PAUTA CONTROL 1

ASN

1. Pregunta 1

1.1. Enunciado.

1. Dos móviles que viajan a lo largo de una recta, se dirigen a su encuentro con la misma rapidez v. Si en el instante t=0 se encuentran a una distancia D el uno del otro encuentre el tiempo que demoran en chocar. Haga un gráfico distancia versus tiempo de este movimiento. [1 punto]
2. En algún instante, supongamos t=0, uno de ellos , que tiene una velocidad positiva, (lo identificamos como A), envía una bengala hacia el otro (B). La bengala sale con la misma velocidad que el móvil A pero con una aceleración $a > 0$. Al llegar a B, éste responde, inmediatamente, con otra bengala al igual que lo hizo A: sale con velocidad idéntica a la del móvil B y una aceleración negativa $-a$. Así sucesivamente hasta que colisionan. Haga un diagrama posición versus tiempo de las tres primeras bengalas con la que se comunicaban estos móviles [2 puntos]. Calcule el tiempo que transcurre entre que sale la primera bengala y colisiona con el otro móvil [2 puntos]. ¿A qué distancia se están A y B cuando la primera bengala alcanza a B.? [1 punto]

1.2. Solución.

1. El diagrama solicitado es como sigue

   Las ecuación de movimiento de un objeto que se mueve con velocidad constante en 1D es simplemente:

   $$x(t) = x(0) + vt,$$

   De modo que las posiciones de los dos objetos se pueden describir respectivamente mediante las ecuaciones:

   $$\begin{aligned} x_A(t) &= x_A(0) + vt, \\ x_B(t) &= x_B(0) - vt. \end{aligned}$$

   De este modo, los móviles se encuentran en el instante $t = t^*$, que satisface:

   $$x_A(t^*) = x_B(t^*),$$

   obteniendo:

   $$x_A(0) + vt^* = x_B(0) - vt^* \Longrightarrow \underbrace{(x_B(0) - x_A(0))}_{D} = 2vt^*,$$

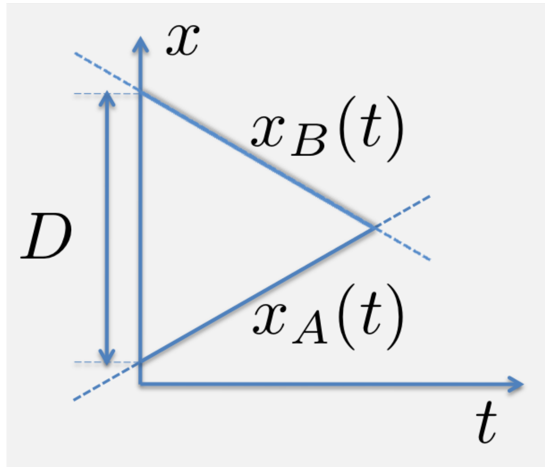

FIGURA 1. Diagrama para parte 1.1

$$t^* = \frac{D}{2v}$$

2. En el instante t=0, sale una bengala desde el móvil A con velocidad v. Su aceleración es a y por lo tanto la ecuación de movimiento es:

$$x_1(t) = \underbrace{x_A(0)}_{=0 \text{ mediante elección del origen}} + \underbrace{v}_{\text{misma velocidad que } A} t + \frac{1}{2}at^2,$$

Esta ecuación, $x_1(t) = vt + \frac{1}{2}at^2$ representa la parábola indicada como 1^a en el diagrama. El instante t_1 la primera bengala llega al móvil B. Es decir, el instante t_1 satisface:

$$x_B(t_1) = x_1(t_1) \Longrightarrow D - vt_1 = vt_1 + \frac{1}{2}at_1^2$$

Obtenemos la ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{2}at_1^2 + 2vt_1 - D = 0 \Longrightarrow t_1 = \frac{-2v \pm \sqrt{4v^2 + 2aD}}{a}$$

De este resultado debemos tomar la solución positiva ya que el tiempo t_1 es positivo (es solo después de ser lanzada que el movimiento tiene sentido). Con esto, y simplificando para hacer el explicito la consistencia dimensional de nuestro resultado, tenemos:

$$t_1 = \frac{2v}{a}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{aD}{2v^2}}\right)$$

Algunos límites interesantes permiten verificar la validez de nuestro resultado. Si la aceleración es muy chica ($a \ll v^2/D$), obtenemos:

$$t_1 \approx \frac{2v}{a}\left(-1 + \underbrace{(1 + \frac{aD}{4v^2})}_{\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \frac{D}{2v}$$

