Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

PROFESORES
Diego Mardones
René Méndez
David Laroze
Nelson Zamorano
Alejandra Montecinos
Álvaro Nuñez
Fernando Lund

CONTROL 1

Duración: 2 horas 30 minutos.

Para este control NO necesita calculadora. Tampoco debe disponer de un celular. No debe acceder a estos aparatos durante la prueba. No los deje encima de la mesa.

Durante el transcurso del control no se pueden hacer preguntas. Debe leer todo el control y resolver las dudas al comienzo. Habrá un tiempo disponible para ello. Durante el control Ud. debe tomar las decisiones, si surge alguna duda.

Las preguntas incluidas en los problemas 1 y 2, requieren de una justificación o un par de líneas de cálculo o un gráfico. No ameritan un cálculo extenso o una larga respuesta.

Problema # 1

a) (2 ptos.) Un profesor viaja al interior de un ascensor que sube con velocidad constante. En un descuido, al profesor se le escapan las llaves de su mano. Al tocar el piso del ascensor, las llaves se encuentran a la misma altura que en el instante en que se desprendieron de la manos del profesor.

En un mismo gráfico ilustre cualitativamente, la trayectoria de las llaves y la del piso del ascensor.

b) (2 ptos.) Una partícula parte desde el reposo y se mueve en una dimensión con una aceleración igual a la que aparece en la Figura 1-Problema b. ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula transcurrido N intervalos de tiempo τ?

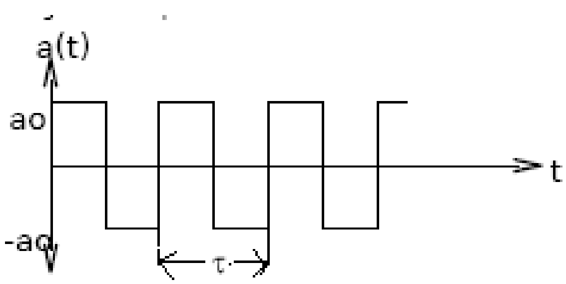
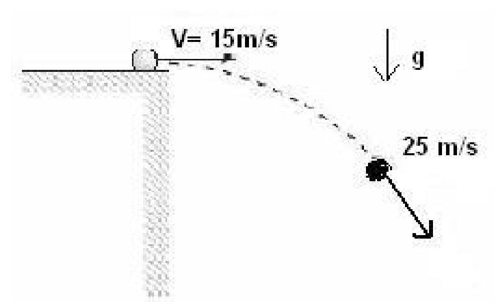


Figure 1: Problema b



Problema c

c) (2 ptos.) En la Figura 1-Problema-c, aparece un proyectil que se dispara horizontalmente a 15 m/s. Cuando su velocidad alcanza una magnitud de $25\ m/s$: ¿Qué distancia ha recorrido verticalmente?. En este problema use $g = 10\, m/s^2$.

Problema # 2

a.- (2 ptos.) Un caracol se mueve con rapidez constante avanzando hacia el centro de la espiral que aparece en la Figura adyacente. Grafique, cualitativamente, el módulo de la aceleración con respecto al tiempo de esta trayectoria. Justifique brevemente su gráfico.

b.- (2 ptos.) Una pieza de artillería debe impactar un objetivo que permanece a su mismo nivel y que se ubica a una distancia D de ella. ¿Cuál es la rapidez mínima con la cual se debe disparar el proyectil para que alcance este objetivo?

c.- (2 ptos.) A mediodía, los punteros de un reloj de pared coinciden. Suponiendo que ambos punteros giran continua y suavemente, ¿Qué ángulo debe recorrer el minutero para volver a coincidir con el horario? ¿A qué hora ocurre esto?

