Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI1001 - Introducción a la Física Newtoniana **10 de abril de 2011**

Auxiliar 3: Cinemática enn 2D

Profesor: *Luis Moraga* Auxiliares: *S. Derteano*, *S. Donoso*, *M. Ferrer*

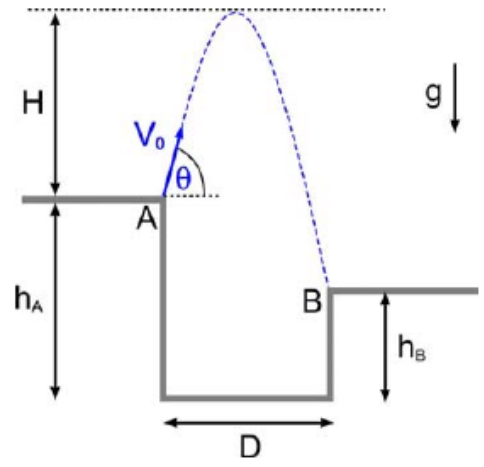
P1. Un cohete se dispara verticalmente, subiendo con aceleración constante de $20m/s^2$ respecto a la plataforma de lanzamiento durante 1 minuto. En ese momento se agota su combustible y continúa moviéndose sólo bajo la acción de la aceleración de gravedad.

a ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

b ¿Cuál es el tiempo transcurrido desde que despega hasta volver a caer sobre la plataforma?

c Grafique la posición y velocidad en función del tiempo.

P2. Un proyectil es lanzado desde el borde de un precipicio (punto A) hacia el lado opuesto. Si la altura máxima respecto al plano de lanzamiento que alcanza el móvil es H, determine la velocidad inicial v_0 y el ángulo de lanzamiento θ en función de H, D, h_a y h_b para que el proyectil alcance justo el borde del otro precipicio.



P3. Desde un regador ubicado en el piso salen gotas de agua en todas direcciones con la misma rapidez, V. Cada gota, una vez evacuada del regador, describe una trayectoria parabólica debido a la gravedad. Las gotas caen al piso mojando directamente una región de tamaño $2R$.

1. Determine la rapidez de salida de las gotas, V (1 punto).

2. Determine la altura máxima lograda por las gotas (1 punto).
3. Determine el ángulo θ_p de salida de las gotas que pasan por un punto P arbitrario (ubicado a una distancia horizontal x_p y vertical y_P desde el regador) (2 puntos).
4. Dependiendo de la distancia horizontal al regador, el agua alcanza distintas alturas. Determine la forma de la región del espacio que es alcanzada por el agua. Es decir, determine la forma del manto que separa la región húmeda (a la cual llegan gotas) de la seca (muy alta para las gotas). Para ésto considere que los puntos a los que no llega ninguna gota no tienen solución real para el ángulo de la parte 3. Usando ésto determine la ecuación de la curva continua de la figura.

P1. Debemos plantear las ecuaciones del movimiento para las dos partes del viaje del cohete, primero para cuando es impulsado gracias al combustible, hasta el segundo 60. Posteriormente hay que usar otras ecuaciones, ya que estará solo bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Para el primer movimiento fijamos el sistema de referencia en el piso, por lo que posición inicial es cero. Además el cohete parte del reposo, así que la velocidad inicial también es nula. Se tiene entonces:

$$x_1(t) = \frac{20}{2}t^2 = 10t^2 \quad (1)$$
$$v_1(t) = 20t \quad (2)$$

Además, para la segunda parte del movimiento tendremos que usar otras ecuaciones, porque al acabarse el combustible la nave queda sólo bajo la influencia de la aceleración de gravedad, si cambia la aceleración, cambian las ecuaciones de movimiento. Si consideramos además que para esta segunda etapa del fenómeno la posición inicial y velocidad inicial son distintas de cero, tendremos:

$$x_2(t) = x_0 + v_0 t - \frac{10}{2}t^2$$

$$v_2(t) = v_0 - 10t$$

Para encontrar x_0 y v_0 tenemos que encontrar la altura y velocidad al final del primer movimiento, o sea justo cuando se acaba el combustible, que ocurre en el segundo 60.

$$\Rightarrow \quad v_0(60) = 20 \cdot 60 = 1200$$
$$x_0(60) = 10 \cdot 60^2 = 36k$$

