Auxiliar N°4
Electromagnetismo

Profesor: Enrique Cordaro
Ayudantes: Pablo Aguilera, Maximiliano Salinger

Viernes 20 de Abril de 2012

1. Repaso

1.1. Conductores:

- Las cargas eléctricas se mueven con bastante libertad dentro del conductor, al contrario de un aislador donde el material opone mucha resistencia al movimiento de las cargas. En general, la conductividad de los conductores difiere de la de los aisladores en orden de 10^{20}.
- En equilibrio, las cargas se reacomodan hasta que el campo eléctrico dentro del conductor sea nulo, es decir, equipotencial. Además, en este régimen, el campo eléctrico en todo punto exterior al conductor (muy cercano) es perpendicular.

1.2. Corriente y densidad de corriente

La corriente tiene que ver con la variación de carga eléctrica por unidad de tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{1}$$

su unidad se conoce como el Ampere:

$$[ampere] = \left[\frac{coulomb}{segundo}\right]$$

En este sentido surge de forma natural ver la corriente como un flujo

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{da} \tag{2}$$

esta cantidad corresponde al número de cargas q que se mueven con una velocidad $\vec{v}$:

$$\vec{J} = nq\vec{v} \tag{3}$$

más general aún, también tendremos un principio de superposición:

$$\vec{J} = \sum_k \vec{J_k} = \sum_k n_k q_k \vec{v_k} \tag{4}$$

1.3. Ecuación de continuidad

Si partimos de la ecuación (2) y reemplazamos en ella la ecuación (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\int_S \vec{J} \cdot \vec{da} \\ \int_V \frac{d\rho}{dt} dV &= -\int_S \vec{J} \cdot \vec{da} \end{aligned}$$

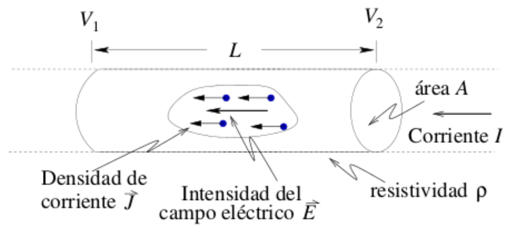

Figura 1: Esquema del transporte de la carga.

luego por el teorema de la divergencia:

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV$$

lo que implica:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{5}$$

esta ecuación expresa la conservación de la carga. La variación de la densidad de carga en un volumen tiene que ver con la densidad de corriente que sale, es decir, la carga no se pierde ni se crea, solo se desplaza.

1.4. Ley de Ohm

En estado estacionario, la corriente que circula en un conductor está relacionada directamente con la diferencia de potencial en sus extremos mediante:

$$I = \frac{V}{R} \tag{6}$$

donde I es la corriente que circula por el material (en amperes $[A]$), R es la resistencia del material (en Ohm: $[\Omega] = [V/A]$) y $V = \phi_{ab}$ la diferencia de potencial entre los extremos a y b del material.

1.5. Resistividad y Conductividad

La resistencia de un material depende en gran parte de la geometría y dimensiones de este (p. e. un bloque de fierro cilíndrico no tiene la misma resistencia que uno rectangular del mismo largo). Por esta razón se define la conductividad y resistividad de los materiales que no dependen de la geometría específica. Primero definamos la conductividad de la forma:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{7}$$

Donde $\vec{E}$ es el campo debido a la diferencia de potencial que aplicamos en los extremos y $\vec{J}$ la densidad de corriente resultante, la conductividad σ tiene unidades de $[\Omega\ m]$. Supongamos por simplicidad que el material tiene un largo L y una sección transversal A como se observa en la figura 1, en este, la corriente será simplemente $I = J \cdot A$ y el campo eléctrico $E = V/L = (V_2 - V_1)/L$ caso tendremos:

$$\begin{aligned} J &= \sigma E \\ \frac{I}{A} &= \sigma \frac{V}{L} \\ V &= \frac{1}{\sigma}\frac{IL}{A} \end{aligned}$$

además sabemos de la ley de Ohm que $V = IR$, luego:

$$\begin{aligned} IR &= \frac{1}{\sigma}\frac{IL}{A} \\ R &= \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A} \\ R &= \rho\frac{L}{A} \implies \rho \equiv \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

donde definimos la resistividad ρ (en $\Omega^{-1}\ m^{-1}$).

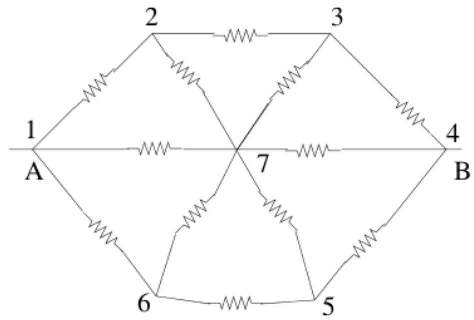

Figura 2: Diagrama de resistencias.

