Auxiliar 1

13/03/2012 – Benjamin Soto Y.

P1 Se desea calcular el alcance de un proyectil que se lanza, desde el nivel del suelo, en un ángulo α respecto a la horizontal con velocidad V_0. Sobre el proyectil actúa el roce con el aire, que le ejerce una fuerza $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$.

1. Escriba la parte del programa Matlab que permita calcular la trayectoria ($x(t)$ e $y(t)$) del proyectil. No olvide poner las condiciones iniciales.
2. Escriba la parte del programa Matlab que entregue el alcance del proyectil.

P2 Considere el movimiento de una partícula de masa m unida a un resorte de constante k, descrita por la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -kx$$

Resuelva la ecuación de movimiento, es decir calcule $x(t)$, usando el método de Verlet para el siguiente conjunto de valores: $m = 1kg$, $k = 1N/m$, $x_0 = 3m$ y $v_0 = 0$.

Una vez que tenga la solución de la ecuación, estudie si numéricamente la energía mecánica se conserva

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para eso escriba de alguna manera discreta la velocidad y evalue la energía en función del tiempo. ¿Es constante?

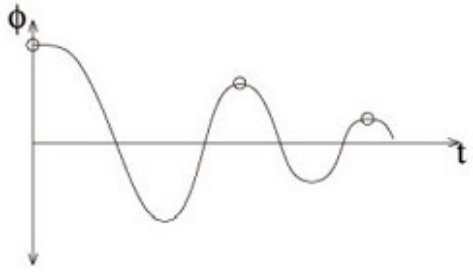
P3 Un péndulo con roce se describe por las ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\sin\phi - \gamma\dot{\phi}$$

donde L es el largo del péndulo y γ el coeficiente de roce.

Como el sistema tiene roce, si el péndulo se suelta del reposo desde un ángulo inicial ϕ_0, los ángulos máximos que alcance (indicados por un círculo en la figura) serán cada vez menores.

Se busca resolver numéricamente la dinámica del sistema para obtener cómo van disminuyendo estos ángulos máximos. Para eso:



1. A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt.
2. Escriba el criterio numérico que permita determinar los instantes en que el péndulo alcanza los ángulos máximos y los valores de estos ángulos.

P4 Se desea resolver el movimiento de la Tierra en torno al Sol. Se sabe que en ese caso la fuerza es la de gravitación universal:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Con el fin de poder tratarla numéricamente, la fuerza se reescribe de la siguiente manera (considerando el movimiento en el plano $x - y$)

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \\
&= -\frac{GMm}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\
&= -\frac{GMm}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{i} + y\hat{j})
\end{aligned}$$

Luego, la ley de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ se escribe por componentes como

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}x$$
$$\ddot{y} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}y$$

Use el método de Verlet visto en clases para resolver estas ecuaciones acopladas. Considere los siguientes valores de las constantes: $G = 1$ y $M = 1$. Además considere como condición inicial para la posición $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$ y para la velocidad $v_{x0} = 0$, v_{y0}=0.5, 1.0 y 2.0.

Grafique la trayectoria que resulta (`plot(x,y)`). Compare con los cálculos analíticos que predicen, para los datos del problema, que la velocidad para una órbita circular es $V_{\text{circ}} = \sqrt{GM/R} = 1$.