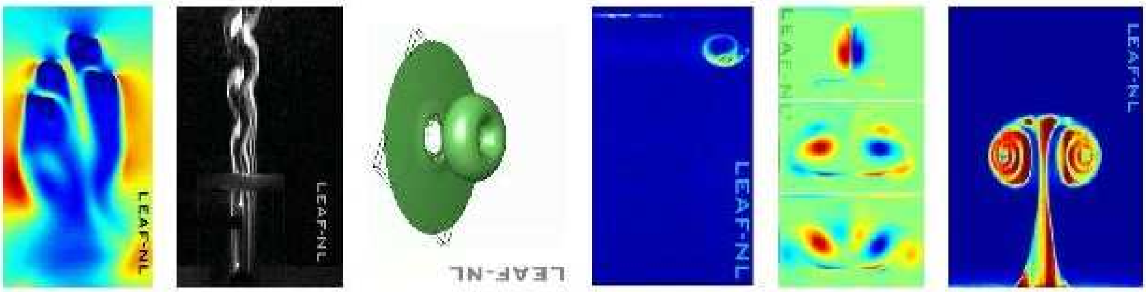
FD704

Métodos Experimentales en Fluidodinámica



R. H. Hernández-Pellicer
Dept. Ing. Mecánica - U. de Chile

Índice general

Capítulo 1

Tratamiento de Señales y Datos

1.1. Generalidades

El tratamiento de señales es una disciplina indispensable para un experimentador, donde uno de los objetivos principales es de extraer el máximo de información útil desde una señal perturbada por el ruido. Aparecen entonces los conceptos básicos de *señal, ruido, información, perturbación* que serán explicados en los próximos capítulos [7].
El concepto de señal es extremadamente vasto:

- una tensión voltaica producida por el accionamiento de un interruptor
- una emisión de ondas de radio o televisión
- una imagen fotográfica
- el dolor cutáneo producido por la picadura de un insecto...

... y así una infinidad de señales diferentes.

En este curso nos limitaremos al caso en que la señal x depende de la variable tiempo $t \in \mathbb{R}$ con lo cual, $x(t)$. Sin embargo, $x(t)$ puede perfectamente ser una señal compleja, $x(t) \in \mathbb{C}$.

1.1.1. Señales de tiempo continuo y discreto

En el caso de tiempo continuo, la señal x es una función continua del tiempo t y la escribiremos $x(t)$
En el caso de tiempo discreto, la señal x es un conjunto enumerable de puntos ($\in \mathcal{Z}$), y la escribiremos $x(n)$

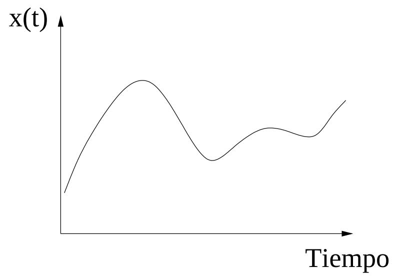


Figura 1.1: Señal analógica a tiempo continuo

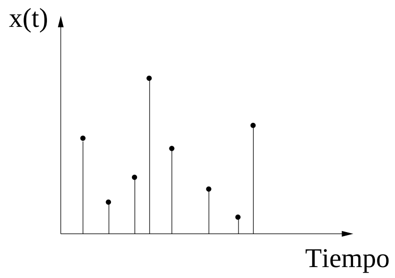


Figura 1.2: Señal analógica a tiempo discreto

1.1.2. Valores continuos y discretos

En el caso de valores continuos, la señal x puede adoptar todos los valores posibles de un conjunto dado. Se le denomina señal *analógica*, en referencia a la electrónica.

En el caso de valores discretos, la señal x puede adoptar sólo un número finito (enumerable) de valores. Se le denomina señal *digital o numérica*

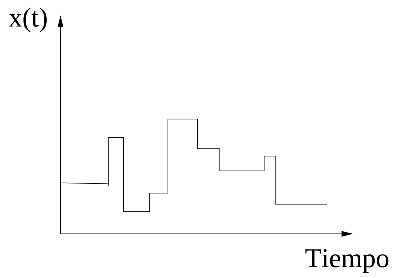


Figura 1.3: Señal de valores discretos (digital) a tiempo continuo

Hay que notar que las 4 combinaciones son posibles. Sin embargo en este capítulo estudiaremos principalmente señales *analógicas* a tiempo continuo, aún cuando éstas se pueden transformar en señales *digitales* por medio del muestreo de señales.