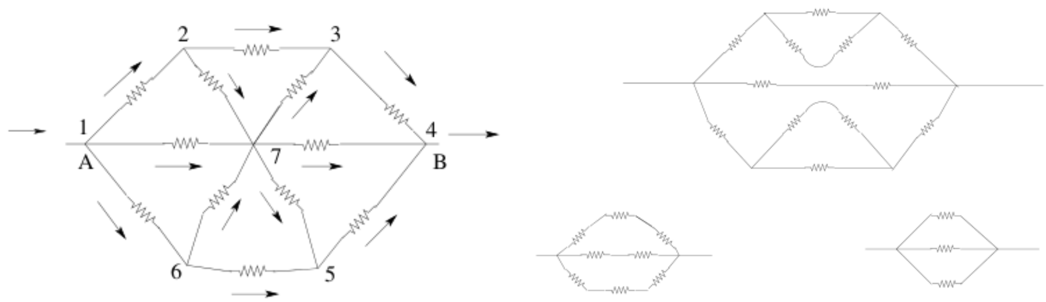

Figura 3: Elección de los sentidos de las corrientes y resistencias equivalentes.

2. Resistencia equivalente

Calcule la resistencia equivalente del conjunto de resistencias de la figura 2. Todas las resistencias son iguales R.

2.1. Solución

Elijamos las corrientes como se muestran en la figura 3. Observe que por simetría la corriente entre 1-7 es igual a la de 7-4, la de 2-7 es igual a la de 7-3 y la del 6-7 es igual a la del 7-5. Debido a esto, la distribución de corriente no cambiaría si desconectáramos las resistencias 2-7, 7-3, 6-7 y 7-5 del punto 7, como se ve en la figura 3.

Ahora, la resistencia equivalente entre 2 y 3 es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{eq1}} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \\ R_{eq1} &= \frac{2}{3}R \end{aligned}$$

La resistencia equivalente entre 1 y 4 por el camino superior es:

$$\begin{aligned} R_{eq2} &= 2R + R_{eq1} \\ &= \frac{8}{3}R \end{aligned}$$

luego la resistencia total, debido a la simetría será:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{Total}} &= \frac{1}{2R} + \frac{2}{R_{eq2}} \\ R_{Total} &= \frac{4}{5}R \end{aligned}$$

3. Red infinita de resistencias

Considere una red infinita como la mostrada en la figura 4. Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos A y B.

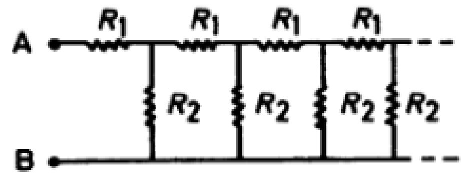

Figura 4: Red infinita.

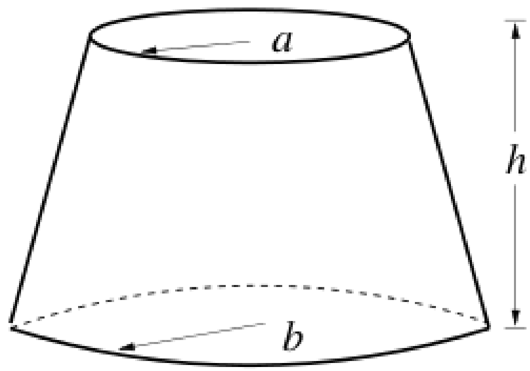

Figura 5: Cono.

3.1. Solución

Veamos que si situamos los puntos A y B en la sección de la malla infinita, tendremos la misma malla, pues le podemos quitar una sección a la malla infinita y seguirá siendo infinita. Al hacer esto, tendremos 2 ecuaciones, consideremos que la resistencia equivalente es R:

$$
\begin{aligned}
R_{eq1} &= R &(8)\\
R_{eq1} &= R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2} &(9)
\end{aligned}
$$

con estas 2 ecuaciones tendremos que:

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + \frac{RR_2}{R_2+R}\\
R^2 + RR_2 &= R_1R + R_1R_2 + RR_2\\
R^2 - R_1R - R_1R_2 &= 0\\
R &= \frac{R_1}{2} + \frac{\sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}
\end{aligned}
$$

4. Resistividad de un material

Considere una sección de un cono como la mostrada en la figura 5. Está hecho de un material con una resistividad ρ uniforme. Suponiendo que la corriente se distribuye uniformemente sobre cualquier sección transversal del cono (de modo que la densidad de corriente no depende del radio). Encontrar la resistencia equivalente entre los extremos.