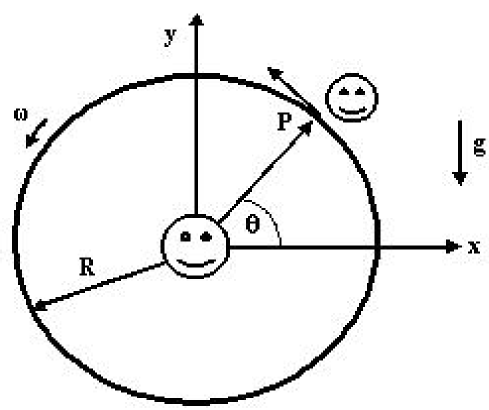
Problema # 3

Penélope subió a la rueda gigante (vertical) que existe en Fantasilandia. La rueda tiene un radio R y gira con velocidad angular constante ω. Su hermana Alfonsina, se encuentra parada justo en el eje de la rueda y le pide a Penélope que le haga llegar unas llaves. Penélope obedece y las suelta en el punto P, indicado en la Figura.

a.- Responda esta pregunta sin acompañar ningún cálculo explícito. Sólo justifique breve, pero claramente, su respuesta.

i.- (1 pto.) Si la rueda gira muy lentamente (ω muy pequeño), ¿alrededor de qué posición Penélope debería dejar caer las llaves para tener una buena chance de alcanzar a su hermana? Para la misma situación, pero ahora con la rueda girando muy rápidamente, ¿alrededor de qué posición Penélope debería soltar las llaves?

ii.- (1 pto.) Por otra parte, claramente en uno de estos casos las llaves viajarán dentro de la circunferencia de la rueda y en la otra, inicialmente se desplazarán por fuera de ella. Indique cuál es cuál y explique brevemente.



b.- (3 ptos.) Considere que Penélope suelta las llaves en el punto P de la figura. Conociendo la velocidad angular ω de la rueda, su radio R y la aceleración de gravedad g, encuentre el valor del ángulo θ (o lo que es lo mismo, el valor de $sen\theta$) para el cual las llaves llegan efectivamente a las manos de Alfonsina.

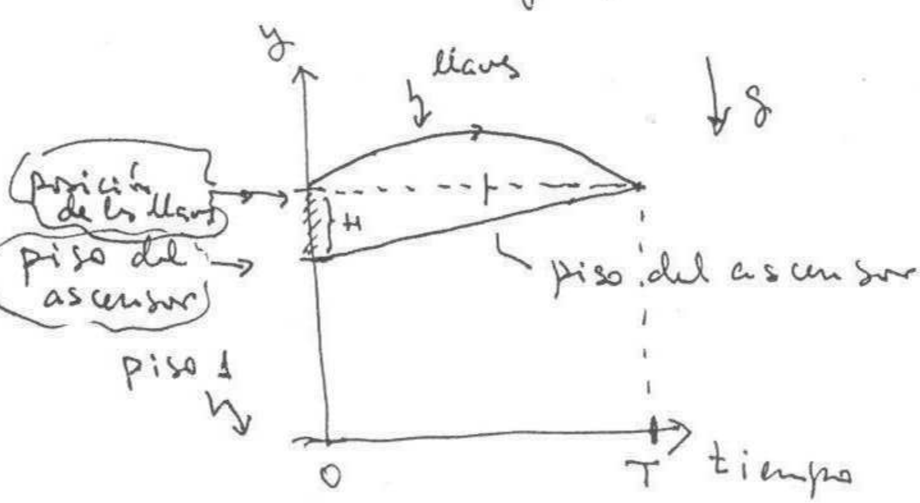
Conviene definir la cantidad adimensional $\lambda = \omega^2 R/g$, para simplificar las expresiones.

c.- (1 pto.) Con el resultado de la parte b.- , compruebe, ahora cuantitativamente, sus dos respuestas en el punto i.- de la parte a.-.

Problema 1 (N3)

a) Al desprenderse de las manos, las llaves tienen una velocidad v_0 con respecto al edificio. La misma del ascensor y el profesor.

