UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FI1001-08 INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

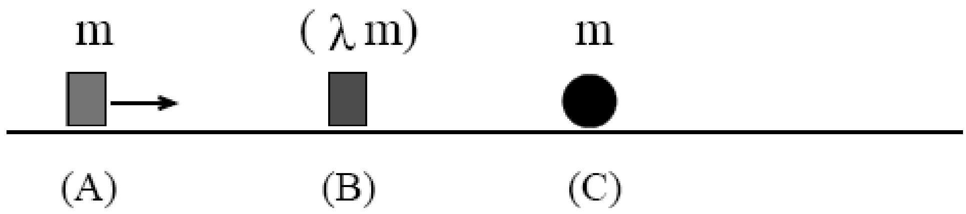
Auxiliar nº10

Profesor: Luis Moraga
Auxiliares: S. Derteano, S. Donoso, M. Ferrer

P1.-

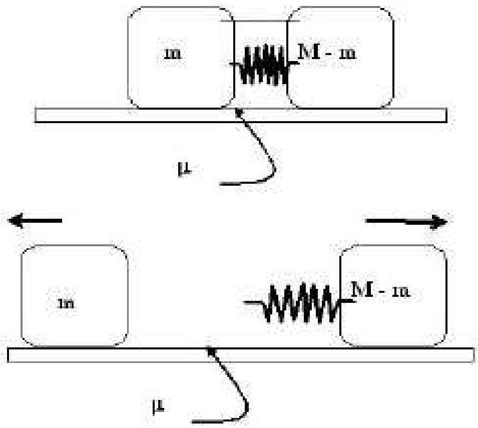
Los cuerpos que se muestran en la figura, posan en línea sobre una superficie horizontal pulida. El bloque A de masa m incide con velocidad vo chocando al bloque B de masa λm inicialmente en reposo. Después de la colisión ambos cuerpos quedan adheridos y posteriormente chocan elásticamente la bola C, de masa m, inicialmente detenida.

(a) Determine las velocidades adquiridas por los bloques y la bola.
(b) Analice el caso en que $\lambda \to 0$



P2.-

Dos bloques de masa m y (M−m) permanecen unidos mediante un hilo como se indica en la figura. En el interior de los bloques existe un resorte comprimido con una energía almacenada Eo. Este resorte tiene masa nula y una gran rigidez elástica k, de modo que, a pesar que ejerce una gran fuerza sobre las masas, su variación en la longitud al comprimirse es despreciable. Estos dos bloques permanecen en un plano horizontal sobre una superficie rugosa caracterizada por un coeficiente de fricción cinética µ. Repentinamente, el hilo se corta y producto del golpe del resorte contra las dos masas, estas absorben toda la energía Eo liberada por el resorte. Los dos fragmentos m y (M − m) resbalarán en el mismo eje pero en sentidos opuestos.



(a) Utilizando la conservación del momentum y de la energía, calcule el valor de la velocidad Vo del bloque de masa (M−m), después que se cortó el hilo y ambas masas absorbieron la energía Eo. Demuestre que esta velocidad Vo se puede escribir como:

$$V_o = \sqrt{\frac{2E_o}{M\lambda}} \quad \text{donde} \quad \lambda = \frac{M-m}{m}.$$

(b) ¿Por qué, en el punto anterior, el cálculo de la velocidad Vo se realiza en el momento posterior al corte del hilo, cuando ya las masas absorbieron la energía Eo y prácticamente no se han desplazado? Calcule el valor del momentum del centro de masa del sistema de partículas en ese instante (Recuerde que $P_{CM} = m_1v_1 + m_2v_2$). Posteriormente, una vez que cada uno de los bloques se mueve en forma independiente, haga un diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos.

(c) Calcule el momentum del centro de masa para un instante posterior t > 0. Muestre que puede expresarse como:

$$P_{CM} = -\mu M g \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} t.$$

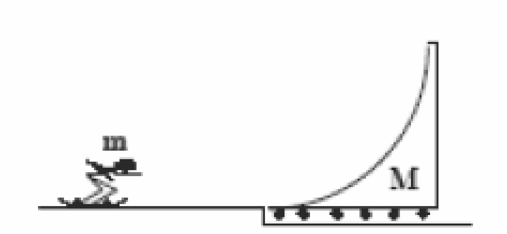
Suponemos que $\lambda > 1$, para visualizar mejor el problema.

