

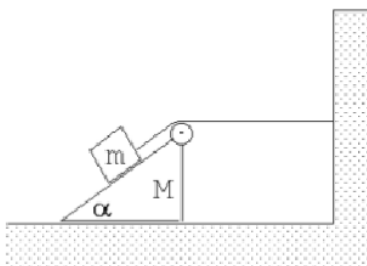
FI1001 - Introducción a la Física Newtoniana

10 de abril de 2012

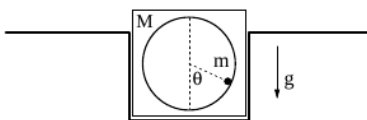
Auxiliar 6: Dinámica

Profesor: *Luis Moraga* Auxiliares: *S. Derteano, S. Donoso, M. Ferrer*

- P1. Considere el montaje mostrado en la figura, suponga que las masas de la polea y el hilo, así como el rozamiento, son despreciables. Se conocen las masas m , M y el ángulo de la cuña. Encuentre la aceleración de la cuña.

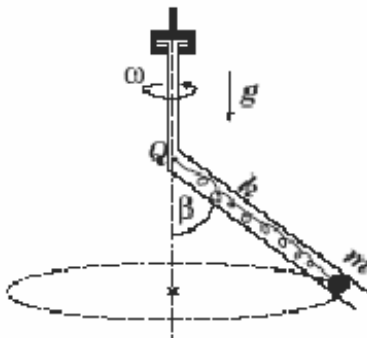


- P2. Un cubo de masa M tiene un hueco esférico de radio R , el cubo descansa en un orificio de superficies rectas y sin roce. Al interior del cubo hay una bolita de masa m que gira sin ayuda externa en un trayecto circunferencial que pasa por el punto más bajo del hueco. En dicho punto la bolita tiene rapidez v_0 .



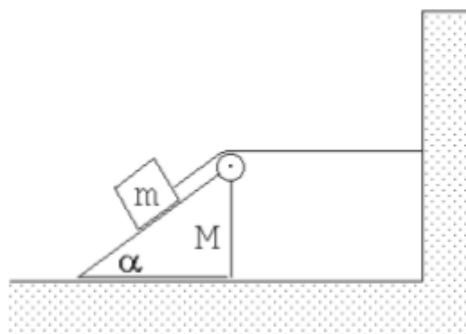
- Calcule la fuerza de contacto bolita-superficie en función del ángulo θ medido con respecto a la vertical.
 - Determine el rango de v_0 que garantice que la bolita nunca pierda contacto con la superficie, ni el cubo pierda contacto con el fondo del orificio.
- P3. Un ciclista pedalea sobre una superficie horizontal en un círculo de radio $20m$. Bicicleta y ciclista están inclinados un ángulo de 15° respecto a la vertical.
- ¿Cuál es la velocidad del ciclista?
 - Si la fuerza de roce es la mitad de su valor máximo, ¿cuánto vale el coeficiente de roce estático?

- P4. En presencia de la gravedad terrestre g , una bolita de masa m es sostenida mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural L . El conjunto se dispone dentro de un tubo de paredes lisas inclinado en un ángulo β con respecto a la vertical. El tubo se hace girar con velocidad angular constante ω y la bolita mantiene una trayectoria circular. El extremo superior Q del resorte se ubica en el eje de rotación.



- Determine la elongación δ del resorte.
- En base a su resultado, examine y discuta la posibilidad que $\delta = 0$.

Considere el montaje mostrado en la figura 4.18. Suponga que las masas de la polea y del hilo, así como el rozamiento son despreciables. Se conocen las masas m , M y el ángulo de la cuña. Encuentre la aceleración de la cuña.