Es natural graficarla con respecto al edificio

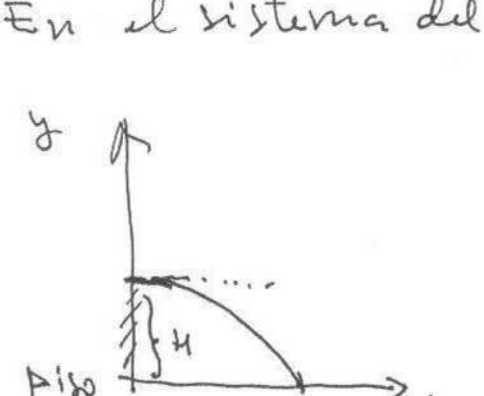


Descontar 1 pto. si no mencionan las pendientes iguales del ascensor y las llaves.

En $t=0$ ambas curvas tienen la misma pendiente

La máxima altura de las llaves ocurre en $T/2$.

En el sistema del ascensor: las llaves ~~parten~~ tienen ~~de p~~ velocidad inicial nula y es una parábola que parte en $t=0$ desde el punto más alto.



Idem. 1 pto. menos por la pendiente

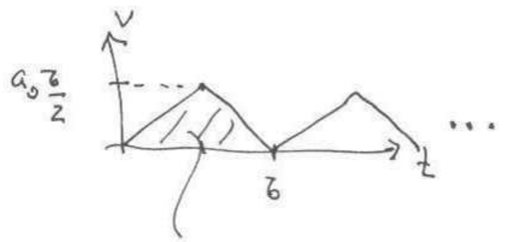
En ambos casos se demora lo mismo en llegar al piso: $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

2

b) Gráficamente $\quad v = a_0 t \quad 0<t<\tau/2$

$v = a_0 \frac{\tau}{2} - a_0 t \quad \frac{\tau}{2}<t<\tau$

1 pto menos si hay un error acá



$$\text{Area} = \frac{1}{2}\tau \cdot a_0 \frac{\tau}{2} = \frac{1}{4} a_0 \tau^2 \equiv \text{desplazamiento en } \tau$$

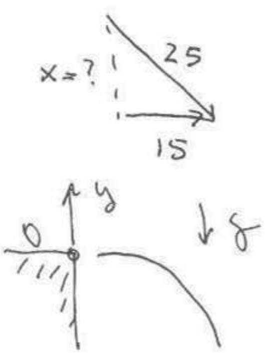
$$\text{Para } N\tau : \quad N \cdot \left(\frac{1}{4} a_0 \tau^2\right).$$

Analíticamente:

$$x = a_0 \frac{\tau^2}{8} \qquad \tau = \frac{\tau}{2}$$

$$x = a_0 \frac{\tau^2}{8} + \left(a_0 \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2} - a_0 \frac{\tau^2}{8} = \frac{a_0 \tau^2}{4} \quad //$$

c)



En el instante en que la velocidad es 25 m/s, la componente vertical de la velocidad es:

$$(25)^2 - (15)^2 = 400 = (20)^2 \qquad \text{1 pto}$$

$$v_y = -20 \text{ m/s} \quad \uparrow (+)$$

$$v_y^2 - 0^2 = -2g(0 - H) = 20\,H \qquad \text{1 pto}$$

$$H = \frac{400}{20} = 20 \text{ m}.$$

(es + fácil poner un sistema de ref. apuntando hacia abajo.)

o $\quad y = -g\frac{T^2}{2}$, pero $v_y = gT$

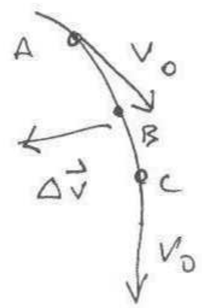
$$y = -g\frac{v_y^2}{2g^2} = -\frac{v_y^2}{2g} = -\frac{400}{20} = -20 \text{ m}.$$

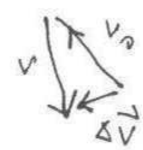
Problema 2 (NZ)

1 pto menos si no mencionan esto

Como el caracol se mueve con rapidez constante, no puede tener una aceleración tangencial a la espiral.

