UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

FI21A-2 MECANICA 2007-1

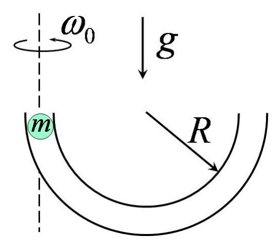
Prof. Patricia Sotomayor C.

CONTROL Nº 3

13 de junio de 2007
Tiempo: 2:30 horas

PROBLEMA 1:

Considere un tubo semi-circular de radio R, que gira con velocidad angular constante ω_0 respecto a un eje vertical, como indica la figura. En un cierto instante se coloca una partícula de masa m en el extremo del tubo que está sobre el eje de rotación, soltándola desde el reposo. La partícula desliza con roce despreciable por el interior del tubo. Calcule:

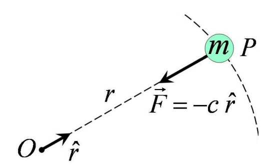


a) Velocidad absoluta de la partícula al salir por el otro extremo del tubo.

b) Fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula justo antes de que ésta salga del tubo.

PROBLEMA 2:

Considere una partícula P de masa m, que se mueve en un campo de fuerza de atracción $\vec{F} = -c\hat{r}$, donde c es una constante positiva.



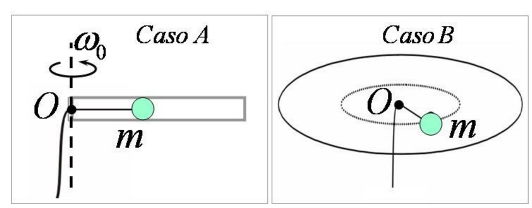
a) Demuestre que P no puede escapar de este campo de atracción.

b) Si se verifica que P se encuentra en una órbita circular de radio $r = r_0$ alrededor del punto de atracción O, determine el periodo de pequeñas oscilaciones que experimenta la distancia de P a O cuando P sufre una pequeña perturbación en dirección radial.

c) Suponga que, como resultado de un impulso en dirección $\hat{r}$, P queda en una órbita tal que su distancia más alejada de O es $2r_0$, determine el aumento de energía mecánica total de P como resultado de ese impulso.

PROBLEMA 3:

Considere las dos situaciones (A y B) descritas en las figuras. En ambos casos una partícula de masa m está atada a una cuerda ideal cuyo otro extremo pasa por un orificio ubicado en un punto O, de tal manera que la cuerda se puede alargar o acortar controladamente a una tasa constante v_0.



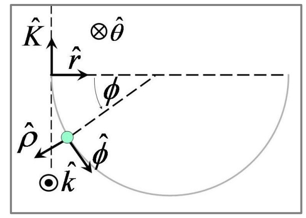
En el caso A la partícula está en el interior de un tubo que la obliga a rotar con velocidad angular constante ω_0. En el caso B no existe dicho tubo. En la condición inicial, de ambos casos, la longitud de la cuerda es L y la velocidad angular de la partícula es ω_0.

a) Si no existe ningún tipo de roce, encuentre para cada caso una expresión para la tensión de la cuerda en función de la distancia de la partícula al punto O. ¿A qué distancia la tensión se duplica respecto del valor inicial?.

b) Repita la parte (a), pero ahora considerando un roce viscoso $\vec{F}_R$ entre la partícula y el aire. En el caso A, $\vec{F}_R = -k\,\dot{r}\,\hat{r}$. En el caso B, $\vec{F}_R = -k\,\vec{v}$, donde k es una constante conocida.

Solución Problema 1

Expresamos primero la ecuación del movimiento. En la figura se muestra el sistema inercial y no inercial, a utilizar en nuestro análisis.



$$\vec{F} = -m(\vec{a}_O + \vec{a}^{rel} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}^{rel} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel}))$$

Las fuerzas: $\vec{F} = mg(\cos\phi\,\hat{\phi} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho}) + N_\rho\,\hat{\rho} + N_z\,\hat{k}$

Términos de la aceleración:

$$\vec{\Omega} = \omega_0 \hat{K} = -\omega_0(\cos\phi\,\hat{\phi} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho})\ ;\ \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

$$\vec{a}_0 = -\omega_0^2 R\,\hat{r} = -\omega_0^2 R(\operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi} - \cos\phi\,\hat{\rho})$$

$$\vec{r}^{rel} = R\,\hat{\rho};\quad \vec{v}^{rel} = R\dot{\phi}\hat{\phi};\quad \vec{a}^{rel} = -R\dot{\phi}^2\,\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v}^{rel} = -2\omega_0(\cos\phi\,\hat{\phi} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho}) \times R\dot{\phi}\hat{\phi} = -2R\omega_0\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\,\hat{k}$$

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel}) = -\omega_0(\cos\phi\,\hat{\phi} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho}) \times (\omega_0 R\cos\phi\,\hat{k}) = \omega_0^2 R(\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\hat{\phi} - \cos^2\phi\,\hat{\rho})$$