Observe primero que, al moverse la cuña hacia la derecha, el bloque m se moverá en diagonal (hacia la derecha y hacia abajo). Sea $\vec{r}_m$ el vector de traslación de m cuando la cuña se traslada en una magnitud s . Se tiene (ver figura 4.40) que

$$\vec{r}_m = s(1 - \cos \alpha) \hat{x} - s \sin \alpha \hat{y} .$$

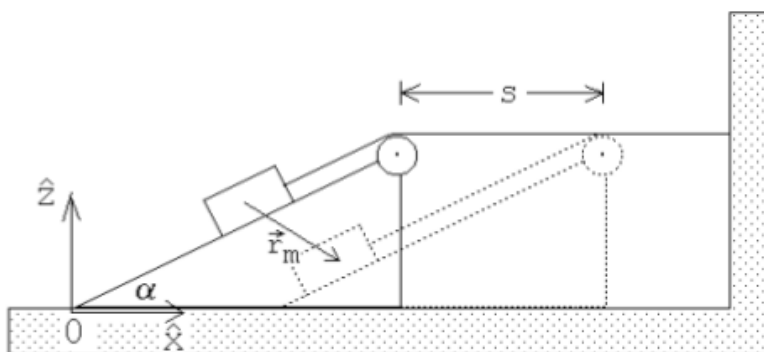


Figura 4.40

Por supuesto que la aceleración de la cuña M y del bloque m están relacionados. Si la aceleración de la cuña es

$$\ddot{\vec{r}}_M = a \hat{x} ,$$

entonces

$$\ddot{\vec{r}}_m = a (1 - \cos \alpha) \hat{x} - a \sin \alpha \hat{z} . \quad (4.3)$$

Sea τ la tensión de la cuerda y $\vec{R}$ la fuerza que la cuña ejerce sobre el bloque m . Debido a que no hay roce entre las superficies, esta fuerza de reacción $\vec{R}$ es normal al plano inclinado.

La figura 4.41 muestra el diagrama de cuerpo libre para la masa m . Las componentes horizontal y vertical de la fuerza neta que actúa sobre el bloque m son

$$F_x^{(m)} = \tau \cos \alpha - R \sin \alpha \quad (4.4)$$

y

$$F_z^{(m)} = -mg + \tau \sin \alpha + R \cos \alpha, \quad (4.5)$$

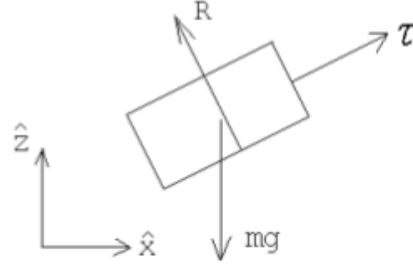


Figura 4.41

respectivamente.

Usando la segunda ley de Newton y las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5), se encuentran las relaciones

$$\tau \cos \alpha - R \sin \alpha = m a (1 - \cos \alpha) \quad (4.6)$$

y

$$-mg + \tau \sin \alpha + R \cos \alpha = -m a \sin \alpha \quad (4.7)$$

Sobre la cuña actúan 4 fuerzas:

- i) El peso $-Mg\hat{z}$.
- ii) Una fuerza (de reacción) $\vec{R}$ que el suelo ejerce sobre la cuña. Esta fuerza, cuya magnitud no nos interesará, actúa en la dirección $+\hat{z}$.
- iii) Una fuerza que el bloque m ejerce sobre la cuña. Por el principio de acción esta fuerza es $-\vec{R}$, o sea, las componentes horizontal y vertical son $R \sin \alpha$ y $-R \cos \alpha$, respectivamente.

iii) Una fuerza que el bloque m ejerce sobre la cuña. Por el principio de acción esta fuerza es $-\vec{R}$, o sea, las componentes horizontal y vertical son $R \sin \alpha$ y $-R \cos \alpha$, respectivamente.

iv) La fuerza ejercida por la roldana sobre la cuña (que es igual a la fuerza ejercida por la cuerda sobre la roldana). De la figura 4.42 se deduce que la fuerza total que ejerce la cuerda sobre la roldana es

$$\vec{F}_c = \tau(1 - \cos \alpha)\hat{x} - \tau \sin \alpha \hat{z} .$$

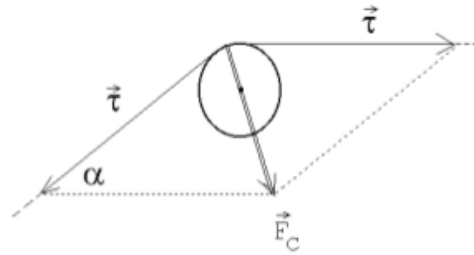


Figura 4.42

La cuña sólo se mueve a lo largo de la horizontal; por eso sólo nos interesa esa componente de la fuerza neta. Usando la segunda ley de Newton se obtiene

