CONTROL 1
135 minutos

Intro. Física Newtoniana

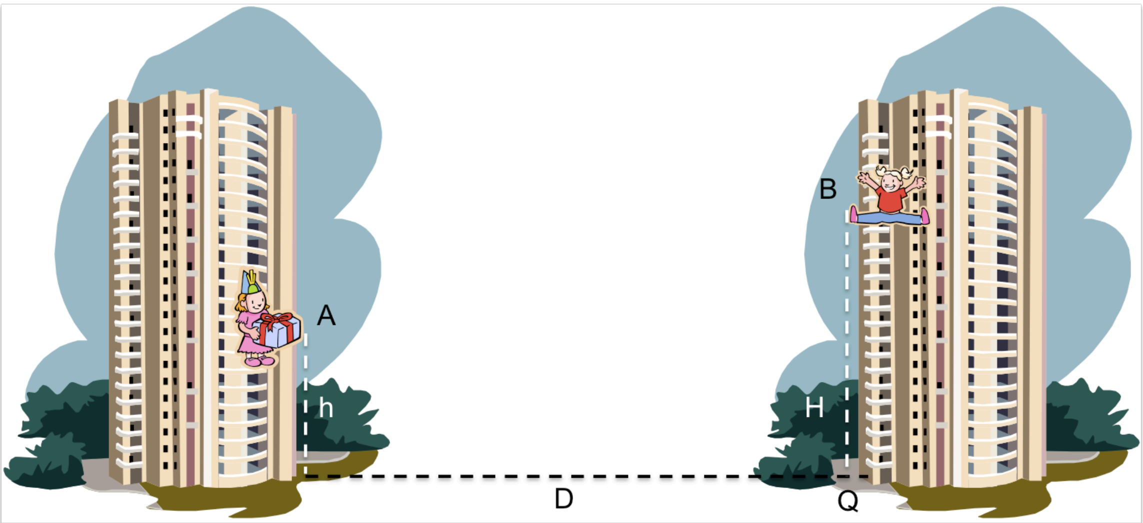
Profs. L. Gallardo, B. Cuadros-Melgar, F. Lund, S. Lopez, R. Mendez, N. Zamorano, A. Núñez

Sábado 18 de Abril, 2009

PROBLEMA 1:

Desde su departamento en A, Penélope quiere lanzarle un regalo de cumpleaños a Alfonsina, cuyo departamento está en B. Existe una diferencia de altura H-h y una distancia horizontal D entre ambos puntos.

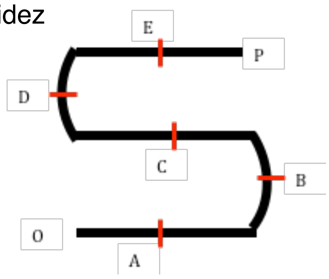
1. ¿Cuál debe ser la componente vertical mínima de la velocidad con que Penélope debe lanzar el regalo para que llegue a B?
2. ¿Cuál debe ser la componente horizontal mínima de la velocidad inicial en A para que el regalo alcance el punto B? Debe considerar su respuesta en la parte 1.- del problema para contestar esta parte.
3. Dibuje en forma aproximada la trayectoria resultante.
4. Para las condiciones de 1.- y 2., Calcule la rapidez inicial del regalo.
5. Con el módulo de la velocidad calculado en 4.-, determine el ángulo θ con el cual debe enviar el regalo para que alcance la puerta Q del edificio de Alfonsina.



PROBLEMA 2:

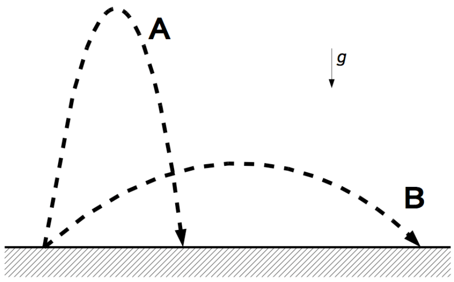
Responda las siguientes preguntas conceptuales usando frases breves (no más de dos lineas).

1. De acuerdo con la figura adyacente un móvil se desplaza con rapidez constante a lo largo de la trayectoria indicada, partiendo desde O y llegando hasta P. Dibuje los vectores de velocidad en los puntos A, B, C, D y E. Indíque la dirección de la aceleración en los puntos B y D.