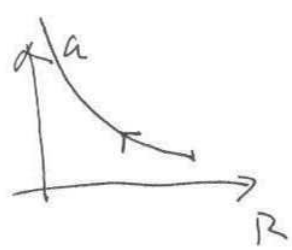
Esta aceleración debe ser, localmente perpendicular a la trayectoria.



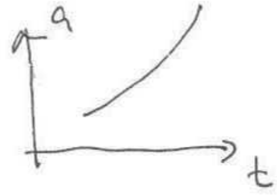


$$\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| \sim \frac{V_0^2}{R}$$, $\Delta\vec{v}$ apunta hacia el centro del ⊙

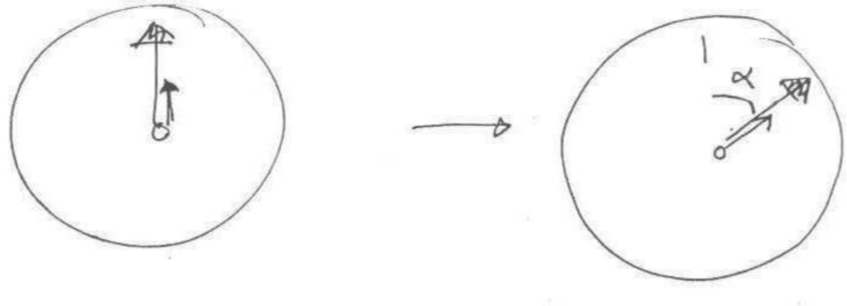
$R \equiv$ radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $\widehat{ABC}$



Como, a medida que avanza el tiempo, R disminuye; la aceleración aumenta con el tiempo.



c)



El minutero recorre $(2\pi + \alpha)$

El horario recorre α

Esta es la situación en el primer re-encuentro

Existe una coordinación entre el horario y el minutero.

$$2\pi \text{ (minutero)} \rightarrow \frac{2\pi}{12} \text{ (horario)}$$

$$(2\pi + \alpha) \text{ minutero} \rightarrow x$$

$\boxed{1 \text{ pto.}}$ →

$$x = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \alpha)\cdot\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{2\pi + \alpha}{12}$$

$$\text{Si } x = \alpha \Rightarrow \quad 12\alpha = 2\pi + \alpha$$

$\boxed{1 \text{ pto.}}$

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{11}}$$

Qué hora es?

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ — } 12 \text{ hor.} \\ \frac{2\pi}{11} \rightarrow x \text{ hr.} \end{array}\right\} \quad x = \frac{12}{11} = 1^{\text{hora}} + \frac{60}{11}^{\text{min.}} \simeq 1 \text{ hora} + 5{,}4 \text{ min.}$$

Pauta Pregunta 3

Álvaro Núnez

April 17, 2008

Parte a.- (2 ptos.)

Si la rueda gira lentamente, Penélope debe dejar caer las llaves desde el punto ms alto de la rueda, pues casi equivale a una caída libre.

Si la rueda gira rápidamente, Penélope debe soltar las llaves muy cerca del eje-x, puesto que la parábola que pasa por el centro de la rueda debe ser muy aguda por la rapidez del movimiento.

Parte b.- (3 ptos.)