$$R \sin \alpha + \tau(1 - \cos \alpha) = Ma . \quad (4.8)$$

Las tres ecuaciones de movimiento (4.6), (4.7) y (4.8) con las tres incógnitas a , τ y R , permiten resolver el problema. Sumando (4.6) y (4.8) se obtiene

$$\tau = ma(1 \cos \alpha) + Ma \quad (4.9)$$

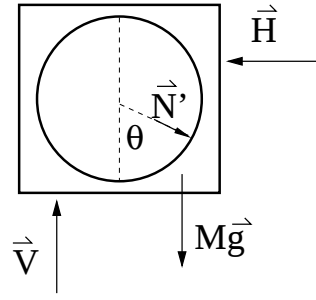
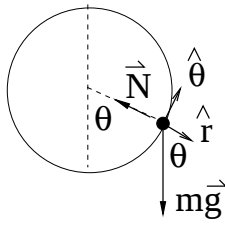
Multiplicando (4.6) por $\cos \alpha$ y (4.7) por $\sin \alpha$ y sumando ambas ecuaciones se obtiene

$$\tau = mg \sin \alpha + ma(\cos \alpha - 1) \quad (4.10)$$

De (4.9) y (4.10) se deduce finalmente que

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)} .$$

PROBLEMA 3 (por RTR)



- En el movimiento de la bolita intervienen el peso ($m\vec{g}$) y el contacto normal ($\vec{N}$). El movimiento es circunferencial y la aceleración (en polares) es $\vec{a} = -(v^2/R)\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$. La ecuación vectorial de movimiento y proyecciones según $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{vectorial} & m\vec{g} + \vec{N} = m \left[-(v^2/R)\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} \right] \\
 \text{según } \hat{\theta} & -mg \sin \theta + 0 = ma_\theta \\
 \text{según } \hat{r} & mg \cos \theta - N = -m \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{N = m \frac{v^2}{R} + mg \cos \theta}} \quad (4)
 \end{array}$$

- Conservación de energía entre el punto más bajo ($U_g = 0$) y ubicación θ :

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos \theta) \quad \rightarrow \quad v^2 = v_o^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$$

- Sustituyendo en expresión para N (Ec. 4) y simplificando:

$$\underline{\underline{N = \frac{mv_o^2}{R} - 2mg + 3mg \cos \theta}} \quad (5)$$

- Para que la bolita se mantenga en contacto y no levante el cubo implica exigir que en el punto más alto ($\theta = \pi$) la normal cumpla $0 \leq N \leq Mg$, o sea

$$0 \leq \frac{mv_o^2}{R} - 2mg - 3mg \leq Mg \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{5gR \leq v_o^2 \leq \left(5 + \frac{M}{m}\right)gR}}$$

PUNTUACION: 1Pt DCL y ecuaciones correctas para la bolita + 1Pt relación rapidez-posición para la bolita + 1Pt expresión correcta para $N(\theta)$ (Ec. 5) + 1Pt determinación de v_o mínima + 2Pt determinación de v_o máxima.

FI1001: Introducción a la física Newtoniana

Profesor: Fernando Lund

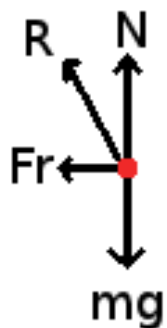
Auxiliares: Sebastián Derteano, Néstor Gallegos, Camilo Rojas

Pauta ejercicio 8

Un ciclista pedalea sobre una superficie horizontal en un círculo de radio $20m$. Bicicleta y ciclista están inclinados un ángulo de 15° respecto a la vertical.

- ¿Cuál es la velocidad del ciclista?
- Si la fuerza de roce es la mitad de su valor máximo, ¿cuánto vale el coeficiente de roce estático?

