

Capítulo 1

Movimiento y Coordenadas

1.1. Posición y movimiento

Los primeros movimientos que fueron descritos por medio de ecuaciones, fueron los que se refieren al movimientos de cuerpos en el cielo: el movimiento del Sol y la Luna, el movimiento de las estrellas y—en un momento culminante—el movimiento de los planetas que nos dieron Copérnico, Galileo, Kepler y Newton en tres etapas de la historia.

Todas estas primeras descripciones cuantitativas de movimiento se hicieron como si los cuerpos fuesen simples puntos en movimiento ya que, en efecto, de este modo lo esencial queda descrito por el movimiento del centro del cuerpo.

Normalmente, el movimiento descrito abarca una trayectoria que es muchísimo más grande que el tamaño del cuerpo en cuestión. Por ejemplo, el diámetro de la Tierra es unas cien mil veces más chico que el diámetro de su órbita alrededor del Sol.

Tolomeo (siglo II) describe con mucho ingenio el movimiento de los planetas colocando a la Tierra casi al centro. Copérnico (contemporáneo de Colón) expone en 1512 que el Sol está al centro y los planetas tienen órbitas perfectamente circunferenciales alrededor del Sol. Casi un siglo después Kepler descubre que las órbitas de los planetas son elípticas. Su “Nueva Astronomía” es publicada en 1607.

Cuando en 1632 Galileo publicó su libro “Diálogos sobre los dos sistemas del mundo” (el de Tolomeo y el de Copérnico), fue acusado y enjuiciado por la Inquisición.

Otro de los muchos aportes de Galileo fue describir que el movimiento de cuerpos en caída libre y el movimiento de proyectiles en lanzamiento balístico depende de la llamada *aceleración de gravedad*, g . Al nivel del mar aproximadamente es $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$.

Aceptemos, entonces, que la atención, en una buena parte del estudio de MECÁNICA, estará dirigida a describir *puntos* en movimiento.

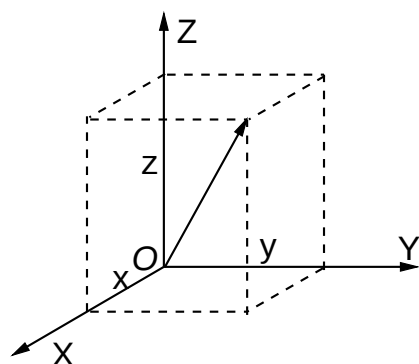


Figura 1.1: El vector posición $\vec{r}$ de un punto descrita con respecto a un sistema de referencia XYZ.

Para describir el movimiento de un punto es necesario establecer una referencia respecto a la cual se define posiciones y velocidades.

Por definición *la referencia* está inmóvil con respecto a sí misma. Para describir movimiento en tres dimensiones y—a veces en un plano, es decir, en dos dimensiones—la posición del punto en estudio es descrita por un vector $\vec{r}(t)$. El *vector posición* $\vec{r}(t)$ siempre se define en relación a una referencia particular: debe estar definido un punto O que es el *origen de coordenadas*.

El vector posición $\vec{r}(t)$ define, en su evolución, una curva que se denomina *trayectoria*. El *itinerario* agrega a la trayectoria la información del valor de tiempo t en el cual el punto en movimiento pasa por cada posición en la trayectoria.

» Una trayectoria puede ser definida como una relación entre las coordenadas. Por ejemplo, un objeto en un plano, con coordenadas cartesianas (x, y) puede tener una trayectoria dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Otro ejemplo

$$z = \frac{4z_m}{x_m^2} (x_m - x) x$$

que representa un movimiento parabólico en el plano vertical XZ tal que cuando $x = 0$ y también cuando $x = x_m$ resulta $z = 0$ mientras que cuando $x = x_m/2$ la coordenada z alcanza un valor máximo $z = z_m$.

La velocidad es la variación de la posición en el tiempo, y la aceleración es la variación de la velocidad en el tiempo. Ambas son cantidades vectoriales:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.1.1)$$

» Al definir al vector velocidad como la derivada del vector posición se está definiendo a la velocidad como el límite:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \epsilon) - \vec{r}(t)}{\epsilon}$$

Para ilustrar este punto compruebe, mediante un dibujo, que el vector velocidad asociado a un movimiento sobre una curva necesariamente es paralelo a la tangente a la curva.

Las expresiones anteriores pueden ser invertidas. Por ejemplo, la definición de velocidad recién dada puede ser integrada, utilizando como variable de integración t' , definida desde un tiempo inicial t_0 hasta un tiempo arbitrario t ,

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' \quad (1.1.2)$$

que es más conveniente escribir como

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' \quad (1.1.3)$$

Así, por ejemplo, si $t = t_0$ el término integral es nulo—porque el dominio de integración es nulo—y resulta una identidad. Si se deriva a ambos lados en (1.1.3) se recupera la primera de las relaciones dadas en (1.1.1).

En forma similar se puede invertir la definición de aceleración obteniéndose

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_1) + \int_{t_1}^t \vec{a}(t') dt' \quad (1.1.4)$$

EJEMPLO: Problema de lanzamiento de un objeto desde una posición inicial $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ con una velocidad $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ sabiendo que la aceleración tiene un valor fijo: $\vec{a}(t) = \vec{g}$.

Unidades: En este texto se utilizará el sistema MKS de unidades: longitud se expresa en metros, tiempo en segundos y masa en kilogramos.

caminata normal	1
máxima velocidad en ciudad	18
$v_{\max}$ en caída libre	50
avión comercial	275
velocidad del sonido en Valparaíso	340

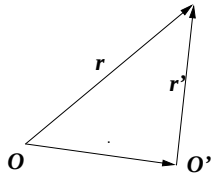
Valor aproximado de algunas velocidades comunes expresadas en metros por segundo.

Primero se usa (1.1.4) y se obtiene

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \int_{t_0}^t dt' = \vec{v}_0 + (t - t_0) \vec{g} \quad (1.1.5)$$

Luego se usa esta última expresión en (1.1.3) y puede comprobarse que arroja

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0) \vec{v}_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2} \vec{g} \quad \blacktriangleleft \quad (1.1.6)$$



Si el movimiento de un punto P es descrito desde dos orígenes O y O' , los vectores posición $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ se relacionan por

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'(t)$$

Figura 1.2: Vectores posición a partir de dos orígenes distintos.

Si la posición relativa de estos puntos permanece fija, $\overrightarrow{OO'}$ no depende del tiempo y tanto la velocidad como la aceleración respecto a ambos orígenes son iguales.

- ♣ ¿A qué velocidad le crece el pelo? ¿Cuál es el récord en carreras de 100 metros? (En carreras olímpicas de 60 metros los atletas alcanzan velocidades algo menores a 8,6 metros por segundo.) ¿A qué velocidad remacha un buen tenista?
- ♣ Si un automóvil va a 18 metros por segundo y frena con una aceleración negativa de magnitud $2g$, ¿en qué distancia se detiene? ¿Cuánto vale su “peso” en ese momento? Esta pregunta se refiere a la fuerza asociada a la aceleración total.
- ♣ Suponga que un vehículo que iba a 18 metros por segundo en el momento de chocar contra un obstáculo duro, es detenido en una décima de segundo, a través de un proceso con aceleración uniforme. ¿Cuál es el valor de la aceleración durante este proceso?
- ♣ Calcule la velocidad con que llega al suelo un cuerpo que es soltado en reposo desde una altura h . ¿Aproximadamente desde qué altura se atrevería usted a saltar al suelo? ¿A qué velocidad golpean sus pies el suelo? Desde el momento t_0 en que sus pies tocan el suelo hasta que su tronco se detiene, t_1 , los músculos de las piernas actúan como freno. Para simplificar, suponga que esa “frenada” es una aceleración negativa constante a_0 en el lapso (t_0, t_1) . Dé algún valor realista al cambio de altura del su tronco en ese lapso y deduzca un valor numérico para a_0 . Compare ese valor con la aceleración de gravedad.

♣ Si se sabe que la velocidad de un punto como función del tiempo es

$$\vec{v}(t) = \omega R_0 \left[-\hat{i} \sin \omega t + \hat{j} \cos \omega t \right] + \hat{k} v_3$$

y que la posición en $t = 0$ es $\vec{r}(0) = \hat{i} R_0$, determine la posición del punto en todo instante $t > 0$ y también la aceleración $\vec{a}(t)$. Haga un dibujo 3D del movimiento del punto y dibuje la dirección en que apunta $\vec{a}(t)$ en distintas partes de esa trayectoria.

1.2. Coordenadas y movimiento

El movimiento se puede describir con diversos tipos de coordenadas. En lo que sigue se define tres sistemas de coordenadas que se usarán en MECÁNICA: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Para cada uno de estos sistemas de coordenadas tridimensionales se define tres coordenadas escalares que son (x, y, z) en cartesianas; (ρ, ϕ, z) en cilíndricas y (r, θ, ϕ) en esféricas y además se define vectores unitarios asociados a esas coordenadas espaciales: $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ y $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ respectivamente. Estos vectores unitarios apuntan en una dirección que, en general, depende del punto que se está describiendo. Sólo en coordenadas cartesianas ellos son siempre los mismos.

1.2.1. Coordenadas cartesianas

Las coordenadas cartesianas se basan en los ejes mutuamente perpendiculares X , Y y Z , ver la Fig.1.1. Estos ejes tienen asociados los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. Los ejes y los vectores unitarios asociados están fijos al sistema de referencia en el cual se describe el movimiento. Los vectores de posición, velocidad y aceleración son

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \\ \vec{v}(t) &= \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k} \\ \vec{a}(t) &= \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

coordenadas	vectores
x, y, z	$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

Las coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$ de un punto móvil dependen del tiempo pero los vectores unitarios son constantes.

1.2.2. Coordenadas cilíndricas

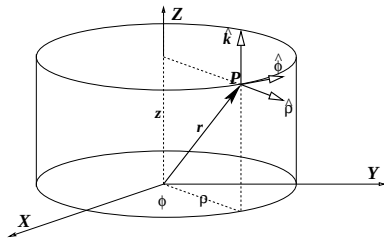


Figura 1.3: Las coordenadas cilíndricas de un punto P son: ρ , la distancia de P al eje Z , ϕ que es el ángulo que forma el plano que pasa por el eje Z y por OP con el plano XZ .

Dado un punto P con coordenadas cartesianas (x, y, z) se dibuja un cilindro cuyo eje coincide con el eje Z y su radio es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, de tal modo que P está en el manto del cilindro de radio ρ . La proyección al plano XY del vector posición $\vec{r}$ del punto P tiene longitud ρ y forma un ángulo ϕ con el eje X . Las coordenadas cilíndricas de P son las cantidades (ρ, ϕ, z) . La relación con las coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

A este sistema de coordenadas se le asocia vectores unitarios $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ los cuales se relacionan a $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ a través de

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi \\ \hat{\phi} &= -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \\ \hat{k} &= \hat{k} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Estos vectores unitarios apuntan, en cada punto P escogido, en la dirección en que una sola de las coordenadas cilíndricas varía.

Por ejemplo, si se considera un punto Q infinitesimalmente cercano a P que comparte con P el mismo valor de ρ y de z , y solo difieren por la coordenada ϕ , ($\phi_Q = \phi_P + d\phi$) entonces el vector $\hat{\phi}$ apunta en la dirección de P a Q .

coordenadas	vectores
ρ, ϕ, z	$\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}$

A diferencia del sistema cartesiano de coordenadas, acá la dirección de los vectores unitarios básicos depende del punto P que se esté considerando, esto es,

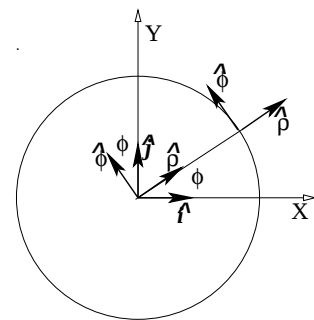


Figura 1.4: El eje Z es perpendicular al plano de la figura, y se puede apreciar la relación entre las coordenadas (ρ, ϕ) y los vectores unitarios $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$.

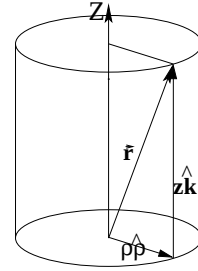
al describir un movimiento los vectores base $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ en general cambian de orientación. Las derivadas temporales de ellos son proporcionales a $\hat{\phi}$,

$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi} \hat{\phi}, \quad \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi} \hat{\rho} \quad (1.2.4)$$

como puede verse directamente de (1.2.3). En el caso de un punto móvil las coordenadas dependen general del tiempo: $(\rho(t), \phi(t), z(t))$ y, de los tres vectores unitarios, dos son variables y ellos dependen del ángulo ϕ que es una coordenada que en general depende del tiempo, es decir: $(\hat{\rho}(\phi(t)), \hat{\phi}(\phi(t)), \hat{k})$.

A esto se debe a que al derivar con respecto al tiempo los vectores unitarios se derivan utilizando la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{pero} \quad \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d\hat{\rho}}{d\phi}$$



Con todo lo anterior los vectores de posición, velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas son

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{k} \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{k} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Figura 1.5: El vector posición $\vec{r}$ puede ser expresado como combinación lineal de $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$.

Nótese que el último paréntesis se puede escribir

$$2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) \quad (1.2.6)$$

Todas las cantidades, excepto $\hat{k}$, dependen en general del tiempo, sin embargo, para que la notación no aparezca tan pesada se ha omitido colocar “(t)” en cada factor.

Volviendo al significado de la frase que dice que los “vectores unitarios apuntan, en cada punto P escogido, en la dirección en que una sola de las coordenadas cilíndricas varía” se observa que si se deriva $\vec{r}$, dado en (1.2.5), se obtiene $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$ pero $\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} = \hat{\phi}$ por lo que se obtiene

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

Cada uno de los tres sumandos anteriores contiene la derivada de una de las tres coordenadas cilíndricas. Si se varía una sola coordenada, esa es la única derivada no nula, y $d\vec{r}/dt$ apunta, como se ha dicho, en la dirección del correspondiente vector unitario.

♣ *Estudie el movimiento de un punto P para el cual las coordenadas cilíndricas en todo momento son: $\rho = \rho_0$, $\phi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 t^2$, $z(t) = A\phi(t)$. Obtenga los vectores de velocidad y aceleración y describa la geometría de la trayectoria en detalle.*

1.2.3. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas de un punto P son: la distancia r de P al origen, el ángulo θ que forma $\vec{r}$ con el eje Z y el ángulo ϕ que ya fue definido para coordenadas cilíndricas: (r, θ, ϕ) . Estas coordenadas se relacionan a las coordenadas cartesianas por

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

A estas coordenadas se asocian vectores unitarios y ellos son

$$\begin{aligned} \hat{r} &= (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi) \sin \theta + \hat{k} \cos \theta \\ \hat{\theta} &= (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi) \cos \theta - \hat{k} \sin \theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \end{aligned}$$

Se destaca que

$$\hat{k} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta, \quad \hat{\rho} = \hat{r} \cos \phi + \hat{\phi} \sin \phi = \hat{\theta} \cos \theta + \hat{r} \sin \theta$$

coordenadas	vectores
r, θ, ϕ	$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$

Tal como en el caso anterior, los vectores unitarios básicos dependen del punto que se esté considerando y por tanto ellos, en general, varían con el

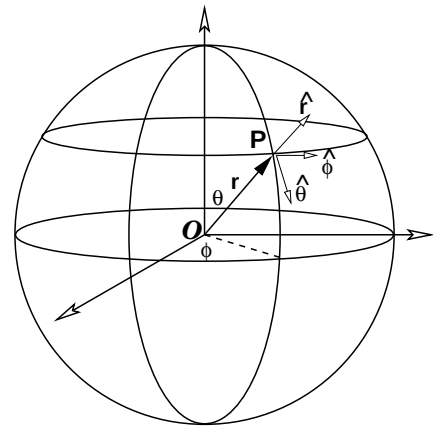


Figura 1.6: La figura representa las coordenadas esféricas y los vectores unitarios asociados.

tiempo. Sus derivadas son

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \dot{\phi} \hat{\phi} \sin \theta + \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \dot{\phi} \hat{\phi} \cos \theta - \dot{\theta} \hat{r} \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi} (\hat{\theta} \cos \theta + \hat{r} \sin \theta)\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

Con lo anterior se puede obtener expresiones para la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas,

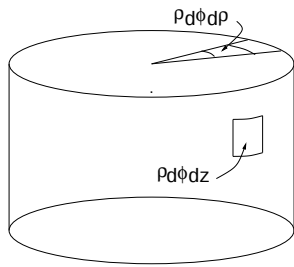
$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \hat{r} & \vec{v} &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \sin \theta + r \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + \frac{(r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta)'}{r \sin \theta} \hat{\phi}\end{aligned}\quad (1.2.9)$$

♣ Compruebe que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{r} \frac{dr}{dt} + \hat{\theta} r \frac{d\theta}{dt} + \hat{\phi} r \sin \theta \frac{d\phi}{dt}$$

♣ Considere un cono con vértice en el origen y eje que coincide con el eje Z y cuyo ángulo de apertura es θ (es decir, las rectas sobre el manto forman ángulo θ con el eje Z). Describa en coordenadas esféricas el movimiento de un punto que baja por el manto de este cono si se sabe que pierde altura a velocidad constante (es decir, la coordenada $z(t)$ satisface $\dot{z} = -v_3$) y que además $\dot{\phi} = \omega_0$. Tome como condición inicial que el punto está sobre el manto con $r(0) = R_0$ y $\phi(0) = 0$.

1.2.4. Elementos de superficie y volumen



En coordenadas cilíndricas un elemento de superficie sobre el manto cilíndrico de radio ρ es

$$dS = \rho d\phi dz \quad (1.2.10)$$

Mientras que el elemento de superficie en un plano perpendicular al eje Z es

$$dS = \rho d\rho d\phi \quad (1.2.11)$$

Figura 1.7: Elementos de superficie en coordenadas cilíndricas.

El elemento de volumen es

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.2.12)$$

El coordenadas esféricas un elemento de superficie sobre un manto esférico de radio r es

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (1.2.13)$$

y el elemento de volumen es

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.2.14)$$

1.3. Velocidad angular

La velocidad angular, $\vec{\omega}$, expresa la tasa de cambio de orientación en el tiempo de un vector posición $\vec{r}$ y el eje en torno al cual ocurre la rotación. Si en un breve lapso el vector posición barre un plano, *el vector velocidad angular* $\vec{\omega}$ se define perpendicular a ese plano. La velocidad angular depende del origen de coordenadas que se escoja y representa tanto la tasa de variación de orientación como también la orientación del eje en torno al cual $\vec{r}$ rota. Ella se puede expresar como el producto cruz entre los vectores posición y velocidad, dividido por el cuadrado de la magnitud de $\vec{r}$,

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{\|\vec{r}\|^2} \quad (1.3.1)$$

Lo anterior se ilustra en el siguiente ejemplo.

Un movimiento uniforme y rectilíneo paralelo al eje X y a distancia b de él es descrito por

$$\begin{aligned} \vec{r} &= b\hat{j} + (x_0 - v_0 t)\hat{i} \\ \Rightarrow \vec{v} &= -v_0\hat{i} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

y se ilustra en la Fig. 1.8,

$$\begin{aligned} x &= x_0 - v_0 t, \quad y = b, \\ \phi &= \arctan \frac{b}{x_0 - v_0 t} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

De los datos dados en (1.3.2) y de la definición de $\vec{\omega}$ se obtiene que

$$\vec{\omega} = \frac{b v_0 \hat{k}}{b^2 + (x_0 - v_0 t)^2} \quad (1.3.4)$$

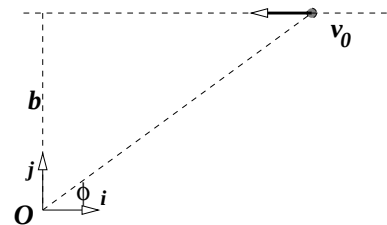


Figura 1.8: Un movimiento rectilíneo y uniforme. La distancia b y la velocidad v_0 son datos.

Por otro lado, se puede calcular $\dot{\phi}$ directamente de observar que

$$\tan \phi = \frac{b}{x_0 - v_0 t}$$

Derivando esta relación con respecto al tiempo se obtiene que $\omega \equiv \dot{\phi}$ vale

$$\omega = \frac{b v_0}{b^2 + (x_0 - v_0 t)^2} \quad (1.3.5)$$

que es coherente con la expresión para la forma vectorial de la velocidad angular, (1.3.4). Nótese que si se hubiera escogido el origen sobre la recta, se tendría que $b = 0$ y se habría obtenido velocidad angular nula. ◀

De lo anterior debiera quedar claro que, en efecto, la velocidad angular depende del origen O respecto al cual se define. Además, la velocidad angular estrictamente es un vector cuya magnitud es $d\phi/dt$ y que apunta en la dirección del eje respecto al cual el punto en movimiento gira visto desde ese origen usando la regla de la mano derecha. En el ejemplo anterior la velocidad angular apunta en la dirección $\hat{k}$, y la *velocidad angular vectorial* en ese ejemplo es $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$.

Un corolario de lo anterior es que si se tiene una función vectorial cualquiera $\vec{A}(t)$ tridimensional, la variación de su orientación en el tiempo se expresa como el siguiente producto cruz,

$$\vec{\omega}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Si se hace el producto cruz de cada miembro de esta igualdad con $\vec{A}$ se obtiene

$$\vec{\omega}_A \times \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}}{\|\vec{A}\|^2} \vec{A}$$

Pero si $\vec{A}$ es una función vectorial que, aun cuando cambia de orientación en el tiempo, su magnitud permanece constante, entonces $\vec{A} \cdot \vec{A} = \text{constante}$ lo que implica que $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$. En tal caso la última ecuación se reduce a

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{A} \quad \Leftarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = \text{constante} \quad (1.3.6)$$

♣ Considere una circunferencia de radio R en el plano XY centrada en un punto del eje X a distancia a del origen. Suponga un punto P que se mueve con rapidez uniforme v_0 sobre esa circunferencia y determine la velocidad angular de P con respecto al origen.

1.4. Rapidez, aceleración centrípeta y tangencial

La trayectoria de un punto P tiene, en cada instante, un vector tangencial $\hat{t}$, un radio de curvatura ρ_C y un vector $\hat{n}$ —el vector normal—que apunta desde la trayectoria hacia el centro de curvatura asociado. Estos conceptos permiten otra descripción del movimiento.

1.4.1. Velocidad y rapidez

Considere la trayectoria de un punto en movimiento y sean A y B las posiciones del punto sobre su trayectoria en instantes t y $t + \Delta t$. Si se denota Δs al largo del arco de trayectoria desde A a B , se define la *rapidez* del punto móvil sobre su trayectoria como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.4.1)$$

que es una cantidad escalar. A continuación se verá la relación que existe entre el concepto de velocidad $\vec{v}(t)$ y el de rapidez $v(t)$. Para definir rapidez se debe dar un sentido (arbitrario) a la forma de recorrer la curva. Por ejemplo, si en la figura se escoge el sentido positivo hacia la derecha, un desplazamiento hacia la derecha se describe con un $\Delta s > 0$ y un desplazamiento hacia la izquierda tiene asociado un $\Delta s < 0$.

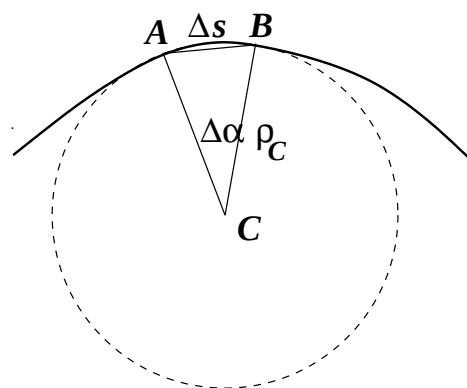


Figura 1.9: Cada punto A de una trayectoria (curva diferenciable) tiene asociado un centro de curvatura C y un radio de curvatura ρ_C . El arco de trayectoria Δs que describe un punto móvil en un pequeño intervalo Δt es $\Delta s = \rho_C \Delta \alpha$ donde $\Delta \alpha$ es el ángulo que subtiende tal arco desde C . La cuerda asociada tiene una longitud que coincide con la magnitud del vector $\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. El ángulo entre la tangente en A a la trayectoria y $\Delta \vec{r}$ es $\frac{1}{2} \Delta \alpha$. En el límite $\Delta t \rightarrow 0$ la tangente al arco en A apunta en la misma dirección que la cuerda.