1.2. Distribuciones

Dentro de las herramientas matemáticas útiles que veremos en este curso, se encuentra la llamada función δ de Dirac [1]. Esta función, que Dirac llamaba *función impropia*, posee propiedades bien interesantes e inusuales. Actualmente este tipo de funciones se denominan *Distribuciones* porque no son funciones matemáticas bien definidas, es decir, no poseen un valor definido en cada punto de su dominio de existencia. Sin embargo, cuando la δ aparece como un *factor* en el integrando de una integral, ésta última sí tiene un valor definido. Vamos a introducir una herramienta de base denominada distribución. En particular hablaremos de la distribución de Dirac.

Antes de eso, para tener una idea de la δ, considere una función de una variable real x que es nula en todos lados salvo en un pequeño dominio de ancho ϵ alrededor del origen $x = x_0$, donde vale $1/\epsilon$. La integral de esta función en ese dominio es unitaria, es decir, $\int_\epsilon D_\epsilon(x)dx = 1$. La forma exacta de esta función no tiene interés, salvo que debe ser de orden ϵ^{-1} para que todo esto tenga sentido y ello permite encontrar una familia de funciones que al tomar el límite $\epsilon \to 0$ convergen a la $\delta(x)$ [2].

El objeto más simple es una función cuadrada, es decir, un rectángulo angosto y alto de ancho ϵ y altura ϵ^{-1} centrado en x_0, definido como:

$$D_\epsilon(x - x_0) = \begin{cases} \epsilon^{-1}, & \text{si } |x - x_0| \leq \frac{1}{2}\epsilon \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

El área bajo la curva $D_\epsilon(x - x_0)$ es efectivamente unitaria.

Consideremos ahora una función $F(x)$ e integremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) D_\epsilon(x - x_0) dx &= \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F(x_0) dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F'(x_0)(x - x_0) dx \\ &+ \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F''(x_0)(x - x_0)^2 dx + \ldots \\ &= F(x_0) + \frac{\epsilon^2}{24} F''(x_0) + \ldots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Aquí hemos desarrollado en serie de Taylor la función $F(x)$ alrededor de x_0, i.e,

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} F''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

Donde los términos impares en $(x - x_0)$ se anulan.

[1] Paul Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 4 Ed. Clarendon Press, 1958

[2] http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html

Si tomamos el límite $\epsilon \to 0$, que corresponde a transformar $D_\epsilon(x) \to \delta(x)$, obtenemos que la integral anterior es simplemente $F(x_0)$, es decir, la integral adopta el valor de la función $F(x)$ en la posición de la delta de Dirac. Entonces,

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} D_\epsilon(x - x_0)$$

Con lo cual tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\delta(x - x_0)dx = F(x_0)$$

1.2.1. Definición

Sea T una distribución. A toda distribución ϕ, T asocia el número $T(\phi)$, que escribiremos como $\langle T, \phi \rangle$, el cuál posee las propiedades sgtes:

$$T(\phi_1 + \phi_2) = T(\phi_1) + T(\phi_2) \tag{1.2}$$

$$T(\lambda \phi) = \lambda T(\phi) \tag{1.3}$$

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle \tag{1.4}$$

$$\langle \lambda T, \phi \rangle = \lambda \langle T, \phi \rangle \tag{1.5}$$

El número $\langle T, \phi \rangle$ se denomina *producto escalar* de T con ϕ. Si T fuese una función, entonces:

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T^*(t) \cdot \phi(t)\, dt$$

Paul Dirac introdujo la *Distribución de Dirac* que se define:

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

La ditribución de Dirac en un punto dado del eje de las abscisas a, está definida por:

$$\langle \delta_{(a)}, \phi \rangle = \phi(a)$$

Una manera de interpretar físicamente las distribuciones, es imaginar una distribución de cargas puntuales eléctricas o materiales (masas).

1.2.2. Función δ de Dirac y sus propiedades

Aquí veremos algunas propiedades simpàticas de la función $\delta(x)$ de Dirac. Evidentemente su dominio de existencia puede ser cualquiera, distancias x, tiempos t, frecuencias ω etc.