Lo primero que realizamos es un diagrama de cuerpo libre:



Del diagrama obtenemos las ecuaciones de dinámica:

$$N = mg \quad F_r = \frac{mV^2}{R}$$

Además, para reflejar el hecho que el ciclista está en un ángulo de 15° con la vertical, debemos imponer que la fuerza resultante R mostrada en el DCL sea igual a la suma vectorial de la normal y la fuerza de roce, se tendrá por tanto:

$$R = \frac{N}{\cos \theta} \quad R = \frac{F_r}{\sin \theta}$$

$$\therefore F_r = N \operatorname{tg} \theta$$

Combinando esta última ecuación con la de la fuerza de roce de dinámica obtenemos:

$$\frac{mV^2}{R} = N \operatorname{tg} \theta = mg \operatorname{tg} \theta$$

$$\therefore v = \sqrt{Rg \operatorname{tg} \theta}$$

Para solucionar la parte b), ya que nos dicen que la fuerza de roce estático es la mitad de su valor máximo combinamos las dos expresiones encontradas para la fuerza de roce, de la manera siguiente:

$$F_r = \frac{\mu}{2} N = N \operatorname{tg} \theta$$

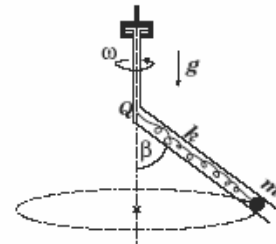
$$\Rightarrow \mu = 2 \operatorname{tg} \theta$$

DINAMICA III

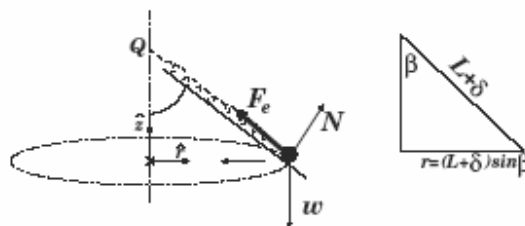
PROBLEMA 3: En presencia de la gravedad terrestre g , una bolita de masa m es sostenida mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural L . El conjunto se dispone dentro de un tubo de paredes lisas inclinado en un ángulo β con respecto a la vertical. El tubo se hace girar con velocidad angular constante ω y la bolita mantiene una trayectoria circular. El extremo superior Q del resorte se ubica en el eje de rotación.

A) [6Pt] Determine la elongación δ del resorte.

B) [1Pt] En base a su resultado, examine y discuta la posibilidad de que $\delta = 0$.



Solución



• Las fuerzas actuando sobre la bolita sostenida por el resorte son el peso ($\vec{w} = m\vec{g}$), la fuerza del resorte ($\vec{F}_e$, de magnitud $k\delta$), y el contacto sin roce ($\vec{N}$). El movimiento del objeto es circular uniforme y por lo tanto su aceleración es del tipo $\omega^2 \times \text{radio}$. La ecuación del movimiento y proyecciones correspondientes según los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{z}$ indicados:

$$m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{N} = m\vec{a} \quad (9)$$

$$0 - k\delta \sin \beta + N \cos \beta = -m\omega^2 r \quad \text{según } \hat{r} \quad (10)$$

$$-mg + k\delta \cos \beta + N \sin \beta = 0 \quad \text{según } \hat{z} \quad (11)$$

• Despejar N de Ec. 11 y sustituir en Ec. 10; usar resultado geométrico $r = (L + \delta) \sin \beta$ y despejar δ . Se obtiene:

$$\delta = \frac{m(g \cos \beta + \omega^2 L \sin^2 \beta)}{k - m\omega^2 \sin^2 \beta}$$

• Si se examina el caso $\delta = 0$ se observa que es necesario que

$$g \cos \beta + \omega^2 L \sin^2 \beta = 0$$

Sean $b \equiv g/\omega^2 L$ y $x \equiv \cos \beta$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$x^2 - bx - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

• La solución con signo '+' implica $\cos \beta > 1$ la cual es inaceptable; sólo queda la solución con signo '-': $\cos \beta = \frac{b}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, la cual, bajo valores adecuados de $g/\omega^2 L$ llevan a soluciones $\beta > \pi/2$, como se ilustra en la figura.