Se define *radianes* de modo que el largo S de un arco de circunferencia, de radio R —que tiene asociado un ángulo α —sea

$$S = R\alpha \quad (1.4.2)$$

Un pequeño arco AB de una curva se puede aproximar a un arco de circunferencia centrada en un punto C con algún radio ρ_C , tal que el arco subtiende un pequeño ángulo $\Delta\alpha$. La longitud Δs de un arco se relaciona al elemento de ángulo por

$$\Delta s = \rho_C \Delta\alpha \quad (1.4.3)$$

Nótese que el signo de $\Delta\alpha$ es, por definición, igual al signo de Δs . La longitud de la cuerda asociada es $\overline{AB} = 2\rho_C \sin \frac{\Delta\alpha}{2}$ y, puesto que en el límite de ángulo muy pequeño, el seno de un ángulo es aproximadamente igual al ángulo mismo (si $\phi \ll 1 \Rightarrow \sin \phi \approx \phi$) se tiene que en ese límite la longitud de la cuerda sea $\rho_C \Delta\alpha$ y coincide con la longitud del arco. Este resultado sirve, en el párrafo que sigue, para relacionar la magnitud de la velocidad con la rapidez.

Los vectores posición $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t + \Delta t)$ del movimiento de un punto difieren en

$$\frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \approx \vec{v}(t)$$

Tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene que $d\vec{r}(t)/dt = \vec{v}(t)$. Pero en el párrafo anterior se vio que la cuerda, que en este caso tiene longitud $\|\Delta \vec{r}(t)\|$, coincide en el límite en que Δt es infinitesimal, con el arco Δs ,

$$\|\vec{v}\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{r}(t)\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta s(t)|}{\Delta t} = |v(t)|$$

es decir,

$$\|\vec{v}\| = |v| \quad (1.4.4)$$

De (1.4.3) también se sabe que el radio de curvatura de una trayectoria está dado por

$$\rho_C = \frac{ds}{d\alpha} \quad (1.4.5)$$

Sea $\hat{t}$ el vector unitario, tangente a la trayectoria de un punto, que apunta en la misma dirección que $d\vec{r}$, es decir, en la misma dirección que $\vec{v}$, pero no apuntan necesariamente en el mismo sentido. Se escoge como definición que

el vector unitario $\hat{t}$ apunte en el sentido en el cual crece la función arco $s(t)$, de tal modo que

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{t} \quad (1.4.6)$$

En resumen, la velocidad es siempre tangencial a la trayectoria y la magnitud de la velocidad coincide con el valor absoluto de la rapidez.

♣ En un parque de diversiones hay un juego que consiste en disparar a un blanco móvil que se desplaza a velocidad constante $\vec{v}_1$ a lo largo de una recta L . Se sabe que los proyectiles salen desde el sitio D de disparo con rapidez v_0 . Si en el instante en que se hace el disparo el blanco está al pie de la perpendicular—de largo b —que va de D a L , ¿con qué ángulo se debe hacer el disparo para dar en el blanco?

1.4.2. Coordenadas intrínsecas

1.4.2.1. Los vectores $\hat{t}$ y $\hat{n}$.

Puesto que el vector $\hat{t}$ es unitario

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = 1 \quad \text{implica} \quad \hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{dt} = 0 \quad (1.4.7)$$

se deduce que el vector $d\hat{t}/dt$ es ortogonal a $\hat{t}$. La Fig. 1.10 debiera ayudar a ver que este vector apunta hacia el centro de curvatura. Se denominará $\hat{n}$ —vector normal—al vector unitario que apunta hacia el centro de curvatura. Ya se argumentó que la magnitud de cuerda y arco, en el caso en que estos sean muy pequeños, coincide y además se vio en (1.4.3) que ese arco es igual al radio multiplicado por el elemento de ángulo. Puesto que $\hat{t}$ es unitario, al rotar describe un arco de radio unitario y por tanto la cuerda asociada, que tiene la magnitud de $\hat{t}$, es 1 multiplicado por el elemento de ángulo, es decir, $\|d\hat{t}\| = d\alpha$. Usando (1.4.5) se obtiene que

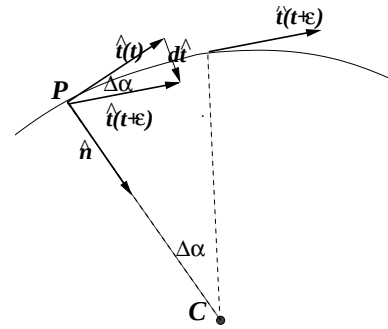


Figura 1.10: El vector $d\hat{t} = \hat{t}(t + \epsilon) - \hat{t}(t)$ donde ϵ es un tiempo muy pequeño, es un vector que, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, apunta hacia el centro de curvatura C . En la figura el vector $\hat{t}(t + \epsilon)$ ha sido trasladado al punto correspondiente al tiempo t para poder hacer la diferencia geoméricamente.

$$d\hat{t} = \hat{n} d\alpha = \frac{ds}{\rho_C} \hat{n} \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho_C} \hat{n} \quad (1.4.8)$$

1.4.3. Aceleración centrípeta y tangencial

La aceleración es la derivada de la velocidad,

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v(t)\hat{t})}{dt} \\ &= v(t)\frac{d\hat{t}}{dt} + \frac{dv(t)}{dt}\hat{t}\end{aligned}\quad (1.4.9)$$

El último término en esta expresión es la parte de la aceleración que es tangencial a la trayectoria y se la llama *aceleración tangencial*. El primer término a la derecha es

$$v(t)\frac{d\hat{t}}{dt} = v(t)\frac{ds}{dt}\frac{d\hat{t}}{ds}\quad (1.4.10)$$

pero $ds/dt = v(t)$ y $d\hat{t}/ds = \hat{n}/\rho_C$ por lo que la aceleración se puede escribir

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{v^2(t)}{\rho_C}\hat{n} + \frac{dv(t)}{dt}\hat{t} \\ &= \vec{a}_n(t) + \vec{a}_t(t)\end{aligned}\quad (1.4.11)$$

El primer término es un vector que apunta hacia el centro de curvatura y se lo conoce como *aceleración centrípeta*. El segundo es la *aceleración tangencial*.

♣ Demuestre que el radio de curvatura es igual a

$$\rho_C = \frac{v^2}{\|\hat{t} \times \vec{a}\|} = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}\quad (1.4.12)$$

EJEMPLO: Se tiene un punto en movimiento en un plano cuya trayectoria es descrita por una circunferencia:

$$\vec{r} = R_0 (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi), \quad \phi = \phi(t)\quad (1.4.13)$$

Diferenciando se obtiene

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R_0 (-\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi) \frac{d\phi}{dt}\quad (1.4.14)$$

cuya magnitud es

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = R_0 \frac{d\phi}{dt} = \frac{ds}{dt}\quad (1.4.15)$$

En este caso el vector tangencial es

$$\hat{t} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \quad (1.4.16)$$

De aquí se puede calcular $d\hat{t}/ds$ porque de (1.4.5) ya se sabe que $d\phi/ds = 1/\rho_C$, y en el presente caso es $\rho_C = R_0$, y se obtiene

$$\hat{n} = -\hat{i} \cos \phi - \hat{j} \sin \phi \quad (1.4.17)$$

Para poder calcular la velocidad y la aceleración es necesario dar la dependencia del vector posición en el tiempo. Supongamos el caso particular en que el ángulo varía linealmente con el tiempo, $\phi = \omega t$, es decir, hay una *velocidad angular* constante: $\dot{\phi} = \omega$. En tal caso, tal como ya se sabe de (1.4.6), la velocidad es tangente a la trayectoria y

$$\vec{v} = \omega R_0 \hat{t} \quad (1.4.18)$$

de donde la rapidez resulta constante: $v = \omega R_0$.

Se puede ver también que en este caso particular la aceleración tangencial es nula debido a que la rapidez es constante. La aceleración centrípeta es

$$\vec{a}_n(t) = \frac{\omega}{R_0} (-\hat{i} \cos \omega t - \hat{j} \sin \omega t) \quad (1.4.19)$$

que apunta siempre hacia el centro. ◀

➤ *Pilotos entrenados pueden soportar aceleraciones de hasta 4g por períodos cortos. En una maniobra de menos de un segundo pueden soportar hasta 9g. Si se somete a una persona a aceleraciones de entre 4g y 9g por un período de varios segundos el resultado puede ser muy grave, con pérdida de conciencia e incluso la muerte*

♣ *Si un automóvil toma una curva de 50 metros de radio (aproximadamente media cuadra) a 24 metros por segundo, ¿cuánto vale la aceleración centrípeta? ¿Es una fracción de g o es mayor que g?*

♣ *Si un avión va a dos veces la velocidad del sonido y gira describiendo un arco de circunferencia, ¿cuál es el valor mínimo que puede tener ese radio si la aceleración máxima que soporta el piloto es 5g?*

- ♣ Considere el movimiento de un punto que describe la trayectoria plana

$$\vec{r} = \rho_0 (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi) + \hat{i} \beta \phi \quad (1.4.20)$$

con $\phi = \omega t$. Tanto ρ_0 como β son constantes dadas. Determine $ds/d\phi$, y por tanto ds/dt ; calcule el vector tangente unitario $\hat{t}(t)$ en función del tiempo; obtenga el vector velocidad en cualquier instante t y también calcule la aceleración $\vec{a}(t)$ e indique los valores de las partes centrípeta y tangencial.

- ♣ Un disco de radio R rueda sin resbalar por un suelo horizontal (el eje de rotación de la rueda es horizontal). Su centro O tiene aceleración constante $\vec{a} = a_0 \hat{i}$. Encuentre la magnitud de la velocidad angular con respecto a O y obtenga la aceleración de cualquier punto P sobre el borde del disco, relativa al suelo. Encuentre los vectores $\hat{t}$ y $\hat{n}$ de la trayectoria de P como función del ángulo ϕ que OP forma con la vertical. Obtenga la magnitud de la aceleración centrípeta y el radio de curvatura de la trayectoria de P .

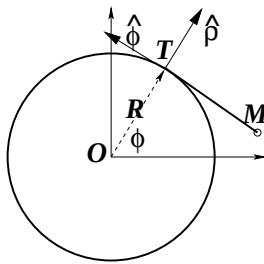


Figura 1.11: Un hilo ideal es desenrollado de un cilindro de radio R

- ♣ Un hilo de grosor nulo está enrollado en una circunferencia de radio R manteniendo tensa la punta libre M . La parte no enrollada siempre es tangente a la circunferencia y el punto T de tangencia está totalmente determinado por el ángulo polar ϕ . El hilo está siendo desenrollado por medio de un mecanismo que hace que ϕ cambie en el tiempo en la forma: $\phi = \frac{\alpha}{2} t^2$, donde α es un número dado. Calcular la ecuación paramétrica de la trayectoria del extremo M libre del hilo sabiendo que inicialmente la parte libre era de largo L_0 y colgaba verticalmente. Obtenga las componentes de la velocidad y la aceleración expresada con los vectores unitarios $\hat{\phi}$ y $\hat{\rho}$. Obtenga los vectores tangente $\hat{t}$ y normal $\hat{n}$ de la trayectoria que describe M cuando ϕ crece. También obtenga, para cada punto de la trayectoria el radio de curvatura.

Indicaciones: La posición de T siempre es $\vec{r}_T = R\hat{\rho}$ y la posición de M puede escribirse como $\vec{r}_M = \vec{r}_T - L(t)\hat{\phi}$, donde $L(t)$ es el largo variable de T a M . También hay que tomar en cuenta que si en un intervalo el punto T recorre una distancia s , en ese intervalo la longitud $L(t)$ crece en esa misma cantidad s .

1.5. Movimientos particulares

A continuación se presentan algunos movimientos particulares $\vec{r}(t)$ que se pueden obtener a partir de datos específicos.

1.5.1. Movimiento uniforme

Un caso muy sencillo es el del movimiento uniforme, en el cual la velocidad es uniforme y por tanto la aceleración es nula, $\vec{a} = 0$. Si se dan como datos la posición $t = t_0$ y que para todo instante

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

se puede invertir la definición de velocidad y obtener que

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \int_{t_0}^t dt' = \vec{r}_0 + (t - t_0) \vec{v}_0 \quad (1.5.1)$$

1.5.2. Movimiento con aceleración constante

Esta vez se da como dato que la aceleración es

$$\vec{a}(t) = \vec{g}$$

y además que la posición en un instante t_0 es $\vec{r}_0$ y que la velocidad en un instante t_1 es $\vec{v}_1$.

Integrando la definición de aceleración se obtiene que

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1 + (t - t_1) \vec{g} \quad (1.5.2)$$

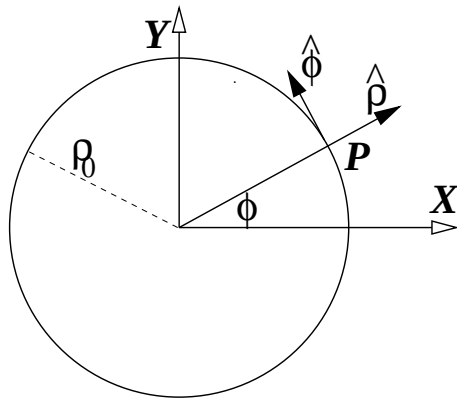
Una vez conocida la velocidad se calcula la posición en un instante arbitrario integrando una vez más

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' \\ &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t (\vec{v}_1 + \vec{g}(t' - t_1)) dt' \\ &= \vec{r}_0 + (t - t_0) \vec{v}_1 + \left(\frac{t^2 - t_0^2}{2} - (t - t_0) t_1 \right) \vec{g} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Si tanto t_0 como t_1 son nulos y $\vec{v}_1$ es denotada $\vec{v}_0$, la expresión anterior se reduce sencillamente a

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}_0 + \frac{t^2}{2}\vec{g} \quad (1.5.4)$$

1.5.3. Movimiento circunferencial



El movimiento circunferencial general de un punto P está caracterizado por el radio fijo ρ_0 de la circunferencia descrita por el punto y por la velocidad angular $\omega(t) = \dot{\phi}$ de P . En este caso los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas (*coordenadas polares* en este caso) son

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \rho_0 \hat{\rho}(t) \\ \vec{v}(t) &= \rho_0 \omega(t) \hat{\phi} \\ \vec{a}(t) &= \rho_0 [\alpha(t) \hat{\phi}(t) - \omega^2(t) \hat{\rho}(t)] \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Figura 1.12: Un movimiento circunferencial de radio ρ_0 se describe por la velocidad angular $\omega(t) \equiv \dot{\phi}(t)$.

la velocidad angular es $\omega(t)$ y $\alpha(t)$ es la *aceleración angular*

$$\omega(t) = \dot{\phi}(t) \quad \alpha(t) = \dot{\omega}(t) \quad (1.5.6)$$

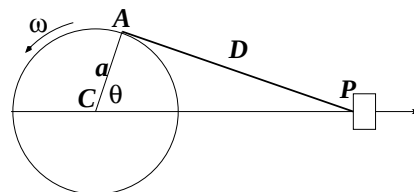
La expresión para $\vec{a}$ dada arriba queda naturalmente separada en un término radial de *aceleración centrípeta*, $-\rho_0 \omega^2 \hat{\rho}$ y un término de *aceleración tangencial*, $\rho_0 \alpha(t) \hat{\phi}$.

1.6. Problemas

1.1 Por la orilla se una mesa rueda sin deslizar una rueda de radio R_1 con velocidad angular constante ω . Esta rueda tiene pegada en forma radial una varilla de largo R_2 ($R_2 > R_1$). Describa el movimiento de la punta de la varilla (distancia R_2 del centro de la rueda) a medida que la rueda avanza. Dibuje la curva (x - z) que describe la trayectoria de este punto. Dibuje la componente horizontal, v_x de la velocidad de la punta como función del tiempo, en particular incluya el caso en que $R_2 = R_1$.

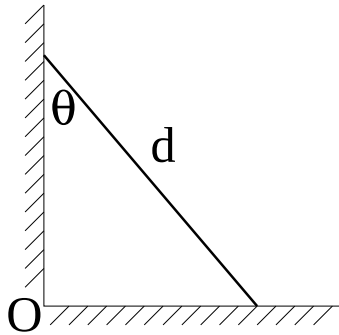
1.2 Un globo asciende desde la superficie terrestre con velocidad vertical uniforme v_0 . Debido al viento, el globo adquiere una componente horizontal de velocidad que crece con la altura: $v_z = \alpha z$, donde α es una constante conocida y z es la altura sobre el terreno. Escogiendo el origen de coordenadas en el punto de partida determine: a) La trayectoria del globo; b) la componente tangencial y normal de la aceleración en función de la altura z .

1.3 El punto de unión P entre un pistón y una biela de largo D se mueve a lo largo del eje X debido a que el cigüeñal (disco) de radio a y centro en un punto fijo C , rota a velocidad angular ω constante. En el instante $t = 0$ la biela está horizontal



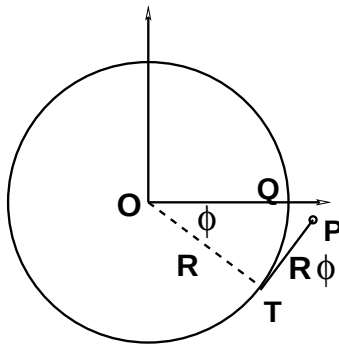
($\theta = 0$, $x = D + a$). a) Encuentre una expresión para la distancia $x(t)$ entre P y C como función de t . b) Encuentre la velocidad $v(t)$ de P . c) En la expresión para $v(t)$ considere el caso $a \ll D$ y de ahí encuentre una expresión aproximada para la aceleración de P . ¿Cómo se compara la magnitud de la aceleración máxima del pistón con la aceleración del punto A ?

1.4 Una barra rígida de largo d se mueve apoyada entre dos paredes rígidas, que forman un ángulo recto entre ellas.



Si el ángulo θ es una función arbitraria del tiempo $\theta = \theta(t)$, (a) Determine el vector posición, velocidad y aceleración del punto medio de la barra. (b) El radio de curvatura de una trayectoria se calcula como $\rho = v^3 / \|\vec{v} \times \vec{a}\|$. Calcule el radio de curvatura de esta trayectoria. Interprete el resultado y dibuje la trayectoria. (c) Suponga ahora que el apoyo inferior de la barra se mueve con rapidez constante. Encuentre la función $\theta(t)$ que da lugar a ese movimiento.

1.4 Un hilo es desenrollado de un carrete de radio R .



Esto hace que la punta P del hilo describa una curva espiral que nace en el punto Q de la circunferencia que está a la misma altura que el centro O . El ángulo que forma la recta OQ con la recta OT —donde T es el punto de tangencia T del hilo—se denota ϕ . (a) Encuentre $\vec{r}(\phi)$, $\vec{v}(\phi, \dot{\phi})$.

(b) Demuestre que la velocidad angular de P es

$$\vec{\omega} = \frac{\phi^2 \dot{\phi}}{1 + \phi^2} \hat{k}$$

(c) Si la velocidad angular se expresa en la forma $\vec{\omega} = \dot{\alpha} \hat{k}$, encuentre α

(d) Dibuje la trayectoria espiral.

1.5 Un punto se mueve ascendiendo por el manto de un cono de eje vertical, y vértice abajo, de tal modo que asciende a medida que gira en torno al eje: $z = A\phi$. El cono mismo se caracteriza por que las rectas sobre su manto que contienen al vértice forman un ángulo fijo θ con el eje. Describa el movimiento (los vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$) suponiendo que $\phi(t)$ es una función arbitraria. Calcule también la curvatura de la trayectoria como función de z y de θ .

1.6 Considere una partícula rebotando contra el suelo. Si llega al suelo con velocidad v ($v < 0$), despegue con velocidad $v' > 0$ dada por

$$v' = -rv \quad \text{con} \quad 0 < r < 1$$

donde r es el coeficiente de resitación.

De este modo si inicialmente golpea el suelo y despegas, cuando $t = 0$ con velocidad v_0 luego siguen botes en que la partícula despegas del suelo con velocidades $v_1, v_2 \dots$

a) ¿En qué instante t_n ocurre el n -ésimo bote?

b) Exprese este tiempo en términos de v_0, r, n y la aceleración de gravedad g . Demuestre que si n tiende a infinito en valor de t_n tiende a un valor finito, que llamaremos t_* .

c) Despeje n de la expresión para $t^* - t_n$ y haga un gráfico $\log(n)$ versus t_n , lo que debe mostrar como aumenta el logaritmo del número de botes en el tiempo.

Capítulo 2

Dinámica

2.1. Momentum lineal, fuerza y leyes de Newton

2.1.1. De Galileo a Newton

Galileo observó—a fines del siglo XVI—que cuerpos inicialmente en reposo, soltados desde la misma altura caen con movimiento uniformemente acelerado y esa aceleración es común a todos los cuerpos. Tal aceleración se denomina *aceleración de gravedad*. Si un cuerpo es soltado con velocidad inicial nula desde una altura z_0 sobre el suelo su altura posterior, como función del tiempo, es

$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

sin importar cual sea la masa del cuerpo. De lo anterior resulta que la aceleración es $\ddot{z} = -g$. Deduzca que el cuerpo llega al suelo con rapidez $\dot{z} = -\sqrt{2z_0g}$ donde el signo menos, en este caso, expresa que la velocidad es hacia abajo.

La *cantidad de movimiento* o *momentum lineal* $\vec{p}$ de una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ es

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) \tag{2.1.1}$$

La masa de un cuerpo es normalmente una cantidad fija y se mide en kilogramos y, salvo que específicamente se diga lo contrario, se supondrá que la masa de un cuerpo es constante.

» Sin embargo hay casos en que la masa varía. Un ejemplo muy típico es el de un cohete que está expulsando parte de su masa, en forma de gases, para poder impulsarse.

Para percibir la cantidad de movimiento se puede experimentar dejando caer desde el reposo dos cuerpos desde la misma altura. Al recibirlos en nuestras manos y tratar de detenerlos es necesario un “mayor esfuerzo” cuando la masa del cuerpo es mayor. La razón de este mayor esfuerzo reside en que para detener el cuerpo, es decir, para hacer variar su momentum lineal desde el valor que tiene hasta cero, es necesario aplicar una fuerza.

Newton estableció que la relación general entre la variación del momentum (esto es $d\vec{p}/dt$) y la fuerza total aplicada es

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}^{\text{total}} \quad (2.1.2)$$

que se conoce como la *II ley de Newton*.

Un caso especial es que no haya fuerza alguna aplicada. En tal caso $d\vec{p}/dt = 0$ lo que implica que el momentum permanece constante en el tiempo. Esto implica, si la masa es constante, que la velocidad del cuerpo no cambia y por tanto la trayectoria es rectilínea. Esta es la *I ley de Newton*. Un caso aun más especial es el de un cuerpo en reposo.

Inversamente, si un cuerpo tiene velocidad constante, entonces la fuerza total sobre ese cuerpo necesariamente es nula.

En (2.1.2) la fuerza es la *fuerza total*. Sobre un cuerpo pueden estar actuando muchas fuerzas simultáneamente y el lado derecho en (2.1.2) es la suma vectorial de todas las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo.

Luego de hacer una serie de experimentos, el italiano Galileo Galilei determinó que cuerpos de distinto peso y forma caen con la misma aceleración. (*Antes que Galileo, el fraile dominico Domingo de Soto (España, s. XVI) había afirmado lo mismo, pero no está establecido si fue una hipótesis filosófica o si se basó en evidencia experimental.*) Esto echó por tierra la creencia establecida por Aristóteles (384BC - 322 BC) de que los cuerpos más livianos caen más lentamente. La ley de Galileo es estrictamente válida en ausencia de aire y es aproximadamente válida para cuerpos que tienen la forma o el peso que permiten despreciar la fuerza viscosa del aire.

