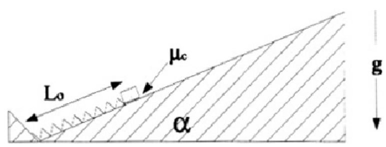
FI1001 - Introducción a la Física Newtoniana **5 de abril de 2011**

Auxiliar 9: Energía

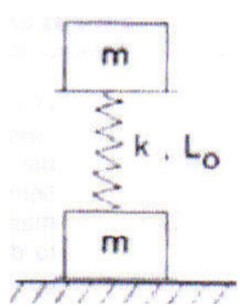
Profesor: *Luis Moraga* Auxiliares: *S. Derteano*, *S. Donoso*, *M. Ferrer*

P1. La figura muestra un plano inclinado en un ángulo α. Sobre el plano se coloca un resorte de constante k y largo natural L_0. El resorte está fijo a la cuña en su extremo inferior y en su extremo superior tiene unida una masa m. Se conoce el coeficiente de roce cinético μ_c entre el bloque y el plano.

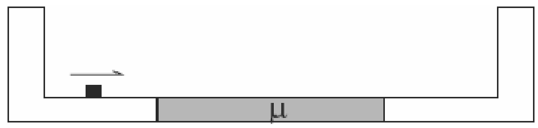


Considere que inicialmente la masa se empuja hasta comprimir completamente el resorte y luego se lo suelta repentinamente. Suponiendo que la fuerza ejercida por el resorte es capaz de vencer el roce estático, determine la altura máxima que alcanza el bloque, con respecto a la base de la cuña.

P2. Considere dos bloques de masa m unidos por un resorte de constante elástica k. El sistema formado por los dos bloques y el resorte descansa en forma vertical sobre una mesa tal y como se indica en la figura. ¿En cuánto debe comprimirse el resorte con respecto al largo natural para que al soltar el sistema éste eventualmente se despegue de la mesa?



P3. El bloque de la figura se desliza sobre una superficie horizontal de longitud L y limitada por paredes verticales elásticas verticales en ambos extremos. La superficie consta con un tramo rugoso (achurado) de longitud βL ($\beta < 1$) y con roce nulo fuera de él. El coeficiente de roce entre el tramo rugoso y el bloque es μ. El bloque parte desde un extremo con rapidez v_0.

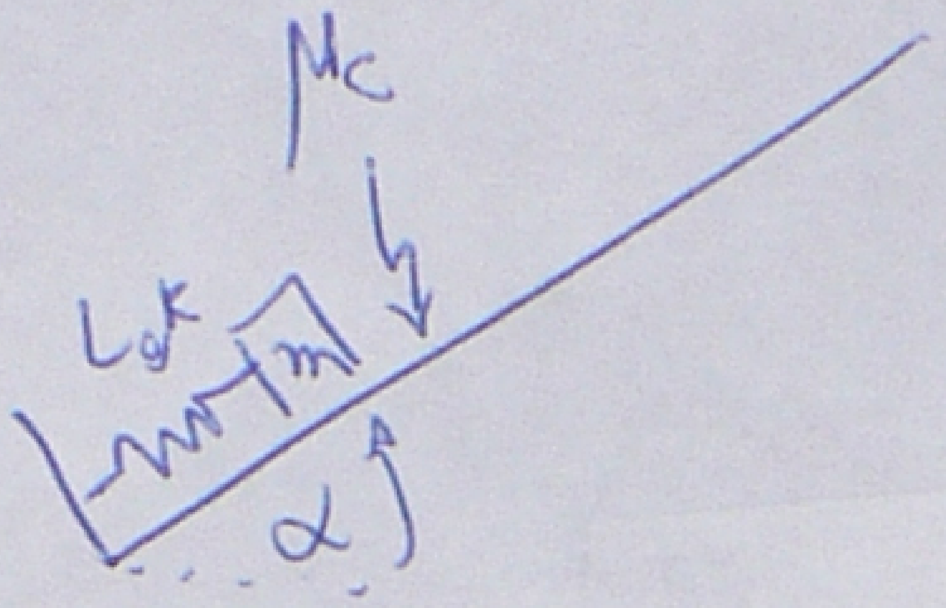


a. Determine el tiempo que dura el bloque en movimiento.

b. Determine donde se detiene el bloque.

c. Analice e interprete su resultado en *a.* para el caso $\beta \longrightarrow 1$.