(d) ¿Cuál de los dos bloques se detiene primero? ¿En qué instante $t=t_1$ se detiene?

P3.-

En presencia de gravedad terrestre g, un skater de masa m se aproxima con rapidez vo a una rampa lisa de masa M en reposo, la cual puede resbalar sin roce sobre el piso horizontal. Para efectos de este problema considere que el skater es muy pequeño con respecto a la rampa, que éste no flecta sus piernas mientras sube por la rampa, y que nunca alcanza el borde superior de la rampa.

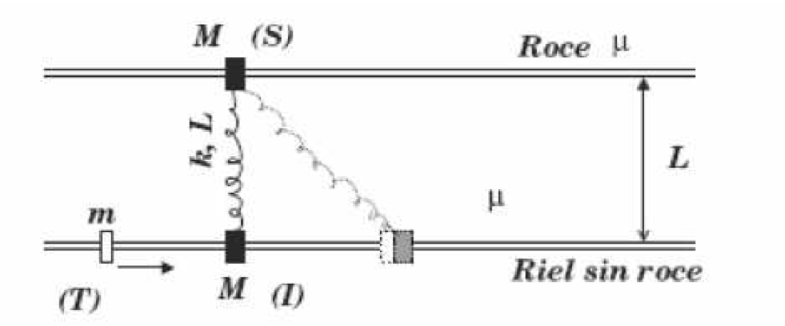
- **(a)** Determine la altura máxima que alcanza el skater sobre la rampa.
- **(b)** Examine el caso en que M >> m



P4.-

En ausencia de gravedad se disponen dos rieles paralelos separados una distancia L. Cada riel tiene pasada argollas de masa M unidas por un resorte de longitud natural L, constante elástica k y sin masa. El riel inferior de la figura no tiene roce, en tanto que el superior es rugoso. El coeficiente de roce estático entre el riel superior y la argolla S es μ. Una tercera argolla T de masa m se acerca y adhiere a la argolla inferior I.

- **(a)** Determine la rapidez máxima de la argolla T que garantice que la argolla S nunca resbale
- **(b)** En base a su resultado, examine y discuta el caso M=0



Aux. #11

- **Momento lineal ($\vec{p}$):**
- $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \approx \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$
- $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$
- tipos de choques:

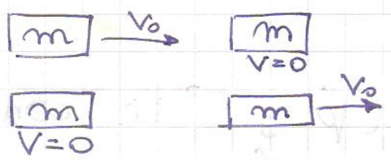
1. Choque elástico

→ conservación de $\vec{p}$ y E^{c}

* caso particular, ambas masas iguales:

inicio:

final:



2. Choque inelástico

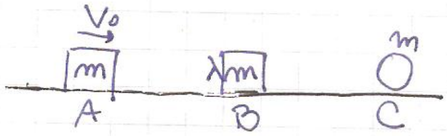
→ conservación sólo de $\vec{p}$

* caso particular, choque perfectamente inelástico (plástico)

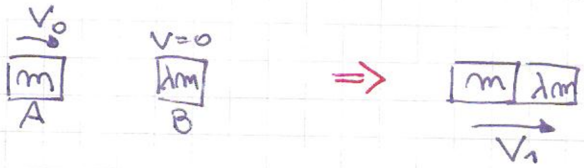
↳ ambos cuerpos quedan "pegados" y se mueven con igual velocidad.

$$\underbrace{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}_{p_i} = \underbrace{(m_1 + m_2)}_{p_f} \cdot v_f$$

P1



(a) 1° Choque: perfectamente inelástico (sólo cons. $\vec{p}$)



$$\Rightarrow p_i = p_f$$
$$\Rightarrow m \cdot V_0 = (m + \lambda m) \cdot V_1$$
$$\Rightarrow \cancel{m} \cdot V_0 = \cancel{m}(1+\lambda) \cdot V_1$$
$$\therefore \boxed{V_1 = \frac{V_0}{1+\lambda}}$$

2° Choque: elástico ($\vec{p}$ y E° se conservan)

• $p_i = p_f$

$$\Rightarrow (1+\lambda)\cancel{m} \cdot V_1 = (1+\lambda)\cancel{m} \cdot V_2 + \cancel{m} \cdot V_3$$
$$\Rightarrow \boxed{(1+\lambda)(V_1 - V_2) = V_3} \quad (1)$$