Puesto que la aceleración de gravedad es muy grande, es decir, un cuerpo alcanza una velocidad muy alta en un corto tiempo, Galileo hizo experimentos con cuerpos rodando por un plano inclinado.

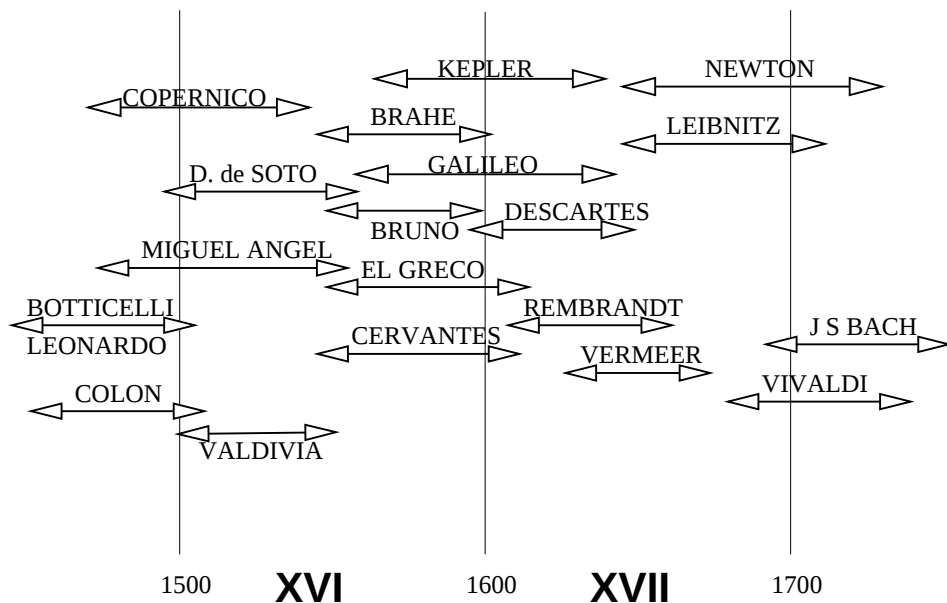


Figura 2.1: Los años en que vivieron algunos de los fundadores de la Mecánica y algunos personajes destacados en otras áreas.

» Cuando un mozo lleva un vaso sobre una bandeja hay varias fuerzas actuando sobre ese vaso: su peso, $m\vec{g}$; una fuerza, llamada *normal* que la bandeja ejerce sobre el vaso y que es perpendicular a la superficie de contacto; otra fuerza, esta vez contenida en el plano de contacto, llamada *roce* que impide que el vaso deslice en la bandeja; también el aire ejerce una *fuerza viscosa* sobre el vaso, porque todo fluido (el aire, por ejemplo) tiende a frenar a un cuerpo que se mueve en él. La lista se podría continuar (la luna, el sol etc).

La *III ley de Newton* dice que si el cuerpo *A* ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre un cuerpo *B*, entonces el cuerpo *B* ejerce una fuerza $-\vec{F}$ sobre el cuerpo *A*.

» Un cuerpo en reposo sobre una mesa ejerce sobre ella su fuerza peso $\vec{F} = m\vec{g}$, la que apunta verticalmente hacia abajo. Según la *III ley de Newton*, la mesa ejerce sobre el cuerpo una fuerza, llamada *normal*, sobre el cuerpo, la que vale $\vec{N} = -m\vec{g}$, la cual apunta verticalmente hacia arriba. Puesto que sobre el cuerpo está además la atracción que le ejerce la Tierra (el peso), entonces la fuerza total sobre este cuerpo es nula, lo que permite entender porqué está en reposo.

Normalmente las leyes de Newton se asocian a sistemas de referencia llamados *sistemas de referencia inerciales*. Un ejemplo de sistema de referencia no inercial es un vehículo describiendo una curva. Un cuerpo dejado en reposo respecto al vehículo tiende a moverse alejándose del centro de curvatura. Más adelante se dirá que en sistemas de referencia no inerciales aparecen fuerzas especiales como es la *fuerza centrífuga* y la *fuerza de Coriolis*. Genéricamente se denominará pseudofuerzas a estas fuerzas propias de los sistemas no inerciales. Pero en un sistema de referencia inercial no se presentan tales fuerzas.

2.1.2. Pequeña historia

En 1687 Newton publicó su "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" ("Principios matemáticos de la filosofía natural"). En este libro Newton presenta las bases de prácticamente toda la mecánica. Plantea sus tres leyes de movimiento y también la "ley universal de gravitación", bases que perdurarían sin contrapeso por tres siglos. Sus resultados no habrían sido posibles sin que lo precedieran los trabajos de Kepler, Galileo y otros.

Como parte de este trabajo se vio forzado a desarrollar el cálculo diferencial e integral, que simultáneamente desarrolló Leibnitz. Logró demostrar que para que una fuerza atractiva dé origen a órbitas elípticas—como lo estableció Kepler en su primera ley—la fuerza debe decrecer con el cuadrado de la distancia.

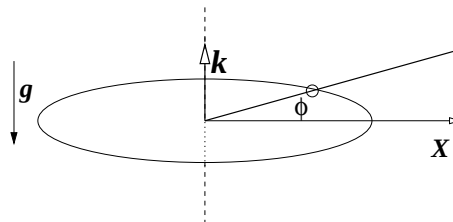
2.1.3. Ejemplos de fuerzas

A continuación se hará mención de algunas fuerzas que se utilizan en el presente capítulo y en los que siguen. Las fuerzas que se describen a continuación serán explicadas con más detalle más adelante.

- o **Peso**. Sobre un cuerpo de masa m cerca de la superficie de la Tierra actúa una fuerza cuya magnitud es mg y apunta "hacia abajo".
- o **Gravitacional**. La Ley Universal de Gravitación describe la fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos masivos.

- o **Coulomb.** Cargas eléctricas se repelen o atraen, según la Ley de Coulomb, dependiendo del signo relativo entre las cargas.
- o **Contacto.** En cada punto en que dos cuerpos A y B están en contacto sólido-sólido aparece una fuerza $\vec{F}_{AB}$ sobre A debido al contacto con B (y lo mismo sobre B debido a A). Si se define el plano tangente al contacto, la fuerza $\vec{F}_{AB}$ puede ser descompuesta en forma única en la suma de dos fuerza: una perpendicular al plano de contacto y otra paralela a él. Estas dos fuerzas se denominan *fuerza normal* y *fuerza de roce*.
 - **Normal.** Si un cuerpo está apoyado sobre una superficie, la superficie ejerce una fuerza sobre el cuerpo que corresponde a la reacción debido a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la superficie. La normal es una fuerza perpendicular a la superficie de contacto.
 - **Roce.** Un cuerpo apoyado sobre una superficie puede ejercer una fuerza paralela a la superficie de contacto. Si la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie es nula se tiene la fuerza de roce estático y si la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie no es nula se tiene una fuerza de roce dinámico.

Otras fuerzas serán introducidas más adelante. Por el momento se subraya que si un cuerpo está apoyado en una superficie y no hay roce entre ambos, entonces la única fuerza sobre el cuerpo debido a este contacto es la fuerza normal.



2.1.4. Ejemplo de argolla en una vara horizontal que gira

Consideremos el caso de una argolla que puede deslizar, libre de roce, a lo largo de una vara y esta vara gira barriendo un plano horizontal con velocidad angular $\dot{\phi} = \omega$ constante.

El problema será descrito con coordenadas cilíndricas y los vectores base asociados son $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ de tal forma que $\hat{k}$ da la dirección del eje de rotación.

Figura 2.2: Una argolla que puede deslizar libremente, sin roce, a lo largo de una varilla y la varilla gira barriendo con velocidad angular uniforme $\dot{\phi} = \omega$ un plano horizontal. argolla

Tal como cualquier vector, la fuerza total de contacto sobre la argolla, puede expresarse con los vectores base:

$$\vec{F}_{\text{cont}} = f_1 \hat{\rho} + f_2 \hat{\phi} + f_3 \hat{k}$$

pero la componente en la dirección $\hat{\rho}$ representaría roce—ya que es la dirección en la que puede haber movimiento—por lo cual se debe exigir que $f_1 = 0$. Lo que resta, $\vec{N} = f_2 \hat{\phi} + f_3 \hat{k}$ es normal a la vara y por lo tanto es la llamada *fuerza normal*. Las fuerzas sobre la argolla son: su propio peso $\vec{P} = -mg\hat{k}$ y la fuerza normal $\vec{N}$, ya mencionada, que la varilla ejerce sobre la argolla. Para hacer más evidente el significado de las componentes de $\vec{N}$, las renombramos: $f_2 = N_\phi$ y $f_3 = N_k$ de modo que se escribe

$$\vec{N} = N_k \hat{k} + N_\phi \hat{\phi} \quad (2.1.3)$$

Puesto que la argolla no tiene movimiento vertical, la fuerza total en esa dirección debe ser nula, es decir, $N_k \hat{k} + \vec{P} = 0$, que implica: $N_k = mg$.

Las condiciones que definen el movimiento son

$$\dot{\phi}(t) = \omega, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot{\rho}(0) = 0 \quad (2.1.4)$$

y, puesto que el movimiento ocurre en un plano horizontal, la aceleración—ver (1.2.5)—tiene la forma,

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} \quad (2.1.5)$$

El plantear la II ley de Newton en coordenadas cilíndricas se puede separar en una componente radial y otra en la dirección de $\hat{\phi}$ lo que da lugar a dos ecuaciones escalares

$$m(2\dot{\rho}\omega) = N_\phi \quad (2.1.6)$$

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0 \quad (2.1.7)$$

Al integrar la segunda ecuación se obtiene

$$\rho(t) = \rho_0 \cosh(\omega t) \quad (2.1.8)$$

que da la forma explícita del movimiento a lo largo de la vara. Este resultado dice que ρ cambia con el tiempo y su variación está relacionada a un coseno hiperbólico. Esto implica, de (2.1.6), que N_ϕ no es nulo.

Al usar la forma de $\rho(t)$, obtenida en (2.1.8), en (2.1.6) se obtiene la expresión para N_ϕ ,

$$N_\phi = 2m\omega^2\rho_0 \sinh(\omega t) \quad (2.1.9)$$

Lo que se ha deducido es que la argolla se mueve deslizándose a lo largo de la varilla alejándose del eje de rotación. Su distancia al centro de giro, $\rho(t)$, aumenta exponencialmente con el tiempo. En efecto, para tiempos muy grandes $\cosh(\omega t) \approx \frac{1}{2} \exp[\omega t]$.

Si se intenta reproducir la situación descrita en un experimento se debe tomar una argolla y una vara tal que haya roce insignificamente pequeño entre ambos. Con un motor controlado automáticamente se mantendría uniforme la velocidad angular ω . Descubriríamos, sin embargo, que llegaría un momento en que el motor no sería capaz de mantener constante la velocidad angular, porque la fuerza normal que la vara debe ejercer sobre la argolla es demasiado grande ya que la componente N_ϕ crece exponencialmente. En algún momento se sobrepasa la capacidad del motor.

2.1.5. Ecuaciones lineales

En algunos casos la ecuación de movimiento toma la forma de una ecuación lineal inhomogénea con coeficientes constantes,

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x + \delta = 0 \quad (2.1.10)$$

La solución general—antes de imponer condiciones iniciales—implica dos constantes de integración que acá se han denotado A y B y es

$$x(t) = -\frac{\delta}{\gamma} + e^{-\beta t/2} \begin{cases} A \sinh\left(\frac{t}{2} \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}\right) + B \cosh\left(\frac{t}{2} \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}\right), & \beta^2 > 4\gamma \\ A \sin\left(\frac{t}{2} \sqrt{4\gamma - \beta^2}\right) + B \cos\left(\frac{t}{2} \sqrt{4\gamma - \beta^2}\right), & 4\gamma > \beta^2 \end{cases} \quad (2.1.11)$$

- Caso especial 1: Si $\gamma \equiv 0$ la solución general adopta la forma

$$x(t) = \frac{1}{\beta} (Ae^{-\beta t} - \delta t) + B \quad (2.1.12)$$

- Caso especial 2: Si $4\gamma = \beta^2$ la solución es

$$x(t) = Ae^{-\beta t/2} + Bte^{-\beta t/2} - \frac{4\delta}{\beta^2} \quad (2.1.13)$$

2.2. Muchas partículas

2.2.1. Caso discreto

Se considera un sistema de N partículas puntuales de masas m_a , $a = 1, 2, \dots, N$, de posiciones $\vec{r}_a$, velocidades $\vec{v}_a$ y aceleraciones $\vec{a}_a$. La suma de las masas se denotará M

$$M = \sum_{a=1}^N m_a \quad (2.2.1)$$

y G será la forma para designar el *centro de masa*. La posición y la velocidad de G son

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \vec{r}_a \quad \vec{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a \quad (2.2.2)$$

Nótese que el momentum del sistema de partículas es

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = M \vec{V}_G \quad (2.2.3)$$

Cada partícula satisface una ecuación de Newton

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_1 \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2 \\ &\dots \\ m_N \frac{d\vec{v}_N}{dt} &= \vec{F}_N \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Al sumar todas estas ecuaciones se obtiene

$$M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}^{\text{total}} \quad \text{donde} \quad (2.2.5)$$

$$\vec{F}^{\text{total}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (2.2.6)$$

es decir, la variación del momentum total del sistema está dado por la fuerza total que actúa sobre el sistema. Un poco más abajo se verá que esta fuerza total se debe exclusivamente a las fuerzas externas al sistema.

La ecuación del centro de masa del sistema puede también escribirse

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\text{total}} \quad (2.2.7)$$

La fuerza que ha sido llamada $\vec{F}_a$ es la fuerza total sobre la a -partícula y puede descomponerse en la suma de las fuerzas que le ejercen las otras partículas del sistema, que llamaremos $\vec{f}_a^{\text{int}}$ más la suma de las fuerzas externas $\vec{f}_a^{\text{ext}}$ que actúan sobre la partícula a ,

$$\vec{F}_a = \vec{f}_a^{\text{ext}} + \vec{f}_a^{\text{int}} \quad (2.2.8)$$

A su vez $\vec{f}_a^{\text{int}}$ está compuesta de las fuerzas $\vec{F}_{ab}$ que cada partícula b ejerce sobre a ,

$$\vec{f}_a^{\text{int}} = \sum_{b=1, b \neq a}^N \vec{F}_{ab} \quad (2.2.9)$$

donde debe entenderse que la fuerza que una partícula ejerce sobre sí misma es nula,

$$\vec{F}_{bb} \equiv 0 \quad (2.2.10)$$

Siempre se va a suponer que la fuerza $\vec{F}_{ab}$ entre dos partículas puntuales es paralela a la línea que une ambos puntos.

A continuación se argumenta, a partir de (2.2.6), que las fuerzas internas no contribuyen a la fuerza total. En efecto, al calcular la contribución de las fuerzas internas a la fuerza total se obtiene

$$\sum_{a=1}^N \vec{f}_a^{\text{int}} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \vec{F}_{ab} \quad (2.2.11)$$

pero por cada sumando $\vec{F}_{ab}$ hay otro que es $\vec{F}_{ba}$ y el principio de acción y reacción establece que $\vec{F}_{ba} = -\vec{F}_{ab}$, lo que determina que la suma anterior sea nula. En resumen,

$$\vec{F}^{\text{total}} = \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (2.2.12)$$

y por tanto la ecuación de movimiento para el centro de masa G del sistema es

$$M \frac{dV_G}{dt} = \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}} \quad (2.2.13)$$

Corolario: si sobre un sistema de partículas no están actuando fuerzas externas, el centro de masa se mueve con velocidad uniforme.

- ♣ *Estudie el movimiento del centro de masa del sistema compuesto por dos partículas masivas unidas por un hilo tenso, que rotan en torno a su centro de masa y están en vuelo libre en presencia de gravedad $\vec{g}$.*

2.2.2. Caso continuo

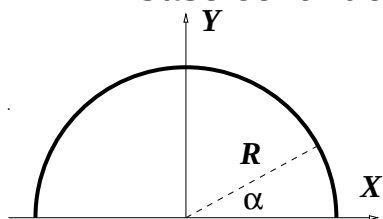


Figura 2.3: Un alambre semicircular con densidad lineal de masa $\lambda = \frac{M}{\pi R}$.

Es posible generalizar la descripción de sistemas de muchas partículas al caso de sistemas continuos. Esta idea se ilustra a continuación.

Se considera un alambre semicircular de radio R y densidad lineal $\lambda = \frac{M}{\pi R}$ centrado en el origen como lo muestra la figura 2.3. En un caso continuo se reemplaza la suma sobre el índice a por una integral. Así, entonces, en lugar de $M = \sum_a m_a$ se debe escribir

$$M = \int \lambda ds$$

donde $ds = R d\alpha$ es el elemento de arco. Puesto que en este ejemplo la densidad λ es una constante, la integral sobre α desde 0 a π es sencilla y da el resultado correcto. La expresión (2.2.2) para determinar la posición del centro de masa se generaliza en la forma

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

donde $dm = \lambda ds = \frac{M}{\pi R} R d\alpha = \frac{M}{\pi} d\alpha$. Por otro lado, el vector $\vec{r}$ que recorre la semicircunferencia es $\vec{r} = R(\hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \sin \alpha)$. Al integrar en $\alpha \in [0, \pi]$, el término $\cos \alpha$ da cero y el término $\sin \alpha$ da 2, por lo cual

$$\vec{R}_G = \frac{2R}{\pi} \hat{j} \approx 0,64 R \hat{j}$$

- ♣ *Haga un cálculo similar pero para el caso de una lámina semicircular de radio R . Ayuda: ahora la densidad es masa por unidad de superficie, $\sigma = M/(2\pi R^2)$ y se debe*

integrar un elemento de área: $dS = R d\rho d\alpha$, integrando tanto en $\rho \in [0, R]$ como en $\alpha \in [0, \pi]$.

2.3. Momento Angular y Torque

2.3.1. Ecuaciones generales

Así como el momentum lineal es una medida de la cantidad de movimiento de traslación, el *momento angular*, $\vec{\ell}_O$, es—en cierto modo—la cantidad de movimiento de rotación *en torno a un punto* O . Formalmente se define como la suma de los productos cruz entre los vectores de posición y sus respectivos momentos lineales

$$\vec{\ell}_O(t) = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{p}_a(t) \quad (2.3.1)$$

Por ejemplo, en el caso de la figura 1.8 (caso de una sola partícula), $\vec{r} = b\hat{j} + \hat{i}v_0 t$ y el momentum es $\vec{p} = m v_0 \hat{i}$, por lo que el momento angular del ejemplo es $\vec{\ell}_O = -m b v_0 \hat{k}$.

♣ Calcule el momento angular $\vec{\ell}_O$ de una partícula que gira con velocidad angular uniforme en torno al punto O describiendo una circunferencia de radio R .

Por su propia definición el momento angular de una sola partícula “1” apunta en una dirección que es perpendicular al plano que definen $\vec{r}_1$ y $\vec{p}_1$. Esta dirección está relacionada al eje de giro del punto móvil con respecto al punto O en un instante determinado. En general la dirección de ese eje va cambiando con el tiempo.

» Se tiene dos ruedas de bicicleta de igual geometría —montadas sobre ejes fijos—girando a igual velocidad angular. La primera es una rueda normal mientras que la otra no tiene aire sino plomo. Al tratar de detenerlas se notará que se requiere de más esfuerzo para detener a la rueda con plomo. Esto se debe a que es más difícil llevar hasta cero el momento angular de un objeto que actualmente tiene momento angular más grande.

Si se toma la derivada con respecto al tiempo del momento angular, y se

supone que las masas son constantes, se obtiene

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \sum_a \frac{d(\vec{r}_a \times \vec{p}_a)}{dt} = \sum_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} \times \vec{p}_a + \sum_a \vec{r}_a \times \frac{d\vec{p}_a}{dt} \quad (2.3.2)$$

El primer término del lado derecho es cero porque cada sumando es proporcional a $\vec{v}_a \times \vec{v}_a$ y el último término se puede escribir sencillamente $\vec{r}_a \times (d\vec{p}_a/dt)$, es decir,

$$\frac{d\vec{\ell}_O(t)}{dt} = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{F}_a^{\text{total}} \quad (2.3.3)$$

Para escribir esta última expresión se hizo uso de la segunda ley de Newton, (2.1.2). El lado derecho de la expresión anterior es lo que se conoce como *torque total* $\vec{\tau}_O$ que producen las fuerzas $\vec{F}_a$ sobre el sistema de partículas,

$$\vec{\tau}_O^{\text{total}} = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{F}_a^{\text{total}} \quad (2.3.4)$$

y por tanto

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}_O(t)}{dt} = \vec{\tau}_O^{\text{total}}} \quad (2.3.5)$$

que quiere decir que la variación del momento angular se debe a la acción del torque total que actúa sobre el sistema.

Para estudiar la dinámica del momento angular se debe ver el valor del torque total y la forma de descomponerlo. El torque total $\vec{\tau}_O$ es la suma del torque de las fuerzas externas y el de las fuerzas internas. Demostremos que este último es nulo. Como la suma no depende del nombre de los índices, se la puede escribir intercambiando el papel de a y b . Luego se suma ambas sumatorias y se divide por dos,

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O^{\text{int}} &= \sum_{a,b} \vec{r}_a \times \vec{F}_{ab} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \vec{r}_a \times \vec{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \vec{r}_b \times \vec{F}_{ba} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{F}_{ab} \\ &= 0 \quad \Leftarrow \quad \vec{F}_{ab} // \vec{r}_a - \vec{r}_b \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

es decir

$$\vec{\tau}_O = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (2.3.7)$$

El torque total depende tan solo de las fuerzas que son externas al sistema.

» Los frenos, en un vehículo ejercen torque sobre las ruedas, el motor también.

Si el torque total sobre un sistema es nulo necesariamente el momento angular tiene derivada temporal nula, es decir, es constante.

Si para un sistema el torque no es nulo, pero una de sus componentes es nula todo el tiempo, entonces la correspondiente componente del momento angular es constante.

2.3.1.1. Del péndulo esférico al péndulo cónico

Si una masa puntual pende de un hilo de largo R , cuyo otro extremo está fijo se tiene, en general, un péndulo esférico. Bajo condiciones iniciales particulares puede comportarse como un péndulo plano (el hilo barre siempre un mismo plano vertical) o puede comportarse como un péndulo cónico cuando la masa describe una circunferencia con coordenada cilíndrica z fija o, equivalentemente, con coordenada esférica θ fija. En la figura adjunta se ha escogido coordenadas esféricas con el polo norte abajo para lograr así que θ describa directamente la desviación del péndulo con respecto a su posición vertical en reposo.

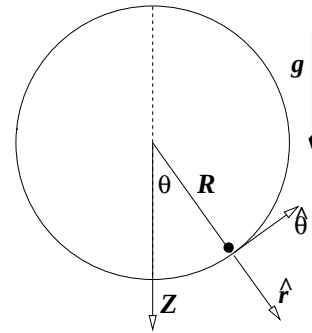


Figura 2.4: Para describir un péndulo esférico es conveniente escoger el eje Z apuntando en el mismo sentido que $\vec{g}$.