P1]



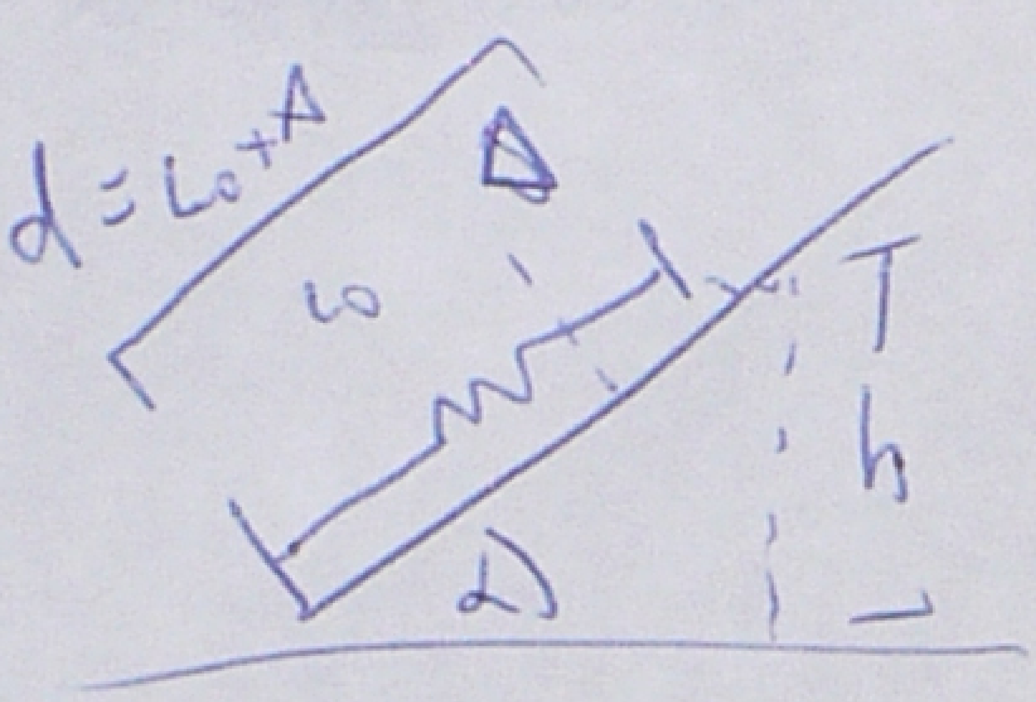
$\downarrow g$

$$E_i = \frac{kL_0^2}{2}$$

$$E_f = \frac{k\Delta^2}{2} + mgh$$

SACAR) $\Rightarrow W_{roce} = -\mu mg\cos\alpha\, d$

POSICIÓN FINAL



$$E_f - E_i = -W \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}k\Delta^2 + mgh - \frac{kL_0^2}{2} = -\mu mg\cos\alpha\, d$$