2. La figura adjunta muestra la trayectoria parabólica que siguen dos partículas A y B lanzadas en el vacío y en presencia de la gravedad. Las partículas se lanzan desde el mismo punto y al mismo tiempo. ¿Se puede determinar cuál de las partículas llega primero de vuelta al suelo? Proceda como sigue:

2.1. Si Ud. considera que faltan datos, nómbrelos (sólo nómbrelos); en caso contrario escriba ``no faltan datos''.
2.2. Descomponiendo los movimientos vertical y horizontal de cualquiera de las partículas, ¿cuál está sujeto a la gravedad?.
2.3. ¿Cuál movimiento, vertical u horizontal, define el momento en que cualquiera de las partículas vuelve al suelo?
2.4. ¿Cuál partícula vuelve antes al suelo y por qué?.

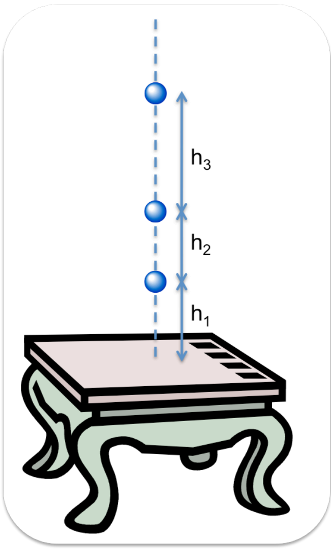


3. Considere las siguientes combinaciones de signos de velocidades y aceleraciones de un móvil que se desplaza en una trayectoria rectilínea. Describa qué está haciendo el móvil en cada caso y en una frase de un ejemplo cotidiano para cada situación.

	VELOCIDAD	ACELERACIÓN
a	positiva	positiva
b	positiva	negativa
c	positiva	cero
d	negativa	positiva
e	negativa	negativa
f	negativa	cero
g	cero	positiva
h	cero	negativa

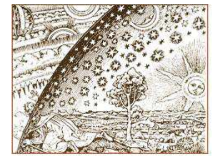
PROBLEMA 3:

Dos partículas se sueltan simúltaneamente, desde alturas h_1 y $h_1 + h_2$ y se dejan caer sobre una mesa.



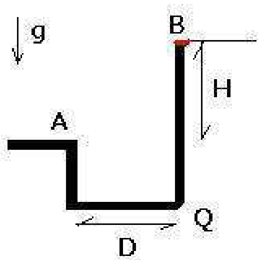
1.Calcule h_2, en términos de h_1, de modo que el intervalo de tiempo entre golpes en la mesa sea igual al tiempo que le toma a la 1^{ra} particula en golpear la mesa.
2.Una tercera partícula se suelta simultáneamente con las anteriores, desde una altura $h_1 + h_2 + h_3$. Calcule la distancia entre esta partícula y la que golpea justo antes, de modo que el intervalo de tiempo entre golpes sucesivos sea constante.
3.Considere ahora una una serie de masas i=1, N, atadas por un hilo. En un instante dado el hilo se corta en su parte superior. Para las mismas condiciones señaladas en 1) y 2) - y usando esos resultados, calcule la distancia entre dos masas consecutivas cualesquiera j y j+1. (Obs: *Note que no se le pregunta la altura de ambas masas, solo su distancia relativa*)

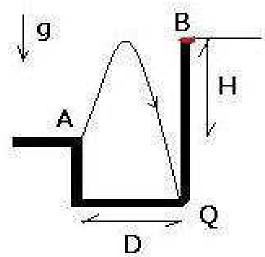
Profesor:
Nelson Zamorano H.
Profesores Auxiliares:
Javier Baeza
Pablo Barrios
Daniela Mancilla



Propuesta-C-1

Problema # 1





Se pretende lanzar un proyectil desde **A** hasta el borde opuesto **B**. Existe una diferencia de altura **H** y un ancho**D** entre ambos puntos.
a.- ¿Cuál debe ser la componente vertical mínima de la velocidad que se debe comunicar al proyectil para que llegue a **B**?

Puntaje: 1.5 ptos.

Solución: Es bien conocido..., RESPTA. $V_{o-y}^2 = 2\,g\,(H - h)$.

b.- ¿Cuál debe ser la componente horizontal mínima de la velocidad inicial en **A** para que el proyectil alcance el punto **B**? Debe considerar su respuesta en la parte a.- del problema para contestar esta parte.

Puntaje: 1.5 ptos.

Solución: Es tb. conocido, RESPTA.

$$V_{o-x} = \frac{D}{T} = \sqrt{\frac{g\,D^2}{2\,(H - h)}}$$

donde $T = \sqrt{\dfrac{2\,(H - h)}{g}}$.

c.- Dibuje en forma aproximada la parábola resultante.

Puntaje: 0.5 ptos.

Solución: una parábola con el vértice en el punto **B**.

d.- Teniendo como dato la componente-x y la componente-y de la velocidad inicial obtenida en a.- y b.-, ¿Calcule el módulo de esta velocidad.

