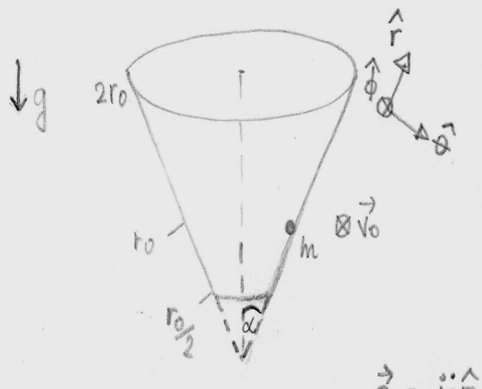
1.- Como todo buen problema de dinámica, partimos por definir un sistema de coordenadas conveniente. Para los conos suele ser esféricas.



2.- Aunque $r(t)$ y $\phi(t)$ son funciones desconocidas ($\theta(t) = \alpha\ \ \forall t$), escribo la posición y sus derivadas (velocidad y aceleración) como si las conociese.

$$\vec r = r\hat r$$
$$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\phi\sin\alpha\,\hat\phi$$
$$\vec a = \ddot r\hat r + 2\dot r\dot\phi\sin\alpha\,\hat\phi + r\ddot\phi\sin\alpha\,\hat\phi - r\dot\phi^2\sin\alpha(\cos\alpha\,\hat\theta + \sin\alpha\,\hat r)$$

3.- Plantear la ley de Newton,

PERPENDICULAR AL MANTO DEL CONO

$$\sum\vec F = N\hat\theta + mg(\sin\alpha\,\hat\theta - \cos\alpha\,\hat r) = m\cdot\vec a$$

y separarla en 3 ecuaciones escalares (una por cada vector unitario)

$$\left.\begin{aligned}
(\hat r)&\quad m\ddot r - mr\dot\phi^2\sin^2\alpha = -mg\cos\alpha\\
(\hat\theta)&\quad -mr\dot\phi^2\sin\alpha\cos\alpha = N + mg\sin\alpha\\
(\hat\phi)&\quad m(2\dot r\dot\phi\sin\alpha + r\ddot\phi\sin\alpha) = 0
\end{aligned}\right\}$$

Sistema de 3 ecs. con 3 incógnitas ($r(t), \phi(t), N$)

4.- Jugar con el sistema en busca de lo pedido.

En ($\hat\phi$) se simplifican m y $\sin\alpha$ (si $\alpha = 0$ no hay cono). Buscamos escribir la expresión $2\dot r\dot\phi + r\ddot\phi$ como la derivada de "algo." Para esto, multiplico por r, ya que $2r\dot r\dot\phi + r^2\ddot\phi = \frac{d(r^2\dot\phi)}{dt}$.

Así ($\hat\phi$) queda $\frac{d(r^2\dot\phi)}{dt} = 0 \longleftrightarrow r^2\dot\phi = c$ ← CTE

SPOILER ALERT!
Descubrimos conservación de momento angular :D

Por condiciones iniciales, $\vec v_0 = v_0\hat\phi = r_0\dot\phi(0)\sin\alpha = \cancel{r_0}\frac{c}{r_0^{\cancel{2}}}\sin\alpha$

$$\mapsto\ c = \frac{v_0 r_0}{\sin\alpha}$$

reemplazo!

De ($\hat r$), $\cancel{m}\ddot r = \cancel{m}r\dot\phi^2\sin^2\alpha - \cancel{m}g\cos\alpha = \frac{c^2\sin^2\alpha}{r^3} - g\cos\alpha$

/ multiplico por $\dot r$ e integro c/r al tiempo

$$\left(\frac{\dot r^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t} = \left[-\frac{1}{2}\frac{c^2\sin^2\alpha}{r^2} - g\cos\alpha\, r\right]\Bigg|_{t=0}^{t}$$

$$(*)\quad \frac{\dot r^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{c^2\sin^2\alpha}{r^2} - g\cos\alpha\, r + \frac{c^2\sin^2\alpha}{2r_0^2} + g\cos\alpha\, r_0$$

Ahora basta un pequeño análisis físico para encontrar la solución..

Si v_0 fuese demasiado pequeño, la partícula adquiriría una rapidez $\dot{r} < 0$ (empezaría a caer, escaparía por abajo).

Para evitar esto impongo que $\dot{r}\left(\frac{r_0}{2}\right) = 0$ (ie: m se detiene antes de escapar por abajo). Esto nos reportará una velocidad inicial mínima:

En (*), reemplazando C y esta condición,

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 r_0^2}{\left(\frac{r_0}{2}\right)^2} - g\cos\alpha \frac{r_0}{2} + \frac{1}{2} \cdot v_0^2 + g\cos\alpha\, r_0$$

$$\mapsto \underbrace{v_0^2}_{\text{mín.}} = \frac{1}{3} g \cos\alpha\, r_0 \;//$$

Si v_0 fuese muy grande, m escaparía por arriba.

Para evitarlo, en (*) impongo $\dot{r}(2r_0) = 0$ (ie: m se detiene antes de escapar)

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 r_0^2}{(2r_0)^2} - g\cos\alpha \cdot (2r_0) + \frac{1}{2} v_0^2 + g\cos\alpha\, r_0$$

$$\mapsto \underbrace{v_0^2}_{\text{máx.}} = \frac{8}{3} g \cos\alpha\, r_0 \qquad //$$

:D

Cualquier duda, corrección, consulta (o sugerencia!) no dude en contactarme por u-cursos o a belen.zunig@gmail.com

Ánimo, éxito y suerte!

Belén Zúñiga.