4.1. Solución

Tomando secciones de altura infinitesimal dz y considerando la sección transversal de estos discos en función de la altura como $A(z)$, la resistencia se escribe como:

$$R = \int_0^h \frac{\rho}{A(z)} dz$$

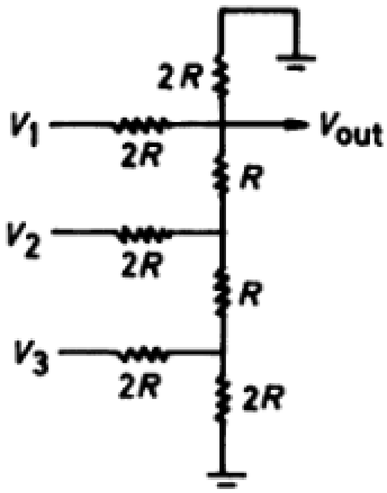

Figura 6: Circuito.

La sección transversal de un disco es:

$$A(z) = \pi r(z)^2$$

donde $r(z)$ se calcula como:

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{(a-b)}{h}z + b \\ &= \frac{(a-b)z + bh}{h} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$A(z) = \pi \frac{((a-b)z + bh)^2}{h^2}$$

luego:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^h \frac{\rho h^2}{\pi((a-b)z + bh)^2} dz \\ &= \frac{\rho h^2}{\pi} \int_0^h \frac{1}{((a-b)z + bh)^2} dz \\ &= \frac{\rho h^2}{\pi} \left(\frac{1}{b-a} \frac{1}{(a-b)z + bh} \right) \Bigg|_0^h \\ &= \frac{\rho h^2}{\pi} \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ R &= \frac{\rho h}{\pi ab} \end{aligned}$$

5. Circuito para combinaciones

Considere el circuito de la figura 6. Los voltajes $\{V_i\}_{i=1,2,3}$ pueden tomar los valores 0 o 1 solamente. ¿Cuantos posibles valores puede tomar el voltaje V_{out} ?, calcule esos valores.

5.1. Solución

Hay $2^3 = 8$ posibles combinaciones de los voltajes. El circuito equivalente se muestra en la figura 7. Escribamos las ecuaciones de Kirchoff para las diferentes mallas elegidas (considerando el sentido que se muestra en la figura):

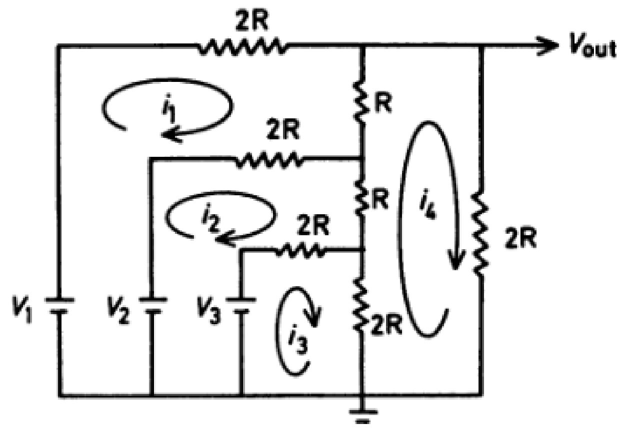

Figura 7: Circuito equivalente.

$$
\begin{aligned}
V_3 &= 2R\,(I_3 - I_2) + 2R\,(I_3 - I_4) && (10)\\
V_2 - V_3 &= 2R\,(I_2 - I_1) + R\,(I_2 - I_4) + 2R\,(I_2 - I_3) && (11)\\
V_1 - V_2 &= 2RI_1 + R\,(I_1 - I_4) + 2R\,(I_1 - I_2) && (12)\\
0 &= 2R(I_4 - I_3) + R\,(I_4 - I_2) + R\,(I_4 - I_1) + 2RI_4 && (13)
\end{aligned}
$$

Luego de resolver para I_4 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
V_{out} - 0 &= 2RI_4\\
V_{out} &= \frac{V_1}{3} + \frac{V_2}{6} + \frac{V_3}{12}
\end{aligned}
$$

con esto podemos escribir los voltajes que puede tomar V_{out}:

V_1	V_2	V_3	V_{out}
0	0	0	0
0	0	1	$1/12$
0	1	0	$1/6$
0	1	1	$1/4$
1	0	0	$1/3$
1	0	1	$5/12$
1	1	0	$1/2$
1	1	1	$7/12$