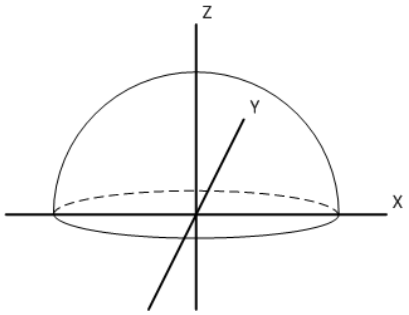
Pauta P2 Auxiliar 1

P2

Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ en el origen generado por medio casquete esférico. En la figura se muestra la posición del medio casquete, que tiene su corte sobre el plano XY



El medio casquete es de radio R y posee una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_0 \sin(\theta)$.

Solución:

Como no existe simetría en este problema, entonces se debe calcular el campo mediante la formula integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\| \vec{r} - \vec{r'} \|^3} dq(\vec{r'})$$

En este caso se utilizarán los vectores:

$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{r'} = R\hat{r}$$

$$dq = \sigma dS' = \sigma_0 \sin(\theta) R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Esta última relación se cumple pues la carga está distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera (i.e solo hay densidad de carga en el manto de la esfera y no en su interior). Así la integral queda:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-R\hat{r}}{R^3} \sigma_0 R^2 \sin^2(\theta) d\theta d\phi$$

$$= \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{r} \sin^2(\theta) d\theta d\phi$$

Se debe notar que $\hat{r}$ depende tanto de θ como de ϕ, pues por su definición:

$$\hat{r} = \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{\imath} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{\jmath} + \cos(\theta)\hat{k}$$

por tanto $\hat{r}$ se debe integrar para así "barrer"todo el manto de la semi-esfera que es donde está la densidad de carga. Reemplazando $\hat{r}$ en la integral se obtiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{r} \sin^2(\theta) d\theta d\phi$$

$$= \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{\imath} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{\jmath} + \cos(\theta)\hat{k}) \sin^2(\theta) d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta)d\theta\right)\left(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(\phi)d\phi}_{0}\right)\hat{\imath}\cdots$$

$$+\frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta)d\theta\right)\left(\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(\phi)d\phi}_{0}\right)\hat{\jmath}\cdots$$

$$+\frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin^2(\theta)d\theta\right)\left(\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi}_{2\pi}\right)\hat{k}$$

Solo sobrevive el término orientado según $\hat{k}$, calculando la integral se obtiene finalmente que :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\sin^3(\theta)}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-\sigma_0}{6\varepsilon_0}$$