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta(x) = 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \delta(x) = \infty & \text{si } x = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1 & x \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, la función de Dirac se puede definir matemáticamente tomando el límite de una familia de funciones. Esta aproximación hace aparecer la función de Dirac como una impulsión breve. Existen muchas familias, $D(x)$, de funciones que convergen hacia esta función :

- Una función de duración D y amplitud $1/D$
- Un triágulo de duración $2D$ y amplitud $1/D$
- Un seno cardinal, normalizado: $\frac{1}{D} sinc(\pi t/D) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi t/D)$ cuando $D \to 0$
- y muchas otras...

La función $\delta(t)$ tiene las propiedades sgtes:

$$\delta(t) = 0 \, t \neq 0 \tag{1.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{1.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, dt = f(0) \tag{1.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\, dt = f(t_0) \tag{1.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\delta(t-\theta)\, d\theta = f * \delta = f(t) \tag{1.10}$$

De la última relación se desprende que la distribución de Dirac es el elemento neutro del producto de Convolución. Ella posee además otras propiedades interesantes, como el corrimiento de la función original,

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0) \qquad \text{Shift}$$

Y también la llamada *localización*,

$$\text{localización} \begin{cases} f(t)\cdot\delta(t) & = f(0)\delta(t) \\ f(t)\cdot\delta(t-t_0) & = f(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

El producto de varias funciones δ se puede calcular de la forma:

$$\delta(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = \delta(t_2-t_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t_2 \neq t_1 \\ \delta(t-t_1) = \delta(t-t_2) & \text{si} \quad t_2 = t_1 \end{cases}$$

Supongamos que tenemos una función $y(t)$. Si escribimos $z(t) = y(t_0)$, $z(t)$ vale $y(t_0)$ para todo valor de t (cf. Figura 1.4). Pero, utilizando las propiedades de la δ: $z(t) = y(t)\delta(t-t_0)$ *valdrá simbólicamente* $y(t_0)$ para $t = t_0$ y 0 en el resto del eje. Esto nos permite formalizar el valor de $y(t)$ en el instante $t = t_0$. Tengamos bien en cuenta este procedimiento, porque lo utilizaremos en la sección de Teoría del Muestreo de Señales.

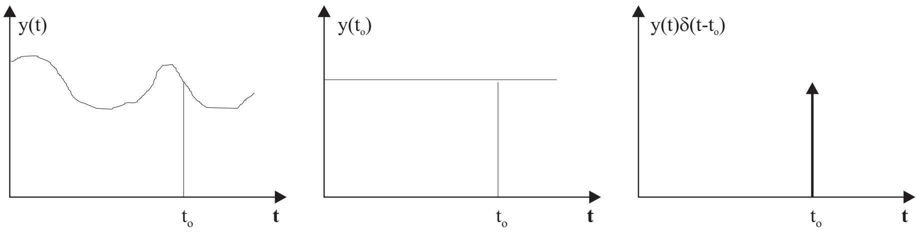


Figura 1.4: *Como extraer el valor de una función a un instante dado con la distribución de Dirac*

Ejercicio-Dirac I

Demostrar las propiedades sgtes:

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{1.11}$$

$$x\delta(x) = 0 \tag{1.12}$$

$$\delta(ax) = \delta(x)/|a| \tag{1.13}$$

$$\delta(x^2-b^2) = \{\delta(x-b)+\delta(x+b)\}/2|b| \tag{1.14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))\,dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \tag{1.15}$$

La última propiedad o identidad es válida si $g(x)$ tiene una sola raíz o cero en x_0. Su pendiente $g'(x) = dg(x)/dx$ debe ser distinta de cero en x_0. Cerca de x_0 la función $g(x)$ se comporta como $(x-x_0)g'(x_0)$ (Expansión de Taylor). Por otro lado, si $g(x)$ tine N ceros (simples) en $x = x_i$, donde $g(x) \sim g'(x_i)(x-x_i)$ con pendientes distintas de cero, entonces se cumple que:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

1.2.3. Peine de Dirac

Un peine de Dirac es, como su nombre lo indica, una serie infinita de funciones de Dirac regularmente espaciadas. Si T_0 es el intervalo entre dos Diracs sucesivos, T_0 es el período del peine.

$$\delta_{T_0}^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\,T_0)$$

Consideremos $x_0(t)$ y lo convolucionamos con el peine:

$$\begin{aligned} x_0(t) * \delta_{T_0}^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) &= x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\,T_0) & (1.16) \\ x_0 * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\,T_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0 * \delta(t - k\,T_0) & (1.17) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(\theta)\delta(t - k\,T_0 - \theta)\,d\theta &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t - k\,T_0) & (1.18) \end{aligned}$$

Esto indica que podemos obtener una función periódica a partir de valores discretos de la función original. Este teorema es fácila de demostrar. Sólo hay que recurrir a las propiedades de la δ y a la definición de producto de Convolución, que puede generalizarse:

$$(G * R)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x')R(x')\,dx'$$

Interprételo como el producto acumulativo de dos funciones, donde una desliza sobre la otra.