AHORA $h = d\,\text{sen}\,\alpha$ y $\Delta = (d - L_0)$ $\Rightarrow$

$$\frac{k(d-L_0)^2}{2} + mgd\,\text{sen}\,\alpha - \frac{kL_0^2}{2} = -\mu mg\cos\alpha\, d$$

$$\frac{k}{2}\left(d^2 - 2dL_0 + \cancel{L_0^2}\right) + mgd\,\text{sen}\,\alpha - \cancel{\frac{kL_0^2}{2}} = -\mu mg\cos\alpha\, d$$

$$k(d^2 - 2dL_0) + 2mgd\,\text{sen}\,\alpha = -2\mu mg\cos\alpha\, d$$

$$kd^2 - 2kdL_0 + 2mgd\,\text{sen}\,\alpha + 2\mu mg\cos\alpha\, d = 0$$

$$d\left[kd - 2kL_0 + 2mg\,\text{sen}\,\alpha + 2\mu mg\cos\alpha\right] = 0$$

$$\Rightarrow d = 0 \quad \vee \quad kd - 2kL_0 + 2mg\,\text{sen}\,\alpha + 2\mu mg\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow d = 2L_0 - \frac{2mg}{k}\left(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha\right)$$

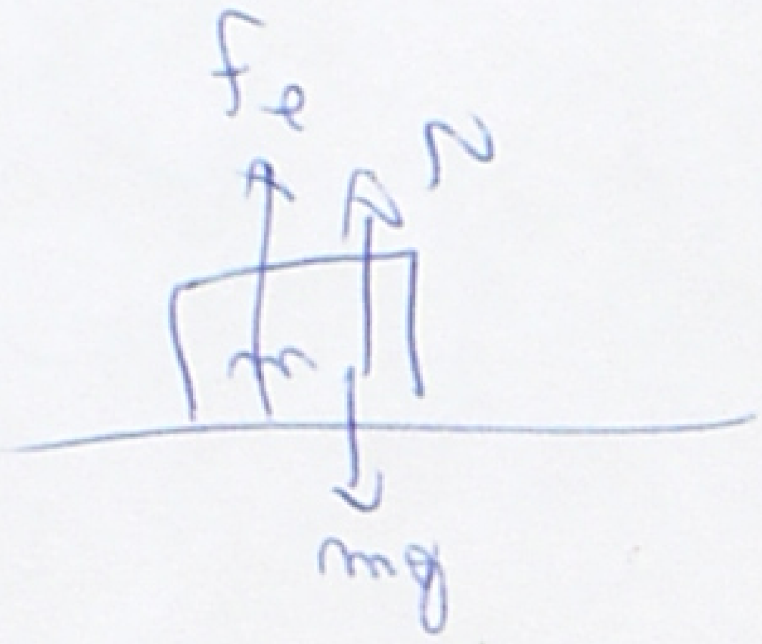
como $h = d \operatorname{sen}\alpha$, tenemos

$$h = \operatorname{sen}\alpha\left[2L_0 - \frac{2mg}{k}\left(\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{h = 2\operatorname{sen}\alpha\left[L_0 - \frac{mg}{k}\left(\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right]}\ [m]$$

P2) Primero calcularemos la fuerza necesaria para levantar la masa inferior

$$F_e + \cancel{N}^{0} - mg = m\cancel{a}^{0} \quad \Big| \ F_e = kx$$



$$kx - mg = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{mg}{k}}$$

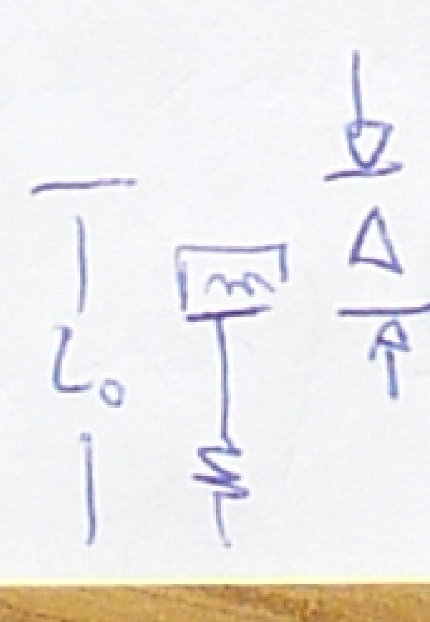
$\therefore$ x sobre L_0

Entonces, necesitamos que el resorte se encuentre elongado hasta una distancia x por sobre L_0, pero ahora observamos que debido a la masa superior el sistema no está en posición L_0 en equilibrio, ya que el resorte está comprimido, calcularemos cuanto es necesario comprimir hacia abajo el resorte en esta situación.

