Pauta Auxiliar 5

P1)

Considere una cuerda flexible de masa M que cuelga entre dos paredes, siendo α el ángulo que forma la cuerda con la pared (ver figura 4.4). Se desea encontrar la tensión que la cuerda tiene en el punto mínimo.

Para resolver el problema consideremos como nuestro sistema sólo la mitad derecha de la cuerda. Hay tres fuerzas que actúan sobre ese sistema:

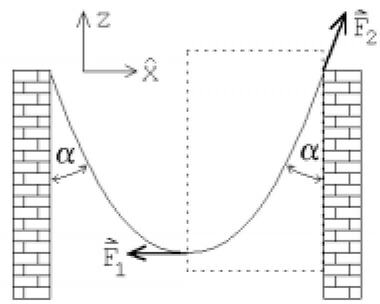


Figura 4.4

i) El peso $\vec{W} = -\frac{1}{2}Mg\hat{z}$.

ii) La fuerza $\vec{F}_1$ ejercida por la parte izquierda de la cuerda. La magnitud de esta fuerza es igual a la tensión de la cuerda en el mínimo, que llamaremos τ_0. Se tiene que $\vec{F}_1 = -\tau_0\hat{x}$.

iii) La fuerza que ejerce el gancho sobre la cuerda. Como la cuerda es flexible la fuerza necesariamente es a lo largo de la tangente de la cuerda. Si a la magnitud de esta fuerza la llamamos f_0, se tiene que $\vec{F}_2 = f_0\cos\alpha\ \hat{z} + f_0\sin\alpha\ \hat{x}$.

Como nuestro sistema está en equilibrio (no acelera), la suma de las tres fuerzas debe ser nula:

$$\vec{W} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{1}{2}Mg\hat{z} - \tau_0\hat{x} + f_0\cos\alpha\ \hat{z} + f_0\sin\alpha\ \hat{x} = 0 \ \ .$$

Pero para que un vector sea cero es necesario que cada una de sus componentes sea nula. Este hecho nos da las siguientes ecuaciones:

$$\text{componente } z: \qquad -\frac{1}{2}Mg + f_0\cos\alpha = 0$$

y

$$\text{componente } x: \qquad -\tau_0 + f_0\sin\alpha = 0 \ \ .$$

De estas dos ecuaciones podemos despejar τ_0 y f_0, obteniéndose

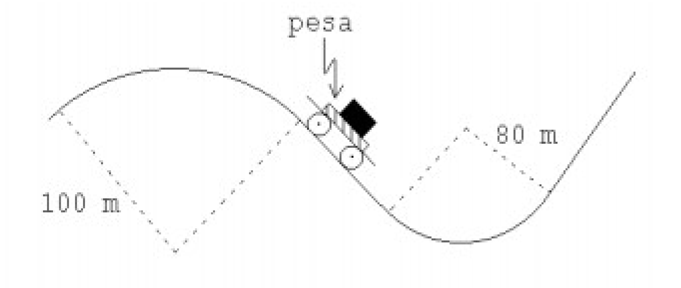
$$\tau_0 = \frac{1}{2}Mg\tan\alpha$$

y

$$f_0 = \sqrt{\tau_0^2 + \left(\frac{Mg}{2}\right)^2} \ .$$

Notemos cómo para $\alpha \longrightarrow 90^\circ$, o sea, a medida que la cuerda se cuelga en forma más "tirante", la tensión de la cuerda tiende a infinito.

P2)



Al pasar la plataforma por la cresta de la colina hay dos fuerzas actuando sobre la caja:

i) El peso, $\vec{W} = -Mg\hat{z}$. (Hemos elegido al eje $\hat{z}$ apuntando hacia arriba, M es la masa de la caja.)

ii) La reacción de la pesa sobre la caja: $\vec{F}_r = F_r\hat{z}$.

La fuerza neta es, por lo tanto,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = (F_r - Mg)\,\hat{z}\ .$$

Por otra parte, sabemos que la caja está realizando un movimiento circular de radio R con rapidez constante, o sea, hay una fuerza neta sobre la caja que act'ua hacia el centro del círculo (la fuerza centrípeta), que es

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -\frac{Mv^2}{R}\,\hat{z}\ .$$

La fuerza centrípeta y la fuerza neta deben ser iguales, es decir, se tiene que

$$F_r - Mg = -\frac{Mv^2}{R}\ .$$

Despejando F_r se obtiene

$$\begin{aligned} F_r &= Mg\left(1 - \frac{v^2}{gR}\right) \\ &= 500\text{N}\left(1 - \frac{14^2}{9,81 \cdot 100}\right) \simeq 400\ \text{N}\ . \end{aligned}$$

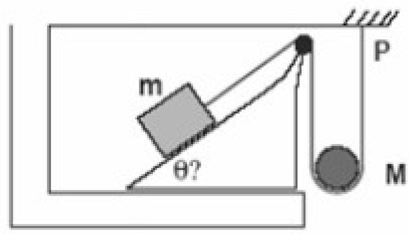
P3)

En la figura se muestra un cubo de masa m posando sobre una cuña; esta última yace sobre una superficie horizontal pulida. El cubo es atado mediante una cuerda ideal a una estructura fija en P. La cuerda es tensada mediante una carga colgante de masa M. Todos los contactos ocurren sin fricción. La configuración es tal que la cuña no se mueve.