La fuerza total sobre la masa es la suma de su peso y de la tensión del hilo. En coordenadas esféricas $\vec{T} = -T\hat{r}$ y la aceleración de gravedad, de acuerdo a la figura, es

$$\vec{g} = (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)g$$

Se aprecia que la fuerza total no tiene componente a lo largo de $\hat{\phi}$, lo que quiere decir que la componente de la aceleración dada en (1.2.9) debe ser nula, esto es,

$$m \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0$$

que implica que existe una constante, que se denotará ℓ_3 , de modo que

$$\dot{\phi} = \frac{\ell_3}{mR^2 \sin^2 \theta} \quad (2.3.8)$$

Si ℓ_3 no es nulo, esta relación implica que θ no puede anularse porque eso daría que $\dot{\phi} \rightarrow \infty$. Lo que sí se puede afirmar es que la rapidez es mayor cuando el péndulo pasa por puntos en que el ángulo θ es muy chico. La ecuación de movimiento es reductible entonces a solo dos ecuaciones escalares: las componentes $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned} -mR(\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) &= mg \cos \theta - T \\ mR(\ddot{\phi} - \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta) &= -mg \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

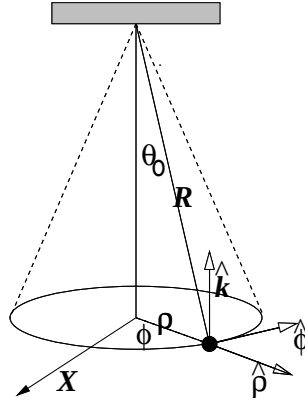


Figura 2.5: Un punto material en el extremo de un hilo de largo R gira en una trayectoria circular de radio ρ . El otro extremo del hilo está fijo.

Un péndulo cónico, tal como se aprecia en la figura adjunta 2.5, es *cónico* cuando el punto masivo gira describiendo una circunferencia. En tal caso el ángulo θ entre la vertical y el hilo mantiene fijo su ángulo con la vertical: θ_0 .

Se quiere responder a la pregunta ¿bajo qué condiciones un péndulo esférico tiene movimiento cónico? De (2.3.8) se obtiene que en el caso actual $\dot{\phi}$ es constante, y se denominará ω porque es la velocidad angular del péndulo que gira en torno al eje vertical. Dados R y g ¿puede tenerse un péndulo cónico

para cualquier valor de ω ?

La segunda de las ecuaciones (2.3.9) se reduce a

$$R\omega^2 \cos \theta_0 = g \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_0 = \frac{g}{R\omega^2} \quad (2.3.10)$$

Puesto que un coseno debe tener módulo menor que la unidad, se debe cumplir que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (2.3.11)$$

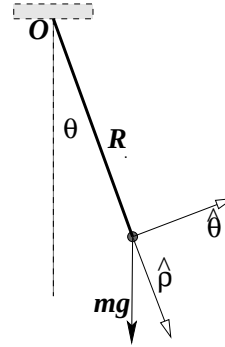
No es posible un péndulo cónico con velocidad angular menor que esta cota. Dada una velocidad angular ω superior a tal cota, el péndulo debe ser lanzado formando un ángulo con la vertical exactamente como el que se da en (2.3.10). Esto implica que

$$\ell_3 = m \left(R^2 \omega - \frac{g^2}{\omega^3} \right) \quad (2.3.12)$$

En resumen, el sistema descrito constituye un péndulo cónico tan solo si la velocidad angular se relaciona con el ángulo θ que el hilo forma con la vertical por medio de (2.3.10). El radio de la circunferencia es $\rho = \sqrt{R^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$ y la componente vertical del momento angular está dada por (2.3.12).

2.3.1.2. El péndulo simple

Consideremos un péndulo plano como el de la figura 2.6. Este consiste en una partícula puntual de masa m , unida al extremo de un hilo cuyo otro extremo está fijo a punto O . Por definición el movimiento ocurre en un plano. En este ejemplo el torque se debe a la fuerza peso, $\vec{g} = g(\hat{\rho} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$ y $\vec{r} = R\hat{\rho}$,



$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times (m\vec{g}) = -mRg \sin \theta \hat{k} \quad (2.3.13) \quad \text{Figura 2.6: Un péndulo plano.}$$

donde R es el largo del hilo. El momento angular es sencillamente $\vec{\ell}_O = \vec{r} \times \vec{v} = mR^2 \dot{\theta} \hat{k}$ porque $\vec{v} = R\dot{\theta} \hat{\theta}$. De aquí que (2.3.5) implique

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta \quad (2.3.14)$$

Esta es la ecuación de movimiento de un péndulo de largo R . El movimiento no depende de la masa de la partícula que hay en el extremo del hilo. Esta ecuación supone que el hilo está siempre tenso, lo que podría no ocurrir si el movimiento excede $\theta = \pi/2$.

Si las oscilaciones son pequeñas, $\theta \ll 1$, se puede hacer la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ y la ecuación queda

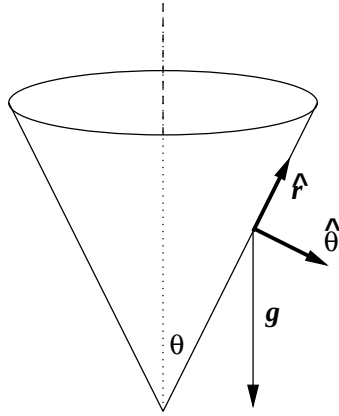
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \theta \quad (2.3.15)$$

2.3.1.3. Uso de coordenadas esféricas: movimiento en superficie cónica

Consideremos una superficie cónica con eje vertical y vértice abajo como en la Fig. 2.7. El vértice se escoge como origen. Una partícula P de masa m desliza sin roce por la superficie interior del cono bajo los efectos de la gravedad.

Se desea plantear: $\circ$ las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas, $\circ$ las propiedades del momento angular y $\circ$ reducir el problema a uno para la coordenada esférica $r(t)$. La coordenada θ es constante ya que ella es el ángulo entre el eje y cualquier generatriz del cono.

No hay más fuerzas que el peso y la normal:



$$\begin{aligned} m\vec{g} &= mg(-\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta) \\ \vec{N} &= -N\hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

En este caso particular la aceleración en coordenadas esféricas es

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} + \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\frac{\sin\theta}{r}\hat{\phi} \quad (2.3.17)$$

Puesto que la fuerza total no tiene componente a lo largo de $\hat{\phi}$, esa componente de la aceleración debe ser nula, lo que se reduce a $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$, es decir, lo que hay en el interior del paréntesis es una constante

$$r^2\dot{\phi} = \text{cte} \quad \text{o bien} \quad \dot{\phi} = \frac{\ell_0}{mr^2\sin\theta} \quad (2.3.18)$$

donde ℓ_0 es la magnitud del momento angular. En efecto, si se calcula el momento angular se obtiene

$$\vec{\ell} = mr\hat{r} \times (\dot{\hat{r}} + \dot{\phi}r\hat{\phi}\sin\theta) = -mr^2\dot{\phi}\sin\theta\hat{\theta} \quad (2.3.19)$$

que, por lo que se ha dicho, es un vector de magnitud constante:

$$\vec{\ell} = \ell_0\hat{\theta}$$

La ecuación de movimiento a lo largo de $\hat{r}$ es

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = -g \cos \theta \quad (2.3.20)$$

Reemplazando en ella la expresión para $\dot{\phi}$ se obtiene

$$\ddot{r} = \frac{\ell_0^2}{m^2 r^3} - g \cos \theta \quad (2.3.21)$$

que es una ecuación difícil aunque se puede demostrar que una primera integral arroja

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = -\frac{\ell_0^2}{2m^2 r^2} - gr \cos \theta + \text{cte}$$

Hay un caso sencillo e interesante que corresponde a órbitas circunferenciales horizontales de radio r_H . Para estas soluciones r es constante y también $\ddot{r} = 0$ por lo que el lado derecho de la última ecuación debe ser nulo, implicando que

$$r_H^3 = \frac{\ell_0^2}{m^2 g \cos \theta}$$

2.3.2. El centro de masa y el momento angular

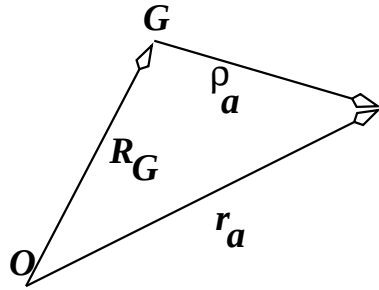


Figura 2.8: El vector posición $\vec{r}_k$ de una partícula k se puede descomponer en la suma del vector posición del centro de masa, $\vec{R}_G$, y el vector posición de k desde el centro de masa, $\vec{\rho}_k$.

Se define las posiciones $\vec{\rho}_a$ desde el centro de masa,

$$\vec{\rho}_a \equiv \vec{r}_a - \vec{R}_G. \quad (2.3.22)$$

La velocidad con respecto al sistema CM es

$$\dot{\vec{\rho}}_a \equiv \vec{v}_a - \vec{V}_G \quad (2.3.23)$$

♣ Demuestre que

$$\sum_{k=1}^N m_a \vec{\rho}_a = 0 \quad (2.3.24)$$

A veces también es útil la derivada temporal de la relación anterior,

$$\sum_{k=1}^N m_a \dot{\vec{\rho}}_a = 0 \quad (2.3.25)$$

En §2.2 también se definió el momento angular total del sistema y se vio que satisface la ecuación

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (2.3.26)$$

El torque total sobre un sistema depende tan solo de las fuerzas externas al sistema. El momento angular del sistema con respecto a su propio centro de masa es

$$\vec{\ell}_G = \sum_{a=1}^N m_a \vec{\rho}_a \times \vec{v}_a \quad (2.3.27)$$

Sin embargo, si en la última expresión se hace el reemplazo $\vec{v}_a = \vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a$, la forma de $\vec{\ell}_G$ se puede simplificar porque $\vec{V}_G$ queda fuera de la sumatoria (no depende de a) y (2.3.25) asegura que ese término no contribuye a $\vec{\ell}_G$, concluyéndose que

$$\vec{\ell}_G = \sum_{a=1}^N m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a \quad (2.3.28)$$

El momento angular $\vec{\ell}_O$ también se puede escribir

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_O &= \sum_{a=1}^N m_a (\vec{R}_G + \vec{\rho}_a) \times (\vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a) \\ &= M \vec{R}_G \times \vec{V}_G + \sum_{a=1}^N m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Para obtener la última expresión se hizo uso de (2.3.24) y de (2.3.25). El primer término del lado derecho es el momento angular del sistema como un todo con respecto al punto O , y será denotado $\vec{\ell}_O^G$

$$\vec{\ell}_O^G = M \vec{R}_G \times \vec{V}_G \quad (2.3.30)$$

mientras que el último término es $\vec{\ell}_G$. De aquí que

$$\vec{\ell}_O = \vec{\ell}_O^G + \vec{\ell}_G \quad (2.3.31)$$

La ecuación de movimiento para cada masa m_b del sistema es

$$m_b \ddot{\vec{\rho}}_b = \vec{F}_b - m_b \ddot{\vec{R}}_G$$

Derivando (2.3.28) con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\vec{\ell}}_G = \sum \vec{\rho}_b \times (\vec{F}_b - m_b \ddot{\vec{R}}_G)$$

La última suma contiene $\sum m_b \vec{\rho}_b = 0$ por lo que el resultado es

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\ell}_G}{dt} &= \sum_b \vec{\rho}_b \times \vec{F}_b \\ &\equiv \vec{\tau}_G \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Se puede anotar también que

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \sum_a (\vec{R}_G + \vec{\rho}_a) \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \vec{R}_G \times \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} + \sum_a \vec{\rho}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \vec{\tau}_O^G + \vec{\tau}_G \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

La última línea define la notación.

Puesto que (a) $\dot{\vec{\ell}}_O = \vec{\tau}_O$, (b) $\dot{\vec{\ell}}_G = \vec{\tau}_G$, (c) $\vec{\ell}_O = \vec{\ell}_O^G + \vec{\ell}_G$ y que (d) $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O^G + \vec{\tau}_G$, se desprende que

$$\dot{\vec{\ell}}_O^G = \vec{\tau}_O^G, \quad \dot{\vec{\ell}}_G = \vec{\tau}_G \quad (2.3.34)$$

El torque del peso respecto a G se calcula como

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_G &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \vec{g} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

La suma anterior se anula debido a (2.3.24). Ya que $\vec{\tau}_G = 0$ entonces $\dot{\vec{\ell}}_G$ es constante si el peso es la única fuerza externa.

Un caso particular es el del deportista que se lanza desde un alto tablón a una piscina para, después de algunas volteretas, clavarse en el agua en forma perfecta. Un vez que está en vuelo su momento angular $\vec{\ell}_G$ no puede cambiar. Tan solo alargando o acortando su cuerpo y moviendo sus brazos puede controlar su velocidad angular, pero llega al agua con el mismo $\vec{\ell}_G$ que se dio en el momento de despegar del tablón. Los gatos hacen algo parecido para caer siempre de pie.

2.3.3. Momento angular y torque asociado a sistema continuo

2.3.3.1. Una barra masiva

Se idealiza una barra como una recta masiva de largo R . Cada punto de la barra tiene asociado un valor de la coordenada ρ , $\vec{r} = \rho \hat{\rho}$ y una velocidad $\rho \dot{\phi} \hat{\phi}$. Un segmento de largo $d\rho$ de la barra tiene masa $\lambda d\rho$ por lo que el momento angular del sistema es

$$\vec{\ell}_O = \int_{-a}^{R-a} \rho \hat{\rho} \times (\rho \dot{\phi} \hat{\phi}) \lambda d\rho = \hat{k} \lambda \dot{\phi} \frac{R}{3} (R^2 - 3Ra + 3a^2)$$

Ya que el peso de un elemento $d\rho$ de la barra es $(\hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi) \lambda g d\rho$, el torque es

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \int_{-a}^{R-a} \rho \hat{\rho} \times (\hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi) \lambda g d\rho \\ &= -\hat{k} \lambda g \sin \phi \frac{R}{2} (R - 2a) \end{aligned}$$

De aquí que la ecuación dinámica sea

$$\ddot{\phi} = -\frac{3g}{2} \frac{R - 2a}{R^2 - 3Ra + 3a^2} \sin \phi \quad (2.3.36)$$

Si $R > 2a$ debiera ser claro que este péndulo oscila en torno a $\phi = 0$. En cambio si $R < 2a$ ese punto es inestable. Analice (2.3.36) en los casos $a = 0$ y $a = R$.

2.3.3.2. Alambre semicircular

Se tiene un péndulo formado, como lo muestra la figura 2.10, por un arco de radio R y densidad uniforme $\lambda = \frac{M}{\pi R}$. Un punto arbitrario P del arco se puede definir con respecto al ángulo ϕ con el eje fijo X o bien con el ángulo $\beta =$

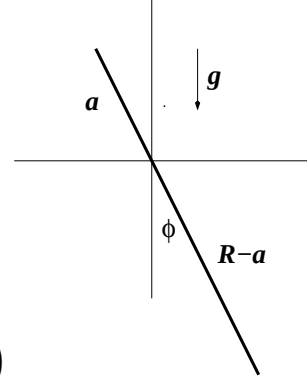


Figura 2.9: . Una barra de largo R densidad uniforme $\lambda = M/R$ puede girar en un plano vertical en torno a un punto que divide a la barra en una parte de largo a y otra de largo $R - a$.

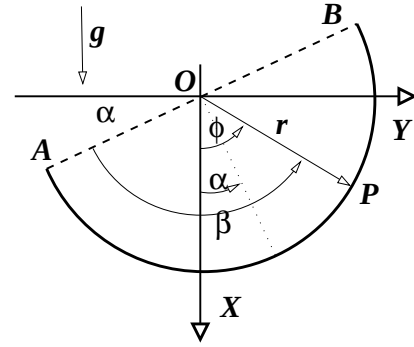


Figura 2.10: Un alambre semicircular de radio R y masa total M oscila como péndulo en torno al punto O .

$\frac{\pi}{2} + \phi - \alpha$ que subtiende el arco AP . Estando P fijo al arco, el ángulo β es una constante y el movimiento pendular implica $\dot{\phi} = \dot{\alpha}$. El vector posición de un punto P cualquiera del arco es $\vec{r} = R\hat{\rho}$ y la velocidad de P es $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, pero $\dot{\phi} = \dot{\alpha}$. De aquí que la contribución $d\vec{\ell}$ al momento angular de un arco $ds = R d\beta$ es

$$d\vec{\ell} = (R\hat{\rho}) \times (R\dot{\alpha}\hat{\phi}) \lambda R d\beta = \frac{MR^2}{\pi} \dot{\alpha} d\beta \hat{k}$$

La velocidad angular $\dot{\alpha}$ es común a todo el arco, esto es, no depende de β , por lo que la integral en β arroja simplemente π y se obtiene

$$\vec{\ell} = MR^2 \dot{\alpha} \hat{k}$$

La contribución al torque del arco ds en torno a P debida al peso de ese elemento de arco es

$$d\vec{\tau} = (R\hat{\rho}) \times ((dm)g\hat{i}) = -\left(\frac{M}{\pi} d\beta\right) g R \sin\phi \hat{k}$$

debido a que $\hat{i} = \hat{\rho} \cos\phi - \hat{\phi} \sin\phi$. Para integrar se debe tomar en cuenta que $\sin\phi = \sin\beta \sin\alpha - \cos\beta \cos\alpha$ por lo que $\int_0^\pi \sin\phi d\beta = 2 \sin\alpha$. De esto resulta que al integrar sobre β se obtiene

$$\vec{\tau} = -\frac{2MgR}{\pi} \sin\alpha \hat{k}$$

La ecuación $\dot{\vec{\ell}} = \vec{\tau}$ para este péndulo extendido se reduce a

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2g}{\pi R} \sin\alpha \quad (2.3.37)$$

que tiene la misma forma que la ecuación (2.3.14) del péndulo simple.

♦ Demuestre que para el problema del péndulo hecho con un alambre semicircular, se tiene que $\vec{\ell}_G = \frac{4M}{\pi^2} R^2 \dot{\alpha} \hat{k}$.

2.4. Sistemas de dos partículas

2.4.1. Masa reducida

En general las ecuaciones para un sistema de dos partículas se puede escribir

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{f}_1 \quad (2.4.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}_{12} + \vec{f}_2 \quad (2.4.2)$$

Ya se sabe que la suma de ambas ecuaciones da la dinámica del centro de masa, ecuación (2.2.13).

Si se define el vector de posición relativa y la *masa reducida* μ por

$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.4.3)$$

entonces la ecuación (2.4.1) multiplicada por $m_2/(m_1 + m_2)$ queda

$$\mu (\ddot{\vec{\rho}} + \ddot{\vec{r}}_2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{F}_{12} + \vec{f}_1) \quad (2.4.4)$$

si a esta ecuación se le suma (2.4.2) multiplicada por $-m_1/(m_1 + m_2)$ se obtiene

$$\mu \ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}_{12} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{f}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{f}_2 \quad (2.4.5)$$

Esta última ecuación es equivalente a la ecuación de una sola partícula de masa μ y posición $\vec{\rho}$.

» El problema de dos partículas se reduce al problema del movimiento del centro de masa y a la ecuación (2.4.5) para el movimiento relativo.

En el caso usual en que $\vec{f}_a = m_a \vec{g}$ la ecuación anterior se simplifica:

$$\mu \ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}_{12} \quad \text{caso especial} \quad (2.4.6)$$

Es una ecuación en la que no interviene sino las fuerza entre las partículas.

El momento angular con respecto a G puede también ser escrito usando $\vec{\rho}$ y la masa reducida μ . Para lograrlo se debe observar primero que $\vec{\rho}$, $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_2$ son paralelos y satisfacen

$$\vec{\rho}_1 = \frac{\mu}{m_1} \vec{\rho}, \quad -\vec{\rho}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{\rho} \quad (2.4.7)$$

Entonces

$$\vec{\ell}_G = m_1 \vec{\rho}_1 \times \dot{\vec{\rho}}_1 + m_2 \vec{\rho}_2 \times \dot{\vec{\rho}}_2 = \mu \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} \quad (2.4.8)$$

2.5. Fuerzas centrales

2.5.1. La idea

Una fuerza se dice central, con centro en el punto O , si el valor de esta fuerza en un punto $\vec{r}$ es

$$\vec{F} = f(\vec{r})\hat{r} \quad (2.5.1)$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición desde O , y éste es el punto desde donde se define la fuerza, $r = \|\vec{r}\|$ y $\hat{r} = \vec{r}/r$. La magnitud $f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi)$ de la fuerza es una función escalar cualquiera que, en los casos más importantes, solo depende del escalar r .

Como pronto se verá, importantes fuerzas de la naturaleza son centrales, tales como la que describe la *Ley de Gravitación* y también la *Ley de Coulomb* entre cargas eléctricas. En ambos casos f solo depende de r (no depende ni de θ ni de ϕ), en cambio en el ejemplo del péndulo recién descrito, la tensión del hilo es una fuerza con centro en el punto fijo O que también depende del ángulo ϕ .

El torque τ_O , en el caso en que la fuerza total sobre una partícula es una fuerza central, es nulo, porque $\tau_O = \vec{r} \times (f(r)\hat{r}) = 0$ ya que se trata del producto cruz entre dos vectores paralelos. De esto y de (2.3.5) se concluye que en un caso así

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0 \quad (2.5.2)$$

es decir, el momento angular permanece constante, $\vec{\ell}(t) = \vec{\ell}_0$.

Pero si $\vec{\ell}$ es constante, y puesto que $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$, el plano que definen los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ permanece fijo, es decir, el movimiento transcurre en un plano fijo. Se trata de movimiento plano.

2.5.2. Corolario: segunda ley de Kepler.

Se demostrará que si se conserva el momento angular la línea que une al punto O con el punto que define el vector posición $\vec{r}(t)$ barre áreas iguales en tiempos iguales. Para demostrarlo hay que recordar que si se tiene dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos a partir de O , la magnitud del producto $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual al área

del paralelogramo que definen $\vec{d}$ y $\vec{b}$. Si la posición de la partícula en un instante t es $\vec{r}(t)$, en un pequeño instante posterior $t + \epsilon$ es $\vec{r}(t + \epsilon) = \vec{r}(t) + \epsilon \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}(t) + \epsilon \vec{v}(t)$.

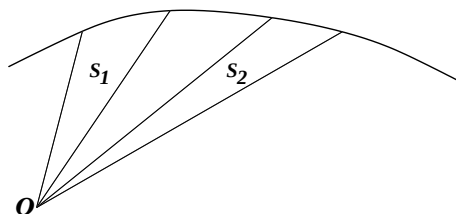


Figura 2.11: Si el momento angular se conserva, entonces áreas barridas en tiempos iguales son iguales.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\|\vec{\ell}\|}{2m} \quad \text{velocidad areolar} \quad (2.5.3)$$

En palabras, la expresión anterior dice que el área barrida por $\vec{r}(t)$ —a medida que la partícula se mueve en su órbita—es proporcional a t y es proporcional a la magnitud del momento angular, esto es, la velocidad areolar es una constante. Si la expresión anterior se integra entre dos instantes arbitrarios t_1 y t_2 de la historia de la partícula, el resultado es

$$S_{12} = \frac{\|\vec{\ell}\|}{2m} (t_2 - t_1) \quad (2.5.4)$$

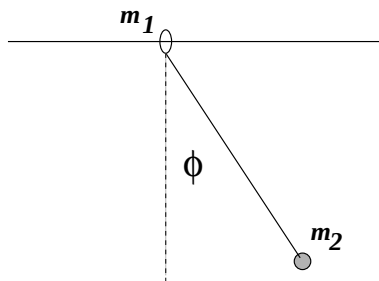
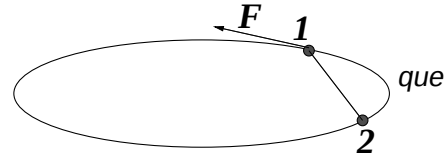
Es decir, en tiempos iguales $(t_2 - t_1)$ se barren áreas iguales S_{12} .