~~MASASU~~ DCL masa superior

$$F_e = mg \Leftrightarrow k\Delta = mg \Leftrightarrow \Delta = \frac{mg}{k}$$

$\therefore$ está comprimido $\Delta = mg/k$



Luego, como necesitamos que llegue a una altura $l_0 + \frac{mg}{k}$, hay que comprimir el resorte $\Delta_0 = \frac{2mg}{k}$, comprobaremos ésto con energía

$$E_1 = mg(l_0 - \Delta) + \frac{k\Delta^2}{2}$$

$$E_f = mg\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$E_1 = E_f \Rightarrow mg(l_0 - \Delta) + \frac{k\Delta^2}{2} = mg\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{\cancel{k}}{2}\frac{m^2g^2}{k^{\cancel{2}}}$$

$$\cancel{mgl_0} - mg\Delta + \frac{k\Delta^2}{2} = \cancel{mgl_0} + \frac{3m^2g^2}{2k}$$

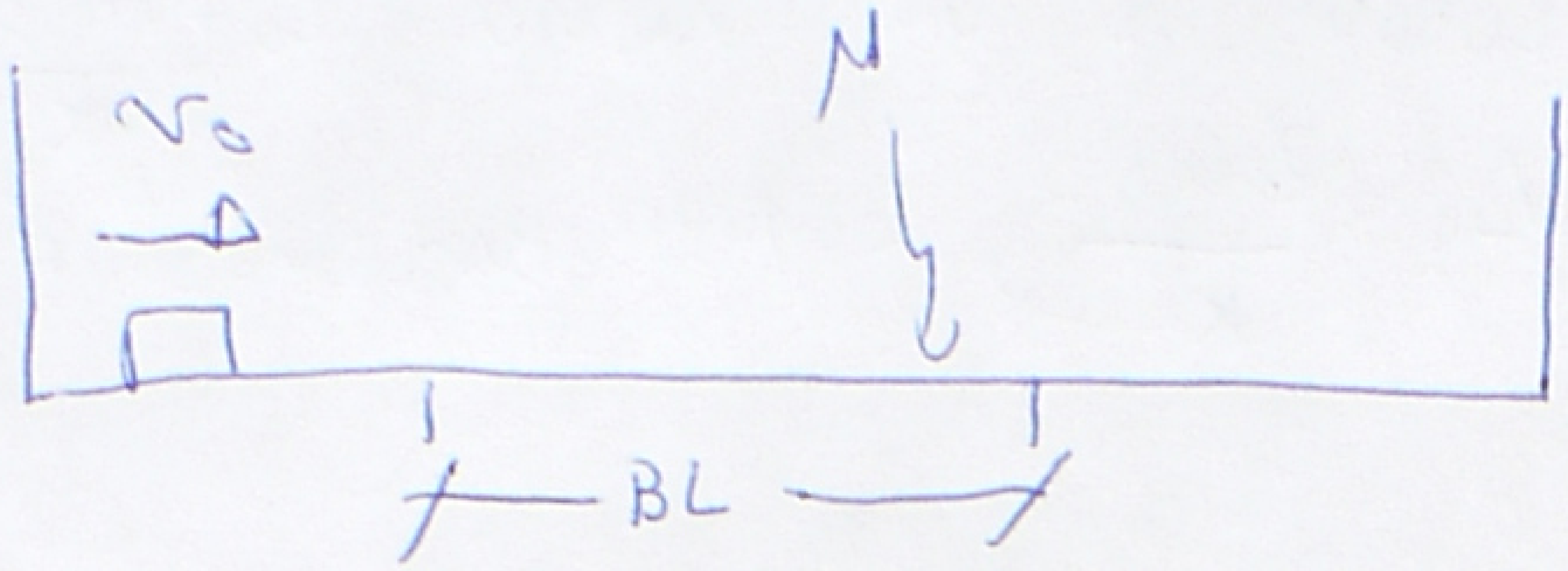
$$\Delta^2 - \frac{2mg}{k}\Delta - \frac{3m^2g^2}{\cancel{2}k}\frac{\cancel{2}}{k} = 0$$

