Resumen control 1

Derivadas discretas

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \quad (2)$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad (3)$$

$$\ddot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (4)$$

Algoritmo de Verlet

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F(x_i) \frac{\Delta t^2}{m} \quad (5)$$

Tratamiento de errores

Suma

$$\langle c \rangle \pm \Delta c = (\langle a \rangle + \langle b \rangle) \pm \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2} \quad (6)$$

Multiplicación

$$\langle c \rangle \pm \Delta c = (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \pm (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2} \quad (7)$$

Función

$$f(\langle a \rangle \pm \Delta a) = f(\langle a \rangle) \pm \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=\langle a \rangle} \cdot \Delta a \quad (8)$$

Sistemas extendidos

Centro de masas

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{r}_i}{M} \quad (9)$$

Momentum

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (10)$$

Energía cinética rotacional

$$K = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \right] \omega^2 \quad (11)$$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2$$

ρ_i : distancia de partícula i al eje de giro

Sólidos rígidos

Producto cruz

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}; \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}; \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

en distinto orden solo cambia el signo y $\vec{A} \times \vec{A} = 0$.

Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (12)$$

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} \quad (13)$$

$$\vec{\tau} = I_p \alpha = I_p \ddot{\theta} \quad (14)$$

Condiciones para equilibrio estático:

- 1.- Suma de fuerzas 0
- 2.- Suma de torques 0
- 3.- velocidad 0
- 4.- velocidad angular 0

Fuerzas conservativas no disipan energía

$$\Delta(K + U) = 0 \quad (15)$$

La fuerza de roce no es conservativa, pero cuando se rueda sin resbalar (roce es necesario para esto) la fuerza de roce no realiza trabajo pues el punto de contacto está siempre instantáneamente con velocidad 0.

Teorema de Steiner (ejes paralelos)

$$I_p = I_{cm} + MR^2 \quad (16)$$

R: distancia del centro de masa al eje de giro p.

Teorema de los ejes perpendiculares

$$I_{\perp} = I_x + I_y \quad (17)$$

Momento angular

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (18)$$

$$\vec{L} = I_p \vec{\omega} \quad (19)$$

El momento angular se conserva y además se tiene que $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$
Ejemplo con péndulo físico:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= I_p \ddot{\theta} \\ \vec{\tau} &= \vec{r}_{cm} \times (-M\vec{g}) = -r_{cm} Mg \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \\ -r_{cm} Mg \sin \theta &= I_p \ddot{\theta} \\ \implies \\ \ddot{\theta} &= \frac{-r_{cm} Mg \sin \theta}{I_p} \\ \implies \\ \ddot{\theta} + \frac{r_{cm} Mg \sin \theta}{I_p} &= 0 \end{aligned}$$