• $E_i = E_f$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}(1+\lambda)\cancel{m} \cdot V_1^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}(1+\lambda)\cancel{m} V_2^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} V_3^2$$
$$\Rightarrow (1+\lambda) V_1^2 = (1+\lambda) V_2^2 + V_3^2$$
$$\Rightarrow \boxed{(1+\lambda)(V_1^2 - V_2^2) = V_3^2} \quad (2)$$
$$\Rightarrow V_3^2 = (1)^2 = (2)$$
$$\Rightarrow (1+\lambda)^{\cancel{2}}(V_1 - V_2)^2 = \cancel{(1+\lambda)}(V_1^2 - V_2^2)$$
$$\Rightarrow (1+\lambda)(V_1 - V_2)^{\cancel{2}} = (V_1 + V_2)\cancel{(V_1 - V_2)}$$
$$\Rightarrow \boxed{(1+\lambda) = \frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2}} \quad (3)$$

• pero $V_1 = \dfrac{V_0}{1+\lambda}$

V_1 en (3)

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{V_0}{1+\lambda} + V_2}{\dfrac{V_0}{1+\lambda} - V_2} = (1+\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{V_0 + V_2(1+\lambda)}{\cancel{(1+\lambda)}}}{\dfrac{V_0 - V_2(1+\lambda)}{\cancel{(1+\lambda)}}} = (1+\lambda)$$

$$\Rightarrow V_0 + V_2(1+\lambda) = V_0(1+\lambda) - V_2(1+\lambda)^2$$

$$\Rightarrow V_2(1+\lambda+(1+2\lambda+\lambda^2)) = V_0(\cancel{1}+\lambda-\cancel{1})$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{V_0\lambda}{(\lambda^2+3\lambda+2)}$$

$$\therefore \boxed{V_2 = \frac{V_0\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}}$$

• V_1 y V_2 en (1):

$$\Rightarrow \cancel{(1+\lambda)}\left(\frac{V_0}{\cancel{1+\lambda}} - \frac{V_0\lambda}{\cancel{(1+\lambda)}(2+\lambda)}\right) = V_3$$

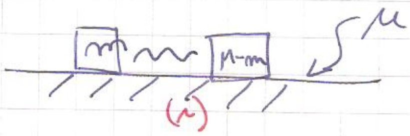
$$\Rightarrow V_3 = V_0 - \frac{V_0\lambda}{2+\lambda}$$

$$\Rightarrow V_3 = \frac{2V_0 + \cancel{V_0\lambda} - \cancel{V_0\lambda}}{2+\lambda}$$

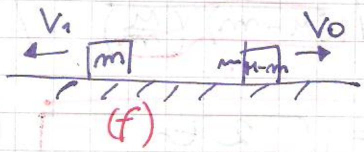
$$\therefore \boxed{V_3 = \frac{2V_0}{\lambda+2}} \quad //$$

P2

(a)



$\Rightarrow$



• $p_i = p_f$

$$\Rightarrow 0 = -mV_1 + (M-m)V_0$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{mV_1}{M-m} \quad / \text{ pero } \lambda = \frac{M-m}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{V_1}{\lambda}} \quad (1)$$

• Cons. de E^o :
$E_i = E_f$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2}(M-m) V_0^2 \quad / \cdot \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{2E_0}{m} = V_1^2 + \underbrace{\frac{(M-m)}{m}}_{\lambda} \cdot V_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1^2 = \frac{2E_0}{m} - \lambda V_0^2} \quad (2) \qquad \left(V_1 = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \lambda V_0^2} \right)$$

• (2) en (1)

$$\Rightarrow V_0 = \frac{\sqrt{\frac{2E_0}{m} - \lambda V_0^2}}{\lambda} \quad / ()^2$$

