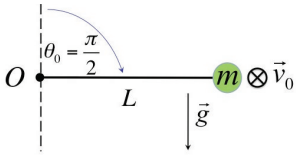
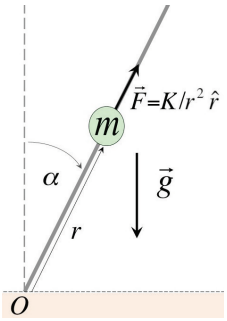
P.1 Una partícula de masa m está unida al extremo de una cuerda ideal de largo L, cuyo otro extremo está fijo al punto O. En el instante inicial la cuerda está horizontal y tensa, y la partícula tiene velocidad $\vec{v}_0$ entrando perpendicularmente en el plano de la figura. Si todos los roces son despreciables, se pide:



a) Determinar la magnitud v_0 tal que el máximo ángulo θ que alcance la cuerda sea $\theta_{MÁX} = 3\pi/4$

b) Si el valor de v_0 es el obtenido en (a), determinar la tensión máxima y mínima de la cuerda, en el movimiento resultante de la partícula.

P.2 Un anillo de masa m puede moverse a lo largo de una barra fija que forma un ángulo $\propto$ con la vertical. Aparte del peso existe un campo de fuerza $\vec{F} = K/r^2\,\hat{r}$, con $K > O$.



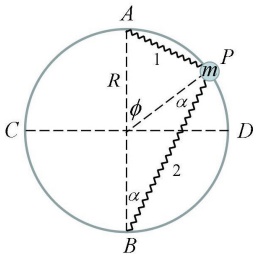
a) Encontrar una función energía potencial asociada a la fuerza $\vec{F}$ y al peso, en función de su distancia a O y grafíquela en forma esquemática.

b) Determinar los puntos de equilibrio para el movimiento del anillo a lo largo de la barra, su estabilidad y la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio estables.

c) Encontrar la distancia r_0 desde la cual se debería soltar el anillo desde el reposo para que llegue con rapidez cero a la posición $r_0/2$

d) Si la barra fuera rugosa, encontrar el valor que debe tener el coeficiente de roce cinético con el anillo para que éste ahora se detenga en $3r_0/4$ cuando se suelta desde el reposo en $r = r_0$.

P.3 Desde dos puntos A y B diametralmente opuestos de un riel circunferencial de radio R están sujetos los resortes "1" y "2" respectivamente. Ellos tienen su otro extremo unido a una misma partícula P de masa m que puede moverse sin roce por el riel. El largo natural del resorte 1 es nulo, y el del resorte 2 es $R/2$, mientras que la constante elástica del segundo es el doble que la del primero. Se pide:



a) Todos las posiciones de equilibrio.

b) La frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a las posiciones de equilibrio estable.

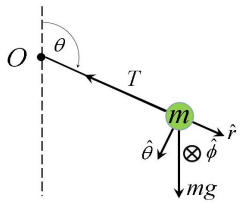
c) ¿Con qué velocidad v_D se debe lanzar la partícula desde el punto D para que llegue a A con velocidad $\frac{1}{2}v_D$?

d) Si P está en reposo en un punto de equilibrio estable, determine la fuerza que el riel ejerce sobre la partícula P.

Nota: Debido a que el resorte 2 cambia de orientación en B, la energía potencial no es diferenciable en ese punto. Para B realice el análisis de equilibrio y estabilidad por consideraciones que no impliquen derivadas del potencial.