$$\Delta^2 - 2\underbrace{\boxed{\frac{mg}{k}}}_{a}\Delta - 3\underbrace{\left(\frac{mg}{k}\right)^2}_{a^2} = 0$$

$$\frac{\cancel{2}a \pm \sqrt{\cancel{4}a^2 + \cancel{4}\cdot 3a^2}}{\cancel{2}} = a \pm \sqrt{4a^2} \Rightarrow \boxed{\Delta_1 = \frac{mg}{h}}$$

$$\boxed{\Delta_2 = 3a = \frac{3mg}{h}}$$

P3



PRIMERO CALCULAREMOS LA CANTIDAD DE VECES QUE EL BLOQUE CRUZA EL SECTOR RUGOSO, USANDO ENERGÍA

$$\underbrace{\cancel{E_f}}_{0} - E_i = W \Rightarrow 0 - \frac{m v_0^2}{2} = -\mu m g D$$

CON $D \triangleq$ DISTANCIA TOTAL RECORRIDA SOBRE EL TRAMO CON ROCE.

LUEGO

$$n = \left\lfloor \frac{D}{\beta L} \right\rfloor \qquad \frac{\cancel{m} v_0^2}{2} = \mu \cancel{m} g D \Rightarrow \boxed{D = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

$$\boxed{n = \left\lfloor \frac{v_0^2}{2\mu g \beta L} \right\rfloor}$$

CALCULAREMOS PRIMERO LA DISTANCIA EN QUE SE DETIENE.
PARA CALCULARLA, MEDIREMOS DESDE LOS BORDES DE LA SECCIÓN RUGOSA, DISTINGUIENDO MOVIMIENTOS HACIA LA DERECHA (¿PAR) SE MIDE DESDE EL EXTREMO IZQUIERDO. CUANDO EL MOVIMIENTO ES HACIA LA IZQUIERDA, SE MIDE DESDE EL EXTREMO DERECHO.
EN AMBOS CASOS LA DISTANCIA, QUE LLAMAREMOS d, ESTÁ DADA POR:

$$d = \underset{\text{DIST TOTAL}}{D} - n \cdot \beta L \leftarrow$$ DISTANCIA RECORRIDA EN TODAS LAS PASADAS, MENOS LA ÚLTIMA

$$\therefore d = D - \left\lfloor \frac{D}{\beta L} \right\rfloor \beta L$$

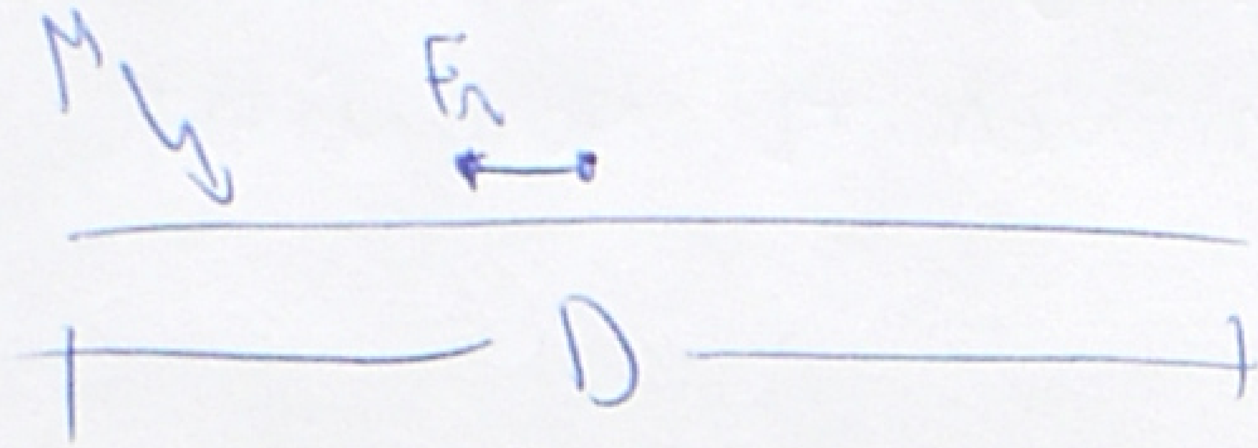
$$d' = \left[D - \left\lfloor \frac{D}{\beta L} \right\rfloor \beta L \right] \cdot \left((-1)^n + \beta L \cdot \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2d} \right) \leftarrow$$ DESDE IZQ.