Puntaje: 0.5 ptos.

Solución:

$$V_o^2 = 2\,g\,(H - h)\left[1 + \left(\frac{D}{2\,(H - h)}\right)^2\right].$$

e.- Con el módulo de la velocidad calculado en d.-, determine el ángulo θ con el cual debe enviar la partícula para que alcance el rincón **Q** del acantilado.

Puntaje Total: 2 ptos.

NOTA: Aquí yo me olvidé de establecer una relación entre $(H - h)$ y D en la expresión para la velocidad V_o^2, que elimina un montón de álgebra. PERO, el procedimiento es el mismo.

Definiciones para escribir menos: $\tan\theta_o \equiv V_{A-y}/V_{A-x}$, $V_{A-y} \equiv u$, $V_{A-x} = V_x \equiv w$. En $t = 0$ la partícula está en A y en $t = T$ está en Q, $w > 0$, el eje coordenado apunta hacia la derecha $Q = [D, 0]$ y $A = [0, h]$.

Ecuaciones:

$$D = w\,T, \qquad 0 = h + u\,T - g\,T^2/2$$

Despejando T y utilizando el hecho que $u = \sqrt{V_o^2 - w^2}$ se obtiene la siguiente ecaución:

$$h + \frac{\sqrt{V_0^2 - w^2}}{w}\,D - \frac{g\,D^2}{2\,w^2} = 0.$$

SI LLEGAN HASTA AQUÍ: 0.5 PUNTOS

Despejando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado, se tiene:

$$\frac{g^2\,D^4}{4}\,\frac{1}{w^4} - (h\,g\,D^2)\,\frac{1}{w^2} + h^2 = \frac{V_o^2\,D^2}{w^2} - D^2$$

Ordenando se obtiene

$$\frac{1}{w^4} - 4\,\frac{V_o^2 + h\,g}{g^2\,D^2}\,\frac{1}{w^2} + 4\,\frac{(h^2 + D^2)}{g^2\,D^4} = 0$$

SI LLEGAN HASTA AQUÍ: 0.5 PUNTOS adicionales

La solución es:

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{2}\left(4\,\frac{V_o^2 + h\,g}{g^2\,D^2} \pm \sqrt{16\left(\frac{V_o^2 + h\,g}{g^2\,D^2}\right)^2 - 16\,\frac{h^2 + D^2}{g^2\,D^4}}\right)$$

o escrito en forma adimensional:

$$\frac{1}{w^2} = \left(2\,\frac{V_o^2 + h\,g}{g^2\,D^2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(h^2 + D^2)\,g^2}{(V_o^2 + h\,g)^2}}\right]\right)$$

NOTE que no hay razón para eliminar uno de los signos, hay dos soluciones si se cumple la condición:

$$1 - \frac{(h^2 + D^2)\,g^2}{(V_o^2 + h\,g)^2} > 0.$$

HASTA AQUÍ OTRO PUNTO MAS O FRACCION.

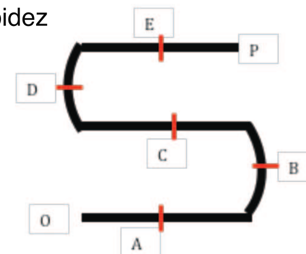
El resto es álgebra y se acorta mucho si uno supone $g\,D \propto V_o^2$ y $g\,h \propto V_o^2$.

$$\tan\,\theta_o = V_o^2/w^2 - 1.$$

PROBLEMA 2:

Responda las siguientes preguntas conceptuales usando frases breves (no más de dos lineas).

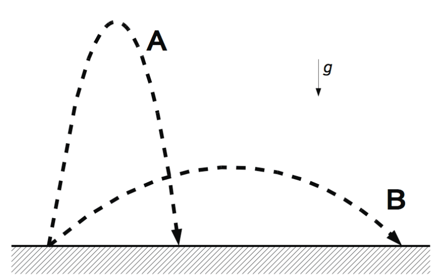
1. De acuerdo con la figura adyacente un móvil se desplaza con rapidez constante a lo largo de la trayectoria indicada, partiendo desde O y llegando hasta P. Dibuje los vectores de velocidad en los puntos A, B, C, D y E. Indíque la dirección de la aceleración en los puntos B y D.