$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{2E_0}{m\lambda^2} - \frac{\cancel{\lambda} V_0^2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow V_0^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{2E_0}{m\lambda^2}$$

$$\Rightarrow V_0^2 \left(\frac{1+\lambda}{\cancel{\lambda}}\right) = \frac{2E_0}{m\lambda^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{\lambda(1+\lambda)m}} \quad / \text{ pero } \lambda = \frac{M-m}{m}$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{\frac{M-m}{\cancel{m}}\left(1 + \frac{M-m}{m}\right)\cancel{m}}} = \sqrt{\frac{2E_0}{M-m\left(\frac{\cancel{m}+M-\cancel{m}}{m}\right)}}$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{\underbrace{(M-m)\left(\frac{M}{m}\right)}_{\lambda}}}$$

$$\therefore \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{\lambda M}}} \quad (3)$$

b) $\vec{p}_{cm} = m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2}$

• (1) $\Rightarrow$ $\boxed{V_1 = \lambda V_0}$ (4)

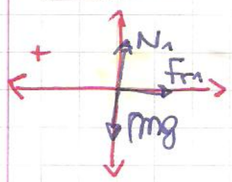
• (3) en (4) $\Rightarrow$ $\boxed{V_1 = \lambda \sqrt{\frac{2E_0}{\lambda M}} = \sqrt{\frac{2E_0 \lambda}{M}}}$ ✓

• Así, $\vec{p}_{cm} = -mV_1 + (M-m)V_0$

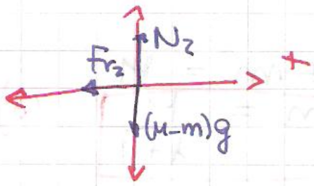
$\therefore$ $\boxed{\vec{p}_{cm} = -m\sqrt{\frac{2E_0\lambda}{M}} + (M-m)\sqrt{\frac{2E_0}{\lambda M}}}$ //

• DCL para $t > 0$

DCL m |



DCL (M−m) |



c) Calculamos las aceleraciones de c/cuerpo:

m | $\hat{y}$) $N_1 - mg = 0 \Rightarrow N_1 = mg$

$\hat{x}$) $-fr_1 = m \cdot a_1$

$\Rightarrow -\mu \cdot N_1 = m \cdot a_1$

$\Rightarrow -\mu \cdot \cancel{m}g = \cancel{m} \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = -\mu g}$

(M−m) | $\hat{y}$) $N_2 - (M-m)g = 0 \Rightarrow N_2 = (M-m)g$

$\hat{x}$) $-fr_2 = (M-m)a_2$

$\Rightarrow -\mu \cdot N_2 = (M-m)a_2$

$\Rightarrow -\mu \cdot \cancel{(M-m)}g = \cancel{(M-m)}a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\mu g}$

• Vemos las ecs. de velocidad de c/cuerpo:

m : $V_m = V_1 + a_1 t$

$\Rightarrow$ $\boxed{V_m = \sqrt{\frac{2E_0\lambda}{M}} - \mu g t}$

(M−m) : $V_{(M-m)} = V_0 + a_2 t$

$\Rightarrow$ $\boxed{V_{(M-m)} = \sqrt{\frac{2E_0}{\lambda M}} - \mu g t}$

• luego, como $\vec{p}_{cm} = -m V_m + (M-m) V_{(M-m)}$:

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm} = -m\left(\sqrt{\frac{2E_0\lambda}{M}} - \mu g t\right) + (M-m)\left(\sqrt{\frac{2E_0}{\lambda M}} - \mu g t\right) \Big/ \text{pero } \lambda = \frac{M-m}{m}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm} = -\sqrt{\frac{m^2 \cdot 2E_0 \cdot \left(\frac{M-m}{\cancel{m}}\right)}{M}} + m\mu g t + \sqrt{\frac{(M-m)^2 \cdot 2E_0}{\left(\frac{M-m}{m}\right)\cdot M}} - M\mu g t + m\mu g t$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm} = -\cancel{\sqrt{2E_0\left(\frac{m}{M}\right)(M-m)}} + \cancel{\sqrt{2E_0\left(\frac{m}{M}\right)(M-m)}} + 2m\mu g t - M\mu g t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_{cm} = -\mu g t\,(M-2m)} \quad (5)$$

★ pero como $\lambda = \dfrac{M-m}{m}$

$$\Rightarrow \lambda m + m = M$$

$$\therefore \boxed{m = \frac{M}{\lambda+1}} \quad (6)$$

• (6) en (5):