En el instante t_1 la distancia entre los móviles es:

$$\Delta = x_B(t_1) - x_A(t_1) = D - 2vt_1$$

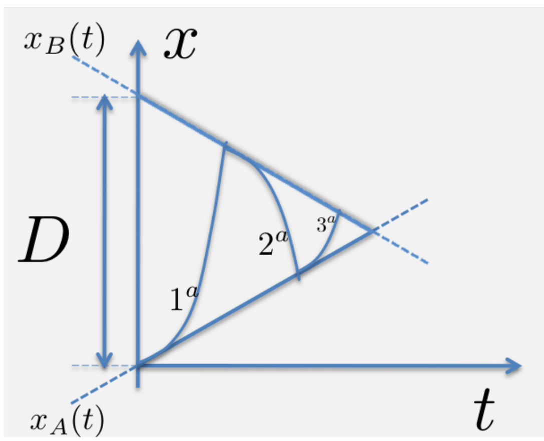

FIGURA 2. Diagrama para parte 1.2

2. Pregunta 2

2.1. Enunciado. Considere una rueda de la fortuna. Se trata de un juego consistente en una rueda vertical de radio R que gira con velocidad angular ω. Una niña montada sobre la rueda deja caer su lápiz cuando se encuentra en un ángulo θ (ver figura) con la vertical. En los instantes posteriores el objeto se desplaza por el interior o exterior de la rueda dependiendo θ.

1. Determine el ángulo crítico que separa esas dos opciones. [2 puntos] (Indicación: determine la evolución de r, la distancia del lápiz hasta el centro de la rueda, para tiempos inmediatamente posteriores a la liberación del lápiz)
2. Verifique su respuesta con los casos límite ω grande y chico (Explícitamente, indique que se entiende por chico y grande en este contexto, es decir indique un numero adimensional que debe ser chico o grande.) [2 puntos]
3. En el caso en que el lápiz es soltado justo en el ángulo crítico encuentre el lugar en el piso en el que caerá. [2 puntos]

2.2. Solución.

1. - **Solución 1**
     Si el lápiz se va por dentro o por fuera depende de la aceleración a lo largo del centro. Si ésta aceleración es mayor que la aceleración centrípeta el lápiz se moverá hacia el interior de la rueda. Por el contrario si la aceleración es menor el movimiento será más cercano al movimiento rectilíneo por fuera de la rueda. Dado que la única aceleración es la gravedad y su proyección a lo largo del radio es $g\sin\theta$, la condición para separar ambos casos es $R\omega^2 = g\sin\theta$.
   - **Solución 2**
     En el instante que se suelta la posición del lápiz con respecto al centro de la rueda es:
     $$\begin{aligned} x &= R\cos\theta, \\ y &= R\sin\theta, \end{aligned}$$
     mientras que la velocidad es:
     $$\begin{aligned} v_x &= -R\omega\sin\theta, \\ v_y &= R\omega\cos\theta. \end{aligned}$$
     La posición del lápiz un tiempo t despues de comenzar a caer es:
     $$\begin{aligned} x &= R\cos\theta - R\omega\sin\theta\ t, \\ y &= R\sin\theta + R\omega\cos\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$
     La distancia al centro es entonces:
     $$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t),$$
     donde debemos evaluar:
     $$x^2(t) = (R\cos\theta - R\omega\sin\theta\ t)^2 = R^2\cos^2\theta - 2R\omega\cos\theta\sin\theta\ t + R^2\omega^2\sin^2\theta\ t^2$$
     y analogamente obtenemos para y:
     $$\begin{aligned} y^2(t) &= (R\sin\theta + R\omega\cos\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2)^2 \\ &= R^2\sin^2\theta + R^2\omega^2\cos^2\theta\ t^2 + 2R\omega\sin\theta\cos\theta\ t - R\sin\theta gt^2 + \text{términos pequeños} \end{aligned}$$
     Sumando y considerando $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, obtenemos:
     $$R^2(t) = R^2 + R(R\omega^2 - g\sin\theta)t^2 + \text{términos pequeños}$$
     Tenemos entonces que si $R\omega^2 > g\sin\theta$ el lápiz se va por afuera de la rueda y en caso contrario por adentro.
2. El ángulo crítico esta definido por $\sin\theta = R\omega^2/g$. De aquí obtenemos que si ω es muy grande (en particular $> \sqrt{g/R}$) no hay soluciones y en dicho caso para todos los ángulos el lápiz se va por afuera de la rueda. Cuando ω es pequeño, $\theta \approx R\omega^2/g \ll 1$. El lápiz se va por dentro para casi todos los ángulos excepto para los cercanos a cero. Estos resultados son consistentes con lo esperado intuitivamente.

