

P1)

a) El trayecto del bus tiene 2 partes

1) con aceleración $a = a_0$

la posición del bus es

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Si T es el tiempo total. la primera parte la hace en $T/2$

$$\Rightarrow x_{\text{final},1} = \frac{1}{2} a_0 (T/2)^2 = a_0 T^2 / 8$$

la velocidad final de esta parte es

$$v_{\text{final},1} = a_0 (T/2) = a_0 T / 2$$

2) la segunda parte es con $a = -a_0$ parte de $x_{\text{final},1}$ con $v_{\text{final},1}$

$$\Rightarrow x(t) = a_0 T^2 / 8 + \frac{a_0 T}{2} t - a_0 t^2 / 2$$

Llega al final en $t = T/2$

$$x_{\text{final},2} = a_0 T^2 / 8 + \frac{a_0 T}{2} \cdot \frac{T}{2} - \frac{a_0 (T/2)^2}{2}$$

$$\boxed{x_{\text{final},2} = a_0 T^2 / 4}$$

pero $x_{\text{final},2}$ debe ser L

$$\Rightarrow a_0 \frac{T^2}{4} = L \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4L}{a_0}}}$$

la velocidad final es

$$v_{\text{final},2} = v_{\text{final},1} - a_0 T / 2 = 0 //$$

El atleta corre durante T con a_p

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_p t^2$$

y llega al

$$\boxed{L = \frac{1}{2} a_p T^2}$$

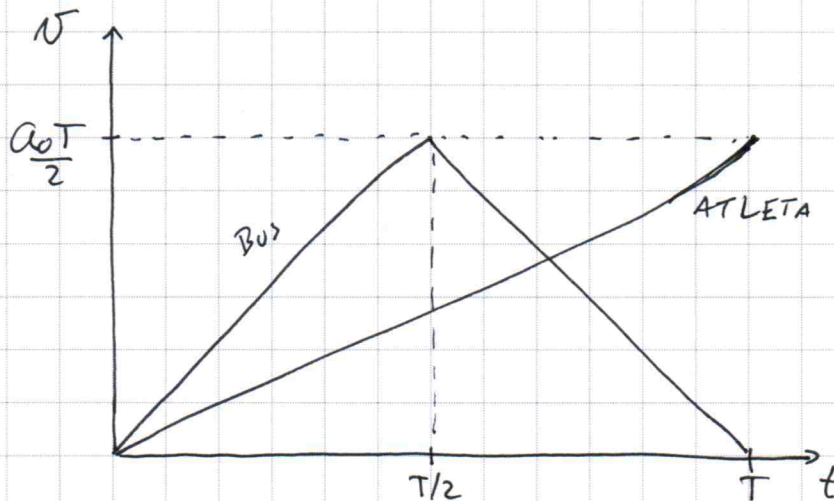
REEMPLAZANDO $T = \sqrt{\frac{4L}{a_0}}$

$$L = \frac{1}{2} a_p \frac{4L}{a_0}$$

$$\therefore \boxed{a_p = a_0/2}$$

3 PTS

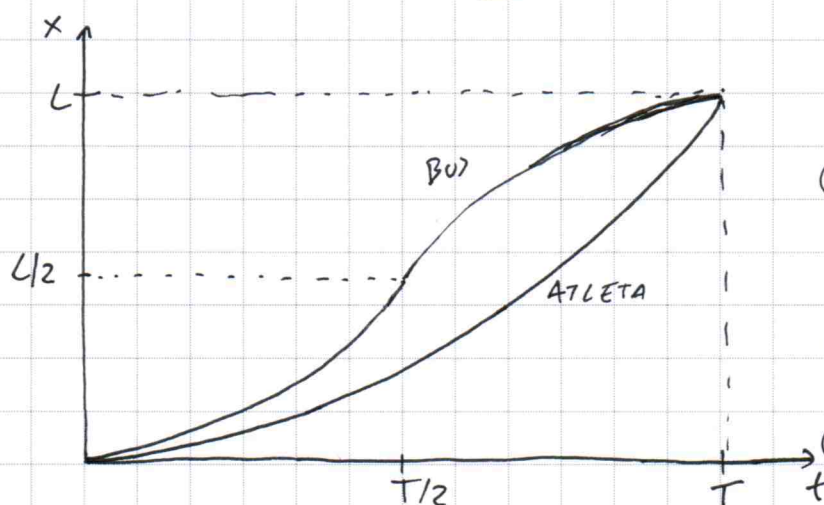
b) EL GRAFICO DE VELOCIDAD ES



1.5 pts

DESCONTAR: (0.5) SI LINEAS NO SON RECTAS
 (0.5) SI NO HAY HITOS RELEVANTES
 (0.5) SI NO MUESTRAN QUE EN ATLETA CASO
 $v_{max} = a_0 T/2$

c) GRAFICO POSICIÓN 1.5 PTS



DESCONTAR:

