1. Electrostática.

1.1. Ley de Coulomb.

La fuerza entre 2 cargas puntuales q_1 *y* q_2[1] esta descrita por la siguiente ley:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad positiva, r es la distancia que separa las cargas y F es conocida como *fuerza de Coulomb.*

En el S.I,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon} \tag{2}$$

donde ϵ es la *permitividad* del medio en que están situadas las cargas.

Al volver a formular (1) como ecuación vectorial y sustituyendo el valor de k se obtiene una expresión más general: [2]

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \tag{3}$$

donde $r_{12} = \|\vec{r}_{12}\|$ y $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$

Podemos observar que si ambas cargas son del mismo signo la fuerza es repulsiva, en caso contrario la fuerza es atractiva.

La *permitividad del vacío* es $\epsilon_0 \approx 8,85\ CNm^{-2}$, casi la misma que la del aire. Por ahora supondremos que el medio es aire o vacío.

Propuesto: Considere 2 cargas puntuales de 1 C cada una, de mismo signo colocadas en el vacío con 1 mm de separación entre ellas. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de repulsión?.

En un sistema de N cargas la fuerza resultante sobre la $i-$ésima carga está dada por:

$$\vec{F}_i = \sum_{i\neq j}\vec{F}_{ij} \tag{4}$$

1.2. Campo Eléctrico.

Si fijamos una carga puntual positiva q en el origen de un sistema de coordenadas esférico y acercamos otra carga puntual positiva q_p [3] a una vecindad de q, entonces la carga q_p se verá afectada por el efecto de una fuerza repulsiva

[1]Las cargas q_1 *y* q_2 en Coulombs (C).

[2]La notación $\vec{G}_{ij}$ se usa para indicar el vector de magnitud G que apunta desde j hacia i, por lo tanto la expresión $\vec{F}_{ij}$ hace referencia a la fuerza que ejerce la carga j sobre la carga i.

[3]La carga q_p es llamada habitualmente *carga de prueba* o *testigo*.

actuando en el eje radial, la que será más intensa cuando q_p se acerque al origen, podemos decir que q tiene un "*campo*"que la circunda donde actúa esta fuerza, por lo que no deja de ser natural que llamemos *campo* a una región donde actúan fuerzas.

La *intensidad de campo eléctrico* (o campo eléctrico) en el punto $\vec{r}$ se define como [4] la fuerza eléctrica por unidad de carga y se denota por $\vec{E}$[5].

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} := \vec{E}(\vec{r}) \tag{5}$$

[6]

donde q_p esta ubicada en $\vec{r}$ y $r = \|\vec{r}\|$. Es claro que $\vec{E} \parallel \vec{F}$. Destaca el hecho de que el campo eléctrico $\vec{E}$ que se mide es independiente de la carga de prueba q_p, por lo que para medirlo es necesario utilizar una carga de prueba de magnitud pequeña, de lo contrario se podría perturbar el campo que se intenta medir.

1.2.1. Teorema de Superposición.

Para un sistema de N cargas el campo eléctrico es la suma de los campos eléctricos de cada carga por separado:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^3} \tag{6}$$

1.2.2. Densidades de Carga.

Ignorando convenientemente el hecho de que las cargas vienen separadas en paquetes, como electrones y protones, podemos considerarlas como una distribución continua de cargas, donde distinguimos 3 tipos de densidades de carga eléctrica: [7]

- **Volumétrica (ρ):** Carga por unidad de volúmen para cada $\vec{r}$.

$$\Rightarrow Q = \int_V \rho(\vec{r})dV \tag{7}$$

- **Superficial (σ):** Carga por unidad de superficie para cada $\vec{r}$.

$$\Rightarrow Q = \int_S \sigma(\vec{r})dS \tag{8}$$

[4] Resulta conveniente definir el campo eléctrico solamente en términos de cargas positivas.
[5] El *campo eléctrico* $\vec{E}$ es un vector, entonces realmente representa 3 ecuaciones, una por cada componente.
[6] La carga q_p esta ubicada en $\vec{r}$.
[7] Q es la carga total contenida en V, S y s en (7), (8) y (9) respectivamente.

