Auxiliar 3

Termodinámica FI2004-3

Primera parte

Profesora: María Teresa Garland
Auxiliares: Paloma Pérez, Claudia Solervicens.

18 de abril de 2012

Resumen

Gas Ideal

Satisface que:

- $C_P = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_P$
- $C_V = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_V$
- $dU = C_V dT$ (No depende del volumen)
- $C_P - C_V = nR$
- $PV = nRT$

En general...

- La primera ley: $dU = dQ - dW = dQ - PdV$ o $\Delta U = Q - W$ (convención tradicional)
- Si el proceso es adiabático: $dQ = 0$, por lo tanto $dU = dW = PdV$, o análogamente $\Delta U = -W$ (ojo con esto, al momento de integrar $W = \int_{V_1}^{V_2} -PdV$ el signo está incluido)
- Expansión en el vacío: $dW = 0$, por lo tanto $dU = dQ$, o $\Delta U = Q$.
- Si la expansión es adiabática y en el vacío: $\Delta U = 0$ o $dU = 0$
- Un proceso isotérmico se realiza a temperatura constante, y es reversible. En él, la energía interna U permanece constante ($\Delta U = 0$)

- **Entalpía:** Variable termodinámica (función de estado) que corresponde a una redefinición"de la energía interna $H = U + PV$, que puede ser interpretada como la cantidad de calor que contiene el sistema.

- **Entropía:** Variable termodinámica que describe el grado de desorden del sistema. Se simboliza con la letra S, y su maximización correspondería al estado más probable del sistema.[Segunda ley de la termodinámica] (No entra en el control)

Pregunta 1

La energía interna molar de un cierto gas es $u = \frac{2}{3}R\theta - \frac{a}{v}$,donde v es el volumen molar a temperatura θ y a es una constante.
Si un mol de este gas, que inicialmente se encuentra a θ_1 y v_1, se deja expandir adiabáticamente en el vacío hasta que ocupa un volumen final v_2, demostrar que la variación de la temperatura es:

$$\Delta\theta = -\frac{3a}{2R}\left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 v_1}\right)$$

Solución

$$\Delta U = Q - W$$

Como el proceso es adiabático y en el vacío, entonces: $\Delta u = 0$. Por lo tanto $u_i = u_f$
Evaluando la ecuación de energía interna molar e igualando:

$$\frac{2}{3}R\theta_1 - \frac{a}{v_1} = \frac{2}{3}R\theta_2 - \frac{a}{v_2}$$

Despejando la diferencia entre las temperaturas θ_1 y θ_2 hacia el lado izquierdo:

$$(\theta_2 - \theta_1) = \Delta\theta = \frac{3a}{2R}\left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2}\right)$$

Pregunta 2

Si dQ es la cantidad de calor necesaria para hacer variar en un $d\theta$ la temperatura de una sustancia manteniendo constante la variable de estado X: $C_X = \frac{dQ}{d\theta}$.

Y suponiendo que $V = V(\theta, X)$ y $U = U(V, \theta)$.

- Encuentre una expresión que le permita calcular C_X en función de U, V, P y θ.

- A partir la expresión encontrada en el punto anterior y suponiendo que dicha sustancia es un gas ideal, obtenga las expresiones generales para C_V y C_P en función de U, θ y R. (Hint: $C_P - C_V = nR$)

Solución

$$dQ = dU + PdV \tag{1}$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta dV + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_V d\theta \tag{2}$$

Además, como $V = V(\theta, X)$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_X d\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)_\theta d\theta \tag{3}$$

Como X es constante $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_X d\theta$ Luego, reemplazando 2 y 3 en 1:

$$dQ = \left(\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_X + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_V\right) d\theta$$

Por lo tanto

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_X = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_X + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_V$$

Para la segunda parte del problema hacemos $X = V$, y evaluamos $C_X = C_V$ (recordemos que X puede ser cualquier función de estado).

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_V$$

Del hint se desprende que:

$$C_P = nR + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)$$