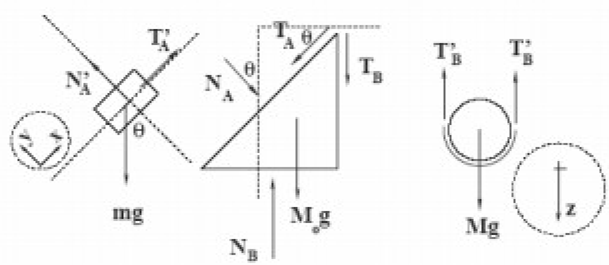
A)[2P] Construya los diagramas de cuerpo libre para el bloque, la cuña y la carga.

B)[2P] Calcule el ángulo θ de la cuña para que ésta se mantenga en reposo.

C)[2P] Calcule la aceleración del cubo e interprete su resultado.



Solución



• Sobre el cubo actúan tension de la cuerda $\vec{T}'_A$ (de magnitud T), el peso del cubo $m\vec{g}$ y la normal de la cuña sobre el cubo N'_A (magnitud N). Ecuación del movimiento (considerando aceleración $\vec{a}_c$ de componente según el plano a) y proyecciones:

$$\begin{aligned} \vec{T}'_A + m\vec{g} + N'_A &= m\vec{a}_c \qquad \Rightarrow && (8)\\ \text{Según } \hat{x})\quad T - mg\sin\theta + 0 &= ma \quad \rightarrow \quad T - mg\sin\theta = ma && (9)\\ \text{Según } \hat{y})\quad 0 - mg\cos\theta + N &= 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\theta && (10) \end{aligned}$$

• Sobre la cuña actúan el contacto con el cubo (normal $\vec{N}_A$ de magnitud N), la cuerda en el canto de la cuña (tensiones $\vec{T}_A$ oblicua y $\vec{T}_B$ vertical, ambas de magnitud T), gravedad sobre la cuña ($M_\circ\vec{g}$), y normal con el piso ($\vec{N}_B$ de magnitud N_B. Ecuación del movimiento (reposo) y proyección según la horizontal:

$$\begin{aligned} \vec{N}_A + \vec{T}_A + \vec{T}_B + M_\circ\vec{g}\vec{N}_B &= 0 \qquad \Rightarrow && (11)\\ -N\sin\theta + T\cos\theta + 0 + 0 + 0 &= 0 \qquad \rightarrow T\cos\theta = N\sin\theta && (12) \end{aligned}$$

• Sobre la carga (y pedazo de cuerda en contacto con ella) actúan la tensión $\vec{T}'_B$ en ambas puntas (magnitud T) y el peso de la carga ($M\vec{g}$); la aceleración de la carga es $\vec{a}_\circ$ de magnitud $a/2$. La ecuación del movimiento y proyección según z:

$$\begin{aligned} \vec{T}'_B + \vec{T}'_B + M\vec{g} &= M\vec{a}_\circ \qquad \Rightarrow && (13)\\ -2T + Mg &= M(a/2) \qquad \rightarrow 2Mg - 4T = Ma && (14) \end{aligned}$$

- Buscamos ángulo θ. Primero usar Ec. 10 para N en Ec. 12 ...

$$T\cos\theta = (mg\cos\theta)\sin\theta \quad \rightarrow \quad T = mg\sin\theta \tag{15}$$

- Sustituir este valor para T en Ec. 9 para T ...

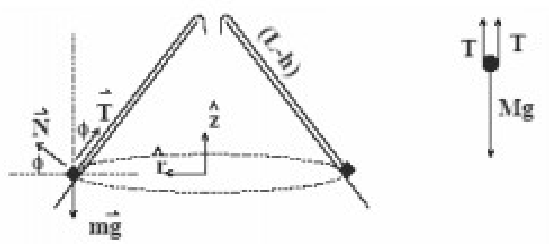
$$(mg\sin\theta) - mg\sin\theta = ma \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 0}. \tag{16}$$

- Reemplazar $a = 0$ y $T = mg\sin\theta$ en Ec. 14 ...

$$2Mg - 4(mg\sin\theta) = m0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin\theta = \frac{M}{2m}} \tag{17}$$

- Caso $\theta \sim \pi/2 \Rightarrow \sin\theta \sim 1 \Rightarrow M \sim 2m$. Este caso corresponde a bloque suspendido por carga en polea. En tal caso la aceleración nula sólo es compatible con $M \sim 2m$.

P4)



- Fuerzas sobre la carga (y pedazo de cuerda adherido): dos tensiones ($2T$; hacia arriba) y peso (Mg; hacia abajo). La carga no se mueve por lo tanto $\boxed{2T = Mg}$
- Estudiamos uno de los cubos en movimiento circunferencial de radio $r = (L-h)\sin\phi$.
- Fuerzas actuando sobre los cubos: Peso (mg; hacia abajo), normal (N; $\perp$ superficie) y tensión de la cuerda (T; según superficie); la aceleración ($\omega^2 r$, centrípeta).
- Ecuación del movimiento y proyecciones según $\hat{r}$ y $\hat{z}$:

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} &= m\vec{a} & & \\ 0 + N\cos\phi - T\sin\phi &= -m\omega^2(L-h)\sin\phi & \text{según } \hat{r} & \quad (1) \\ -mg + N\sin\phi + T\cos\phi &= 0 & \text{según } \hat{z} & \quad (2) \end{aligned}$$

reemplacemos $T = Mg/2$ en la ecuacion (2) y despejemos N nos queda.

$$N = \frac{mg - \frac{Mgcos\phi}{2}}{sen\phi}$$

ahora como conocemos la Normal, La Tension, y el angulo ϕ nos basta reemplazar en (1) para obtener el valor de h