Por lo tanto, las ecuaciones escalares son:

$$\hat{\rho}:\ mg\operatorname{sen}\phi + N_\rho = mR(\omega_0^2\cos\phi - \dot{\phi}^2 - \omega_0^2\cos^2\phi) \qquad (1)$$

$$\hat{\phi}:\ mg\cos\phi = mR(-\omega_0^2\operatorname{sen}\phi + \ddot{\phi} + \omega_0^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi) \qquad (2)$$

$$\hat{k}:\ N_z = -2mR\omega_0\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi \qquad (3)$$

a) Velocidad absoluta de la partícula

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}^{rel} + \vec{\Omega} \times \vec{r}^{rel}$ => $\vec{v} = \omega_0 R\hat{\theta} + R\dot{\phi}\hat{\phi} + \omega_0 R\cos\phi\,\hat{k}$, donde $\hat{\theta} = -\hat{k}$

Se pide la velocidad absoluta para $\phi = \pi$ => necesitamos $\dot{\phi}(\phi = \pi)$

de (2): $\ddot{\phi} = \dfrac{g}{R}\cos\phi + \omega_0^2\operatorname{sen}\phi - \omega_0^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi$

$$\dot{\phi}\,d\dot{\phi} = (\frac{g}{R}\cos\phi + \omega_0^2\operatorname{sen}\phi - \omega_0^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\,d\phi$$

Integrando entre 0 y π: $\dfrac{1}{2}\dot{\phi}^2(\pi) = \dfrac{g}{R}\operatorname{sen}\phi\Big|_0^\pi - \omega_0^2\cos\phi\Big|_0^\pi - \omega_0^2\operatorname{sen}^2\phi\Big|_0^\pi = 2\omega_0^2$ => $\dot{\phi}(\pi) = 2\omega_0$

Por lo tanto, $\vec{v}(\pi) = -\omega_0 R\hat{k} + 2R\,\omega_0\,\hat{\phi} - \omega_0 R\hat{k} = 2R\,\omega_0\,\hat{\phi} - 2\omega_0 R\hat{k}$

b) Reacción del tubo sobre la partícula

de (1) $N_\rho(\pi) = -mg\operatorname{sen}\pi + mR(\omega_0^2\cos\pi - \dot{\phi}^2(\pi) - \omega_0^2\cos^2\pi) = mR(-\omega_0^2 - 4\omega_0^2 - \omega_0^2) = -6mR\omega_0^2$

de (3) $N_z(\pi) = -2mR\omega_0\,\dot{\phi}(\pi)\operatorname{sen}\pi = 0$

Por lo tanto: $\vec{N}(\pi) = -6mR\omega_0^2\,\hat{\rho}$

Solución Problema 2

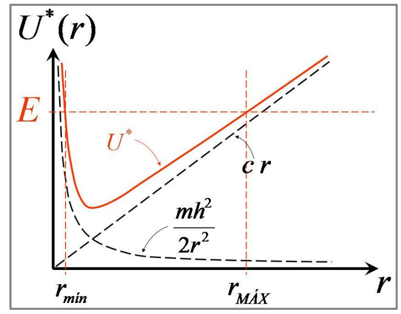
a) P no puede escapar

$U(r) = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int -c\hat{r}\cdot dr\,\hat{r} = cr + cte$, Tomando $U(0)=0$ => $U(r)=cr$

La partícula puede escapar del campo de atracción si se le puede entregar el nivel de energía requerido para que llegue a $r\to\infty$ con rapidez $v\geq 0$.

En este caso: $E = cte = \frac{1}{2}mv^2 + cr$

Observamos que para que la partícula llegue a una posición $r\to\infty$, se requeriría una energía infinita. Por lo tanto la partícula no puede escapar del campo de atracción.



Esta situación también puede observarse en al gráfico $U^*(r)$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + cr = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{r}\right)^2 + cr = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U^*(r) \qquad (1)$$

$$U^*(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{r}\right)^2 + cr \qquad (2)$$

Los valores de r estarán siempre acotados entre un $r_{mín}$ y un $r_{MÁX}$, $\forall$ valor de E.

b) Periodo de pequeñas oscilaciones

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U^{*}{''}(r_{eq})}}$$

De (2) tenemos $U^*(r)$, y sabemos que $r_{eq} = r_0$ (valor de r para órbita circular) => $U^{*}{''}(r_{eq}) = \frac{3mh^2}{r_0^4}$

Además, si $r_{eq} = r_0$ entonces $U^{*}{'}(r_0) = 0$, es decir: $-\frac{mh^2}{r_0^3} + c = 0$ => $h^2 = \frac{cr_0^3}{m}$ (2)

=> $U^{*}{''}(r_0) = \frac{3c}{r_0}$ => $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,r_0}{3c}}$

c) Aumento de la energía mecánica total (E)

De (1) la energía mecánica total es $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U^*(r)$.