Solución:

Las velocidades son tangentes a la trayectoriay su módulo es la rapidez (que, en este caso, es constante).
Considerando esto los vectores velocidad en A, B, C, D, y E son, → ↑ ← ↑ → respectivamente. [1 punto]
Dado que entre A y C la velocidad cambia entre → y ←, la aceleración promedio entre A y C apunta a lo largo de ←, es claro que la aceleración en el punto B (simétrico entre A y C) debe apuntar en el mismo sentido. El argumento se repite en D, pero el resultado en hacia el otro lado. [1 punto]

2. La figura adjunta muestra la trayectoria parabólica que siguen dos partículas A y B lanzadas en el vacío y en presencia de la gravedad. Las partículas se lanzan desde el mismo punto y al mismo tiempo. ¿Se puede determinar cuál de las partículas llega primero de vuelta al suelo? Proceda como sigue:
   - 2.1. Si Ud. considera que faltan datos, nómbrelos (sólo nómbrelos); en caso contrario escriba ``no faltan datos''.
   - 2.2. Descomponiendo los movimientos vertical y horizontal de cualquiera de las partículas, ¿cuál está sujeto a la gravedad?.
   - 2.3. ¿Cuál movimiento, vertical u horizontal, define el momento en que cualquiera de las partículas vuelve al suelo?
   - 2.4. ¿Cuál partícula vuelve antes al suelo y por qué?.



2.1 No faltan datos. [0.5 puntos]
2.2 Solo el movimiento vertical es sujeto a los efectos de la gravedad, el movimiento horizontal ocurre como si la gravedad no existiese (ppio de superposición). [0.5 puntos]
2.3 Las partículas llegan al suelo cuando su coordenada vertical es igual a la coordenada del suelo. Solo dicho movimiento determina el tiempo de vuelo. [0.5 puntos]

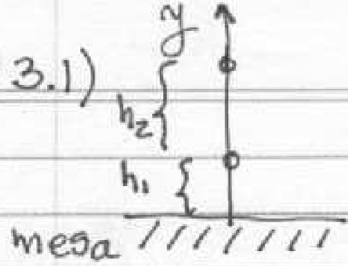
2.4 El tiempo que tardan en subir y bajar es el doble del tiempo que de bajada desde el punto más alto. Como ambas partículas estan en reposo (vertical) en dicho punto, la que parte de más alto se demora más en caer. De este modo el tiempo de vuelo de A es más largo que el de B. B impacta antes el suelo.
[0.5 puntos]

3. Considere las siguientes combinaciones de signos de velocidades y aceleraciones de un móvil que se desplaza en una trayectoria rectilínea. Describa qué está haciendo el móvil en cada caso y en una frase de un ejemplo cotidiano para cada situación.

	VELOCIDAD	ACELERACIÓN
a	positiva	positiva
b	positiva	negativa
c	positiva	cero
d	negativa	positiva
e	negativa	negativa
f	negativa	cero
g	cero	positiva
h	cero	negativa

a) El móvil acelera en la dirección de su movimiento. Es decir aumenta su rapidez. Ejemplo: un auto adelantando a otro en una autopista.
b) La aceleración disminuye la rapidez. Ejemplo. un auto frenando.
c) Instantaneamente la velocidad es constante. Ejemplo: el metro entre estaciones anda con aceleraciones minimas.
d) La velocidad es negativa, pero la aceleración disminuye la rapidez. Ejemplo: Un auto en sentido opuesto que frena para no chocar con nosotros (que vamos en el auto de b)
e) Nuevamente la rapidez crece pues la aceleración es en el mismo sentido de la rapidez. Ejemplo:
f) El móvil esta con velocidad instantáneamente constante. Se mueve el el sentido opuesto al eje positivo. Ejemplo: un auto en el sentido opuesto que no se dio cuenta que va a chocar con nosotros (!).
g) El objeto esta en reposo, pero comienza a moverse en el sentido positivo. Ejemplo: el metro cuando parte.
h) El objeto esta en reposo, pero comienza a moverse en el sentido negativo. Ejemplo: un auto comenzando a moverse en marcha atras. [0.25 puntos c/u]

P 3.1)



$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

2 puntos

Para la masa 1

$$y_1(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 .$$ Golpea la mesa

en τ_1 $$y_1(\tau_1) = 0 = h - \frac{1}{2} g \tau_1^2$$

$$\tau_1 = \left(\frac{2 h_1}{g} \right)^{1/2}$$

Para la 2^a masa $$y_2(\tau_2) = 0 = h_1 + h_2 - \frac{1}{2} g \tau_2^2$$

$$\tau_2 = \left(\frac{2 (h_1 + h_2)}{g} \right)^{1/2}$$

El intervalo entre golpes es $\tau_2 - \tau_1$, y queremos que esto sea igual a $\tau_1 \Rightarrow$