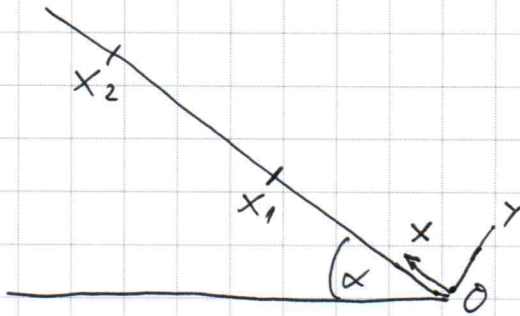
(0.5) SI LAS CONCAVIDADES NO CORRESPONDEN

(0.5) SI LAS POSICIONES NO COINCIDEN EN $t=0$ Y $t=T$

(0.2) SI HAY QUIEBRE DE v EN $T/2$

(0.5) SI NO HAY HITOS

P2 SEAN X_1 Y X_2 LAS POSICIONES DE LAS FOTOPUERTAS
Y V_0 LA VELOCIDAD INICIAL.
EL ANGULO ES α .



LA TRAYECTORIA DE LA PARTICULA ES

$$X(t) = V_0 t - g \sin \alpha \frac{t^2}{2}$$

[1 Pto]

1) PASA POR LA FOTOPUERTA (1)

$$X_1 = V_0 t - g \sin \alpha \frac{t^2}{2}$$

$$\frac{g \sin \alpha}{2} t^2 - V_0 t + X_1 = 0$$

$$t = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 2 X_1 g \sin \alpha}}{g \sin \alpha}$$

$$\Delta t_1 = t_+ - t_- = \left[\frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2 X_1 g \sin \alpha}}{g \sin \alpha} \right] - \left[\frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2 X_1 g \sin \alpha}}{g \sin \alpha} \right]$$

$$\Delta t_1 = \frac{2 \sqrt{V_0^2 - 2 X_1 g \sin \alpha}}{g \sin \alpha}$$

[2 Ptos]

2) DE MANERA ANÁLOGA PARA LA FOTOPUERTA (2)

$$\Delta t_2 = \frac{2 \sqrt{V_0^2 - 2 X_2 g \sin \alpha}}{g \sin \alpha}$$

[1 Pto]

PERO V_0 NO ES DATO. SE ELIMINA.

PARA ESO, ELEVAROS AL CUADRADO AMBAS EXPRESIONES

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_1^2 &= \frac{4(V_0^2 - 2x_1 g \sin \alpha)}{g^2 \sin^2 \alpha} \\ \Delta t_2^2 &= \frac{4(V_0^2 - 2x_2 g \sin \alpha)}{g^2 \sin^2 \alpha} \end{aligned} \right\}$$

RESTANDO SE OBTIENE V_0

$$\begin{aligned} \Delta t_1^2 - \Delta t_2^2 &= \frac{8x_2 g \sin \alpha - 8x_1 g \sin \alpha}{g^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{8(x_2 - x_1)}{g \sin \alpha} \end{aligned}$$

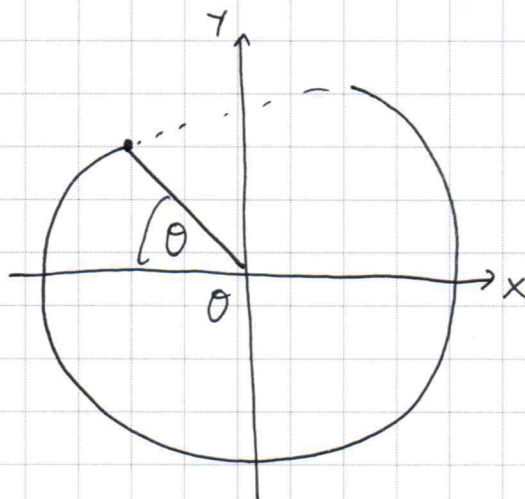
$$\Rightarrow g = \frac{8(x_2 - x_1)}{(\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2) \sin \alpha} \quad [1 \text{ pto}]$$

USANDO LOS DATOS:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= h \\ \sin \alpha &= \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{g = \frac{8h \sqrt{H^2 + L^2}}{(\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2) H}} \quad [1 \text{ pto}]$$

P3



USANDO EL SISTEMA DE
COORDENADAS DE LA FIGURA.