Supongamos que Penélope deja caer las llaves desde el ángulo θ. La posición inicial de las llaves esta dada por

$$\mathbf{R}_0 = R\,(\cos\theta, \sin\theta) \tag{1}$$

Dado que la rueda gira con velocidad angular ω, la velocidad será:

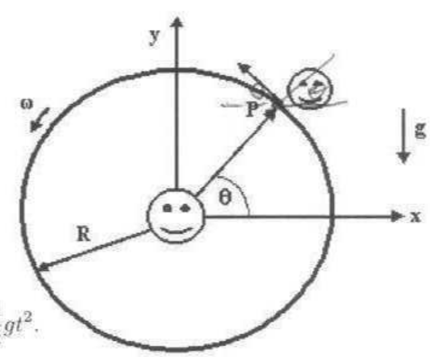
$$\mathbf{V}_0 = R\omega\,(-\sin\theta, \cos\theta) \tag{2}$$

A lo largo del eje X no hay aceleración, de modo que la ecuación para la coordenada X de las llaves es:

$$X(t) = R\cos\theta - R\omega\sin\theta\ t \tag{3}$$

En el eje Y tenemos la aceleración de gravedad:

$$Y(t) = R\sin\theta + R\omega\cos\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{4}$$



Para llegar a manos de Alfonsina, en el origen, debe existir un tiempo t^* para el cual $X(t^*) = Y(t^*) = 0$. De la ecuación para el ejer X tenemos que:

$$\omega t^* = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{5}$$

De este modo, usando este tiempo en la ecuación de Y e imponiendo que sea 0 derivamos la relación:

$$Y(t^*) = R\sin\theta + R\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \equiv 0 \ \ (!) \tag{6}$$

Tomando la última ecuación, dividiendo por R, usando la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y, por ultimo, multiplicando por $\sin\theta$, obtenemos:

$$\sin\theta = \frac{g}{2R\omega^2}\cos^2\theta = \frac{\lambda}{2}\cos^2\theta. \tag{7}$$

Por último, usando nuevamente la identidad, obtenemos:

$$\frac{\lambda}{2}\left(1 - \sin^2\theta\right) - \sin\theta = 0, \tag{8}$$

Con soluciones:

$$\sin\theta = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1} \tag{9}$$

Dado que el termino de la derecha es, en módulo, siempre mayor que 1, de modo que debemos escoger el signo de positivo para que $\sin\theta$ sea menor que 1 en módulo.

$$\sin\theta = \sqrt{\lambda^2 + 1} - \lambda \tag{10}$$

Parte c.- (1 pto.)

Ahora usaremos la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, valida si x es un numero pequeno. Si λ es un número muy pequeno, la expresión se acerca a:

$$\sin\theta \approx 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 \tag{11}$$

que es cercano a 1 y por lo tanto $\sin\theta \approx 1$, de donde obtenemos $\theta \approx \pi/2$. Si por el contrario tenemos que λ es un número muy grande, obtenemos:

$$\sin\theta = \lambda\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} - \lambda \tag{12}$$

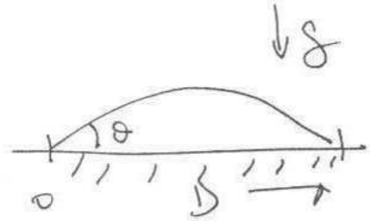
y solo ahora usamos la aproximación pues $\frac{1}{\lambda^2}$ es un número pequeno:

$$\sin\theta \approx \lambda\left(1 + \frac{1}{2\lambda^2}\right) - \lambda = \frac{1}{2\lambda} \approx 0 \tag{13}$$

Como $\sin\theta \approx 0$ entonces $\theta \approx 0$

Problema 2

b) La rapidez mínima requiere que el cañón apunte con su alcance máximo



Eje x: $D = v_0 \cos\theta \, t$

Eje y: $y = v_0 \operatorname{sen}\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2$

Despejando t de la 1era ecuación y poniendo $y = 0$

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{D}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$0 = \tan\theta - \frac{g D}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$D = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{v_0^2}{g}$$

$$D = \operatorname{sen}2\theta \frac{v_0^2}{g}$$

g y D fijos.

valor máximo de 2θ

$\operatorname{sen}2\theta = 1$

$\Rightarrow v_0 = \sqrt{g D}$.