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm} = -\mu g t\left(M - 2\cdot\frac{M}{\lambda+1}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm} = -\mu g t M\left(1 - \frac{2}{\lambda+1}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm} = -\mu M g\left(\frac{\lambda+1-2}{\lambda+1}\right)\cdot t$$

$$\therefore \boxed{\vec{p}_{cm} = -\mu M g\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right) t}$$

d) • Calculamos el tiempo en el cual $V=0$

m: $0 = \sqrt{\dfrac{2E_0\lambda}{M}} - \mu g t_1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2E_0\lambda}{M}} \Big/ \mu g$

$(M-m)$: $0 = \sqrt{\dfrac{2E_0}{\lambda M}} - \mu g t_2 \Rightarrow \boxed{t_2 = \sqrt{\dfrac{2E_0}{\lambda M}} \Big/ \mu g}$

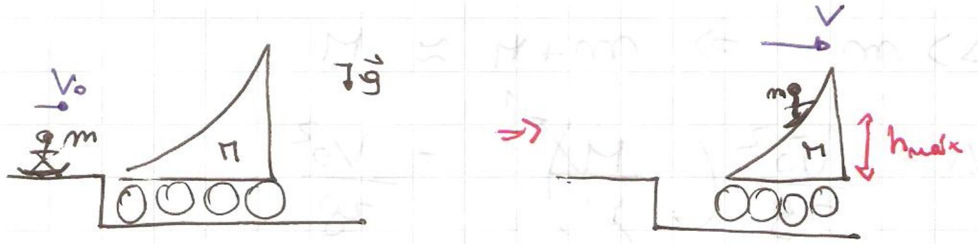
• comparamos t_1 con t_2: $\sqrt{\dfrac{2E_0\lambda}{M}} > \sqrt{\dfrac{2E_0}{\lambda M}} \Big/ (\,)^2$
(asumimos $t_1 > t_2$)

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2E_0}\lambda}{\cancel{M}} > \frac{\cancel{2E_0}}{\lambda \cancel{M}} \Rightarrow \lambda^2 > 1$$ / como $\lambda > 1$ es correcto

$\therefore \boxed{t_1 > t_2}$ (m se detiene después que $(M-m)$)

P3 7

(a)



• no hay $\vec{F}$ externas $\Rightarrow p_i = p_f$ / final, cuando alcanza $h_{máx}$

$$\Rightarrow m \cdot V_0 = (M+m) \cdot V$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{m V_0}{M+m}} \quad (1)$$

• no hay F disipativas $\Rightarrow E_i = E_f$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + m g h_{máx} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{gm}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{máx} = \frac{1}{2g} V_0^2 - \frac{1}{2g} \frac{(M+m)}{m} V^2} \quad (2)$$

• ( ) en ( ):

$$\Rightarrow h_{máx} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{1}{2g} \frac{\cancel{(M+m)}}{\cancel{m}} \cdot \frac{m^{\cancel{2}} V_0^2}{(M+m)^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow h_{máx} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{m}{(M+m)} \cdot \frac{V_0^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_{máx} = \frac{V_0^2}{2g} \left(1 - \frac{m}{M+m} \right)$$

$$\Rightarrow h_{máx} = \frac{V_0^2}{2g} \left(\frac{M + \cancel{m} - \cancel{m}}{M+m} \right)$$

$$\therefore \boxed{h_{máx} = \frac{V_0^2}{2g} \left(\frac{M}{M+m} \right)} \quad //$$

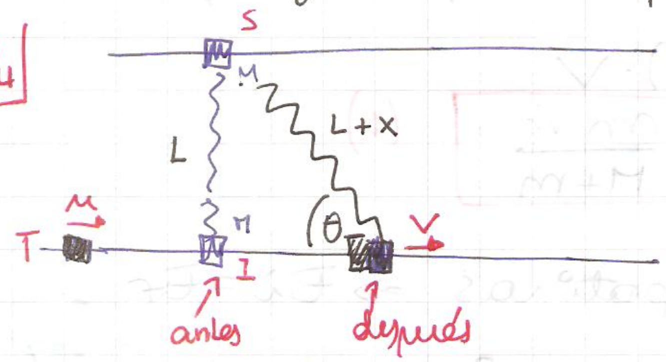
⑧

b) $M \gg m \Rightarrow m+M \approx M$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}\left(\cancel{\frac{M}{M}}^{\,1}\right) = \frac{V_0^2}{2g}$$

* h alcanzada en un plano inclinado.