Entonces ahora podemos escribir las ecuaciones para la segunda parte del movimiento:

$$x_2(t) = 36k + 1200t - 5t^2 \quad (3)$$
$$v_2(t) = 1200 - 10t \quad (4)$$

Con las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) podemos describir el movimiento, así que ahora podemos comenzar a responder las preguntas. Para encontrar la altura máxima imponemos que la velocidad sea cero, en $V_2(t^\star)$, ya que es en la segunda parte del movimiento cuando se alcanza la altura máxima. Luego:

$$\begin{aligned} 0 &= 1200 - 10t^\star \\ \Rightarrow t^\star &= 120 \qquad [s] \end{aligned}$$

Si reemplazamos $t^\star$ en $x_2(t)$ obtenemos la altura máxima:

$$x_2(t^\star) = 108 \qquad [km]$$

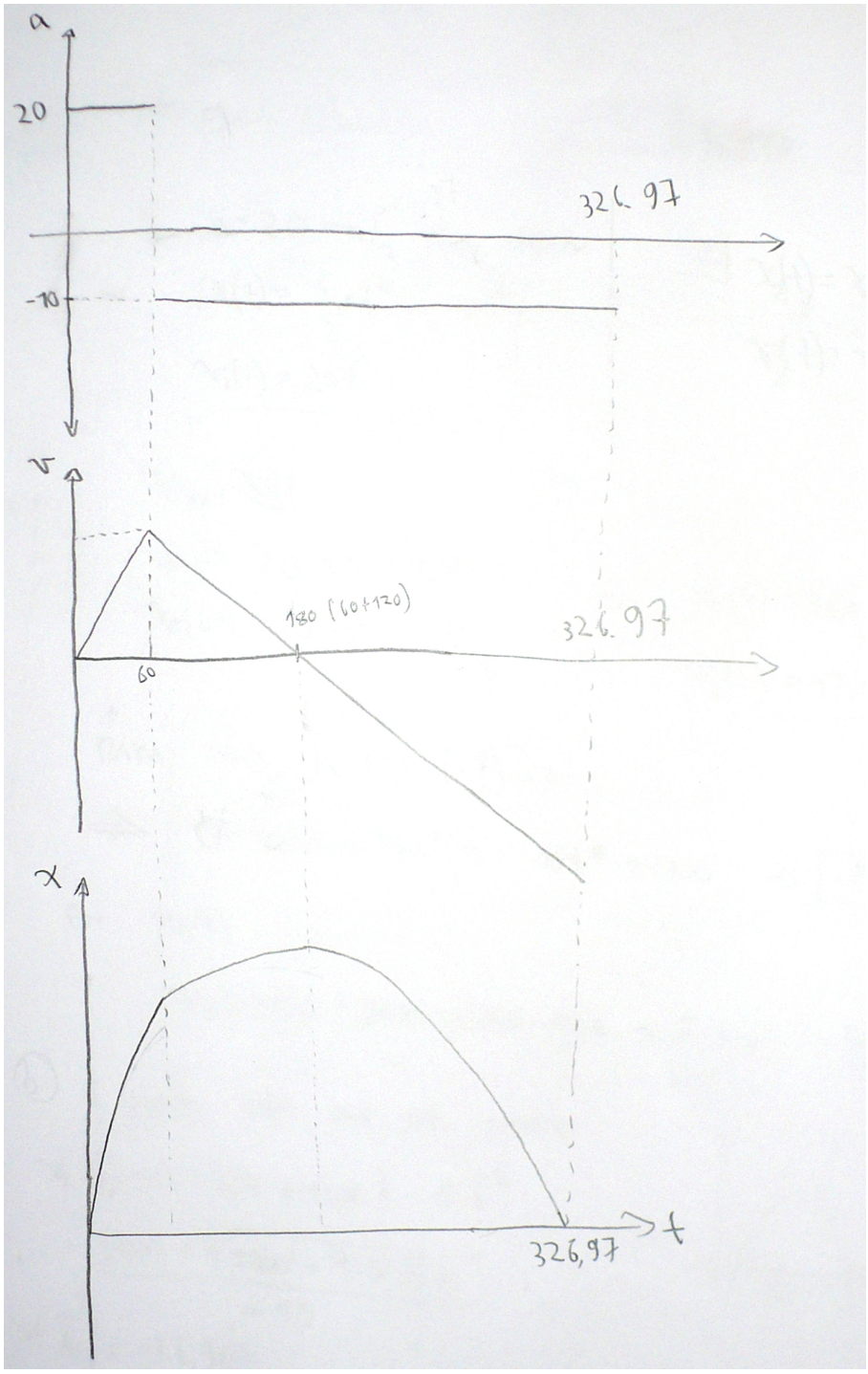
Para encontrar el tiempo hasta que vuelve a caer imponemos $x_2(\bar{t}) = 0$, con lo que nos queda:

$$\begin{aligned} x_2(\bar{t}) &= 36k + 1200\bar{t} - 5\bar{t}^2 \\ \Rightarrow \bar{t_1} &= -26{,}969 \\ \bar{t_2} &= 266{,}97 \end{aligned}$$

Claramente escogemos $\bar{t_2}$, que es el único tiempo con significado físico, finalmente el tiempo de vuelo viene dado por la suma del tiempo que dura el primer y segundo movimiento:

$$\begin{aligned} \therefore t_f &= 60 + 266{,}97 \\ &= 326{,}97 \\ &\approx 5\ min\ y\ 26\ s \end{aligned}$$

Ahora graficaremos posición, velocidad y aceleración en función del tiempo:



P2 Partemos primero las ecuaciones de movimiento

$$y(t) = 0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{g t^2}{2}$$

$y = 0$ donde se empieza a describir la parábola

$$x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$$

Tenemos 3 vars y 2 ecs, podemos sacar una tercera si consideramos que la altura máxima es H, en el punto de máxima altura la velocidad vertical es nula.

$$v_y(t_{max}) = 0$$

$$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

imponiendo $t_{MAX} \Rightarrow$ $\quad 0 = v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_{max} \Rightarrow$ $\boxed{t_{MAX} = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen}\theta}$

Además, recordemos que $y_{MAX}(t_{MAX}) = H \Rightarrow$

$$H = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{v_0}{g} \operatorname{sen}\theta - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2\theta} \quad \bigstar$$

VEMOS AHORA QUE LLEGA JUSTO AL PUNTO B, A UNA DISTANCIA HORIZONTAL D Y VERTICAL $(h_b - h_a) < 0$

$x \Rightarrow D = v_0 \cos\theta \, t^*$ (1) t^* ES EL TIEMPO EN QUE LLEGA AL OTRO PRECIPICIO

$y \Rightarrow h_b - h_a = v_0 \sin\theta \, t^* - \frac{g t^{*2}}{2}$ (2)

(1) $\Leftrightarrow$ $\boxed{t^* = \frac{D}{v_0 \cos\theta}}$

EN (2) $\Rightarrow$ $h_b - h_a = \frac{v_0 \sin\theta \, D}{v_0 \cos\theta} - \frac{g}{2} \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$

$= D \tan\theta - \frac{g D^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$