3. Buscando el valor de t para que la coordenada y sea $-R$:

$$y(t) = R\sin\theta + R\omega\cos\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 = \underbrace{-R}_{\text{suelo}}$$

obtenemos (resolviendo la ecuación cuadrática):

$$t = \frac{-R\omega\cos\theta \pm \sqrt{R^2\omega^2\cos^2\theta + 2Rg(1+\sin\theta)}}{-g}$$

consideramos el tiempo positivo (al igual que en la pregunta 1):

$$\begin{aligned} t &= \frac{R\omega\cos\theta + \sqrt{R^2\omega^2\cos^2\theta + 2Rg(1+\sin\theta)}}{g} \\ &= \frac{R\omega}{g}\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 2\frac{g}{R\omega^2}(1+\sin\theta)}\right) \end{aligned}$$

Respecto al centro de la rueda la posición en el eje x, al cabo de dicho tiempo, es:

$$\delta x = R\cos\theta - \frac{R^2\omega^2}{g}\sin\theta\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 2\frac{g}{R\omega^2}(1+\sin\theta)}\right)$$

3. Pregunta 3

3.1. Enunciado. Desde un regador ubicado en el piso salen gotas de agua en todas las direcciones con la misma rapidez, V. Cada gota, una vez evacuada del regador, describe una trayectoria parabólica debido a la gravedad. Las gotas caen al piso mojando directamente una región de tamaño $2R$. La situación descrita se representa en el diagrama donde, a modo de ejemplo, hemos indicado algunas trayectorias en forma de líneas punteadas.

1. Determine la rapidez de salida de las gotas, V [1 punto].
2. Determine la altura máxima lograda por la gotas [1 punto].
3. Determine el ángulo θ_P de salida de las gotas que pasan por un punto P arbitrario (ubicado a una distancia horizontal x_P y vertical y_P desde el regador)[2 puntos].
4. Dependiendo de la distancia horizontal al regador, el agua alcanza distintas alturas. Determine la forma de la región del espacio que es alcanzada por el agua. Es decir, determine la forma del manto que separa la región húmeda (a la cuál llegan gotas) de la seca (muy altas para las gotas). Para esto considere que los puntos a los que no llega ninguna gota no tienen solución real para el ángulo de la parte 3. Usando esto determine la ecuación de la curva continua de la figura [2 puntos].

3.2. Solución.

1. Dado que el alcance máximo de las gotas esta dado por R, es fácil determinar la velocidad de salida. El alcance corresponde a:

$$\Delta = \underbrace{V\cos\theta}_{v_x}\underbrace{\frac{2V\sin\theta}{g}}_{t_{\text{vuelo}}} = \frac{V^2\sin 2\theta}{g},$$

cuyo valor es máximo cuando $\sin 2\theta = 1$:

$$R = \frac{V^2}{g} \Longrightarrow V = \sqrt{Rg}.$$

2. La altura máxima corresponde a las gotas que salen verticalmente. Para ellas el instante en que la gota se detiene es

$$v_y(t) = V - gt \Longrightarrow t = \frac{V}{g}.$$

En este instante la altura es:

$$y(t) = Vt - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow y_{\max} = \frac{V^2}{2g}.$$

Usando la respuesta de la parte 1 obtenemos: $y_{\max} = R/2$.

3. Si una gota pasa por el punto (x, y), esto significa que en un mismo instante t su ubicación horizontal es y y su posición vertical es y. Lo anterior nos lleva a un sistema:

$$\begin{aligned} x(t) = x &= V\cos\theta t \\ y(t) = y &= V\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Despejando t de la primera ecuación y reemplazando en la segunda obtenemos:

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2V^2}(1 + \tan^2\theta)$$

Esta ecuación es una cuadrática en $\tan\theta$ que se resuelve de manera directa. Antes conviene hacer uso del resultado de la parte 1 y reescribir la ecuación como:

$$y = x\tan\theta - \frac{x^2}{2R}(1 + \tan^2\theta)$$

cuyas soluciones son

$$\tan\theta = -R\frac{-x \pm \sqrt{\Delta}}{x^2},$$

donde $\Delta = x^2 - 2\frac{x^2}{R}\left(y + \frac{x^2}{2R}\right)$.

4. Si $\Delta < 0$ los puntos no estan mojados, pues sin importar el ángulo de salida no existen gotas que lleguen a ellos. Si $\Delta > 0$ existen dos ángulos de salida para los cuales las gotas llegan a P. La separación de la zona seca de la mojada es entonces dada por $\Delta = 0$. Esto corresponde a la igualdad:

$$\frac{R}{2} = y + \frac{x^2}{2R}$$

Una parabóla de altura $R/2$ en $x = 0$ y que cruza el eje horizontal en $x = \pm R$, como era de esperar.