg-Levy a la variable $\sum_i X_i$, resulta que:

$$Y = \sum_i X_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

es decir:

$$Z = \frac{\sum_i X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Para doblar nuestro dinero el negro tiene que salir al menos 20 veces más que el rojo (ya que 20 * 3 = 60), por lo que tendrá que salir negro al menos 50 veces y por tanto el rojo o el cero saldrán como máximo 30 veces).

Luego:

$$P(Y \geq 50) \simeq P(Z > \frac{49.5 - 80 * 0.485}{0.5 * \sqrt{80}})$$

$$P(Y \geq 50) \simeq p[Z > 2.39] = 1 - P(Z < 2.39) = 1 - 0.9916 = \mathbf{0.0084}$$

Es decir, la probabilidad de doblar el dinero es tan sólo del 0,84% . Por tanto, lo mejor es no ir al Casino, pero si no puedes evitarlo no se te ocurra jugar a la ruleta y mucho menos apostar de modo continuo al negro.

Nota: Podríamos haber resuelto el problema con la consideración de que:

$$Y \equiv B(n, p),$$

hubiese bastado realizar la aproximación de la Binomial a través de la Normal.