

FI10A-CONTROL 1

Profs. : V. Fuenzalida, F. Lund, D. Mardones,
A.Meza, C. Romero, R. Soto y R. Tabensky

29 de abril de 2006

Tiempo: 2 hrs. 30 min.

1. En su tiempo libre, un profesor se dedica a hacer acrobacias en su "BMW". Para estos efectos acelera para ser despedido por una rampa que forma un ángulo $\alpha = \pi/4$ con la horizontal, con rapidez (módulo de la velocidad) inicial $v_0 = 144$ km/hora, como lo indica la figura. Una vez que retoma el



contacto con el suelo, el conductor frena el vehículo de manera de impartirle una aceleración de frenado constante cuya magnitud es $0.5g$. Se desprecia el roce con el aire y se considera al vehículo como una partícula puntual.

- Grafique la posición horizontal del vehículo en función del tiempo, desde que despega hasta que se detiene.
- Grafique la componente horizontal de la velocidad en función del tiempo, desde que despega hasta que se detiene.
- Calcule el alcance del vehículo.
- Escriba la aceleración (vectorial) del vehículo antes y después del impacto con el suelo, desde que despega hasta que se detiene.

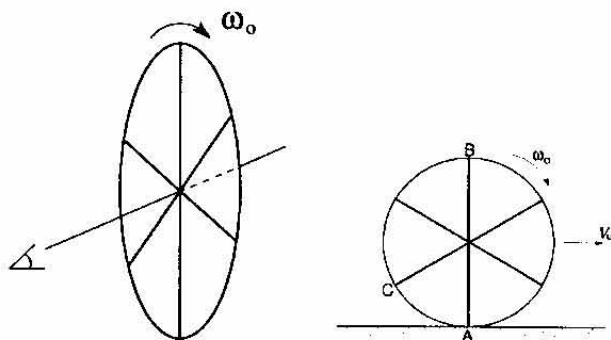
Datos:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \simeq 10 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

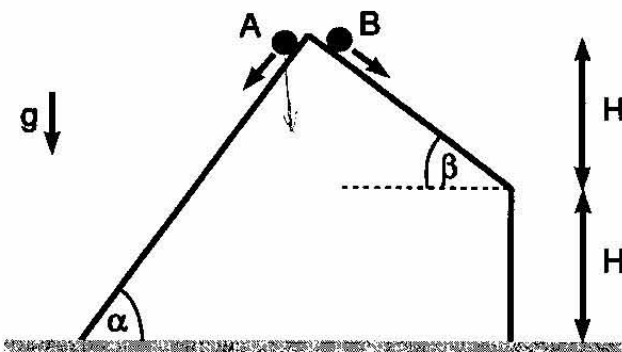
2. Una rueda de radio R que tiene seis rayos igualmente espaciados, gira alrededor de un eje que pasa por su centro, con frecuencia angular constante ω_0 . Suponga que la rueda está contenida en el plano xy .

- Una cámara fotográfica, ubicada en el eje de rotación toma una fotografía de la rueda. Debido a que el tiempo de exposición τ de la cámara es distinto de cero, los rayos de la rueda aparecen difusos(movidos) en la fotografía. ¿ Para qué tiempo mínimo de exposición τ la imagen de la rueda en la fotografía es un disco de color gris uniforme (fotografía en blanco y negro)?



- Suponga ahora que la rueda gira con frecuencia angular constante ω_0 mientras que su centro se desplaza hacia la derecha con rapidez $V_0 = R\omega_0$. Calcule el vector velocidad de los puntos A, B y C de la rueda, en la configuración que se muestra en la figura.

3. Dos partículas deslizan sin roce por los techos de un granero con ángulos de inclinación $\alpha = \pi/4$ y $\beta = \pi/6$, como se muestra en la figura. Si las partículas se sueltan simultáneamente desde el reposo cuando se encuentran en parte superior del techo:



- Calcule el tiempo que demora la partícula A en llegar al suelo.
- Calcule el tiempo que demora la partícula B en llegar al suelo.
- ¿Cuál partícula llega primero al suelo?

NOTA. Utilice el siguiente resultado, obtenido experimentalmente por Galileo. La aceleración de una partícula que desliza sobre un plano inclinado sin roce es igual a $g \sin \theta$, donde θ es el ángulo que forma el plano con el suelo.

Solución:

P1:

Para resolver el problema, se coloca un sistema de coordenadas con el origen en la rampla, con el eje x hacia la derecha y el eje y hacia arriba.