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_1 \Rightarrow \tau_2 = 2 \tau_1 \qquad (I)$$

$$\left(\frac{2 (h_1 + h_2)}{g} \right)^{1/2} = 2 \left(\frac{2 h_1}{g} \right)^{1/2}$$

$$\frac{2 (h_1 + h_2)}{g} = 4 \cdot \frac{2 h_1}{g} \Rightarrow h_2 = 4 h_1 - h_1 = 3 h_1$$

P3.2) Para la 3^a partícula (2 puntos)

$$\tau_3 = \left(\frac{2(h_1+h_2+h_3)}{g}\right)^{1/2}.$$

y para que la frecuencia de golpes sea constante

$$\tau_3 - \tau_2 = \tau_1 \Rightarrow \tau_3 = \tau_1 + \tau_2 = 3\tau_1 \quad (\mathrm{II})$$

$$\left(2\frac{(h_1+h_2+h_3)}{g}\right)^{1/2} = 3\left(\frac{2h_1}{g}\right)^{1/2}$$

$$h_1+h_2+h_3 = 9h_1$$

$$h_3 = 9h_1 - h_1 - h_2 = 9h_1 - h_1 - 3h_1 = 5h_1$$

P3.3) Cuando el hilo se corta, todas las masas experimentan caída libre de manera simultánea. Entonces, la situación es totalmente análoga a lo visto en 3.1 y 3.2, el hilo que las ata no juega ningún rol (una vez que se corta!) (2 puntos)

Para calcular la distancia entre dos partículas cualquiera, notamos de 3.1 y 3.2 que h_{j+1} es justamente la distancia entre la partícula j y la $j+1$; con $j = 1, \ldots, N-1$

Ahora hay dos maneras de proceder; una + fácil que la otra, pero equivalentes.

P3.3 continuación)

Manera "fácil". De (I) y (II) vemos que

$$\tau_j = j \cdot \tau_1 \quad (\text{"inducción"}) \quad (\text{III})$$

Esto es bastante intuitivo; el instante de cada golpe después del 1er golpe es un múltiplo del 1er golpe, de modo que la frecuencia (o intervalo) de golpes sea fija (por construcción del problema, según el enunciado).

Luego, vemos que (de (III))

$$\tau_{j+1} = (j+1)\tau_1$$
$$\tau_j = j\,\tau_1$$

Pero $\tau_{j+1} = \left(\frac{2(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{g}\right)^{1/2} = (j+1)\tau_1 \quad /(\;)^2$

$$\tau_j = \left(\frac{2(h_1+h_2+\cdots+h_j)}{g}\right)^{1/2} = j\,\tau_1 \quad /(\;)^2$$

Elevando al $\square$ y restando :

$$\tau_{j+1}^2 - \tau_j^2 = \underbrace{\frac{2\sum_{i=1}^{j+1} h_i}{g} - \frac{2\sum_{i=1}^{j} h_i}{g}}_{\frac{2h_{j+1}}{g}} = \underbrace{\left[(j+1)^2 - j^2\right]}_{(2j+1)}\tau_1^2$$

$$\Rightarrow \quad h_{j+1} = \frac{g}{2}(2j+1)\,t_1^2 = \frac{\cancel{g}}{\cancel{2}}(2j+1)\frac{\cancel{2}h_1}{\cancel{g}}$$

$$\boxed{h_{j+1} = (2j+1)\,h_1} \qquad (h_2 = 3h_1;\ h_3 = 5h_1,\ \text{etc}).$$

<u>Manera "difícil"</u>

$$t_{j+1} = \left(\frac{2\,(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{g}\right)^{1/2}$$

$$t_{j+1} = (j+1)\,t_1 = (j+1)\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

$$\frac{\cancel{2}(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{g} = (j+1)^2\frac{\cancel{2}h_1}{g}$$

$$h_{j+1} = (j+1)^2 h_1 - (h_1+h_2+\cdots+h_j)$$

$$= (j+1)^2 h_1 - \sum_{i=1}^{j} h_i \qquad (IV)$$

"inducción"

Como $h_2 = 3h_1$; $h_3 = 5h_1$, ..., $h_i = (2(i-1)+1)\,h_1 = (2i-1)\,h_1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{j} h_i = \Big[2\underbrace{\sum_{i=1}^{j} i}_{\frac{j(j+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{j} 1}_{j}\Big]\,h_1 = \big[j(j+1) - j\big]\,h_1 = j^2 h_1$$

$\Rightarrow$ en (IV)

$$h_{j+1} = (j+1)^2 h_1 - j^2 h_1 = (2j+1)\, h_1$$

$$\boxed{h_{j+1} = (2j+1) h_1}$$

Ambas maneras de resolver el problema se consideran válidas.