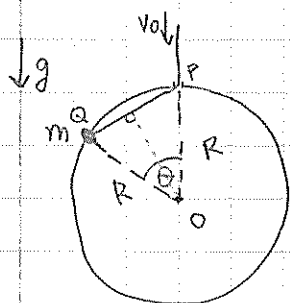


Pauta PA Control 1, 2012



(a) Si $PQ = x$, ① $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x}{2R}$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}}$

Derivando ①, ② $\frac{\dot{\theta}}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\dot{x}}{2R} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}}}$

Pero $\dot{x} = v_0 \Rightarrow x = v_0 t + x_0$ LO SUPONDREMOS IGUAL A 0 PARA SIMPLIFICAR CÁLCULOS.

Así $\dot{\theta}(t) = \frac{v_0}{R \sqrt{1 - \frac{v_0^2 t^2}{4R^2}}}$ //

Para hallar la expresión $\ddot{\theta}(t)$ derivamos ②: ③ $\ddot{\theta} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\dot{\theta}^2}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\ddot{x}}{R} \stackrel{\dot{x} \text{ de } 0}{=} 0$

Reemplazando para dejar todo en función de t,

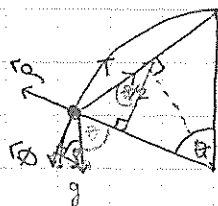
$\Rightarrow \ddot{\theta} = + \frac{\dot{\theta}^2}{2} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{v_0^2 \cdot v_0 t / 2R}{2R^2 \left(1 - \frac{v_0^2 t^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v_0^3 t}{4R^3 \left(1 - \frac{v_0^2 t^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ //

(b) La parte anterior sólo constituyen consideraciones geométricas, que ahora se aplicarán a la resolución "formal."

$\vec{r} = R \hat{p}$

$\vec{v} = R \dot{\theta} \hat{\theta}$

$\vec{a} = R \ddot{\theta} \hat{\theta} - R \dot{\theta}^2 \hat{p}$



$\vec{g} = g \sin\theta \hat{\theta} - g \cos\theta \hat{p}$

$\vec{T} = -T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{p} + T \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\theta}$

Newton:

($\hat{p}$): $-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta - T\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + N$

($\hat{\theta}$): $mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta + T\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Busco θ cuando $T=0$, así que prefiero escribir $\dot{\theta}(\theta)$ y $\ddot{\theta}(\theta)$.
(De ② y ③)

En ($\hat{\theta}$): $mR \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2R^2 \cos^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2mg \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{4gR}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$ //