2.6. Problemas

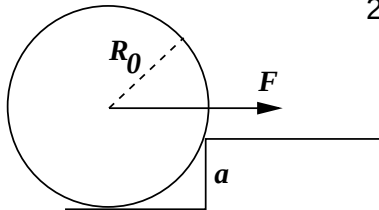
2.1 Considere el movimiento de un proyectil lanzado desde $(x = 0, y = 0)$ con velocidad inicial $\vec{v} = (\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta) v_0$ y aceleración de gravedad $g = -g \hat{j}$. **a)** Determine la trayectoria $y(x)$, la rapidez $v(t)$ en todo momento y el vector tangente unitario $\hat{t}$. **b)** Si el proyectil ha sido lanzado desde la base de un plano inclinado (ángulo α y $\alpha < \theta$), determine el ángulo θ óptimo para que el proyectil golpee al plano lo más lejos posible.

2.2 Una cuerpo comienza su movimiento (sin roce) desde la cúspide de una esfera fija de radio R con rapidez v_0 . Determinar dónde el cuerpo pierde contacto con la esfera.

2.3 Por un riel circunferencial en posición horizontal de radio R avanza un cuerpo C_1 de masa m_1 arrastrando a un cuerpo C_2 de masa m_2 con un hilo de largo $R\sqrt{2}$. El cuerpo C_1 es movido por una fuerza de magnitud F conocida y fija es siempre tangencial a la circunferencia. En el instante $t = 0$ los cuerpos parten desde el reposo y en t_0 completan una vuelta. **a)** Calcule la tensión del hilo en ese intervalo. **b)** En el instante t_0 se corta el hilo y sobre C_1 continua actuando la misma fuerza. Obtenga el instante t_1 en el cual C_1 alcanza a C_2 .

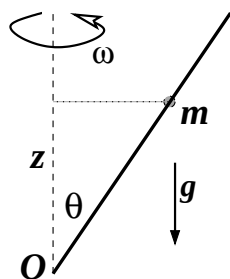


2.4 En una vara horizontal de largo D hay un anillo de masa m_1 que puede deslizarse por la vara sin roce alguno. De este anillo sale un hilo en cuyo extremo pende un punto de masa m_2 , es decir, se tiene un péndulo simple que no tiene un punto fijo, sino que éste desliza en una vara horizontal. Encontrar una expresión para la tensión del hilo en función del ángulo ϕ y de $\dot{\phi}$.



2.5 El sistema de la figura representa una rueda de masa total M y radio R_0 enfrentando un peldaño de altura a . Determine la mínima fuerza horizontal $\vec{F}$ que se debe aplicar para que la rueda supere al peldaño.

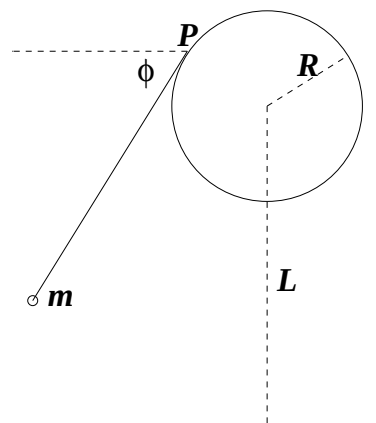
2.6 Una partícula P de masa m se mueve por la superficie interior de un cono de eje vertical, ángulo θ y vértice abajo. Si sobre P actúa una fuerza que, expresada en coordenadas esféricas, es $\vec{F} = -\gamma r \hat{r}$, determine las ecuaciones de movimiento de P en coordenadas esféricas y obtenga una expresión para su velocidad. Datos iniciales: $r(0) = R_0$, $\dot{\phi}(0) = \omega$, $\dot{r}(0) = 0$.



2.7 Resuelva el caso de una argolla de masa m en una varilla que gira con velocidad angular uniforme: $\dot{\phi} = \omega$ siempre formando un ángulo θ con la vertical. No hay roce entre ambos. Tome como condiciones iniciales que $z(0) = z_0$ y que $\dot{z}(0) = 0$. Si la varilla gira muy lentamente la argolla cae hacia O . Describa todas las situaciones posibles, desde velocidad angular muy pequeña hasta muy grande y escriba el valor de la velocidad angular crítica para decidir si cae o sube.

Indicación: usando coordenadas cilíndricas se puede ver que la varilla apunta en la dirección unitario $\hat{t} = \hat{k} \cos \theta + \hat{\rho} \sin \theta$. La fuerza total es la suma del peso, $-mg\hat{k}$ y la fuerza normal, que inicialmente se debe escribir con un vector general perpendicular a $\hat{t}$. Demuestre que la fuerza normal entonces es de la forma: $\vec{N} = \hat{\phi} N_{\phi} + (\hat{k} \sin \theta - \hat{\rho} \cos \theta) N_n$. Una vez que se tiene las fuerzas, la ecuación de movimiento (II ley de Newton) puede ser escrita y descompuesta en tres ecuaciones escalares. Hay que tomar en cuenta que la argolla solo se puede mover a lo largo de la varilla, es decir, siempre se debe satisfacer $\rho(t) = z(t) \tan \theta$ (*). En estas ecuaciones escalares aparecen las cantidades desconocidas N_n y N_{ϕ} , pero si se usa (*) se puede obtener una ecuación libre de estos coeficientes. Tal ecuación entonces se puede integrar y se obtiene $z(t)$. A partir de ahí el problema es muy sencillo.

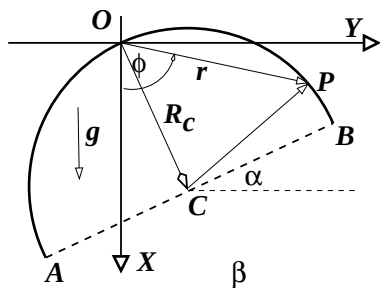
2.8 Hay un hilo enrollado alrededor de un cilindro. El eje del cilindro es horizontal, su radio es R y la altura desde el suelo al eje es L . En el instante inicial está desenrollada una parte del hilo, de longitud D , la que se mantiene tirante y horizontal, $\phi = 0$. En esa punta del hilo hay un cuerpo de masa m . Este cuerpo se suelta desde el reposo y a medida que cae el hilo se va enrollando. **a)** Determine la tensión del hilo como función del ángulo ϕ . **b)** Dé la forma de la aceleración y determine el radio de curvatura. Interprete.



Indicación: Conviene tomar el origen en el eje del cilindro y escribir el vector posición del cuerpo como la suma de los vectores posición del punto P de tangencia del hilo ($\vec{r}_P$ en la dirección $\hat{\rho}$) y el vector que apunta en la dirección del hilo y que es tangente al cilindro, en la dirección $\hat{\phi}$.

2.9 Desde el punto de vista del momento angular estudie el péndulo cónico descrito en la sección 2.3.1.1. Haga su estudio en dos casos: (a) cuando el origen O para definir el momento angular y el torque está al centro de la circunferencia que describe la partícula y (b) cuando O se escoge en el punto en que el hilo se une al techo. En ambos casos escriba el vector posición de la masa m usando los vectores unitarios asociados a coordenadas cónicas, obtenga la velocidad, calcule el momento angular y el torque y compruebe que (2.3.5) se satisface.

2.10 Resuelva el caso de un péndulo como aquel visto en §2.3.3.2 tan solo que, en lugar de un alambre semicircunferencial, se trata de una lámina semicircular con densidad de área uniforme tal que la masa total sea M . En este caso se debe integrar sobre el elemento de área $dS = \rho d\rho d\beta$.



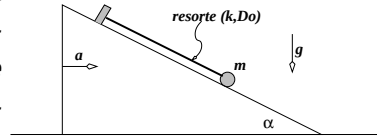
2.11 Considere un alambre semicircunferencial, de radio R y densidad uniforme, que oscila—debido a su peso—en su propio plano, en torno a su punto medio O . Puede ser conveniente describir la posición $\vec{r}$ de cada punto P del arco como la suma del vector $\vec{R}_c$ que va desde O hasta el centro de curvatura C , más un vector que va desde C hasta un punto P .

2.12 Un astronauta de masa m se aleja de su nave unido a ella por una cuerda, pero impulsado por sus propios cohetes. Debido a que se le acaba el combustible debe ser traído de vuelta recogiendo la cuerda. Esto se comienza a hacer cuando la cuerda está tirante, tiene una longitud extendida R_0 desde la nave y la velocidad angular del astronauta, respecto a la nave, es Ω_0 . La cuerda comienza a ser recogida con rapidez constante v_0 . Suponga que no hay complicación alguna en el momento de comenzar a recoger la cuerda. **a)** Encuentre la rapidez del astronauta en función de la distancia a la nave. **b)** Si se sabe que la cuerda soporta una tensión máxima $27 m R_0 \Omega_0^2$ antes de cortarse, determine a qué distancia de la nave se encuentra el astronauta en el momento en que la cuerda se corta. Nota: la nave tiene masa tan grande que para todos los efectos de este problema puede tomarse como un punto fijo.

2.13 Un péndulo plano de largo R y masa m es liberado desde su punto más bajo ($\phi = 0$) con una velocidad angular ω_0 . No alcanza a llegar a la cúspide (altura $2R$ medida desde el punto más bajo) porque cuando ϕ toma el valor ϕ_M el

movimiento deja de ser circular. Obtenga una expresión para $\cos \phi_M$ en función de m , g , ω_0 y R .

- 2.14 Sobre un plano horizontal está apoyada una cuña de masa M y sobre la cuña hay un cuerpo de masa m . Despreciando todos los roces, determine el movimiento de este sistema si inicialmente ambos cuerpos están en reposo.



Capítulo 3

Fuerzas específicas y movimiento

3.1. Ley de Gravitación Universal

3.1.1. La ley

La tercera ley de Kepler dice que el cubo de la distancia media, R , de un planeta dividida por el cuadrado de su período, T , es la misma constante para todos los planetas, es decir para cualquier planeta a el cociente

$$\frac{R_a^3}{T_a^2} = k$$

da un valor k que no depende del planeta. Kepler estableció que las órbitas son elipses. También estableció la ley (2.5.3) que sabemos que significa que el momento angular se conserva.

Esto último sugiere que la dinámica de los planetas está gobernada por una fuerza central. Si la fuerza es central de la forma $f(r)\hat{r}$, la única aceleración que sufren los planetas es la centrípeta, descrita en (1.4.11). ¿Qué forma tiene tal ley de fuerza?

Aun cuando los planetas se mueven en órbitas elípticas, éstas son muy poco excéntricas, es decir, son casi circunferenciales. La velocidad media del planeta a es prácticamente su velocidad real todo el tiempo, y se puede estimar dividiendo el camino recorrido en una órbita: $2\pi R_a$ por el tiempo T_a que tarda, es decir, $V_a = 2\pi R_a/T_a$. Se sabe, ver (1.4.11), que la aceleración centrípeta

$a_c^{(a)}$ es de magnitud V_a^2/R_a ,

$$a_c^{(a)} = \frac{1}{R_a} \left(\frac{2\pi R_a}{T_a} \right)^2 = \frac{4\pi^2 R_a}{T_a^2} = \frac{4\pi^2}{R_a^2} \frac{R_a^3}{T_a^2} = \frac{4\pi^2 k}{R_a^2} \quad (3.1.1)$$

Con la última expresión a la derecha se ha podido escribir la aceleración centrípeta en términos tan solo de la constante $4\pi^2 k$ y de la distancia al centro de fuerza (distancia al Sol). Por tanto, la magnitud de la fuerza sobre el planeta a tiene que estar dada por esta aceleración multiplicada por la masa del planeta y tiene que apuntar hacia el centro,

$$\vec{F}_a = -\frac{4\pi^2 k M_a}{R_a^2} \hat{r} \quad (3.1.2)$$

El planeta Júpiter tiene muchas lunas y ese sistema se comporta como un sistema solar autónomo. Cuando se estudió si la ley de Kepler (3.1.1) se cumplía para ese sistema se obtuvo que se cumple, pero la constante k que resulta es otra. Hoy sabemos, gracias a la ley de gravitación universal de Newton, que esa constante k es proporcional a la masa del objeto masivo que crea la fuerza central (el Sol en un caso y Júpiter en el otro).

El argumento dado al comienzo, en torno a (3.1.1), tiene sentido tan solo si la órbita es circunferencial o muy próxima a serlo. Pero la conclusión de ese caso particular, ayuda a entender cómo se puede llegar a concebir la ley de validez universal que ahora se introduce.

La ley universal de gravitación enunciada por Newton dice que la fuerza de atracción que ejerce un punto material de masa m_A sobre un punto material de masa m_B es

$$\vec{F}_{\text{sobre B}} = -G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \hat{r} \quad (3.1.3)$$

donde $\hat{r}$ es el vector unitario que apunta desde el centro A de fuerza hacia B .

Kepler enunció sus dos primeras leyes en 1609, mientras que la tercera es de diez años después, 1619. Isaac Newton se basó en la tercera ley de Kepler para afirmar en 1666 que existe una fuerza de atracción gravitacional que es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia entre los dos cuerpos.

Newton pudo tan solo estimar los valores de GM pero no de la constante G por sí sola. Fue Henry Cavendish quien comunicó en 1798 la medición de G usando una delicada balanza de torsión. La medición de Cavendish arrojó resultados que implicaban que $G = 6,754 \times 10^{-11} (Nm^2/(K^2))$.

La constante universal de gravitación G vale

$$G = 6,67428 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{K}^2} \quad (3.1.4)$$

Esta misma ley se puede también escribir utilizando vectores posición $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ respecto a cualquier origen O . La fuerza sobre B debido a A es

$$\vec{F}_{BA} = -G \frac{m_A m_B}{\|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|^3} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (3.1.5)$$

El movimiento que se deduce con esta fuerza, en particular el movimiento planetario, será discutido más adelante.

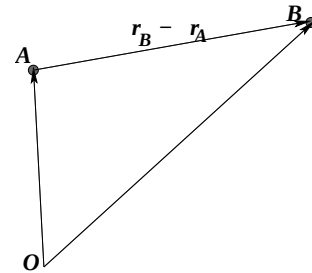


Figura 3.1: La fuerza de atracción gravitacional que A ejerce sobre B es paralela a $\vec{r}_B - \vec{r}_A$.

3.1.2. Aceleración de gravedad

De acuerdo a (3.1.3) la magnitud de la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m es

$$F = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \quad (3.1.6)$$

donde M es la masa de la Tierra, R es su radio al nivel del mar y h es la altura sobre el nivel del mar que está el cuerpo de masa m . Siempre se identifica esta fuerza con el producto mg_h , por tanto, la aceleración de gravedad resulta valer

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \approx \frac{GM}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}} = \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \quad (3.1.7)$$

que depende de la altura h . En el calculo anterior se ha supuesto que la altura h es mucho menor que el radio de la Tierra, $h \ll R$. El radio de la Tierra es $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{m}$ lo que garantiza que la aproximación hecha es excelente aun si h es la altura del monte Everest ($h_{\text{Everest}} \approx 8,8 \cdot 10^3 \text{m}$).

Se llamará g_0 a la aceleración de gravedad al nivel del mar. Puesto que la masa de la Tierra es $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{Kg}$, resulta

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.1.8)$$

El semieje mayor de la órbita terrestre vale $a \approx 1,5 \times 10^{11} \text{Km}$.

♣ Demuestre que la aceleración de gravedad en Santiago difiere en menos del 1 % de g_0 .

3.2. Fuerza elástica ideal

3.2.1. Generalidades

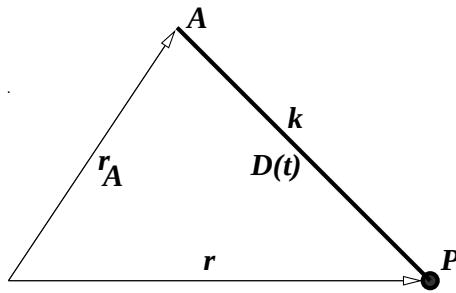


Figura 3.2: Un resorte con un extremo en A tiene en su otro extremo P una masa m .

El tipo de problemas que se va a abordar en esta sección tiene un grado de aplicabilidad que va mucho más allá de lo que podría aparentar. Superficialmente esta sección trata de una partícula de masa m en el extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo en un punto que se ha designado A en la figura 3.2. Si bien lo que se estudia a continuación es cómo oscila este sistema, los resultados son generalizables a todo tipo de sistemas elásticos.

La fuerza que ejerce un resorte ideal de *largo natural* D_0 sobre un cuerpo P depende linealmente de la deformación (alargamiento o acortamiento) que sufre el resorte y es proporcional a la *constante elástica* k del resorte,

$$\vec{F}_e = -k (D(t) - D_0) \hat{r} \quad (3.2.1)$$

donde, $D(t) = \|\vec{r} - \vec{r}_A\|$ es el largo actual del resorte y $\hat{r}$ es el vector unitario en la dirección del resorte,

$$\hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_A}{\|\vec{r} - \vec{r}_A\|} \quad (3.2.2)$$

En particular si A es el origen (esto es, $\vec{r}_A = 0$) se tiene que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. La diferencia $D(t) - D_0$ se suele denominar la *elongación* del resorte.

Un resorte es “duro” si su constante k es grande y blando en el otro extremo.

La *ley de Hooke* se refiere a sistemas en los que, al ser sacados de su posición de reposo (o posición de equilibrio), aparece una fuerza que es proporcional

a la deformación, tal como en (3.2.1). Esta ley es aplicada en los más variados contextos. Cuando una cuerda de guitarra es sacada de su posición de equilibrio (es *pulsada*) aparece una fuerza que, de alguna manera, puede ser asimilada a (3.2.1). Al deformar levemente cualquier cuerpo sólido aparece una fuerza elástica para restituirlo a su posición original. Como se verá, (3.2.1) conduce a una dinámica típicamente oscilante, aunque no siempre lo es.

Un sistema oscilante normalmente pierde energía y, si está libre de influencias que mantengan sus oscilaciones, regresa al reposo. La ley que rige esta pérdida de energía se verá más adelante cuando se trate al *oscilador amortiguado*.

Otra variante de los osciladores se refiere al caso real en que el sistema no es sacado levemente de su posición de equilibrio, sino que se aleja bastante de ella. En tales casos es muy típico que la ley (3.2.1) deje de ser válida. Puede ocurrir que la ley sea más complicada, como es el caso del péndulo, (2.3.14) versus el péndulo de pequeñas oscilaciones descrito por la ecuación (2.3.15). También esto ocurre, por ejemplo, cuando el sistema ya no sufre una deformación elástica sino una deformación plástica. Plástica es la deformación que cambia la naturaleza del material, como es el caso de un resorte que es estirado más allá de un cierto límite y se deforma irreversiblemente.

3.2.2. Caso unidimensional sencillo

En el caso unidimensional, en que la partícula P en el extremo del resorte—cuyo otro extremo está en el origen— se mueve siempre con $x(t) > 0$, no es necesario usar vectores y la fuerza se puede escribir como $F = -k(x - D_0)$ lo que conduce a la ecuación

$$m \ddot{x}(t) = -k [x(t) - D_0] \quad (3.2.3)$$

Se puede comprobar que la ecuación anterior tiene como solución particular trivial $x(t) = D_0$. Ella corresponde al caso en que el oscilador está en reposo en una posición especial llamada *posición de equilibrio*. La solución general del problema se puede integrar fácilmente si se hace el cambio de función: $x(t) = \bar{x}(t) + D_0$, porque la ecuación queda

$$m \ddot{\bar{x}}(t) = -k \bar{x}(t) \quad (3.2.4)$$

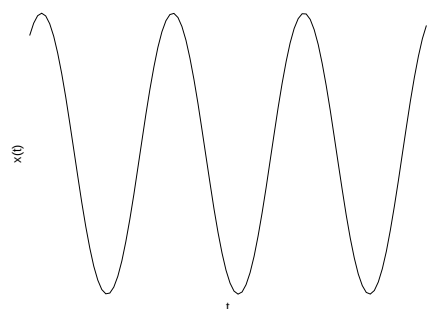


Figura 3.3: La posición $x(t)$ oscila en torno a $x = D_0$.

Se define la *frecuencia angular característica* del sistema por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.2.5)$$

La frecuencia propiamente tal se denota ν y se relaciona a ω_0 por $\boxed{\omega_0 = 2\pi\nu}$. El período de tales oscilaciones es $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$.

Se puede comprobar que la solución más general de la ecuación es $\bar{x}(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$. Volviendo a la función original $x(t)$ esta solución es

$$x(t) = D_0 + A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.6)$$

Las constantes A y B dependen de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ la solución se convierte en

$$x(t) = D_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + (x_0 - D_0) \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.7)$$

(compruébelo).

♣ *Escriba la solución anterior en la forma*

$$x(t) = D_0 + C \sin(\omega_0 t + \gamma_0) \quad (3.2.8)$$

y encuentre la relación entre (C, γ_0) y (x_0, v_0) .

La función $x(t)$ que ha quedado definida oscila en el tiempo en forma sinusoidal, tomando iguales valores en tiempos separados por un múltiplo entero de $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (T es el período de la función $x(t)$), ver la figura 3.3.

♣ *Demuestre, a partir de (3.2.6), que $(x(t) - D_0)$ es una función cuyos valores máximo y mínimo son*

$$[x(t) - D_0]_{\max \min} = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.2.9)$$

El máximo es la *amplitud* de las oscilaciones y describen cuánto se aleja la partícula oscilante de su posición de reposo.

La solución que se ha visto está caracterizada por una frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Si el resorte es duro (k grande) la frecuencia es más grande, pero si se aumenta el valor de la masa la frecuencia baja.

Este comportamiento se puede apreciar de la siguiente forma. Un vehículo diseñado para acarrear grandes cargas tiene resortes (sus amortiguadores) muy duros, de tal modo que cuando va bien cargado las vibraciones que le provoca las irregularidades del camino se convierten en frecuencias bajas (*suaves* se diría en lenguaje coloquial), pero si ese mismo vehículo va vacío (masa chica) vibrará a alta frecuencia y se sentirá *áspero*.

En la notación de (3.2.6) la función x toma valores extremos cuando $\dot{x} = 0$, lo que ocurre en $t = t_1$ si $A \cos \omega_0 t_1 = B \sin \omega_0 t_1$ lo que ocurre si

$$\tan \omega_0 t_1 = \frac{A}{B} \quad (3.2.10)$$

Al reemplazar este valor en (3.2.7) se obtiene

$$x_{\pm} = D_0 \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + (x_0 - D_0)^2} \quad (3.2.11)$$

Con signo + se tiene el valor máximo de x y con el signo menos se tiene el valor mínimo. Esta expresión es equivalente a (3.2.9).

3.3. Fuerza de roce estático y dinámico

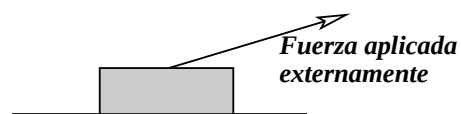


Figura 3.4: Al aplicar una fuerza externa sobre un cuerpo que está apoyado sobre una superficie puede ocurrir que este cuerpo no se mueva.

Ya se ha dicho que si dos cuerpos están en contacto, sobre cada uno de ellos actúa una fuerza llamada *de contacto*. Esta fuerza tiene una descomposición única en una componente perpendicular a la superficie tangente al contacto, que se denomina *normal*, $\vec{N}$, y una componente paralela al contacto, que es la *fuerza de roce*.

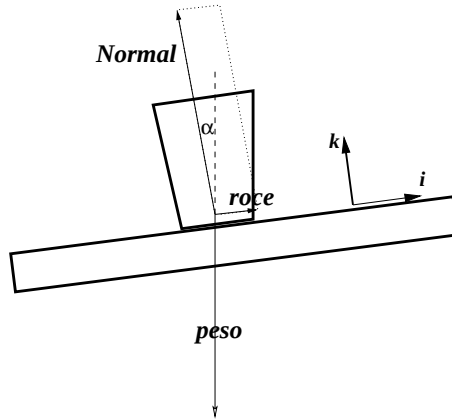


Figura 3.5: Un vaso en reposo sobre una mesa inclinada. La suma de la normal y el roce estático cancelan exactamente al peso.

Si no hay *movimiento relativo* entre las dos superficies en contacto la fuerza paralela al contacto, que actúa sobre cada uno de los dos cuerpos, se llama *fuerza de roce estático*, $\vec{F}_{RE}$, mientras que si hay movimiento relativo, se llama *fuerza de roce dinámico*, $\vec{F}_{RD}$.