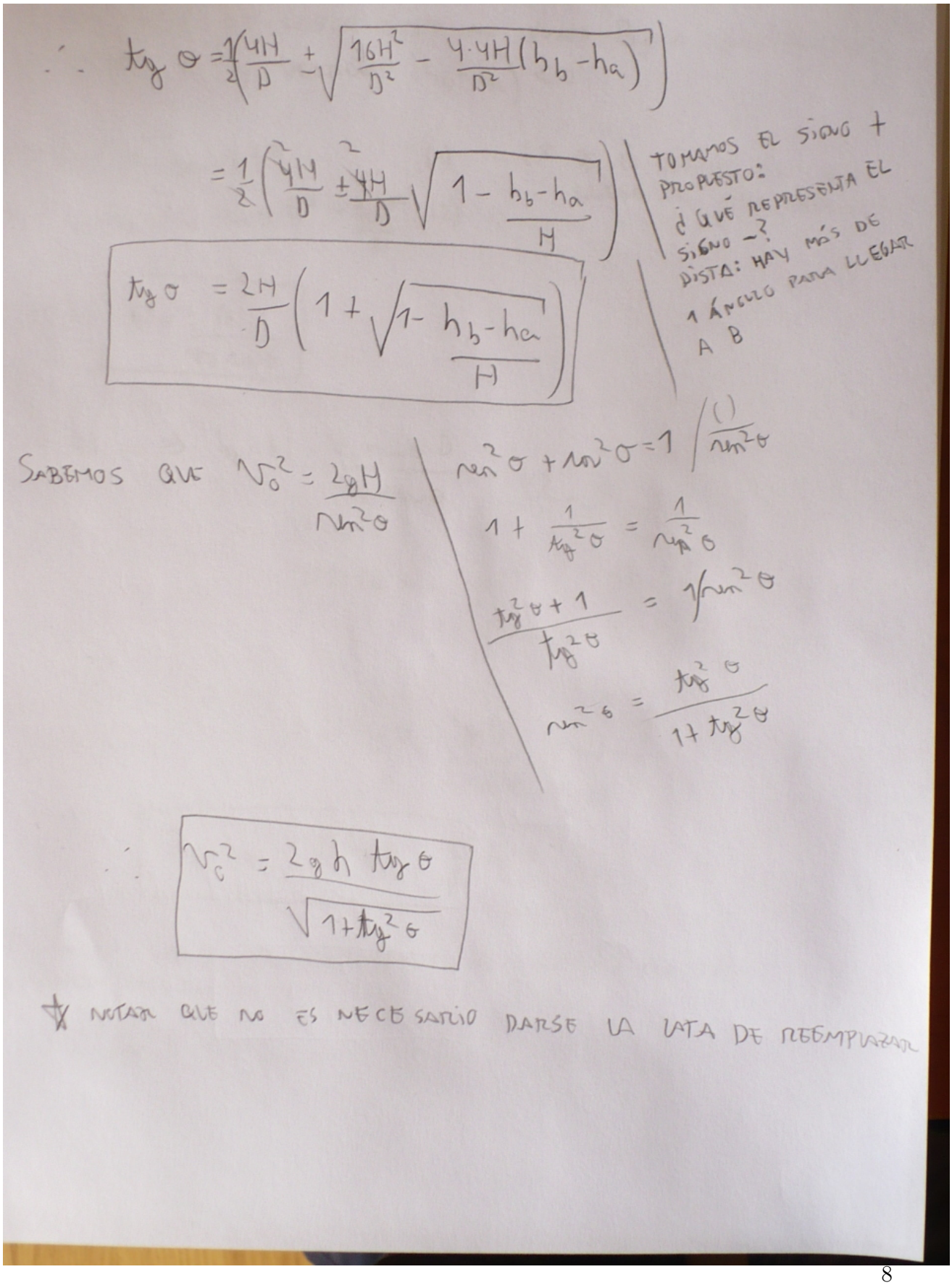
DE $\bigstar$ $\Rightarrow$ $v_1^2 = 2gH \frac{}{\cos^2\theta}$

$= D \tan\theta - \frac{g D^2}{2 \cos^2\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{2gH}$

$$\boxed{h_b - h_a = D \tan\theta - \frac{D^2}{4H} \tan^2\theta}$$

DE AQUÍ SALE θ, RESOLVIENDO LA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y DESPUÉS TOMANDO ARCTAN:

$$\tan^2\theta - \frac{4H}{D} \tan\theta + \frac{4H}{D^2}(h_b - h_a) = 0$$


∴ tg θ = 1/2 (4H/D ± √(16H²/D² − 4·4H/D² (h_b − h_a)))
= 1/2 (4H/D ± 4H/D √(1 − (h_b − h_a)/H))
tg θ = 2H/D (1 + √(1 − (h_b − h_a)/H))
TOMAMOS EL SIGNO + PROPUESTO:
¿QUÉ REPRESENTA EL SIGNO −?
PISTA: HAY MÁS DE 1 ÁNGULO PARA LLEGAR A B
SABEMOS QUE v_0² = 2gH / sen²θ
sen²θ + cos²θ = 1 / ( ) sen²θ
1 + 1/tg²θ = 1/sen²θ
(tg²θ + 1)/tg²θ = 1/sen²θ
sen²θ = tg²θ / (1 + tg²θ)
∴ v_0² = 2gh tg θ / √(1 + tg²θ)
NOTAR QUE NO ES NECESARIO DARSE LA LATA DE REEMPLAZAR