Ejercicio–Dirac II

Este problema clarifica la representación de la delta de Dirac en tres dimensiones y en coordenadas cilíndricas.

Considere la identidad en Coordenadas Cartesianas:

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3r' = 1 \qquad (1.19)$$

En una dimension : $\int \delta(x - x')dx' = 1$ y $d^3r' = dx'dy'dz'$. Así, la ecuación 1.19 se satisface si:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

Se *desea* encontrar esta misma equivalencia en Coordenadas Esféricas:

En coordenadas esféricas, $d^3r' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$. Como $\int \delta(r-r')dr' = 1$ y $\int \delta(\theta-\theta')d\theta' = 1$, la ecuación 1.19 es válida si:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r'^2 \sin\theta'}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

Entonces las ecuación 1.19, se transforma en coordenadas esféricas en:

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = \int r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi' \frac{1}{r'^2 \sin\theta'}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = \int_0^{\infty} \delta(r-r')dr' \int_0^{\pi} \delta(\theta-\theta')d\theta' \int_0^{2\pi} \delta(\phi-\phi')d\phi$$

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = 1$$

Este próximo problema le ayudará a acordarse de los cambios de escala. Para demostrar la propiedad de cambio de escala usando la delta de Dirac, escribimos:

$$\int_{-L}^{+L} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a}\int_{-aL}^{+aL} f(y/a)\delta(y)dy = \frac{f(0)}{a}$$

Resuelva los siguientes problemas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\delta(x^2-a^2)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\delta(\sin(x))\,dx$$

Representación simbólica

Para aclarar aún más el rol de estas funciones, vamos a recurrir a los diagramas de la figura 1.5. El símbolo $*$ denota producto de convolución.

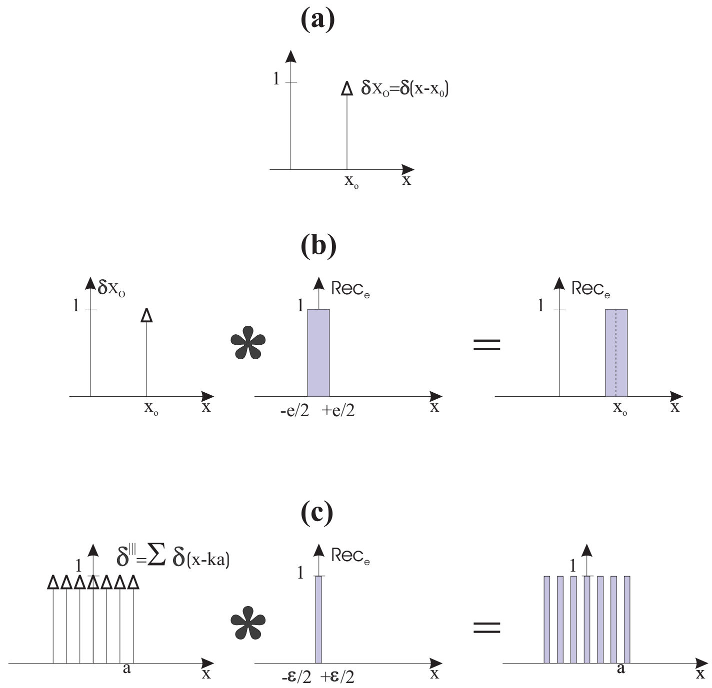


Figura 1.5: *Representación simbólica de: (a) La función δ, y del efecto de la convolución entre: (b) La δ con una función cuadrada y (c) El peine y la función cuadrada*

1.3. Sistemas Lineales y Función de Transferencia

Estos sistemas son útiles como transformadores de señales y. Pueden actuar sobre señales análogas o digitales (numéricas) sin fabricación de armónicos.