En la primera parte el movimiento es parabólico. Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\y_0 &= 0 \\v_{x0} &= V_0\sqrt{2}/2 \\v_{y0} &= V_0\sqrt{2}/2\end{aligned}$$

Usando las leyes del movimiento parabólico se encuentra que la posición vertical del auto es:

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 + v_{y0}t - gt^2/2 \\y(t) &= \frac{V_0\sqrt{2}}{2}t - gt^2/2\end{aligned}$$

donde el signo $-$ de g se debe a que el eje y se tomó para arriba. El instante en que llega al piso se obtiene de imponer $y = 0$. Hay dos soluciones: $t = 0$ que corresponde al instante inicial y el tiempo buscado que es:

$$t_1 = V_0\sqrt{2}/g$$

El movimiento en x está dado por:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{x0}t \\&= \frac{V_0\sqrt{2}}{2}t\end{aligned}$$

de manera que en t_1 la posición horizontal del auto es:

$$x_1 = V_0^2/g$$

Llega al suelo con velocidad horizontal $v_x = v_{x0} = V_0\sqrt{2}/2$ y luego tiene un movimiento uniformemente acelerado con aceleración $\vec{a} = -g/2\hat{i}$. Las condiciones iniciales para este movimiento son:

$$\begin{aligned}x_0 &= V_0^2/g \\v_{x0} &= V_0\sqrt{2}/2\end{aligned}$$

de manera que su movimiento horizontal se describe por:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{x0}t + at^2/2 \\&= V_0^2/g + \frac{V_0\sqrt{2}}{2}t - gt^2/4\end{aligned}$$

y la velocidad por

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_{x0} + at \\&= V_0\sqrt{2}/2 - gt/2\end{aligned}$$

El auto se detiene cuando $v_x = 0$ lo que da un tiempo

$$t_2 = V_0/\sqrt{2}/g$$

que debe ser sumado a t_1 . La posición horizontal al momento de detenerse es

$$x_2 = x(t_2) = 3V_0^2/2g$$

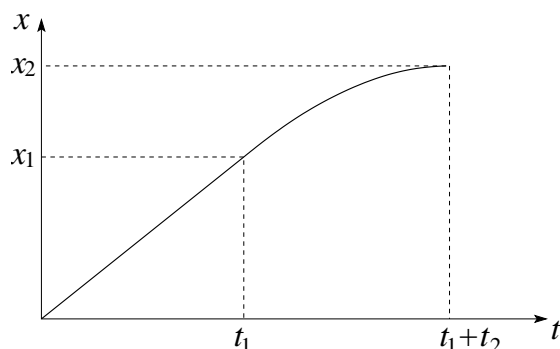
Para obtener valores numéricos se transforma la velocidad al Sistema Internacional. Resulta:

$$V_0 = 144\text{km/h} = 40\text{m/s}$$

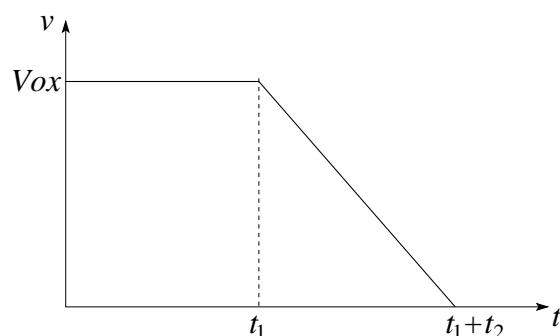
Como se aproxima $g = 10\text{m/s}^2$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}t_1 &= 4\sqrt{2}\text{m/s} \\x_1 &= 160\text{m} \\t_2 &= 4\sqrt{2}\text{m/s} \\x_2 &= 240\text{m}\end{aligned}$$

(a) Para graficar la posición horizontal, se reconoce que hay dos regímenes. Para $t < t_1$ el movimiento es uniforme (velocidad constante) y para $t_1 < t < t_1 + t_2$ es movimiento uniformemente acelerado, con aceleración negativa. El grafico que incluye todos los hitos relevantes es:



(b) El gráfico de la velocidad también se divide en los dos regímenes:



(c) El alcance total del auto está dado por la posición horizontal alcanzada en $t_2 + t_1$. Ya se calculó y resulta ser

$$x_2 = 3V_0^2/2g$$

(d) La aceleración vectorial en la primera parte del movimiento es:

$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

y en la segunda parte

$$\vec{a} = -g/2\hat{i}$$

Notas de corrección:

Cada parte tiene 1.5 puntos y se bajó puntaje por: error de conversión de unidades, error dimensional, no poner hitos en los gráficos. También se bajó puntaje en la parte (c) si no indicaron explícitamente el resultado tal como se les pedía.