CALCULAMOS EL TIEMPO ENTONCES.

$$T = \underbrace{t_R}_{\text{TIEMPO TRAMO RUGOSO}} + \underbrace{t_L}_{\text{TRAMO LISO}} + t_0$$

t_0 ← TIEMPO AL COMIENZO, ANTES DE ENTRAR AL TRAMO RUGOSO.

t_R] OBSERVAMOS QUE ES EQUIVALENTE A TENER UN GRAN TRAMO RUGOSO DE LONGITUD D



$F_R = ma$

$\mu \cancel{m} g = \cancel{m} a \quad \therefore \quad \boxed{a = \mu g}$

HACIA LA IZQ EN MODO EQUIVALENTE

CINEMÁTICA:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} t \Rightarrow 0 = v_0 - \mu g t_R$$

$$\Rightarrow \boxed{t_R = \frac{v_0}{\mu g}}$$

t_L] EN CADA "ITERACIÓN" EL TRAMO LISO TIENE UNA LONGITUD $(1-\beta)L$. LUEGO, EN EL TRAMO i-ÉSIMO EL TIEMPO DE TRÁNSITO SERÁ:

$$t_i = \frac{(1-\beta)L}{v_i}$$

$$\therefore t_L = \sum_{i=0}^{n} t_i = (1-\beta)L \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{v_i}$$

BUSCAREMOS v_i:

TRAMO 1 VS TRAMO 0 : $v_1^2 - v_0^2 = -2(\mu g)\beta L \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2\mu g \beta L$

2 1 : $v_2^2 - v_1^2 = -2\mu g \beta L \Rightarrow v_2^2 = v_0^2 - 2\mu g \beta L$

$$\therefore \boxed{v_i^2 = v_0^2 - i \cdot (2\mu g \beta L)}$$

$$\Rightarrow v_i = v_0\sqrt{1 - i\frac{\beta L}{D}}$$

$$\therefore\ t_L = \frac{(1-\beta)L}{v_0}\sum_{i=0}^{n}\left(\sqrt{1 - i\frac{\beta L}{D}}\right)^{-1}$$

ADEMÁS CONSIDERAMOS EL TIEMPO QUE DEMORA LA MASA LA PRIMERA VEZ (CUANDO RECIEN COMIENZA EL MOVIMIENTO

$$t_0 = \frac{(1-\beta)L/2}{v_0}$$

$$\therefore\ T = t_0 + T_R + T_L$$

$$\boxed{T = \frac{(1-\beta)L}{2v_0} + \frac{v_0}{\mu g} + \frac{(1-\beta)L}{v_0}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1 - i\beta L/D}}}\quad [n]$$

PARA EL CASO $\beta = 1$ TENEMOS

$$\boxed{T = \frac{v_0}{\mu g}}$$

O SEA, QUEDA UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO (CON ACELERACIÓN NEGATIVA) HASTA DETENERSE.