P4



(a) permanecen juntos ⇒ choque inelástico ($\vec{p}$ se conserva, no así E)

• p_i(antes del choque) = p_f(después del choque)

$$\Rightarrow \quad m u = (M+m)V$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{m}{(M+m)}u} \quad (1)$$

• Podemos conservar la E DESPUÉS del choque (no hay $\vec{F}$ disipativas):

$\Rightarrow E_i = E_f$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}(M+m)V^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}Kx^2$$

máximo desplazamiento, sin que S se mueva

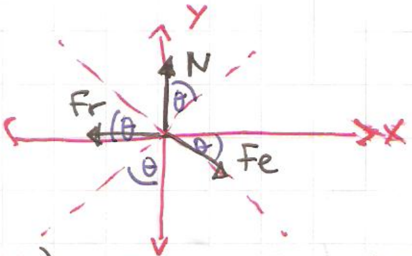
justo después del choque

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{(M+m)V^2}{K}} \quad (2)$$

• (1) en (2) $\Rightarrow$ $x^2 = \cancel{\left(\frac{M+m}{K}\right)} \cdot \frac{m^2}{(M+m)^{\cancel{2}}} \cdot u^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{x^2 = \frac{m^2 u^2}{K(M+m)}}$ (3) $\Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{mu}{\sqrt{K(M+m)}}}$

• Hacemos DCL a la argolla S (estática): (no hay $\vec{g}$!!)



$\hat{y}$) $N - Fe\sin\theta = 0$ / $Fe = Kx$

$\Rightarrow$ $\boxed{N = Kx\sin\theta}$ (4)

$\hat{x}$) $Fe\cos\theta - Fr = 0$ / en equilibrio (estático) $\Rightarrow a = 0$

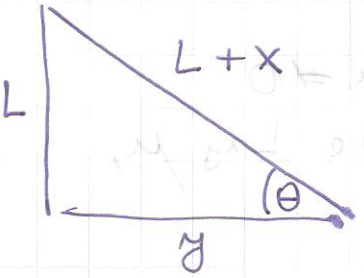
$\Rightarrow$ $Kx\cos\theta - \mu \cdot N = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{Kx\cos\theta = \mu \cdot N}$ (5)

• (4) en (5) $\Rightarrow$ $\cancel{Kx}\cos\theta = \mu \cdot \cancel{Kx}\sin\theta$

$\therefore$ $\boxed{\frac{1}{\mu} = tg\,\theta}$ (6)

★ Pero geométricamente:



$L^2 + y^2 = (L+x)^2$

$\Rightarrow$ $y^2 = \cancel{L^2} + 2xL + x^2 - \cancel{L^2}$

$\therefore$ $\boxed{y = \sqrt{2Lx + x^2}}$

• Así,

$\boxed{tg\,\theta = \frac{L}{y} = \frac{L}{\sqrt{2Lx + x^2}}}$ (7)

• (7) = (6) = $tg\,\theta$: $\frac{1}{\mu} = \frac{L}{\sqrt{2Lx + x^2}}$ / $()^2$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{\mu^2} = \frac{L^2}{2Lx + x^2}$

$$\Rightarrow x^2 + (2L)x - (L^2\mu^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2L \pm \sqrt{4L^2 + 4L^2\mu^2}}{2} \quad / x \geq 0$$

$$\therefore \quad x = -L + \sqrt{L^2 + L^2\mu^2}$$

$$\Rightarrow x = -L + L\sqrt{1+\mu^2}$$

$$\therefore \boxed{x = L\left(\sqrt{1+\mu^2} - 1\right)} \quad (8)$$

• Reemplazamos (8) en (3):

$$\Rightarrow L\left(\sqrt{1+\mu^2} - 1\right) = \frac{m u}{\sqrt{K(M+m)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{L}{m}\left(\sqrt{1+u^2} - 1\right) \cdot \sqrt{K(M+m)}}$$

//

b) Si $M = 0$

$$\Rightarrow u = \frac{L}{m}\left(\sqrt{1-\mu^2} - 1\right)\sqrt{K m}$$

es decir, aunque $M = 0 \Rightarrow u \neq 0$
(ya que θ y X dependen de L y μ, no de M) [no hay $\vec{g}$]