$\vec{r} = r\,\hat{r}$; $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}$;
$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_\phi\hat{\phi}$, donde: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sin^2\,\theta$; $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$; $a_\phi = (1/r\sin\theta)\ d((r\sin\theta)^2\,\dot{\phi})/dt$

Solución P1:



En las coordenadas esféricas de la figura, no hay fuerzas en $\hat{\phi}$ => $a_\phi = 0$

$a_\phi = \frac{1}{L\sin\theta}\frac{d}{dt}((L\sin\theta)^2\,\dot{\phi})$ => $(L\sin\theta)^2\,\dot{\phi}$ = cte

Inicialmente: $\theta = \pi/2$; $\dot{\phi} = v_0/L$ => $\dot{\phi}(\theta) = v_0/(L\sin^2\theta)$ (1)

Aplicamos conservación de energía, con $\vec{v} = 0\,\hat{r} + L\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + L\dot{\theta}\hat{\theta}$ y tomando U^g_{ref} en $\theta = \pi/2$

$\frac{1}{2}m\,v_0^2 = \frac{1}{2}m\,(\,L^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + L^2\,\dot{\theta}^2) + mgL\cos\theta$ (2)

a) En $\theta_{MÁX}$ se debe cumplir que $\dot{\theta} = 0$ => $\frac{1}{2}m\,v_0^2 = \frac{1}{2}m\,\left(\,L^2\sin^2(\theta_{MÁX})\,\dot{\phi}^2\right) + mgL\cos(\theta_{MÁX})$

Reemplazamos $\dot{\phi}$ de (1) y evaluamos $\sin(3\pi/4)$ y $\cos(3\pi/4)$

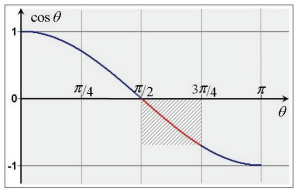
$\frac{1}{2}m\,v_0^2 = \frac{1}{2}m\,L^2(1/2)(4v_0^2/L^2) + mgL(\sqrt{2}/2)$ =>$v_0^2 = gL\,\sqrt{2}$

b) La ecuación del movimiento en la dirección radial es:

$-T - mg\cos\theta = m(-L\,\dot{\theta}^2 - L\,\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$ (3)

de (1) y (2) obtenemos $\dot{\theta}^2(\theta)$ y $\dot{\phi}^2(\theta)$ con $v_0^2 = gL\,\sqrt{2}$

Reemplazando en (3) despejamos $T(\theta) = mg(\sqrt{2} - 3\cos\theta)$, válido para $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/4$



En el rango del movimiento la función $\cos\theta$ es decreciente => $T(\theta)$ es creciente en ese mismo rango.

Por lo tanto: $T_{mín} = T(\theta_{mín}) = T(\pi/2) = mg\,\sqrt{2}$

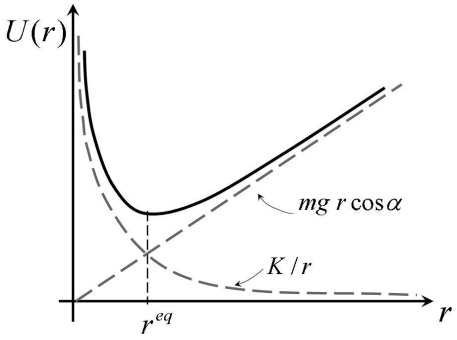
$T_{MÁX} = T(\theta_{MÁX}) = T(3\pi/4) = 5mg\,\sqrt{2}/2$

Solución P2:

a) $U^F = -\int K/r^2\,dr + C = K/r$, con referencia $U^F(r \to \infty) = 0$

$U^{mg} = mg\,r\cos\alpha$, con referencia $U^{mg}(r = 0) = 0$

$U(r) = K/r + mgr\cos\alpha$



b) $U'(r) = -K/r^2 + mg\cos\alpha$; $U''(r) = 2K/r^3$

$U'(r) = 0$ => $r^{eq} = \sqrt{K/(mg\cos\alpha)}$,

pero $r > O$ => Hay un solo punto de equilibrio

$U''(r^{eq}) = 2K/(r^{eq})^3 > 0$ => r^{eq} es estable

$\omega^2 = U''(r^{eq})/m = 2\,\sqrt{mg^3\,cos^3\,\alpha\,/K}$

c) $EMT = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + U(r)$

Inicial: $r = r_0$ y $\dot{r} = 0$ => $(EMT)_i = U(r_0) = K/r_0 + mgr_0\cos\alpha$