3.3.1. Roce estático

Al aplicar una fuerza $\vec{F}$ sobre un cuerpo A apoyado en una superficie, puede ocurrir que A no se mueva. Esto se debe a que en la región de contacto entre A y la superficie aparece la fuerza, llamada de *roce estático*, que se opone al movimiento. Esta fuerza de roce estático anula la componente $F_{\parallel}$, paralela al contacto, de la fuerza $\vec{F}$. Si $F_{\parallel}$ sobrepasa un cierto valor, el cuerpo ya no podrá permanecer en reposo. El valor máximo alcanzado por $\vec{F}_{RE}$ obedece la siguiente ley, que depende del valor de la magnitud de la fuerza normal, $\vec{N}$ presente en el contacto,

$$\|\vec{F}_{RE}\| \leq \mu_e \|\vec{N}\| \quad (3.3.1)$$

donde $\vec{N}$ es la fuerza normal mencionada más arriba y μ_e es el llamado *coeficiente de roce estático*.

Este coeficiente depende de la naturaleza de los materiales en contacto y de la calidad, por ejemplo la rugosidad, de las superficies.

Ejemplo: Las fuerzas sobre un vaso apoyado en una superficie inclinada son: su peso, $m\vec{g}$, que apunta vertical hacia abajo, la normal $\vec{N}$ que apunta perpendicular a la mesa (dirección $\hat{k}$, ver la figura 3.5) y la fuerza de roce estático, $\vec{F}_{RE}$ que apunta en una dirección paralela a la mesa.

Puesto que el vaso está inmóvil la aceleración es nula y por tanto la fuerza total es cero, es decir, $\vec{N} + \vec{F}_{RE} + m\vec{g} = 0$. Las fuerzas se pueden escribir:

$$\vec{N} = N\hat{k}, \quad m\vec{g} = -mg(\hat{k} \cos \alpha + \hat{i} \sin \alpha) \quad (3.3.2)$$

Ya que estas dos fuerzas más la fuerza de roce deben sumar cero, y la fuerza de roce por definición no tiene componente en la dirección $\hat{k}$, necesariamente

se cumple que la fuerza de roce es paralela a $\hat{i}$ y

$$\vec{F}_{RE} = \hat{i} mg \sin \alpha, \quad \vec{N} = \hat{k} mg \cos \alpha \quad (3.3.3)$$

Como se puede apreciar, la magnitud de la fuerza de roce estático queda determinada por el valor de otras fuerzas a través de la condición de que la suma total garantice (en este ejemplo) el reposo. La condición (3.3.1) implica que $\tan \alpha \leq \mu_e$. ◀

Ejemplo: Una cinta en forma de manto cilíndrico de radio R tiene eje vertical y gira con velocidad angular uniforme ω . En el interior de la cinta está apoyado un cuerpo de masa m como lo muestra la figura 3.6. Si se conoce el coeficiente de roce estático entre este cuerpo y la cinta, se verá que se puede determinar el mínimo valor que debe tener ω para que el cuerpo de masa m no caiga.

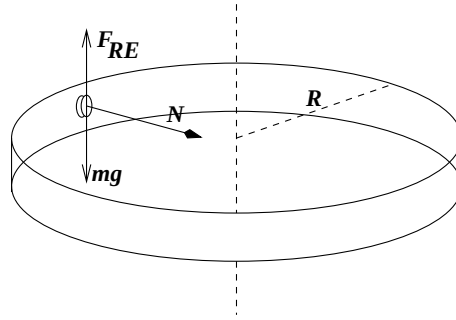


Figura 3.6: Una cinta circular gira con velocidad angular uniforme ω en torno a un eje vertical. En el interior de la cinta se mantiene fijo un objeto gracias al roce estático.

Usando coordenadas cilíndricas, la fuerza normal, que actúa sobre el cuerpo tiene que apuntar perpendicular a la superficie de la cinta: $\vec{N} = -N\hat{\rho}$, pero el valor del escalar N aun no se conoce. El peso es $m\vec{g} = -mg\hat{k}$. Se puede adivinar que la fuerza de roce $\vec{F}_{RE}$ apunta en la dirección $\hat{k}$: $\vec{F}_{RE} = F\hat{k}$. Esta vez la suma de todas las fuerzas debe ser igual al producto de la masa por la aceleración del cuerpo que tiene movimiento circular con velocidad angular uniforme. Esta aceleración, de acuerdo a (1.2.5), en este caso es $-R\omega^2\hat{\rho}$. Todo esto conduce entonces a dos relaciones escalares:

$$F = mg \quad \text{y} \quad N = mR\omega^2 \quad (3.3.4)$$

Pero la ley (3.3.1) de roce estático exige que $F \leq \mu_e mR\omega^2$, con lo que finalmente se obtiene que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}} \quad (3.3.5)$$

Si la velocidad angular tuviera un valor menor que éste, el cuerpo no podría tener roce estático y cae. ◀

♣ *Resuelva el problema de la cinta que aparece en el texto principal, pero esta vez la velocidad angular de la cinta no es uniforme sino que $\omega = \Omega - \alpha_0 t$. La velocidad angular inicial Ω satisface la desigualdad (3.3.5).*

♣ *Sobre una superficie que corresponde al interior de un cono vertical con vértice abajo está apoyado un cuerpo de masa m . Cuerpo y superficie giran con velocidad angular ω constante, en torno al eje vertical, sin que el cuerpo deslice. Encuentre las condiciones para que esto ocurra. Al analizar este problema debe cuidadosamente analizar diversos casos. Por ejemplo, se debe separar los casos en que $(g \cos \theta - \rho \omega^2 \sin \theta)$ es positivo o negativo. Aquí θ es el ángulo entre la vertical y una generatriz del cono, g es la aceleración de gravedad y ρ es la distancia entre el cuerpo y el eje de rotación.*

3.3.2. Roce dinámico

El roce dinámico existe cuando hay movimiento relativo entre las superficies en contacto. La fuerza de roce en este caso depende de la velocidad relativa entre el cuerpo que se estudia y la superficie con la que está en contacto: $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}_s$, donde $\vec{v}$ es la velocidad del cuerpo y $\vec{v}_s$ es la velocidad de la superficie. La ley de roce dinámico es

$$\vec{F}_{RD} = -\mu_d N \hat{v}_{\text{rel}} \quad (3.3.6)$$

donde μ_d es un coeficiente que depende de la naturaleza de las superficies en contacto, $N = \|\vec{N}\|$ es la magnitud de la fuerza normal sobre el cuerpo que desliza y $\hat{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{rel}}/\|\vec{v}_{\text{rel}}\|$ es el vector unitario que apunta en la dirección de la *velocidad relativa* del cuerpo en estudio con respecto a la superficie del contacto. Es muy notable que esta fuerza no depende de la magnitud de la superficie de contacto.

El contacto entre dos cuerpos, entonces, está caracterizado en general por dos coeficientes de roce, el coeficiente de roce estático y el coeficiente de roce dinámico. Siempre se cumple que

$$\mu_e \geq \mu_d \quad (3.3.7)$$

Ejemplo: Consideremos un péndulo de largo R apoyado en un plano inclinado. El plano forma un ángulo α con el plano horizontal. Se escoge coordenadas

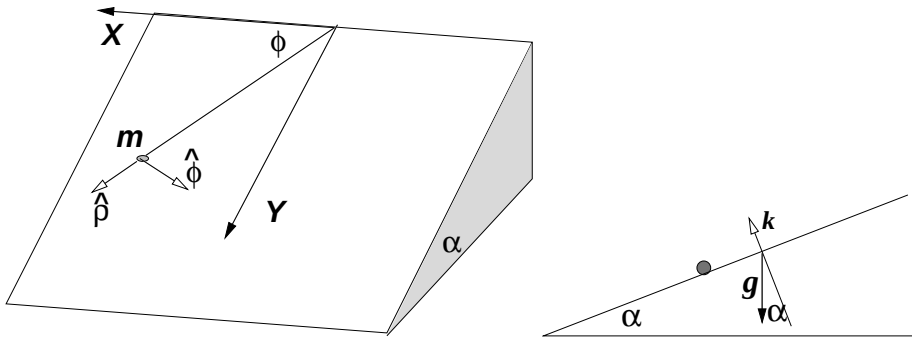


Figura 3.7: Un péndulo apoyado en un plano que produce roce. El eje Y apunta en la dirección de máxima pendiente. A la derecha una vista lateral del sistema.

cilíndricas con eje que pasa por el punto fijo del hilo y con eje Z perpendicular al plano inclinado.

En este caso la coordenada ρ siempre vale R y la coordenada z siempre es nula. Para describir el movimiento del péndulo basta con encontrar el ángulo ϕ —que se indica en la figura 3.7—como función del tiempo. El vector posición es $\vec{r} = R\hat{\rho}$. Se da como condiciones iniciales $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 0$. Además se sabe que se detiene en $\phi = \phi_1$ sin haber retrocedido nunca. Veremos que estos datos determinan el valor del coeficiente de roce μ_d . La fuerza normal es $\vec{N} = N\hat{k}$, la tensión del hilo es $\vec{T} = -T\hat{\rho}$, la fuerza de roce es $\vec{F}_{RD} = -\mu_d N\hat{\phi}$, el peso es $m\vec{g} = mg(-\hat{k}\cos\alpha + \hat{j}\sin\alpha) = mg(-\hat{k}\cos\alpha + \sin\alpha(\hat{\phi}\cos\phi + \hat{\rho}\sin\phi))$. La fuerza total entonces vale

$$\vec{F} = (mg\sin\alpha\sin\phi - T)\hat{\rho} + (mg\sin\alpha\cos\phi - \mu_d N)\hat{\phi} + (N - mg\cos\alpha)\hat{k} \quad (3.3.8)$$

pero como no hay movimiento en la dirección $\hat{k}$ la correspondiente componente de la fuerza tiene que ser nula, lo que implica que

$$N = mg\cos\alpha \quad (3.3.9)$$

El torque es $\vec{\tau} = R\hat{\rho} \times \vec{F}$, por tanto el torque tiene sólo componente a lo largo de $\hat{k}$.

De (1.2.5) se obtiene que la velocidad y la aceleración están dadas, en el caso actual, por

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi} \quad \vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} \quad (3.3.10)$$

por lo que el momento angular vale

$$\vec{\ell} = m(R\hat{\rho}) \times (R\dot{\phi}\hat{\phi}) = mR^2\dot{\phi}\hat{k} \quad (3.3.11)$$

y de aquí

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = mR^2\ddot{\phi}\hat{k} \quad (3.3.12)$$

que es consistente con que el torque también apunta en la dirección $\hat{k}$. La ecuación dinámica que resulta es

$$R\ddot{\phi} = g \sin \alpha \cos \phi - \mu_d g \cos \alpha \quad (3.3.13)$$

Si esta ecuación es multiplicada por $\dot{\phi}$ se puede integrar fácilmente y se obtiene

$$\frac{1}{2}R\dot{\phi}^2 = (\sin \alpha \sin \phi - \mu_d \phi \cos \alpha) g \quad (3.3.14)$$

Si en este resultado se usa $\phi = \phi_1$, para el cual el péndulo se detiene, se debe tener que el lado izquierdo sea nulo y entonces

$$0 = (\sin \alpha \sin \phi_1 - \mu_d \phi_1 \cos \alpha) g \quad (3.3.15)$$

que implica

$$\mu_d = \frac{\sin \phi_1}{\phi_1} \tan \alpha. \quad (3.3.16)$$

Si conoce μ_e decida si el péndulo reiniciará su movimiento. ◀

♠ Considere el sistema que se muestra en la figura 3.8. Se trata de un bloque de masa m sobre una cinta sin fin que se mueve con rapidez uniforme v_0 . El bloque está además unido a un resorte de constante elástica k y largo natural D_0 . El bloque tiene coeficientes de roce estático y dinámico μ_e y μ_d con la cinta. Haga un análisis exhaustivo del tipo de movimiento que tiene el bloque según el valor de v_0 cuando los demás parámetros están fijos. Puede darse las condiciones iniciales que estime conveniente.

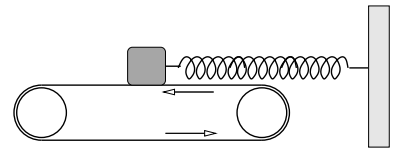


Figura 3.8: Un bloque apoyado en una cinta sin fin está también unido a un resorte. Puede haber momentos en que haya roce estático.

3.4. Roce viscoso

3.4.1. Generalidades

Cualquiera que haya tratado de correr con el agua hasta la cintura sabe que el paso de un cuerpo a través de un medio fluido encuentra una resistencia al movimiento. A esta fuerza la llamaremos *fuerza de roce viscoso*.

Este fenómeno es complejo porque depende de muchos parámetros. Por ejemplo importa la forma del sólido, pero además—dada una forma—depende del ángulo con que el cuerpo enfrenta al fluido, de la naturaleza de la superficie (suave, áspera ..) y de la forma específica como el fluido se relaciona con la superficie sólida (por ejemplo, importa si un líquido moja o no moja a ese sólido), depende de la temperatura etc.

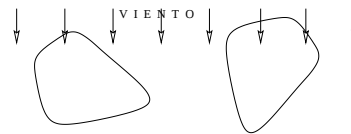


Figura 3.9: El roce viscoso depende de la forma del objeto y también del ángulo entre esa forma y la velocidad relativa al medio fluido.

Simplificando mucho el fenómeno se puede decir que hay dos regímenes: el fluido rodea al sólido en forma suave (se dice, flujo *laminar*), o bien el fluido forma turbulencias. En el primer caso la ley de roce queda bien descrita por una ley lineal (ver más abajo en la sec. §3.4.2) o, si es turbulento, por una ley cuadrática, descrita en la sec. §3.4.3.

3.4.2. Roce viscoso lineal

La ley de roce viscoso lineal establece que esta fuerza es proporcional a la velocidad relativa entre el sólido y el fluido y el coeficiente de proporcionalidad es negativo

$$\vec{F}_{rvl} = -c \vec{v} \quad (3.4.1)$$

donde $c > 0$, y c , como ya se ha dicho depende de una gran cantidad de parámetros particulares a cada caso. Por ejemplo, en el caso de una esfera en movimiento lento se puede establecer que

$$c = 6\pi\xi R$$

donde ξ es la viscosidad del fluido y R es el radio de la esfera.

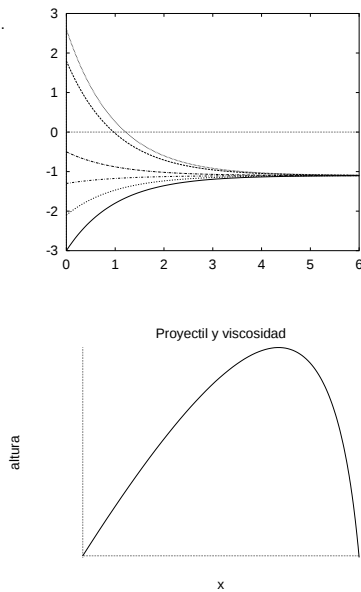


Figura 3.10: Arriba: cualquiera que sea la condición inicial para v_z esta componente de la velocidad, con el transcurso del tiempo $v_z(t)$ se acerca siempre a un mismo valor asintótico. Abajo: Trayectoria de un proyectil para el cual la viscosidad del aire tiene un efecto apreciable. Esta curva corresponde a la función $z(x)$ dada en (3.4.9).

Ejemplo: Consideremos el lanzamiento de un proyectil tomando en cuenta el roce viscoso del aire, el cual supondremos que es de tipo lineal. La ecuación de movimiento es

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -c \frac{d\vec{r}}{dt} + m \vec{g} \quad (3.4.2)$$

En coordenadas cartesianas con eje Z vertical, y escogiendo la orientación del eje X tal que la velocidad inicial conocida sea $\vec{v}_0 = \hat{i}v_{x0} + \hat{k}v_{z0}$, todo el movimiento transcurre en el plano XZ y la ecuación se puede escribir por componentes en la forma

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -cv_x \\ m \frac{dv_z}{dt} &= -cv_z - mg \end{aligned}$$

que son dos ecuaciones independientes. La segunda ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{\frac{dv_z}{dt}}{v_z + \frac{mg}{c}} = -\frac{c}{m} \quad \text{o bien} \quad (3.4.3)$$

$$\frac{dv_z}{v_z + \frac{mg}{c}} = -\frac{c}{m} dt \quad (3.4.4)$$

Recordando que la primitiva asociada a integrar sobre v_z al lado izquierdo es

$$\ln\left(v_z + \frac{mg}{c}\right)$$

y la primitiva al integrar sobre t al lado derecho es t mismo entonces, integrando entre $t = 0$ y t a la derecha y, correspondientemente, entre v_{z0} y $v_z(t)$ a la izquierda, se obtiene

$$v_z(t) = v_{z0} e^{-ct/m} - \frac{mg}{c} (1 - e^{-ct/m}) \quad (3.4.5)$$

En particular, se puede ver que cuando $t \rightarrow \infty$, $v_z \rightarrow -\frac{mg}{c}$. En la figura 3.10 se muestra la evolución de v_z con diversos valores iniciales v_{z0} .

Puesto que la velocidad asintótica en este ejemplo, es negativa se puede observar que si el valor inicial es positivo, en algún momento se anula. Esto quiere decir que el proyectil está inicialmente subiendo $v_z(0) > 0$, en algún momento t^* su velocidad vertical se anula $v_z(t^*) = 0$ para finalmente comenzar a descender, $v_z(t) < 0$.

♣ Demuestre que la función $z(t)$ que surge de lo anterior es

$$z(t) = z_0 + \frac{m}{c}(v_{z0} - gt) + \frac{m^2 g}{c^2} - \frac{m}{c} \left(\frac{mg}{c} + v_{z0} \right) e^{-ct/m} \quad (3.4.6)$$

Una trayectoria balística con este tipo de viscosidad se obtiene usando (3.4.6) y una expresión similar para $x(t)$. La única diferencia es que en la dirección X se debe eliminar los términos que contienen g ,

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{c}v_{x0} - \frac{m}{c}v_{x0} e^{-ct/m} \quad (3.4.7)$$

Combinando (3.4.6) y (3.4.7) se obtiene trayectorias como la que se muestra en la figura 3.10.

Marginalmente se hace notar que de (3.4.7) se puede despejar t para utilizar esa forma en (3.4.6) lo que da a z como función de x . En efecto

$$t = \frac{m}{c} \ln \left[1 - \frac{c(x - x_0)}{m v_{x0}} \right] \quad (3.4.8)$$

y entonces

$$z(x) = z_0 + \frac{mg}{c v_{x0}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}(x - x_0) + \frac{m^2 g}{c^2} \ln \left[1 - \frac{c(x - x_0)}{m v_{x0}} \right] \quad (3.4.9)$$

es la trayectoria del lanzamiento balístico con roce viscoso lineal.

♣ Se sabe que en lanzamiento balístico sin roce viscoso desde un punto a otro a igual altura, el alcance máximo se obtiene cuando la velocidad inicial forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con respecto a la vertical. Obtenga la expresión para el alcance máximo en una situación similar pero cuando el roce viscoso lineal es tomado en cuenta.

Tanto la solución (3.4.5) y (3.4.6) parecen ser singulares para $c = 0$, ya que c aparece en denominadores. Esto, sin embargo, es solo aparente. Si se analiza, por ejemplo, el caso de (3.4.5), el primer término sencillamente tiende a

v_{z0} mientras que el paréntesis en el último término contiene $(1 - \exp[-ct/m]) = 1 - 1 + \frac{ct}{m} - \frac{c^2 t^2}{2m^2} + \dots$. Si esta expresión se multiplica por mg/c y se hace el límite $c \rightarrow 0$ se obtiene gt y el resultado neto es $v_z(t; c = 0) = v_{z0} - gt$ que es la solución conocida en el caso sin roce viscoso.

3.4.3. Roce viscoso cuadrático

En el caso del roce viscoso cuadrático la fuerza de roce es

$$\vec{F}_{\text{rvc}} = -\eta \|\vec{v}\| \vec{v} \quad (3.4.10)$$

donde η depende del fluido de que se trate. En el caso en que el fluido sea un gas una expresión aproximada para η es

$$\eta = \frac{1}{2} \rho A C_d$$

ρ es la densidad del fluido, A es un área del orden de la que se obtiene de la proyección del proyectil al plano perpendicular a la velocidad relativa y C_d es el *coeficiente de arrastre*. Si el proyectil es una esfera, $A \approx \pi R^2$.

3.4.3.1. Sin gravedad:

Como primer ejemplo resolvamos el sencillo caso en que ésta es la única fuerza y el movimiento es en una sola dirección. Supondremos que $v > 0$ todo el tiempo, entonces

$$m\dot{v} = -\eta v^2$$

que se resuelve primero escribiendo la ecuación anterior en la forma

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\eta}{m} dt$$

Si el lado derecho se integra entre $t = 0$ y un valor arbitrario de t , el lado derecho debe integrarse entre el valor de v en $t = 0$, que se denotará v_0 y un valor arbitrario $v(t)$. Se obtiene entonces

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{\eta t}{m} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\eta v_0}{m} t} \quad (3.4.11)$$

Se puede notar que la velocidad inicial es realmente v_0 y que la velocidad decrece monótonamente con el tiempo acercándose cada vez más a cero.

3.4.3.2. Con gravedad:

Ahora se analizará un caso en que además hay gravedad. Este caso es intrínsecamente mucho más complicado que el caso de viscosidad lineal y solo se estudiará el movimiento rectilíneo. Se supondrá que el eje Z es vertical hacia arriba y que hay una fuerza constante $-mg$.

La fuerza de roce viscoso apunta hacia arriba si la partícula desciende y apunta hacia abajo si va ascendiendo, es decir,

$$m\ddot{z}(t) = -\eta|\dot{z}(t)|\dot{z} - mg \quad (3.4.12)$$

Como siempre, la aceleración es $\ddot{z} = \dot{v}$ y la velocidad es $\dot{z} = v$.

- El descenso, $v(t) < 0$. En este caso $|\dot{z}| = -v$ por lo que la ecuación es

$$m\dot{v} = \eta v^2 - mg \quad (3.4.13)$$

Existe una solución en que la velocidad vale $v = -\sqrt{mg/\eta}$ todo el tiempo, ya que con ella el lado derecho de la ecuación anterior es nulo. A esta velocidad (negativa) tan particular la llamaremos $-v_\infty$, con

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\eta}} \quad (3.4.14)$$

que es una cantidad positiva.

Para hacer más transparente el método de solución se hará el cambio de función $v(t) = -V(t)$ y como se trata del caso $v < 0$ entonces $V > 0$. La ecuación dinámica con esta nueva variable es

$$m\dot{V} = -\eta V^2 + mg \quad \text{o bien} \quad \dot{V} = -\frac{\eta}{m}(V^2 - v_\infty^2) \quad (3.4.15)$$

y se puede escribir como una relación diferencial,

$$\frac{dV}{V^2 - v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} dt \quad (3.4.16)$$

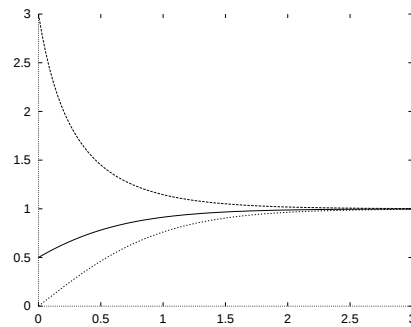


Figura 3.11: Se puede apreciar el comportamiento de $V(t)$ dado en (3.4.18) para diversas velocidades iniciales y un v_∞ común.

Que, al lado izquierdo, se integra desde V_1 que es el valor inicial ($t = 0$) de $V(t)$

$$\int_{V_1}^{V(t)} \frac{dV}{V^2 - v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^t dt' = -\frac{\eta}{m} t \quad (3.4.17)$$

La integral del lado izquierdo solo tiene sentido si el denominador en el integrando no se anula en el rango de la integración. Veremos que este denominador nunca se anula.