Los rayos están equiespaciados, separados por un ángulo $\theta = 2\pi/6 = \pi/3$ entre sí. Para que la foto salga completamente movida, durante el tiempo de exposición los rayos deben haber alcanzado a girar el ángulo que los separa del siguiente. Es decir La rueda tiene que haber dado $1/6$ de giro. Entonces, el mínimo tiempo de exposición para que la foto salga completamente movida es:

$$\begin{aligned}\tau &= T/6 \\ &= \frac{\pi}{3\omega_0}\end{aligned}$$

(b) Se escogen ejes x e y de manera que x es horizontal hacia la derecha e y es vertical hacia arriba. En ese sistema, el centro de la rueda se mueve con velocidad

$$\vec{V}_{\text{centro}} = R\omega_0\hat{i}$$

La velocidad de los puntos A, B y C respecto al centro es de magnitud constante $V = \omega_0 R$, pero sus direcciones son diferentes, apuntando según el sentido de giro de la rueda (sentido horario). Usando el mismo sistema de ejes, las velocidades de A, B y C respecto al centro de la rueda son:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{A/\text{centro}} &= -\omega_0 R\hat{i} \\ \vec{V}_{B/\text{centro}} &= \omega_0 R\hat{i} \\ \vec{V}_{C/\text{centro}} &= \omega_0 R(-\cos\pi/6\hat{i} + \sin\pi/6\hat{j}) \\ &= \omega_0 R(-\sqrt{3}/2\hat{i} + 1/2\hat{j})\end{aligned}$$

donde se usó que $\cos\pi/6 = \sqrt{1 - \sin^2\pi/6} = \sqrt{3}/2$.

Las velocidades de estos puntos respecto a un observador exterior se obtienen de las leyes de movimiento relativo:

$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \vec{V}_{A/\text{centro}} + \vec{V}_{\text{centro}} = 0 \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_{B/\text{centro}} + \vec{V}_{\text{centro}} = 2\omega_0 R\hat{i} \\ \vec{V}_C &= \vec{V}_{C/\text{centro}} + \vec{V}_{\text{centro}} \\ &= \omega_0 R((1 - \sqrt{3}/2)\hat{i} + 1/2\hat{j})\end{aligned}$$

P2:

(a) La rueda gira con velocidad angular ω_0 de manera que su periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

P3:

(a) El movimiento de la partícula A ocurre en un plano inclinado de ángulo $\alpha = \pi/4$. En ese caso, el movimiento es 1D uniformemente acelerado con aceleración

$$a = g \sin \alpha = a\sqrt{2}/2$$

La distancia total que debe recorrer la partícula es, por trigonometría,

$$d = 2H / \sin \alpha = 2\sqrt{2}H$$

La ley del movimiento uniformemente acelerado es:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + at^2/2$$

como parte del reposo, poniendo el origen en el punto más alto, se obtiene que

$$x(t) = at^2/2$$

El tiempo en llegar al suelo corresponde a cuando $x = d$. Reemplazando el valor de d y de a se obtiene

$$t_A = 2\sqrt{2}\sqrt{H/g}$$

(b) El movimiento de la partícula B tiene dos partes, primero es un movimiento 1D uniformemente acelerado, con aceleración $a = g \sin \beta = g/2$ y luego es un movimiento parabólico.

La primera parte es análoga a la parte (a), salvo que la distancia a recorrer es $d = H / \sin \beta = 2H$ y la aceleración es $a = g/2$. El resultado para el tiempo de caída de esta primera parte es:

$$t_{1B} = 2\sqrt{2}\sqrt{H/g}$$

La velocidad con que terminó esta primera parte del movimiento se obtiene de la ley cinemática

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ &= 0 + g/2 t \end{aligned}$$

Reemplazando t_{1B} se obtiene que terminó con

$$v_{1B} = \sqrt{2gH}$$

En la segunda parte el movimiento es parabólico y la condición inicial está dada por la proyección de la velocidad v_{1B} en ejes x y y orientados de manera horizontal y vertical. Entonces la condición inicial es

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= H \\ v_{x0} &= v_{1B} \cos \beta \\ v_{y0} &= -v_{1B} \sin \beta = -\sqrt{gH/2} \end{aligned}$$

donde el signo $-$ en v_{y0} es porque la partícula cae. El movimiento vertical es entonces:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{y0}t - gt^2/2 \\ &= H - \sqrt{gH/2}t - gt^2/2 \end{aligned}$$

Toca el suelo cuando $y = 0$ lo que da como solución

$$t_{2B} = -\sqrt{\frac{H}{2g}} \pm \sqrt{\frac{5H}{2g}}$$

La solución que se busca es la positiva. Luego

$$t_{2B} = -\sqrt{\frac{H}{2g}} + \sqrt{\frac{5H}{2g}}$$

Finalmente el tiempo total de caída es la suma de los dos tiempos

$$t_B = t_{1B} + t_{2B}$$

(c) Como se obtuvo que $t_A = t_{1B}$ entonces ambas partículas se demoran lo mismo en recorrer los planos inclinados, pero la partícula B debe, además, caer luego en movimiento parabólico. Entonces la partícula A llega primero al suelo.