Final: $r = r_0/2$ y $\dot{r} = 0$ => $(EMT)_f = U(r_0/2) = 2K/r_0 + mg(r_0/2)\cos\alpha$

Trabajan solo fuerzas conservativas => $EMT = cte$

=> $K/r_0 + mgr_0\cos\alpha = 2K/r_0 + mg(r_0/2)\cos\alpha$

=> $mg(r_0/2)\cos\alpha = K/r_0$ => $r_0 = \sqrt{2K/mg\cos\alpha}$

d) Ahora trabaja una fuerza de roce => $\Delta EMT = W^{froce}$ y el anillo se detiene en $r = 3r_0/4$

$\Delta EMT = 4K/3r_0 + mg(3r_0/4)\cos\alpha - K/r_0 - mgr_0\cos\alpha$ (1)

$W^{froce} = \int_{r_0}^{r_1} \mu\, mg \sin\alpha\, dr = \mu\, mg \sin\alpha\,(3r_0/4 - r_0)$ (2)

(1) = (2) => $K/3r_0 - mgr_0\cos\alpha/4 = -\mu\, mg \sin\alpha\, r_0/4$ => $\mu = [\cos\alpha - 4K/3mgr_0^2]/\sin\alpha$

de (c) : $3mgr_0^2 = 6K/\cos\alpha$ => $\mu = [\cos\alpha - (4/6)\cos\alpha]/\sin\alpha = (2/6)\cos\alpha/\sin\alpha = \cot\alpha/3$

Solución P3:

Los largos de los resortes 1 y 2 y son respectivamente: $l_1 = 2R\sin\phi/2$ y $l_2 = 2R\cos\alpha = 2R\cos\phi/2$
Los largos naturales son cero y $R/2$ respectivamente.

Excluyendo el punto B, para analizar las posiciones de equilibrio y su estabilidad utilizamos la energía potencial:

$$U(\phi) = \frac{k}{2}[2R\sin\phi/2]^2 + \frac{2k}{2}[2R\cos\phi/2 - (R/2)]^2 = 2kR^2\sin^2\phi/2 + kR^2(2\cos\phi/2 - 1/2)^2$$

$\left(\frac{dU}{d\phi}\right)_{\phi_e} = 0 = kR^2[\sin(\phi_e/2)(1 - 2\cos(\phi_e/2))]$ => $\sin(\phi_e/2) = 0$ => $\phi_e = 2n\pi$
$\cos(\phi_e/2)$=1/2 => $\phi_e = \pm 2\pi/3$

Estabilidad: Evaluamos $\left(\frac{d^2U}{d\phi^2}\right)_{\phi_e} = \frac{kR^2}{2}[\cos(\phi_e/2)(1 - 2\cos(\phi_e/2)) + \sin(\phi_e/2)\cdot 2\sin(\phi_e/2)]$

$\phi_e = 2n\pi$ es inestable, en efecto: $\left(\frac{d^2U}{d\phi^2}\right)_{\phi_e} = \begin{cases} \frac{kR^2}{2}[\cos(\pi)(1 - 2\cos(\pi))] = -\frac{3kR^2}{2} < 0 & \text{para } n \text{ impar} \\ \frac{kR^2}{2}[\cos(2\pi)(1 - 2\cos(2\pi)) + 0)] = -\frac{kR^2}{2} < 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$

$\phi_e = \pm 2\pi/3$ es estable, en efecto: $\left(\frac{d^2U}{d\phi^2}\right)_{\phi_e} = \frac{kR^2}{2}[\cos(\pm\pi/3)(1 - 2\cos(\pm\pi/3)) + 2\sin^2(\pm\pi/3)] = \frac{3kR^2}{4} > 0$

Análisis para el punto *B:*

Para el punto B se pide analizar equilibrio y estabilidad sin utilizar derivadas de la energía potencial, ya que ésta es no diferenciable en B, porque el resorte comprimido justo cambia de orientación.