La primitiva de la integral a la izquierda es

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left(\frac{v_\infty - V(t)}{v_\infty + V(t)} \right)$$

y del lado derecho es $-\eta t/m$. Al integrar se obtiene entonces

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left(\frac{v_\infty - V(t)}{v_\infty + V(t)} \cdot \frac{v_\infty + V_1}{v_\infty - V_1} \right) = -\frac{\eta t}{m}$$

Si para algún instante finito ocurriera que $V(t) = v_\infty$ el argumento del logaritmo se anularía lo que implicaría un lado izquierdo igual a $-\infty$ que contradice que se trate de un instante finito. Por tanto $V(t) \neq v_\infty$ para todo t finito.

El lado izquierdo se anula cuando $V(t) = V_1$ que es lo que se debe esperar ya que V_1 es la velocidad cuando $t = 0$. La solución explícita es

$$V(t) = \frac{V_1 \cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) + v_\infty \sinh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)}{v_\infty \cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) + V_1 \sinh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)} v_\infty \quad (3.4.18)$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ la fracción tiende a 1 y se obtiene v_∞ como debe ser mientras que si se toma $t = 0$ los senos hiperbólicos se anulan mientras los cosenos hiperbólicos se hacen 1 y se obtiene $V(0) = V_1$. Esta función es monótona entre $t = 0$ y $t = \infty$.

En el caso especial $V_1 = 0$ el resultado es

$$V(t; V_1 = 0) = v_\infty \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) \quad (3.4.19)$$

Otro caso especial de (3.4.18) es aquel en que no hay gravedad. Lo más sencillo es resolver la ecuación desde el comienzo con velocidad inicial V_1 y

$g = 0$. Pero si se toma el límite de (3.4.18) cuando $v_\infty \rightarrow 0$. Se obtiene

$$V(t; g = 0) = \frac{V_1}{1 + \frac{\eta V_1}{m} t} \quad (3.4.20)$$

que es el resultado ya visto (3.4.11).

Ahora se deducirá la velocidad v_f que tiene un cuerpo, que comienza a caer desde el reposo y altura $z = h$, al llegar al punto $z = 0$. Cuando no hay roce un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba, regresa al punto de partida con una velocidad igual a la de partida excepto por el signo. Con viscosidad se verá que eso no es cierto.

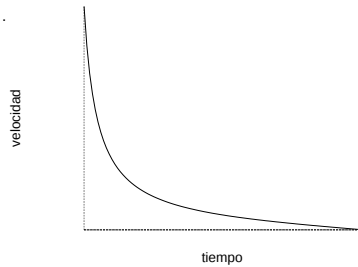


Figura 3.12: Forma como decrece $v(t)$ en un movimiento ascendente por efecto del peso y de una viscosidad cuadrática según (3.4.28).

La forma más cómoda de llegar a este resultado se consigue desde (3.4.16) retomando que $V = -v$ y por tanto $dV = -dv$

$$\frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{g dt}{v_\infty^2} \quad (3.4.21)$$

Al multiplicar esta relación por v , en el numerador de la izquierda aparece $v dv = \frac{1}{2} dv^2$ y al derecho $\dot{v} dt = dz$

$$\frac{1}{2} \int_0^{v_f^2} \frac{dv^2}{v^2 - v_\infty^2} = \int_h^0 \frac{g dz}{v_\infty^2} \quad (3.4.22)$$

Lo que se acaba de escribir es que la velocidad varía desde cero a v_f mientras la posición va desde $z = h$ hasta $z = 0$. Al integrar se obtiene

$$h = -\frac{v_\infty^2}{2g} \ln \left(1 - \frac{v_f^2}{v_\infty^2} \right) \quad (3.4.23)$$

o bien,

$$v_f = \sqrt{1 - \exp \left[-\frac{2gh}{v_\infty^2} \right]} v_\infty \quad (3.4.24)$$

• El ascenso, $v > 0$. La ecuación es

$$m \dot{v}(t) = -\eta v^2 - mg \quad \text{o bien} \quad \dot{v}(t) = -\frac{\eta}{m} (v^2 + v_\infty^2) \quad (3.4.25)$$

♣ *Haga el límite de (3.4.24) cuando el coeficiente de roce viscoso η se anula.*

Puesto que $v > 0$ (3.4.25) representa una partícula P moviéndose en dirección opuesta a la fuerza constante $-mg$, lo que permite adivinar que P acabará por detenerse. Seguidamente comenzará a moverse en la dirección opuesta pero ese es el otro caso ya estudiado $v < 0$.

De (3.4.25) se obtiene que

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^t dt' \quad (3.4.26)$$

que conduce a

$$\frac{1}{v_\infty} \left[\arctan\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) - \arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) \right] = -\frac{\eta}{m} t \quad (3.4.27)$$

que puede ser reescrito como

$$v(t) = v_\infty \tan\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) - \frac{g t}{v_\infty}\right) \quad (3.4.28)$$

Esta expresión que tiene una apariencia algo complicada está representada en la figura 3.12, vale v_0 cuando $t = 0$ y luego decrece monótonamente hasta anularse en un tiempo finito t_1 . Si se toma el límite $g \rightarrow 0$ da el límite correcto descrito por (3.4.11).

La solución se hace cero cuando el argumento de la función tangente se anula, lo que ocurre en el instante t_1 tal que

$$t_1 = \frac{v_\infty}{g} \arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) \quad (3.4.29)$$

La distancia h que recorre desde la posición inicial hasta la posición de máxima altura en el instante t_1 en que el cuerpo se detiene se puede obtener a partir de multiplicar los integrandos de la ecuación inicial (3.4.25) por $v(t)$

$$\int_{v_0}^0 \frac{v dv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^h dz \quad (3.4.30)$$

que lleva a

$$h = \frac{m}{2\eta} \ln\left(\frac{v_0^2}{v_\infty^2} + 1\right) \quad (3.4.31)$$

Si esta expresión se iguala con la que se obtuvo en (3.4.23) se despeja

$$v_f^2 = \frac{v_0^2}{1 + \frac{v_0^2}{v_\infty^2}} \quad (3.4.32)$$

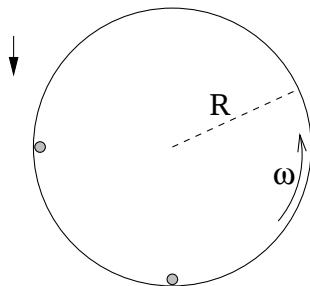
que claramente muestra que $v_f^2 < v_0^2$. La igualdad se da tan solo si $\eta = 0$.

♣ Deduzca que el viaje de regreso tarda un tiempo Δ ,

$$\Delta = \frac{v_\infty}{g} \arctan \left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_\infty^2}} \right) \quad (3.4.33)$$

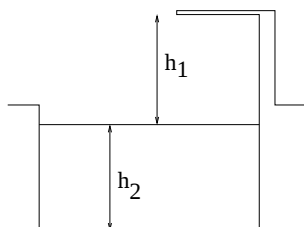
3.5. Problemas

- 3.1 Cuando comienza a girar un disco horizontal con aceleración angular $\ddot{\phi} = d\omega/dt = \alpha_0$ una hormiga se encuentra durmiendo a distancia R del centro de rotación. Cuando la velocidad angular alcanza el valor ω_0 la hormiga comienza a deslizarse. Obtenga el valor de coeficiente de roce estático hormiga-disco.
- 3.2 Sobre una superficie horizontal hay un cuerpo de masa m unido a un resorte horizontal de constante elástica k y longitud natural D_0 . El coeficiente de roce dinámico entre el cuerpo y la superficie es μ . Si desde el reposo el cuerpo es liberado cuando el resorte está estirado un largo $D(0) = D_0 + d$ discuta cuantas veces el cuerpo alcanza a oscilar antes de detenerse. Analice distintas situaciones.
- 3.3 Un anillo desliza, en ausencia de gravedad y con coeficiente de roce μ en un riel circunferencial de radio R . Si en $t = 0$, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, determine $\phi(t)$.

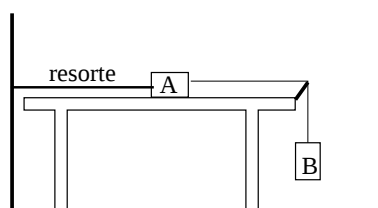


- 3.4 Un cilindro de radio R y eje horizontal rota sobre su eje a velocidad angular constante ω . En el instante $t = 0$ están moviéndose solidariamente con el cilindro dos cuerpos de masa m , el primero está a la misma altura que el eje, en la zona descendiente y el segundo está en el punto más bajo. Determine los valores posibles para el coeficiente de roce estático para que estos cuerpos no deslicen en ese instante. Analice qué puede ocurrir en momentos posteriores.

- 3.5 Un cuerpo en reposo se deja caer al agua desde una altura h_1 por sobre la superficie. Desprecie las fuerzas de roce que pudiera haber con el aire. Cuando el cuerpo penetra el agua aparecen dos fuerzas, la de



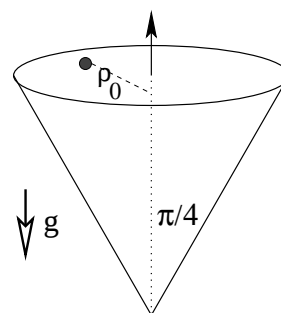
roce viscoso, $\vec{F}_{rvl} = -c\vec{v}$ y una fuerza llamada empuje, vertical hacia arriba de magnitud λmg . Determine el valor máximo que puede tomar h_1 para que el cuerpo no toque el fondo, que está a distancia h_2 de la superficie.



- 3.6 Un cuerpo A de masa m está sobre una mesa, unido a la pared por un resorte de constante elástica k y largo natural D_0 . De A sale un hilo tirante horizontal que pasa por un apoyo ideal (sin roce) y luego de este hilo cuelga un cuerpo B que también tiene masa m .

Se conoce los coeficientes $\mu_e < 1$ y μ_d de A con la mesa y el sistema se suelta desde el reposo en el momento en que el resorte tiene su largo natural. **a)** Determine el largo máximo que alcanza el resorte; **b)** encuentre el valor máximo que toma la rapidez desde el instante inicial hasta el momento del estiramiento máximo; **c)** ¿cuál es el valor mínimo de μ_d para que los bloques queden en reposo en el momento del estiramiento máximo?

- 3.7 Se tiene una superficie cónica que gira con velocidad angular constante ω en torno a su propio eje de simetría, que se mantiene vertical. El ángulo entre el eje y una generatriz es $\frac{\pi}{4}$. En la superficie interna está apoyado un cuerpo de masa m , a distancia ρ_0 del eje, el cual, debido al roce con coeficiente μ_e , no desliza a pesar de su peso. **a)** Obtenga la velocidad angular $\omega = \omega_c$ necesaria para que tal fuerza sea exactamente nula. **b)** Suponga que ahora $\omega > \omega_c$ y obtenga el máximo valor que puede tener ω para que el cuerpo no deslice.

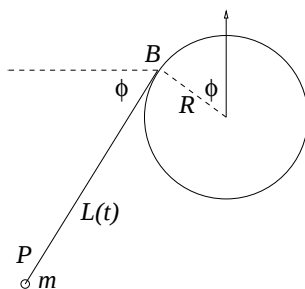


- 3.8 Considere un punto material de masa m que se mueve, libre de gravedad, a lo largo de una recta sometido a tan solo dos fuerzas: una fuerza de roce viscoso

lineal y a una fuerza externa oscilante del tipo $a_0 \sin(\omega t)$. Se da como dato el coeficiente c de roce lineal, los dos parámetros (a_0, ω) de la fuerza oscilante, la posición inicial $x(0) = 0$ y la velocidad inicial $v(0) = v_0$. Obtenga tanto $v(t)$ como $x(t)$. Demuestre, en particular, que el punto nunca se aleja más del origen que una cierta cota x_1 y que asintóticamente el movimiento es puramente oscilante.

- 3.9 Un esquiador está bajando una ladera que es un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Dos roces intervienen: el roce con la nieve, caracterizado por un coeficiente μ y el roce con el aire, $-c\vec{v}$. Inicialmente el esquiador tiene una velocidad $\vec{v}_0$ paralela al plano inclinado y apuntando en la dirección de la pendiente máxima. Analice las condiciones bajo las cuales: (i) se detiene en un tiempo finito t_1 , determine t_1 ; (ii) desciende cada vez más rápido; (iii) desciende cada vez más lento pero nunca se detiene; (iv) baja todo el tiempo con la velocidad inicial.

- 3.10 Hay un hilo enrollado alrededor de un cilindro de radio R . En la punta del hilo hay un cuerpo de masa m que se suelta, cuando $\phi(0) = 0$, con velocidad inicial $\vec{v}_0$ perpendicular al hilo, lo que determina que el hilo se comienza a enrollar.



La distancia inicial entre el cuerpo y el punto B de tangencia del hilo con el cilindro es L_0 (ver figura). **a)** Determine la ecuación de movimiento. **b)** Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función de ϕ . **c)** Suponiendo que el hilo se corta si la tensión sobrepasa el valor $T_{\max}$ obtenga el valor de ϕ en el momento del corte.

Indicación: Puede convenir tomar el origen en el eje del cilindro y escribir el vector posición del cuerpo en función de vectores unitarios $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ asociados al punto B de tangencia del hilo. Es decir, el vector posición del cuerpo masivo es suma de los vectores posición del punto B y el vector que apunta en la dirección del hilo y que es tangente al cilindro, en la dirección $\hat{\phi}$.

Capítulo 4

Trabajo y energía

4.1. Trabajo y energía cinética

El trabajo dW que efectúa una fuerza aplicada $\vec{F}$ sobre un cuerpo P que se desplaza una distancia $d\vec{r}$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.1.1)$$

Si no hay desplazamiento no hay trabajo.

Si la fuerza varía de punto en punto, esto es, la fuerza depende de $\vec{r}$: $\vec{F}(\vec{r})$ y el cuerpo P se mueve desde el punto a hasta el punto b , a lo largo del camino C , entonces el trabajo efectuado por la fuerza es

$$W_{p \rightarrow q}(C) = \int_p^q \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.1.2)$$

El trabajo se mide en Joule, que es una unidad de energía.

Ejemplo: Considérese un cuerpo que se mueve en el plano XY debido a una fuerza dada por la expresión

$$\vec{F} = -\frac{Ax^2y^5}{5}\hat{i} - \frac{Bx^3y^4}{3}\hat{j} \quad (4.1.3)$$

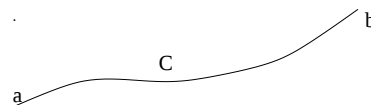
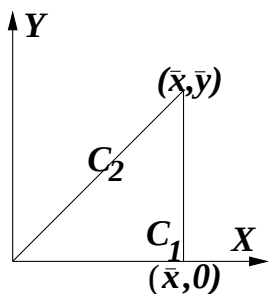


Figura 4.1: El trabajo de una fuerza $\vec{F}$ cuando el cuerpo se desplaza desde un punto a a un punto b a lo largo de un camino C . Sólo en casos especiales la integral (4.1.2) no depende del camino C seguido al hacer la integral.

Se hará la integral de trabajo asociada a esta fuerza, entre los puntos $(0,0)$ y $(\bar{x},\bar{y})$ siguiendo dos caminos: C_1 es el camino que primero va en forma recta desde el origen hasta $(\bar{x},0)$ y luego en forma recta desde este último punto a $(\bar{x},\bar{y})$ y C_2 es el camino recto entre los dos puntos extremos.

La integral de trabajo por C_1 es



$$\begin{aligned} W(C_1) &= \int_0^{\bar{x}} \vec{F} \cdot \hat{i} dx + \int_{x=\bar{x}(y=0)}^{\bar{y}} \vec{F} \cdot \hat{j} dy \\ &= 0 - \frac{\bar{x}^3}{3} \frac{B\bar{y}^5}{5} \\ &= -\frac{B\bar{x}^3\bar{y}^5}{15} \end{aligned}$$

Figura 4.2: En el ejemplo se definen dos caminos, C_1 y C_2 para calcular la integral de trabajo.

Para poder hacer la integral por C_2 se debe tener claro que (a) la recta C_2 es descrita por la ecuación $\bar{x}y = \bar{y}x$, entonces se puede, por ejemplo, integrar con respecto a x usando un integrando donde se ha reemplazado $y = \bar{y}x/\bar{x}$; (b) se debe usar $d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy = (\hat{i} + \hat{j}\frac{\bar{y}}{\bar{x}})dx$. (c)

Ahora es trivial hacer el producto punto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ e integrar con respecto a x lo que da:

$$W(C_2) = -\left(\frac{A}{40} + \frac{B}{24}\right)\bar{x}^3\bar{y}^5$$

que no coincide con $W(C_1)$ salvo que $A = B$. ◀

♣ Obtenga la forma de $d\vec{r}$ en el ejemplo anterior con $\bar{x} = \bar{y}$ para el caso en que se desee hacer la integral a lo largo de una semicircunferencia que parte del origen hacia arriba y tiene su centro en $(\bar{x},0)$. Calcule la integral de camino en el caso $A = B$.

En la definición (4.1.2) no se ha dicho que $\vec{F}$ sea la única causa del movimiento. Cuando sobre el cuerpo P están actuando varias fuerzas $\vec{F}_k$, se puede definir un trabajo $W_{a \rightarrow b}^{(k)}(C)$ asociado a cada una de ellas usando el camino C de p a q ,

$$W_{p \rightarrow q}^{(k)}(C) = \int_p^q \vec{F}_k \cdot d\vec{r} \quad (4.1.4)$$

Si el desplazamiento es perpendicular a la fuerza considerada, esa fuerza no ejerce trabajo.

El *trabajo total* es el que efectúa la fuerza total,

$$\begin{aligned}
 W_{a \rightarrow b}^{\text{total}}(C) &= \int_a^b \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
 &= m \int_p^q \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\
 &= m \int_{t_p}^{t_q} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\
 &= m \int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} \vec{v} \cdot d\vec{v} \\
 &= \frac{m}{2} \int_{v_p^2}^{v_q^2} dv^2 \\
 &= \frac{m}{2} v_q^2 - \frac{m}{2} v_p^2
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Puesto que la *energía cinética* K de un punto material de masa m y velocidad $\vec{v}$ es

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \tag{4.1.6}$$

se obtiene que el trabajo total puede expresarse como la diferencia entre la energía cinética final y la energía cinética inicial.

$$W_{p \rightarrow q}^{\text{total}}(C) = K_q - K_p \tag{4.1.7}$$

El signo de W^{total} indica si el sistema ha ganado ($W > 0$) o perdido ($W < 0$) energía cinética. Por ejemplo, si una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba con rapidez inicial v_0 y en algún momento se detiene, el trabajo efectuado por la fuerza total a lo largo de la trayectoria, sobre esa partícula, desde que fue lanzada hasta que se detiene, es $-\frac{1}{2} m v_0^2$.

El trabajo de la fuerza total, en el caso de un cuerpo que se mueve con roce sobre una superficie a rapidez constante, es nulo. Pero, para comprender bien los conceptos es preferible separar el trabajo efectuado por la fuerza f que arrastra al cuerpo, W_f , del trabajo W_r asociado a la fuerza de roce. El trabajo W_f es positivo porque el desplazamiento apunta en la misma dirección que la fuerza, mientras que W_r es negativo y se cumple que $W_f + W_r = 0$.

» En un movimiento circunferencial con velocidad angular constante la fuerza total no efectúa trabajo, por dos razones: ella es perpendicular al desplazamiento y la rapidez no cambia.

Si un cuerpo desliza con roce sobre una superficie en reposo, la fuerza normal $\vec{N}$ no efectúa trabajo, porque es perpendicular al desplazamiento.

Ejemplo: Se ilustra una forma como se puede utilizar la relación (4.1.7) para resolver un problema. Se considerará el ejemplo visto en §3.3.2 de un péndulo de largo R apoyado en un plano inclinado, con el cual tiene roce, figura 3.7. El desplazamiento es $d\vec{r} = \hat{\phi} R d\phi$. De las fuerzas, tanto la tensión $\vec{T}$ del hilo, como la normal $\vec{N}$ son perpendiculares al desplazamiento, por tanto no efectúan trabajo. Las fuerzas que sí contribuyen son la fuerza de roce $\vec{F}_{RD} = -\mu N \hat{\phi}$, (con $N = mg \cos \alpha$) y la componente del peso a lo largo de $\hat{\phi}$, que es $\hat{\phi} mg \sin \alpha \cos \phi$. El trabajo de la fuerza total, entonces, es el trabajo que efectúan estas dos fuerzas:

$$W_{\phi=0 \rightarrow \phi=\phi_1}^{\text{total}} = \int_0^{\phi_1} (mg \sin \alpha \cos \phi - \mu mg \cos \alpha) R d\phi \quad (4.1.8)$$

donde ϕ_1 es el ángulo en el cual el péndulo se detiene. Como ha partido del reposo el trabajo total tiene que ser cero y por ello la integral anterior debe ser nula

$$mg \sin \alpha \sin \phi_1 - \mu mg \cos \alpha \phi_1 = 0 \quad (4.1.9)$$

que implica la relación $\mu = \frac{\sin \phi_1}{\phi_1} \tan \alpha$ que es (3.3.16).

4.2. Potencia

Se define la *potencia* como la variación del trabajo con el tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (4.2.1)$$

Si esta potencia es positiva se trata de potencia entregada al sistema y, si es negativa, es potencia que el sistema pierde. Cuando se trata de la potencia asociada a la fuerza total, P es energía cinética por unidad de tiempo que el sistema gana ($P > 0$) o pierde ($P < 0$).

Si una de las fuerzas actuando sobre un cuerpo es $\vec{F}$ y en ese instante su velocidad en $\vec{v}$ entonces

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (4.2.2)$$

y la potencia asociada a esta fuerza es

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.2.3)$$

Si la dependencia de P en el tiempo es conocida, el trabajo puede calcularse como

$$W = \int_{t_0}^t P(t') dt'$$

» Un cuerpo en caída libre tiene velocidad $\vec{v} = -gt\hat{k}$ y la fuerza que está actuando es el peso $\vec{F} = -mg\hat{k}$. La potencia que el peso le está entregando al cuerpo que cae es $P = (-mg\hat{k}) \cdot (-gt\hat{k}) = mg^2 t$.

Pero si el cuerpo ha sido lanzado hacia arriba, entonces $\vec{v} = (v_0 - gt)\hat{k}$ y, mientras $t < v_0/g$, se está perdiendo energía cinética porque el trabajo de la fuerza peso en ese lapso es negativo: $P = -(v_0 - gt)mg$.

» La fuerza efectiva que mantiene constante la velocidad de un automóvil es opuesta al roce viscoso cuadrático, y es $F = \eta v^2$. La potencia entonces es $P = \eta v^3$, lo que muestra lo rápido que aumenta la potencia consumida a medida que aumenta la velocidad.

4.3. La energía cinética de un sistema

Recordando que $\vec{r}_a = \vec{R}_G + \vec{\rho}_a$ se puede demostrar que la energía cinética puede ser separada en la energía cinética del sistema en su conjunto y la energía cinética total con respecto al centro de masa:

$$\begin{aligned} K^{\text{tot}} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a v_a^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a (\vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a (V_G^2 + \dot{\rho}_a^2 + 2\dot{\rho}_a \cdot \vec{V}_G) \end{aligned}$$

pero el último término en el paréntesis es nulo debido a que $\sum_a m_a \vec{\rho}_a = 0$. De aquí que

$$K^{\text{tot}} = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\rho}_a^2 \quad (4.3.1)$$

La energía cinética total se separa en la energía cinética asociada a la masa total con la velocidad del centro de masa y la energía cinética con respecto al sistema de referencia G .

4.4. Fuerzas conservativas y energía potencial

4.4.1. Energía mecánica

Se dice que una fuerza es *conservativa* cuando la integral de trabajo (4.1.2) que se le asocia no depende del camino C escogido. Si se integra—por diversos caminos—entre un punto $\vec{r}_0$, que se fija arbitrariamente, y un punto $\vec{r}$, se obtiene siempre el mismo valor $W(\vec{r})$.