- **Lineal (λ):** Carga por unidad de largo para cada $\vec{r}$.

$$\Rightarrow Q = \int_s \lambda(\vec{r})ds \tag{9}$$

Con esto podemos definir el campo eléctrico para:

- Un volúmen V de densidad de carga volumétrica $\rho(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{r}-\vec{r}\prime}{\|\vec{r}-\vec{r}\prime\|^3}\rho(\vec{r}\prime)dV\prime \tag{10}$$

- Una superficie S de densidad de carga superficial [8] $\sigma(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\vec{r}-\vec{r}\prime}{\|\vec{r}-\vec{r}\prime\|^3}\sigma(\vec{r}\prime)dS\prime \tag{11}$$

- Una curva s de densidad de carga lineal $\lambda(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_s \frac{\vec{r}-\vec{r}\prime}{\|\vec{r}-\vec{r}\prime\|^3}\lambda(\vec{r}\prime')ds\prime \tag{12}$$

1.2.3. Materiales Conductores.

Los materiales conductores tienen la propiedad de conducir o transportar carga eléctrica, pues en ellos existen electrones libres capaces de moverse en presencia de campo eléctrico, que además tienden a acumularse en bordes, superficies y puntas. Por otra parte un conductor se define como un medio en el cual el campo eléctrico es siempre cero en su interior en una situación estática $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

1.3. Flujo de Campo Eléctrico.

El flujo de campo eléctrico (Φ) a través de una superficie S es:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot\vec{dS} \tag{13}$$

Destacamos que la expresión $\vec{E}\cdot\vec{dS}$ en la ecuación (13) representa un producto interno (o producto punto) entre 2 vectores.

Puede causar extrañeza para quienes vean por primera vez expresiones como $\vec{dS}$ donde a un *diferencial* se asocia el carácter de un vector, aunque esto no sea más que una simple abreviación, la equivalencia en la notación es la siguiente: $\vec{dS} = dS\hat{S}$ donde dS es un diferencial de área habitual y $\hat{S}$ [9] un vector

[8] Como veremos más adelante, esta expresión resulta muy útil cuando se trabaja con materiales conductores, pues en ellos hay electrones libres que en ciertas circunstancias tienden a acumularse en superficies, bordes y puntas.

[9] el vector $\hat{S}$ es conocido como *normal exterior* de S.

unitario perpendicular a la superficie cerrada S que debe cumplir con ciertas características que veremos más adelante.

1.3.1. Ángulo Sólido.

Consideremos una carga puntual q encerrada por una superficie esférica S y un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) centrado en la carga, si queremos calcular el flujo sobre S, sabemos que la fuerza eléctrica actúa en dirección y sentido del vector unitario radial $\hat{r}$ y que el diferencial de área $\vec{dS} = dS\hat{r}$ en que $\hat{r}$ es la normal exterior [10] y $dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$ describe la superficie perpendicular al vector $\hat{r}$. Al reemplazar en la expresión para el flujo aparece el término:

$$\vec{dS} \cdot \hat{r} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi := r^2 d\Omega \tag{14}$$

en que Ω posee unidades de $[rad^2]$ por lo que se le llama ángulo sólido [11]. $\Omega \in [0, 4\pi]$.

1.3.2. Flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada.

El flujo del campo asociado a una carga eléctrica [12], sobre una superficie cerrada S es:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_S E(\vec{r})\hat{r} \cdot \vec{dS} \tag{15}$$

Reemplazando en la ecuación (13) la expresión obtenida en (5) para $E(\vec{r})$ y en (14) para $\vec{dS}$, e integrando tenemos que:

$$\Phi = \int_{4\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{16}$$

1.4. Ley de Gauss.

Usando el principio de superposición $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ podemos concluir la Ley de Gauss:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \tag{17}$$

donde la suma $\sum_i q_i$ se extiende a todas las cargas encerradas por la superficie S.

[10] Otra característica de la normal exterior es, como su nombre lo indica, que apunta en sentido opuesto al que se ubica el volúmen encerrado por S, otra forma de decirlo es que apunta hacia el exetrior de la superficie.

[11] La expresión $[rad^2]$ podemos considerarla dimensionalmente análoga a la de $[m^2]$ para una superficie sólida, de ahi el nombre *ángulo sólido*.

[12] Sabemos que el campo eléctrico asociado a una carga eléctrica positiva actúa en dirección radial según el sentido del vector unitario $\hat{r}$ y solamente depende de $\vec{r}$.

1.4.1. Forma Integral de la Ley de Gauss.

La expresión que sigue es equivalente a la anterior, es la extensión natural para una distribución continua de cargas y se conoce como la *Forma Integral de la Ley de Gauss*:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \tag{18}$$

donde V es el volúmen encerrado por la superficie S.

Propuesto: Considere un plano infinito cargado que coincide con el plano XY, con densidad de carga superficial σ uniforme. Usando la *forma integral de la ley de Gauss* calcule el campo eléctrico $\vec{E}$[13] producido por el plano en el eje Z. Dé una interpretación física a su resultado.

