

## Auxiliar 3

Termodinámica FI2004-3  
Segunda parte

**Profesora:** María Teresa Garland  
**Auxiliares:** Paloma Pérez, Claudia Solervicens.

9 de abril de 2012

### Pregunta 3

Considerando la energía interna  $U$  como función de las variables independientes  $V$  y  $P$  demuestre que:

$$dQ = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P + P \right] dV + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP \quad (1)$$

Y

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right) = \frac{C_P}{V\beta} - P \quad (2)$$

**Solución** Como  $U = U(V, P)$  Se tiene:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P dV + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP$$

Reemplazando el la diferencial exacta del calor:

$$dQ = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P + P \right] dV + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP$$

Para la segunda parte, recordamos que el coeficiente de dilatación se expresa como:

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P$$

Y para el calor específico a presión constante:

$$C_P = \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_P$$

Usamos la expresión de la segunda ley  $dU = dQ - PdV$ , dividiendo por el diferencial de  $\theta$ ,  $d\theta$ .

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_P - P \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P \Rightarrow C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_P + PV\beta$$

Llegando a la expresión:

$$\frac{C_P}{V\beta} - P = \frac{1}{V\beta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_P$$

Tenemos que llegar a una derivada parcial con respecto a  $V$  y no a  $\theta$ , por lo que usamos la expresión:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_P \left(\frac{\partial \theta}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_P = 1$$

con esto despejamos  $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ , y usando la expresión del coeficiente de dilatación:

$$\frac{C_P}{V\beta} - P = \frac{1}{V\beta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P$$

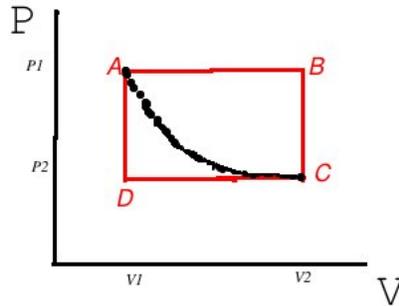
Por lo tanto

$$\frac{C_P}{V\beta} - P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P$$

## Pregunta 4

1. Represente en un diagrama P vs V, el proceso isotérmico a  $T_1$  (A) de un mol de gas monoatómico ideal desde el punto A hasta el punto C. (A) En el mismo diagrama, represente también para el mismo gas el ciclo A-B-C-D-A donde el gas se expande isobáricamente desde el punto A hasta el punto B aumentando su volumen desde  $V_1$  hasta  $V_2$ . (A) El camino B a C lo realiza a través de un proceso isócoro, mientras que el proceso desde C a D es de nuevo un proceso isobárico. El ciclo se cierra en un proceso isócoro desde D hasta A
2. Calcule  $\Delta U_{A-A}$  y  $\Delta H_{A-A}$ , cuando el gas realiza el ciclo A-B-C-D-A.
3. Calcule P, V y T en los puntos A, B, C y D.
4. Calcule el calor y el trabajo del gas en el proceso AC e interprete los respectivos signos.
5. Calcule  $\Delta U_{A-B}$  y  $Q_{A-B}$ , e interprete los respectivos signos.
6. Calcule  $\Delta U_{D-A}$  y  $Q_{D-A}$ , e interprete los respectivos signos.

## Solución



- 1.
2. Para esta parte, es necesario tener claro que las funciones de estado, no dependen del camino recorrido para llegar a un nuevo estado, i. e., sólo dependen sólo de sus valores en el estado inicial y final (recordemos que Q y W no son funciones de estado, y que por tanto dependen de la manera en que se alcanza el nuevo estado). Y para un ciclo, se tiene que toda variable de estado se conserva, por lo tanto su variación es nula:  $\Delta U_{A-A} = 0$  y  $\Delta H_{A-A} = 0$
3. En A se tienen las variables de estado  $T_A = T_1$ , y  $V_A = V_1$ . Usando la ley de los gases ideales:

$$P_A = \frac{RT_1}{V_1}$$

En B se tiene que por ser un proceso isobárico  $P_B = P_A = \frac{RT_1}{V_1}$ , y un volumen final  $V_B = V_2$ . Reemplazando en la expresión de la ley de gases ideales (ecuación de estado), se tiene que la temperatura en B es:

$$T_B = T_1 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

A su vez, teníamos un proceso isotérmico que iba desde A a C, por lo tanto  $T_C = T_A = T_1$ , también teníamos un proceso isocórico de B a C, por lo tanto  $V_C = V_B = V_2$ . Con esto tenemos una presión  $P_C$ :

$$P_C = \frac{RT_1}{V_2}$$

. Luego en D, teníamos un proceso isobárico de C a D, con lo que  $P_D = P_C = \frac{RT_1}{V_2}$ , y un proceso isocórico de D a A, por lo que  $V_D = V_1$ , por lo tanto la temperatura nos queda:

$$T_D = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)$$

4. Como el proceso es isotérmico  $\Delta U = Q - W = 0$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V} dV = RT_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) < 0$$

Como  $W < 0$ , entonces  $Q > 0$ , con  $Q = -W$ . Por lo tanto el sistema pierde energía mecánica pero adquiere energía calórica del medio.

5.  $\Delta U_{A-B} = nC_V \Delta T = \frac{3}{2}R(T_B - T_1) = \frac{3}{2}RT_1 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right)$ . Como se trata de un gas ideal monoatómico:  $C_V = \frac{3}{2}nR$ , por lo tanto  $\Delta U_{A-B} > 0$ , con lo que el sistema aumenta su energía interna, aumentando la temperatura. Para un proceso donde se mantiene la presión constante:

$$Q = C_P \Delta T$$

En este caso, como el proceso es isobárico:  $Q_{A-B} = \frac{5}{2}RT_1 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right)$ . Por lo tanto el sistema absorbe calor. Cómo  $Q_{A-B} > \Delta U_{A-B}$ , entonces el sistema entrega trabajo al ambiente.

6.  $\Delta U_{D-A} = C_V \Delta T = \frac{3}{2}RT_1 \left( 1 - \frac{V_1}{V_2} \right)$ . Como el volumen se mantiene constante  $W = 0$ , por lo tanto  $Q = C_V \Delta T > 0$ .