Resulta natural, entonces, definir la función asociada a la integral trabajo.

Supongamos que se escoge un punto arbitrario $\vec{r}_0$ y se hace la integral de trabajo desde este punto a un punto cualquiera $\vec{r}$. En general esta integral depende del camino escogido. Si la fuerza que se está considerando es tal que el trabajo que se le asocia no depende del camino de integración, sino que da el mismo valor cada vez que se integra desde $\vec{r}_0$ hasta $\vec{r}$, adquiere sentido definir una función

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1)$$

a la que se llama *energía potencial* asociada a la fuerza $\vec{F}$. Estrictamente debiera decirse que U depende tanto de $\vec{r}$ como de $\vec{r}_0$, pero ya se verá que $\vec{r}_0$ siempre es dejado fijo mientras que el otro punto es variable y juega un papel interesante.

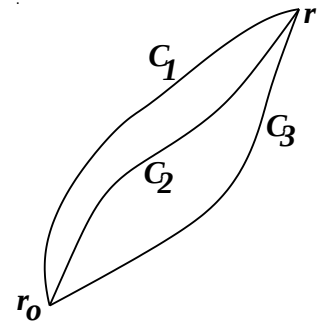


Figura 4.3: Por definición el trabajo de una fuerza conservativa que se calcula con caminos C_1 , C_2 etc. entre puntos $\vec{r}_0$ y $\vec{r}$ es siempre el mismo.

» En el párrafo anterior se ha dicho que existen fuerzas, llamadas *conservativas*, para las cuales la integral de trabajo no depende del camino de integración y para estas fuerza se puede definir una función escalar $U(\vec{r})$ llamada energía potencial.

Si la fuerza total $\vec{F}^{\text{total}}$, actuando sobre un cuerpo, es una fuerza conservativa, entonces el trabajo que esta fuerza efectúa cuando el cuerpo se desplaza de p a q es

$$\begin{aligned}
 W_{p \rightarrow q} &= \int_{\vec{r}_p}^{\vec{r}_q} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{\vec{r}_p}^{\vec{r}_0} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_q} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_p} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_q} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
 &= U(\vec{r}_p) - U(\vec{r}_q)
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

pero como ya se sabe que también es

$$W_{p \rightarrow q} = K_q - K_p \tag{4.4.3}$$

se obtiene que

$$K_q + U(\vec{r}_q) = K_p + U(\vec{r}_p) \tag{4.4.4}$$

Puesto que los puntos p y q son arbitrarios se puede afirmar que la *energía mecánica total*

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r})} \tag{4.4.5}$$

permanece constante durante la evolución del movimiento.

» Conclusión: fuerza total conservativa implica que la energía mecánica total, (4.4.5) es una cantidad conservada, es decir, mantiene un mismo valor durante la evolución del sistema.

De E , dado en (4.4.5), se puede calcular dE/dt

$$\frac{dE}{dt} = m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \nabla U \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{v} \cdot (m\dot{\vec{v}} + \nabla U) = 0$$

donde se ha hecho uso de

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Arriba $\frac{dU}{d\vec{r}}$ debe interpretarse como ∇U de modo que

$$\nabla U = \sum_s \frac{\partial U}{\partial x_s} \hat{i}_s \quad y \quad \frac{dU}{dt} = \sum_s \frac{\partial U}{\partial x_s} \frac{dx_s}{dt} = \nabla U \cdot \vec{v}$$

donde $\hat{i}_1 \equiv \hat{i}$, $\hat{i}_2 \equiv \hat{j}$, y $\hat{i}_3 \equiv \hat{k}$ son los vectores unitarios asociados a las coordenadas cartesianas.

Más arriba se ha dicho que si $\vec{F}$ es conservativa, entonces su integral de trabajo no depende del camino de integración. Equivalentemente *una fuerza es conservativa si y solo si ella puede ser escrita como menos el gradiente de la función U de energía potencial*,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.4.6)$$

La expresión anterior, escrita en componentes cartesianas, es

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.4.7)$$

Si se toma cualesquiera dos de estas componentes de $\vec{F}$ y se las deriva una vez más, pero con respecto a otra coordenada, se obtiene, por ejemplo,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Teorema que no será demostrado: Una fuerza es conservativa si y solo si

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (4.4.8)$$

que puede ser descrito en forma más compacta como la condición

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad (4.4.9)$$

Nota: La muy utilizada energía potencial debida al peso y que, desde la formulación más elemental de la mecánica, se escribe $U_{\text{peso}} = mgh$, será a veces recomendable representar en la forma

$$U_{\text{peso}} = -m\vec{r} \cdot \vec{g} \quad (4.4.10)$$

En el caso de un sistema de partículas se obtiene

$$U_{\text{peso}} = -M\vec{R}_G \cdot \vec{g} \quad (4.4.11)$$

Ejemplo: Si se usa (4.4.8) en el ejemplo visto inmediatamente después de (4.1.2), se obtiene $\partial F_x / \partial y = Ax^2y^4$ mientras que $\partial F_y / \partial x = Bx^2y^4$, es decir, la fuerza de ese ejemplo es conservativa si y solo si $A = B$ lo que antes se pudo meramente sospechar después de hacer dos integrales. Si $A = B$ se concluye que $U(x,y) = x^3y^5/15$. ◀

4.4.2. Energía mecánica de un sistema

Para un sistema de N partículas de masas m_a ($a = 1, 2 \dots N$) en el que sólo hay fuerzas conservativas entre las partículas y también externas (conservativas) al sistema, la energía mecánica total es

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \sum_{a < b} U_{ab}(\vec{r}_a - \vec{r}_b) + \sum_a U_a(\vec{r}_a) \quad (4.4.12)$$

El primer término es la energía cinética total, el segundo es la suma de las energías potenciales asociadas a las fuerzas internas y el último es la suma de las energías potenciales asociadas a las fuerzas externas conservativas.

Un ejemplo interesante de pensar es el sistema Tierra-Luna con la fuerza externa debida al Sol. Para simplificar se ignora el resto de las fuerzas planetarias. La energía cinética es $K = K_{\text{Tierra}} + K_{\text{Luna}}$. La fuerza interna al sistema es la atracción gravitacional Tierra-Luna y su energía potencial es $U_{TL} = -Gm_T m_L / r^2$. El último término en este caso es la suma de energía potencial de la Tierra debido al Sol y de la Luna debida al Sol. No consideramos más contribuciones a la energía mecánica total porque las que faltan son muy pequeñas. Pero eso no es todo. Existen también las mareas: parte de la energía del sistema Tierra-Luna se gasta en deformar los océanos. Tal energía

mecánica se pierde porque se convierte en un ligero aumento de la temperatura del agua. También la Luna, cuyo interior no es enteramente sólido, se deformaba en un remoto pasado y había pérdida debido a esto. Este último proceso de pérdida de energía se optimizó (minimizando la pérdida de energía) en miles de millones de años haciendo que la Luna siempre muestre la misma cara a la Tierra.

Comprobación de que en el caso conservativo E dada por (4.4.12) se conserva: Parte del cálculo es saber hacer $\sum_{a<b} dU_{ab}/dt$ y aun antes se debe notar que $\nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} = \nabla_{\vec{r}_a - \vec{r}_b} U_{ab} = -\nabla_{\vec{r}_b} U_{ab}$.

$$\frac{d}{dt} \sum_{a<b} U_{ab} = \sum_{a<b} \nabla_{ab} U_{ab} \cdot (\vec{v}_a - \vec{v}_b) = \sum_{a<b} \nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} \cdot \vec{v}_a + \sum_{b<a} \nabla_{\vec{r}_b} U_{ab} \cdot \vec{v}_b = \sum_{a,b} \nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} \cdot \vec{v}_a$$

De aquí que

$$\frac{dE}{dt} = \sum_a \vec{v}_a \cdot \left(m_a \vec{\dot{v}}_a + \sum_b \nabla_{\vec{r}_a} U_{ab} + \nabla_{\vec{r}_a} U_a \right)$$

y el paréntesis redondo es cero porque al producto masa por aceleración de cada partícula a se le resta la fuerza total (conservativa) proveniente de los potenciales.

4.4.3. Energía de un péndulo extendido

Se considerará un péndulo extendido como en la figura 4.4. Se trata de una láminica que tiene la forma de un sector de círculo, con ángulo 2γ . Su movimiento es en su propio plano. Si el péndulo está inclinado en un ángulo α y se considera un punto arbitrario P del sector cuyo vector posición $\vec{r} = \rho \hat{\rho}$ forma un ángulo ϕ con la vertical, entonces se define β tal que $\phi = \alpha + \beta$. El ángulo β tiene el rango $[-\gamma, \gamma]$ que define la apertura del sector. El punto P tiene una velocidad que depende del movimiento del péndulo:

$$\vec{v} = \rho \dot{\alpha} \hat{\phi} \quad \beta \text{ no depende del tiempo}$$

La energía cinética es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int \int \rho^2 \dot{\alpha}^2 \sigma dS \\ &= \frac{\sigma}{2} \dot{\alpha}^2 \left(\int_0^R \rho^3 d\rho \right) \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} d\beta \right) \\ &= \frac{\sigma R^4 \gamma}{4} \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

donde el elemento de área es $dS = \rho d\rho d\beta$ y el elemento de masa es σdS .

Tomando la energía potencial del elemento de superficie dS como $dU = -\sigma g h dS$, se usa que $h = \rho \cos \phi = \rho \cos(\alpha + \beta)$. Integrando resulta

$$U = -\frac{2\sigma g R^3 \sin \gamma}{3} \cos \alpha$$

que, naturalmente, tiene un mínimo en torno a $\alpha = 0$.

Al exigir que la energía total: $K + U$ no varíe en el tiempo se obtiene

$$\ddot{\alpha} = -\frac{4g \sin \gamma}{3R} \frac{\sin \alpha}{\gamma}$$

que es, una vez más, una ecuación de péndulo.

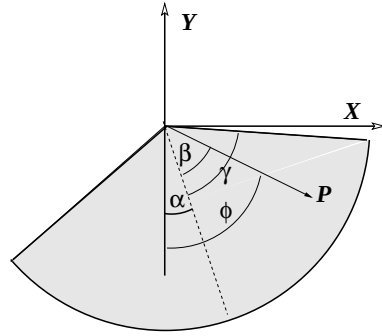


Figura 4.4: Un sector de círculo, de apertura 2γ y radio R tiene densidad (masa por unidad de superficie) uniforme σ . Éste oscila en el plano XY en torno al origen (y centro de curvatura del sector). El ángulo α que forma la vertical con la bisectriz del ángulo 2γ define totalmente la posición del péndulo.

4.4.4. Fuerzas centrales y energía potencial

4.4.4.1. Energía potencial de fuerzas centrales

Se verá a continuación que toda fuerza central de la forma

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}, \quad \text{con} \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.4.13)$$

es conservativa. Para verlo primero se nota que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

y de aquí

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f(r)x) = \frac{\partial f}{\partial y}x = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}x = \frac{xy}{r} f' \quad (4.4.14)$$

que es simétrica en x e y y por tanto se satisfacen las condiciones (4.4.8).

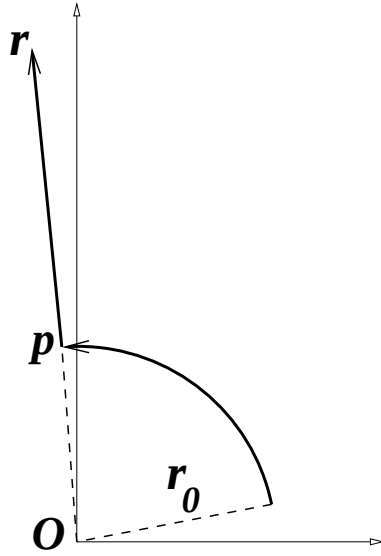


Figura 4.5: Para integrar desde $\vec{r}_0$ hasta $\vec{r}$ conviene tomar un camino que primero es un arco de circunferencia hasta el punto P que se muestra en la figura y luego seguir por un camino recto y radial hasta $\vec{r}$.

Una vez que se sabe que estas fuerzas son conservativas se puede determinar la función energía potencial escogiendo un camino de integración conveniente entre dos puntos cualesquiera definidos por sus posiciones $\vec{r}_0$ y $\vec{r}$. Llamaremos r_0 a la distancia entre $\vec{r}_0$ y el centro O asociado a la fuerza central y r a la distancia de O a $\vec{r}$.

Ya que se tiene tres puntos especiales: $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ y O , ellos definen un plano (el plano de la figura 4.5). El camino se puede construir avanzando desde $\vec{r}_0$ por un arco de circunferencia con centro en O hasta un punto p (definido por $\vec{r}_p$) que está en la recta que une a O con $\vec{r}$ y desde p se sigue en línea recta hasta $\vec{r}$. La integral de camino tiene dos partes: (a) la integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ desde $\vec{r}_0$ hasta $\vec{r}_p$ es nula porque mientras la fuerza es en la dirección $\hat{r}$, el elemento de camino $d\vec{r}$ es en la dirección tangente a la curva,

que es ortogonal a $\hat{r}$; (b) la integral desde $\vec{r}_p$ hasta $\vec{r}$ que es una integral a lo largo de una línea radial (pasa por el centro de fuerza) como muestra la figura 4.5. Siendo así, el desplazamiento a lo largo de este camino es radial: $d\vec{r} = \hat{r} dr$ lo que lleva a

$$U(r) = - \int_{r_0}^r f(r) \vec{r} \cdot \hat{r} dr = - \int_{r_0}^r f(r) r dr \quad (4.4.15)$$

Es inmediato ver, de lo anterior, que la función de energía potencial depende tan solo de la coordenada radial r .

El gradiente de una función que solo depende de r , escrito en coordenadas esféricas, se reduce a $\nabla U(r) = \hat{r} dU/dr$ es decir,

$$\vec{F} = - \frac{dU}{dr} \hat{r} \quad (4.4.16)$$

lo que muestra que la fuerza que implica una función de energía potencial $U(r)$ que solo depende de la coordenada radial r es una fuerza central del

tipo restringido descrito en (4.4.13). Lo que se ha expresado en la fórmula de arriba se puede decir en forma más básica: si $U(r)$ entonces $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -U' \frac{x}{r}$. Pero como $\vec{r}$ es el vector (x, y, z) entonces $\vec{F} = -\frac{1}{r} U' \vec{r} = -U' \hat{r}$. La función $f(r)$ es $-\frac{1}{r} U'$.

4.4.4.2. La energía potencial asociada a la fuerza de gravitación universal

La ley de gravitación universal

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (4.4.17)$$

ya fue mencionada en §3.1. Para determinar la función energía potencial basta con hacer la integral a lo largo de un radio tal como se explicó en §4.4.4.1, es decir, $d\vec{r} = \hat{r} dr$. En tal caso

$$U = G M m \int_{r_0}^r \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}}{r^3} dr = G M m \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = G M m \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \quad (4.4.18)$$

Lo normal es escoger $r_0 = \infty$ de donde

$$U(r) = -\frac{G M m}{r} \quad (4.4.19)$$

4.4.4.3. La energía potencial del oscilador armónico tridimensional

El potencial

$$U(r) = \frac{k}{2} r^2 \quad (4.4.20)$$

implica una fuerza,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) = -k \vec{r} \quad (4.4.21)$$

que corresponde a la de un oscilador armónico tridimensional de largo natural nulo.

Casos más generales son

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2} (r - D_0)^2 \quad (4.4.22)$$

o incluso

$$U(\vec{r}) = \frac{k_1}{2} (x - D_1)^2 + \frac{k_2}{2} (y - D_2)^2 + \frac{k_3}{2} (z - D_3)^2 \quad (4.4.23)$$

4.5. Energía mecánica total no conservada

En general la fuerza total que actúa sobre un cuerpo puede ser separada en una suma de fuerzas conservativas más una suma de fuerzas no conservativas,

$$\vec{F}^{\text{total}} = \vec{F}_C + \vec{F}_{\text{NC}} \quad (4.5.1)$$

En consecuencia, el trabajo total efectuado desde a hasta b puede ser separado,

$$\begin{aligned} W^{\text{total}} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_C \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_{\text{NC}} \cdot d\vec{r} \\ &= W_C + W_{\text{NC}} \\ &= \frac{1}{2} m (v_b^2 - v_a^2) \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

pero

$$W_C = U_a - U_b \quad (4.5.3)$$

por lo cual

$$K_b - K_a = U_a - U_b + W_{\text{NC}} \quad (4.5.4)$$

de donde resulta que

$$W_{\text{NC}} = (K_b + U_b) - (K_a + U_a) \quad (4.5.5)$$

que se puede expresar como: *el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la diferencia: energía mecánica total final, $E_{\text{MT final}}$, menos la energía mecánica total inicial, $E_{\text{MT inicial}}$,*

$$W_{\text{NC}} = E_{\text{MT final}} - E_{\text{MT inicial}} \quad (4.5.6)$$

Si se considera el límite en que el tiempo transcurrido entre el momento inicial y el final es infinitesimal se observa que el trabajo infinitesimal de las fuerzas no conservativas es $dW_{\text{NC}} = \frac{dE_{\text{mec.tot}}}{dt} dt$ de donde se ve que la potencia asociada es

$$P_{\text{NC}} = \frac{dW_{\text{NC}}}{dt} = \frac{dE_{\text{mec.tot}}}{dt} \quad (4.5.7)$$

La potencia asociada a las fuerzas no conservativas es igual a la derivada de la energía mecánica total, $E_{\text{MT}}(t)$. Por otro lado, ya se vio en (4.2.3) que la potencia asociada a una fuerza se puede calcular como el producto punto entre esa fuerza y la velocidad del punto material. En el caso actual interesa resaltar que

$$P_{\text{NC}} = \vec{F}_{\text{NC}} \cdot \vec{v} \quad (4.5.8)$$

4.5.1. Sistema unidimensional desde dos sistemas de referencia

Este resultado se puede ilustrar muy sencillamente con el sistema unidimensional descrito en la Fig. 4.6. Es un sistema de dos partículas Q y P unidas por un resorte. La partícula P oscila libremente, mientras que Q es mantenida a velocidad uniforme debido a una fuerza externa. En el sistema de referencia en que la partícula Q está fija la energía mecánica es constante

$$E_Q = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}(y-D)^2, \quad \text{con} \quad v = \dot{y}$$

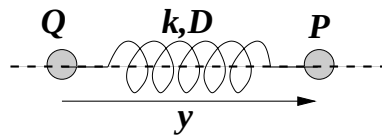


Figura 4.6: La partícula P oscila debido al resorte. La partícula Q es mantenida con velocidad uniforme por efecto de una fuerza externa no conservativa.

En este sistema de referencia la fuerza externa no hace trabajo porque Q no se desplaza. Pero en el sistema de referencia en que Q se mueve con velocidad uniforme v_0 el trabajo de la fuerza externa es $W_{NC} = \int F_{\text{externa}} v_0 dt$. La energía en el sistema de referencia en que Q se mueve con v_0 es

$$\begin{aligned} E_O &= \frac{m}{2}(v+v_0)^2 + \frac{k}{2}(y-D)^2 \\ &= E_Q + \frac{mv_0^2}{2} + mvv_0 \end{aligned}$$

Al calcular dE_O/dt el único término no constante es mvv_0 cuya derivada es $mv\dot{v}_0 = Fv_0$, donde $F = -k(y-D)$ es la fuerza que el resorte ejerce sobre P (que es la misma en ambos sistemas de referencia). Pero si el resorte ejerce sobre P una fuerza F , P ejerce sobre Q (vía el resorte) una fuerza $-F$. Sobre Q actúa esta fuerza $-F$ y además la fuerza F_{externa} y—como se mueve a velocidad uniforme—la fuerza total sobre Q tiene que ser nula, es decir

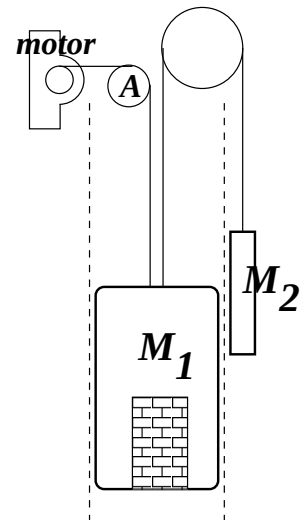
$$F_{\text{externa}} = F \implies \frac{dE_O}{dt} = F_{\text{externa}} v_0$$

que es lo que dice (4.5.7). Esta fuerza depende del estado de movimiento del cuerpo por lo que no puede ser escrita como función de punto (distancia entre O y P) independiente de las condiciones iniciales del problema. Puede ser vista como una fuerza “normal” actuando en O .

4.6. Problemas

- 4.1 Una argolla de masa m puede deslizar libremente a lo largo de una vara y esta vara gira, en torno a un punto fijo O , barriendo un plano horizontal con velocidad angular $\dot{\phi} = \omega$ constante. Inicialmente es liberada a distancia ρ_0 del origen con $\dot{\rho} = 0$. Determine el trabajo que efectúa la normal desde el instante inicial hasta un tiempo t . Se conocen ρ_0 , m y ω .
- 4.2 Si se lanza una partícula de masa m verticalmente hacia arriba con velocidad inicial $\vec{v}_0$ y hay roce viscoso $\vec{F} = -\eta \|\vec{v}\| \vec{v}$, determine el trabajo total efectuado por $\vec{F}$ hasta que la partícula vuelve a su punto de partida.

- 4.3 Un ascensor cargado tiene masa total M_1 y está conectado a través de una polea A a un motor y por otra polea a un contrapeso de masa M_2 ($M_2 < M_1$). Las poleas tienen roce despreciable pero el ascensor tiene roce viscoso lineal. Para simplificar el problema suponga que los dos cables nacen del mismo punto del techo del ascensor, que no hay ángulo entre ellos y que la inercia de las poleas es despreciable, de modo que el trabajo que se busca es el que hace la tensión del cable de la izquierda.

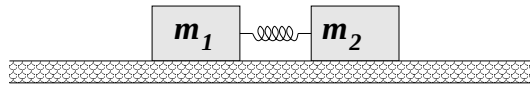


- a) Determine el trabajo que debe hacer el motor para que el ascensor suba una altura h a velocidad constante v_0 .
- b) Lo mismo que antes pero para que el ascensor suba con aceleración constante entre una posición y otra h metros más arriba si $v(t) = a_0 t$, con $a_0 < g$ entre esas dos posiciones.

Datos: las masas, g , v_0 , a_0 , el coeficiente de roce lineal, la altura h .

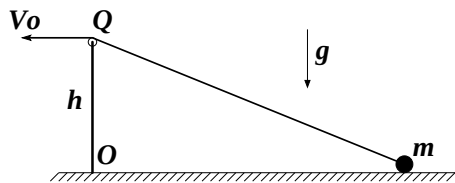
- 4.4 Dos bloques de masas m_1 y m_2 están apoyados en una superficie horizontal con la que ambos tienen coeficientes de roce estático y dinámico μ_e y μ_d .

Los bloques están además unidos por un resorte de constante elástica k y largo natural D .



En el instante inicial el resorte no está deformado, el bloque de masa m_2 está en reposo y el bloque de la izquierda tiene rapidez v_1 . (a) Determine la compresión máxima del resorte para que el bloque 2 no alcance a moverse. (b) Determine el valor máximo de v_1 para que 2 no deslice si $m_2 = 2m_1$ y $\mu_d = \mu_e/2$.

4.5 Una partícula de masa m puede deslizar sobre una superficie horizontal con la que tiene coeficiente de roce dinámico μ . La masa está unida a una cuerda, la cual pasa por una polea en Q y su extremo es recogido con rapidez $V_0 = \text{cte}$. La polea tiene un radio despreciable y se encuentra a una altura h del suelo.



- Determine la tensión como función de la posición
- Determine en qué posición la partícula se despegas del suelo.
- Determine el trabajo hecho por la fuerza de roce desde que la partícula estaba a una distancia x_0 del punto O hasta la posición en que se despegas de la superficie.