1.4.2. Forma Diferencial de la Ley de Gauss.

Consideremos un *volúmen muy pequeño* δV, utilizando en la ecuación (12) la siguiente aproximación del término integral:

$$\delta V \ \to 0 \Rightarrow \int_V \rho(\vec{r}) dV \approx \rho(\vec{r}) \delta V \tag{19}$$

luego, dividiendo a ambos lados por δV, tomando límite cuando $\delta V \to 0$ [14], de la *expresión integral para la Ley de Gauss* queda:

$$div(\vec{E}) := \lim_{\delta V \to 0} \frac{\int_S \vec{E} \cdot \vec{dS}}{\delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{20}$$

donde hemos definido el operador *Divergencia* o $div(\cdot)$.

En coordenadas cartecianas $div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$[15], se obtiene la expresión conocida como *Forma Diferencial de la Ley de Gauss*[16].

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{21}$$

1.5. Potencial Eléctrico.

Consideremos dos puntos $\vec{r}_a$ *y* $\vec{r}_b$ inmersos en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_{ab}$ [17] que es paralelo al vector $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$ y a la fuerza electrostática $\vec{F}_{ab}$ que

[13] No olvide considerar el flujo generado por ambas caras del plano.

[14] Podemos considerar que la densidad de carga $\rho = \rho(\vec{r})$ permanece aproximadamente constante para magnitudes infinitecimales.

[15] Notar que se realiza un producto interno (o producto punto) entre ambos vectores.

[16] De las propiedades del cálculo, basta con demostrar esta propiedad vectorial para un sistema de coordenadas particular para conseguir la generalidad.

[17] Recordamos que la notación $\vec{G}_{ij}$ se usa para indicar el vector de magnitud G que apunta desde j hacia i.

lo produce y que apunta en el mismo sentido que el vector $\vec{r}_{ab}$, queremos mover una carga positiva puntual q_p (carga de prueba) desde $\vec{r}_a$ hasta $\vec{r}_b$. Sabemos que el campo $\vec{E}_{ab}$ ejerce una fuerza $\vec{F}_{ab} = q_p\vec{E}_{ab}$ sobre q_p de manera que requiere trabajo mover la carga en sentido contrario a la fuerza. La idea de *potencial eléctrico* tiene relación con el trabajo necesario para llevar la carga de prueba q_p desde $\vec{r}_a$ hasta $\vec{r}_b$.

Similarmente a la notación usada anteriormente para vectores, llamamos W_{ba} al trabajo requerido para mover q_p desde $\vec{r}_a$ a $\vec{r}_b$ y podemos calcularlo de la manera siguiente:

$$W_{ba} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_{ab} \cdot \vec{dr}_{ab} \tag{22}$$

Nota: El signo negativo se debe a que el movimiento realizado desde $\vec{r}_a$ hacia $\vec{r}_b$ es opuesto al sentido del campo $\vec{E}_{ab}$.

Reemplazando $\vec{F}_{ab} = q_p\vec{E}_{ab}$ en la ecuación anterior nos queda:

$$W_{ba} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} q_p\vec{E}_{ab} \cdot \vec{dr}_{ba} \tag{23}$$

Como la fuerza $\vec{F}_{ab}$ es una fuerza radial entonces es conservativa, por lo tanto el trabajo W_{ba} es independiente del camino realizado y $\oint_\gamma \vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$, donde γ es una curva cerrada.

Definimos la *energía potencial electrostática* como $U(\vec{r}) = q_p\phi(\vec{r})$ tal que:

$$W_{ba} = U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a) = q_p\{\phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)\} \tag{24}$$

donde $\phi(\vec{r})$ es el *potencial eléctrico.*

Como para el cálculo del trabajo sólo nos interesa la *diferencia de potencial*, escogemos un punto arbitrario $\vec{r}_0$ como punto de referencia [18] para el cálculo de la energía, de las propiedades de la integral tenemos que:

$$-\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \ldots = -\{\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_0} \ldots + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \ldots\} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_0} \ldots - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \ldots = \int_{\vec{r}_b}^{\vec{r}_0} \ldots - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_0} \ldots \tag{25}$$

Luego la expresión para W_{ba} queda:

$$W_{ba} = q_p\{\int_{\vec{r}_b}^{\infty} \vec{E}_{ab} \cdot \vec{dr}_{ba} - \int_{\vec{r}_a}^{\infty} \vec{E}_{ab} \cdot \vec{dr}_{ba}\} = q_p\{\phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)\} \tag{26}$$

[18] Por conveniencia a menudo tomaremos el punto de referencia $\vec{r}_0$ en infinito y consideraremos que $\phi(\infty) = 0$.

donde hemos identificado $\phi(\vec{r})$ como:

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dr} \tag{27}$$

La diferencia de potencial entre $\vec{r}_b$ y $\vec{r}_a$ es $\Delta\phi_{ab} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a) = \frac{W_{ba}}{q_p}$, se define como Voltaje y lo denotamos por V_{ba}.