Analizamos las fuerzas sobre P cuando la ubicamos hipotéticamente en B, en reposo respecto del riel. En este caso las fuerzas de los resortes actúan en la dirección AB, porque no hay deformación de alguno de los resortes en otra dirección. La reacción del riel tiene dirección perpendicular al riel, que en el punto B corresponde también a la dirección AB, su magnitud y sentido es tal que anula a las fuerzas que ejercen los resortes a P.

Además, cualquier pequeña perturbación que se aplique a la partícula, la aleja definitivamente de esta posición de equilibrio, por lo que podemos decir que se trata de una posición de equilibrio inestable.

Sin embargo, también observamos que cuando P está en B el resorte 2 se transforma en un punto sin dimensiones. Por lo tanto las ecuaciones no entregan información sobre la dirección de F_{e2} en ese punto.

Para determinar la dirección en que apunta la fuerza aplicamos consideraciones de simetría.

Analizamos la dirección de la fuerza del resorte 2 F_{e2} para $\phi = \pi \pm \varepsilon$, en el límite cuando $\varepsilon \to 0$.

en $\phi = \pi - \varepsilon$ F_{e2} apunta hacia la izquierda $(+\hat{\phi})$

en $\phi = \pi + \varepsilon$ F_{e2} apunta hacia la derecha $(-\hat{\phi})$

En $\phi = \pi$, por simetría, F_{e2} debería apuntar en la línea AB, constituyendo una discontinuidad que en la realidad no podría ocurrir.

NOTA: Si se entregó como respuesta que no se puede fundamentar la condición de equilibrio en B porque no se conoce la dirección de F_{e2} en ese punto, también se considerará correcta, siempre que los argumentos justifiquen claramente su respuesta.

b) La frecuencia de pequeñas oscilaciones para las posiciones de equilibrio estable es:

$$\omega^2 = \frac{1}{mR^2}\left(\frac{d^2U}{d\phi^2}\right)_{\phi_e} = \frac{1}{mR^2}\,\frac{3kR^2}{4} = \frac{3k}{m}$$

c) $EMT = E =$cte $= \frac{1}{2}mv^2 + 2kR^2 \sin^2\phi/2 + kR^2(2\cos\phi/2 - 1/2)^2$

$$E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + U(\pi/2) = \frac{1}{2}mv_D^2 + kR^2\,(1 + (\sqrt{2} - (1/2))^2)$$

$$E_A = \frac{1}{2}m(v_D/2)^2 + U(0) = \frac{1}{2}m\,\frac{v_D^2}{4} + kR^2(2 - (1/2))^2$$

Entonces: $\frac{1}{2}mv_D^2 + kR^2\left(1 + 2 - \sqrt{2} + (1/4)\right) = \frac{1}{2}m\,\frac{v_D^2}{4} + kR^2(4 - 2 + (1/4))$ => $v_D^2 = \frac{8}{3}\frac{k}{m}R^2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

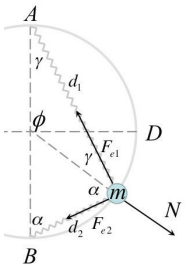
d) $\phi = \phi_e = 2\pi/3$

$\gamma = (\pi - \phi_e)/2 = \pi/6$; $\alpha = (\pi - (\pi - \phi_e))/2 = \pi/3$

$d_1 = 2R\,\cos\gamma$; $d_2 = 2R\,\cos\alpha$

$\vec{F}_{e1} = k_1 d_1 \cos\gamma\,(-\hat{\rho}) + k_1 d_1 \cos\gamma\,(-\hat{\phi})$;

$\vec{F}_{e2} = k_2(d_2 - R/2)\cos\alpha\,(-\hat{\rho}) + k_2(d_2 - R/2)\cos\alpha\,(\hat{\phi})$



Está en reposo en la posición de equilibrio => $\sum \vec{F} = \vec{0}$

En dirección radial => $N = k_1\,2R\cos(\pi/6)\cos(\pi/6) + k_2\,2R\,(\cos(\pi/3) - \mathrm{R}/2) = 2k_1R$