~~LA VELOCIDAD~~

LA RAPIDEZ EN EL PUNTO DE
SALIDA ES:

$$v = \omega R$$

LA VELOCIDAD VECTORIAL ES:

$$\vec{v}_0 = \omega R \sin \theta \hat{a} + \omega R \cos \theta \hat{j}$$

0.5 PTS

CON SIGNOS COHERENTES CON IR HACIA ARRIBA Y DERECHA

LA POSICIÓN AL MOMENTO DE SALIDA ES:

$$\vec{x}_0 = -R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$$

0.5 PTS

WEGO DE SALIR HACE MOV PARABÓLICO.

$$\Rightarrow \begin{cases} X = x_0 + v_{x0} t \\ Y = y_0 + v_{y0} t - gt^2/2 \end{cases}$$

USANDO LAS CONDICIONES INICIALES

$$\begin{cases} X = -R \cos \theta + \omega R \sin \theta t \\ Y = R \sin \theta + \omega R \cos \theta t - gt^2/2 \end{cases}$$

1 Pto

a) SE QUIERE QUE LLEGUE A P ($\vec{r}_P = 0 \hat{i} - R \hat{j}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -R \cos \theta + \omega R \sin \theta t & (1) \\ -R = R \sin \theta + \omega R \cos \theta t - gt^2/2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{DE (1): } t = \frac{\cos \theta}{\omega \sin \theta}$$

1 Pto

SE REEMPLAZA A (2)

$$-R = R \cancel{\sin \theta} + \cancel{wR \cos \theta} \frac{\cos \theta}{w \cancel{\sin \theta}} - \frac{g}{2} \frac{\cos^2 \theta}{w^2 \cancel{\sin^2 \theta}}$$

$$-R = R \sin \theta + R \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} - \frac{g}{2} \frac{\cos^2 \theta}{w^2 \sin^2 \theta}$$

$$\underbrace{R \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta}}$$

$$= \frac{R}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{2} \frac{\cos^2 \theta}{w^2 \sin^2 \theta} = R \left(1 + \frac{1}{\sin \theta} \right) = R \left(\frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta} \right)$$

$$w^2 = \frac{g}{2R} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + 1} = \frac{g}{2R} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \sin \theta}$$

$$w = \sqrt{\frac{g}{2R}} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \sin \theta}}$$

REEMPLAZANDO:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \sqrt{3}/2 \\ \sin \theta = 1/2 \end{array} \right\} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \sin \theta} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \sqrt{\frac{g}{2R}}}$$

1 pto

b) EL EJE X LO CRUZA CUANDO $y=0$, CUANDO $y(t)$

$$0 = R \sin \theta + wR \cos \theta t - g t^2 / 2$$

$$t = \frac{-wR \cos \theta \pm \sqrt{(wR \cos \theta)^2 + 2gR \sin \theta}}{g}$$

0.5 pto

DONDE SIRVE LA SOL t_+

LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA ES

$$V_x = \omega R \sin \theta$$

$$V_y = \omega R \cos \theta - gt = \omega R \cos \theta - g \left(-\omega R \cos \theta + \sqrt{(\omega R \cos \theta)^2 + 2gR \sin \theta} \right)$$

$$V_y = 2\omega R \cos \theta + \sqrt{(\omega R \cos \theta)^2 + 2gR \sin \theta}$$

REEMPLAZANDO LA M12

$$\sqrt{(\omega R \cos \theta)^2 + 2gR \sin \theta} = \sqrt{\frac{g}{2R} R^2 \cos^2 \theta + 2gR \sin \theta}$$

$$= \sqrt{gR (\cos^2 \theta / 2 + 2 \sin \theta)}$$

$$= \sqrt{11gR/8}$$

$$V_y = 2\sqrt{\frac{g}{2R}} R \cos \theta + \sqrt{\frac{11gR}{8}} = \sqrt{gR} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{11}{8}} \right)$$

$$V_x = \sqrt{\frac{g}{2R}} \sin \theta = \sqrt{gR} \sqrt{\frac{1}{8}}$$

LA RAPIDEZ ES: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = gR \left[\frac{1}{8} + \frac{3}{2} + \frac{11}{8} + 2\sqrt{\frac{33}{16}} \right]$

$$\boxed{V = gR \left(3 + \frac{\sqrt{33}}{2} \right)} \quad \text{1.0}$$

LA DIRECCIÓN ES α con

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sqrt{3/2} + \sqrt{11/8}}{\sqrt{1/8}}} \quad \text{0.5}$$

Me parece que hay un error en la segunda ecuación de la parte b del problema
 3. Debe decir

$$t = \frac{\omega R \cos \theta \pm \sqrt{\omega^2 R^2 \cos^2 \theta + 2gR \sin \theta}}{g} \quad (1)$$

Entonces (todas las demás consideraciones iguales)

$$v_y = -\sqrt{\omega^2 R^2 \cos^2 \theta + 2gR \sin \theta} = -\sqrt{\frac{11}{8}}gR, \quad (2)$$

$$v = \sqrt{\frac{3}{2}}gR, \quad (3)$$

y $\theta = -\arctan \sqrt{11} = -73.2^\circ$.

Luis Moraga

24 de Abril de 2012