Destacamos que $\sum_i \phi_i = \sum_i \int \vec{E}_i \cdot \vec{dr}_i = \int \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{dr}_i = \int \vec{E} \cdot \vec{dr} = \phi$, o sea el potencial eléctrico para un conjunto de N cargas no es más que la suma de los potenciales asociados a cada una de las cargas. Podemos decir que también existe un principio de superposición para el potencial eléctrico.

El potencial eléctrico generado por N cargas es entonces:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \tag{28}$$

En el límite de un continuo de cargas:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\prime)}{\|\vec{r} - \vec{r}\prime\|} dV\prime \tag{29}$$

1.5.1. Forma Diferencial para el Potencial Eléctrico.

Consideremos un camino infinitesimal desde $\vec{r}_a = \vec{r}$ a $\vec{r}_b = \vec{r} + \delta\vec{r}$, el trabajo realizado por unidad de carga es la diferencia de potencial $\delta\phi_{ab}$ entre ambos extremos del camino y está dado por:

$$\delta\phi_{ab} = \phi(\vec{r}+\delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\delta\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dr} = -\vec{E} \cdot \{(\vec{r}+\delta\vec{r}) - (\vec{r})\} = -\vec{E} \cdot \delta\vec{r} \tag{30}$$

Suponemos $\delta\vec{r}$ suficientemente pequeño para que el campo eléctrico $\vec{E}$ sea constante. En el límite diferencial en que $\delta\vec{r} \to 0$ y $\delta\phi_{ab} \to 0$, decimos que $\delta \to d$.

Entonces:

$$-d\phi = E_x dx + E_y dy + E_z dz \tag{31}$$

Así derivando la expresión anterior con respecto cada componente tenemos:

$$E_x = -\frac{\partial\phi_x}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial\phi_y}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial\phi_z}{\partial z}$$

Lo que matemáticamente expresamos como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{32}$$

en que $\vec{\nabla}(\cdot)$ es el operador diferencial llamado *Gradiente* y ϕ es el campo escalar *potencial eléctrico*. Del cálculo vectorial, si el vector $\vec{E}$ es igual al gradiente de un campo escalar entonces $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, usando el *teorema de Stokes* sobre curva cerrada se tiene que $\oint \vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$, como habíamos concluido anteriormente.

Además podemos integrar la ecuación (32):

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{dr} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a) \tag{33}$$

lo que concuerda con la definición de *Voltaje*.

Propuesto: Usando la *forma diferencial para el potencial eléctrico*, calcular $\vec{E}(\vec{r})$ dado $\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ en esféricas.

1.5.2. Superficies Equipotenciales.

Una *superficie equipotencial* se define como tal si tiene $\phi(\vec{r}) = constante$, luego si $\phi(\vec{r}) = constante \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi = 0$, es decir, se anula la proyección del campo $\vec{E}$ sobre un plano tangente a una superficie equipotencial que contiene a $\vec{r}$, por lo tanto $\vec{E}$ es perpendicular a las superficies equipotenciales.

Superficies Equipotenciales en materiales conductores.

Cuando un condctor metálico se encuentra permeado por un campo eléctrico, diferentes partes del metal tendrían diferentes potenciales si no fuera por el hecho de que los electrones fluyen libremente en el conductor hasta que el campo total se reduce a cero en el interior, por lo tanto los materiales conductores tienen potencial constante. El *campo aplicado* induce en el conductor un *campo inducido* tal que, en situación estática, la suma del campo aplicado con el campo inducido da como resultante un campo total dentro del conductor igual a cero, pero el campo total no es cero mientras exista flujo de corrientes.

1.6. Ecuación de Poisson.

De la *forma diferencial para el potencial* [19] junto con la *forma diferencial de la Ley de Gauss* [20] obtenemos directamente la *ecuación de Poisson*:

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{34}$$

[19] $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$
[20] $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

1.6.1. Ecuación de Laplace.

Se desprende de la ecuación de Poisson, tomando el caso particular cuando $\rho(\vec{r}) = 0$:

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = 0 \tag{35}$$