La órbita inicial es circular, es decir $\dot{r}=0$ => $E_1 = cte = U^*(r_0) = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 + cr_0 = \frac{1}{2}m\frac{c\,r_0^3}{m\,r_0^2} + cr_0 = \frac{3c\,r_0}{2}$

Sabemos que en la órbita final, se produce $r_{MÁX}$ en $r = 2r_0$ => $\dot{r}(2r_0) = 0$

=> $E_2 = cte = U^*(2r_0) = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{2r_0}\right)^2 + 2r_0c = \frac{1}{2}m\frac{c\,r_0^3}{m\,4r_0^2} + 2cr_0 = \frac{17c\,r_0}{8}$

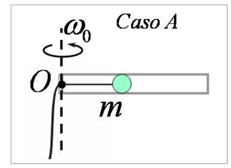
Se utilizó el mismo momento angular por unidad de masa (h) para ambas órbitas, ya que el enunciado indica que el impulso que modificó la órbita se produjo en la dirección radial, lo que no modifica el momento angular (o la ecuación del movimiento en la dirección $\hat{\phi}$)

Por lo tanto: $\Delta EMT = E_2 - E_1 = \frac{17c\,r_0}{8} - \frac{3c\,r_0}{2} = \frac{5c\,r_0}{8}$

Solución Problema 3

a) Tensión de la cuerda en cada caso

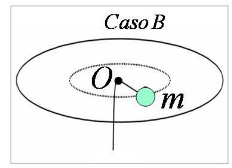
En ambos casos $\dot{r} = cte$ => $\ddot{r} = 0$



Caso A: $-T = m(-r\dot{\phi}^2)$, con $\dot{\phi} = \omega_0 = cte$ => $T(r) = mr\omega_0^2$;

La tensión inicial es: $T_i = mL\omega_0^2$

se duplica si $T_f = 2T_i = 2mL\omega_0^2 = mr_f\omega_0^2$ => $\boxed{r_f = 2L}$



Caso B: $-T = m(-r\dot{\phi}^2)$ (*), con $\dot{\phi} \neq cte$

En este caso, no hay fuerza en $\hat{\phi}$ => es fuerza central => $r^2\dot{\phi} = \frac{\ell_0}{m} = h = cte$

Inicialmente $h = L^2\omega_0 = r^2\dot{\phi}$ => $\dot{\phi} = \frac{L^2\omega_0}{r^2}$, en (*) => $T = m\frac{L^4\omega_0^2}{r^3}$

La tensión inicial es: $T_i = mL\omega_0^2$; se duplica si $T_f = 2T_i = 2mL\omega_0^2 = m\frac{L^4\omega_0^2}{r_f^3}$ => $\boxed{r_f = \frac{L}{\sqrt[3]{2}}}$

b) Tensión de la cuerda en cada caso, con roce viscoso

En ambos casos $\dot{r} = cte$ => $\ddot{r} = 0$, y, en ambos casos, ahora hay roce viscoso $\vec{F}_{rv}$

Caso A: $\vec{F}_{rv} = -kv_0\hat{r}$ => $-T - kv_0 = m(-r\dot{\phi}^2)$, con $\dot{\phi} = \omega_0 = cte$ => $T(r) = mr\omega_0^2 - kv_0$;

La tensión inicial es: $T_i = mL\omega_0^2 - kv_0$

se duplica si $T_f = 2T_i = 2mL\omega_0^2 - 2kv_0 = mr_f\omega_0^2 - kv_0$ => $\boxed{r_f = 2L - \frac{kv_0}{m\omega_0^2}}$

Caso B: $\vec{F}_{rv} = -k(\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\phi}\,\hat{\phi})$ => $-T - k\dot{r} = m(-r\dot{\phi}^2)$ (**), con $\dot{\phi} \neq cte$

La ecuación en $\hat{\phi}$ es: $-kr\dot{\phi} = m(2\dot{r}\,\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\phi})$ => $-\frac{k}{m}h = \frac{dh}{dt}$ => $h(t) = h(0)\,e^{-\frac{k}{m}t}$

(No se conserva el momento angular como en el caso B anterior, porque apareció una fuerza en $\hat{\phi}$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sabemos que: } h(0) = L^2\omega_0 \\ v_0 = \frac{dr}{dt} \Rightarrow r = L + v_0 t \Rightarrow t = \frac{r-L}{v_0} \end{array}\right\} \Rightarrow h(r) = L^2\omega_0\,e^{-\frac{k}{mv_0}(r-L)} = r^2\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L^2\omega_0}{r^2}e^{-\frac{k}{mv_0}(r-L)}$$

Reemplazando en (**) => $T = mr\dot{\phi}^2 - k\dot{r} = mr\frac{L^4\omega_0^2}{r^4}e^{-\frac{2k}{mv_0}(r-L)} - kv_0$

La tensión inicial es: $T_i = mL\omega_0^2 - kv_0$; se duplica si $T_f = 2T_i = 2mL\omega_0^2 - 2kv_0$

Entonces, la ecuación para r_f es: $\boxed{2mL\omega_0^2 - kv_0 = m\frac{L^4\omega_0^2}{r_f^3}e^{-\frac{2k}{mv_0}(r_f-L)}}$