Definición

Consideremos un sistema sometido a una señal de entrada (input) $x(t)$. El sistema entregará como salida (output) una señal $y(t)$. El sistema será LINEAL si la relación entre las señales de entrada y salida constituye un sistema de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes. De forma equivalente, el sistema será LINEAL si cumple simultáneamente las propiedades de : Aditividad y Homogeneidad.

Homogeneidad Si al input $x(t)$ le corresponde un output $y(t)$, entonces al input $\alpha x(t)$ le corresponde un output $\alpha y(t)$, donde α es una constante.

Aditividad Si a dos inputs $x_1(t)$ y $x_2(t)$ le corresponden dos outputs $y_1(t)$ y $y_2(t)$ respectivamente, entonces al input $x_1(t) + x_2(t)$ le corresponderá el output $y_1(t) + y_2(t)$.

De esta manera el sistema será lineal si:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \tag{1.20}$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \tag{1.21}$$
$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \longrightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \tag{1.22}$$

Ahora bien, el sistema es INVARIANTE EN EL TIEMPO si se cumple que: Si se efectúa un corrimiento en el tiempo de duración θ en la señal de entrada, obtendremos un corrimiento del mismo valor en la señal de salida.

$$\text{Input} \qquad \text{Output} \tag{1.23}$$
$$x(t) \longrightarrow y(t) \tag{1.24}$$
$$x(t-\theta) \longrightarrow y(t-\theta) \tag{1.25}$$

Así, si un sistema es lineal e invariante en el tiempo, tendremos las siguientes correspondencias:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \tag{1.26}$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \tag{1.27}$$
$$\alpha_1 x_1(t-\theta_1) + \alpha_2 x_2(t-\theta_2) \longrightarrow \alpha_1 y_1(t-\theta_1) + \alpha_2 y_2(t-\theta_2) \tag{1.28}$$

1.3.1. Respuesta Impulsional y Funciones Propias

La función respuesta impulsional $h(t)$ nos resuelve la pregunta sgte: Si tenemos un sistema desconocido, como podemos conocer la salida $y(t)$ correspondiente a una entrada cualquiera $x(t)$?.
Supongamos que la entrada es una delta de Dirac $\delta(t)$, la salida correspondiente $h(t)$ se denomina *respuesta impulsional o a la impulsión*

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) \tag{1.29}$$
$$\delta(t-\theta) \longrightarrow h(t-\theta) \tag{1.30}$$
$$x(\theta)\delta(t-\theta) \longrightarrow x(\theta)h(t-\theta) \tag{1.31}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\delta(t-\theta)\,d\theta \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t-\theta)\,d\theta \tag{1.32}$$

Pero como una de las propiedades de la distribución de Dirac es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\delta(t-\theta)\,d\theta = x(t)$$

obtenemos que la salida correspondiente a $x(t)$ será:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t-\theta)\,d\theta$$

Es por eso que es importante conocer la respuesta impulsiva o impulsional $h(t)$ de un sistema. Para toda entrada $x(t)$, la salida $y(t)$ será *la convolución de la señal de entrada con la función de respuesta impulsional.*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t-\theta)\,d\theta \tag{1.33}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)x(t-\theta)\,d\theta \tag{1.34}$$

Nota: Si inyectamos al sistema una señal de dimensión D, obtenemos a la salida una señal de dimensión D (ej. señal eléctrica de voltaje, v). Por lo tanto la respuesta impulsional h tiene la dimensión del inverso de un tiempo s^{-1}.

Consideremos una entrada $x_f(t) = Ae^{2\pi jft}$, donde A y f son constantes:

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_f(t-\theta)h(\theta)d\theta \tag{1.35}$$

$$y_f(t) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jf(t-\theta)}h(\theta)d\theta \tag{1.36}$$

$$y_f(t) = Ae^{2\pi jft}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-2\pi jf\theta}d\theta \tag{1.37}$$

$$y_f(t) = x_f(t)H(f) \tag{1.38}$$

Donde $H(f)$ es un coeficiente tal que:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-2\pi jf\theta}d\theta$$

Vemos que la exponencial compleja es una función *propia* de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Definición de Función de Transferencia

Como hemos visto una función $x(t)$ puede descomponerse naturalmente en una base de funciones propias, gracias a que el sistema es lineal e invariante en el tiempo. La descomposición de la señal en una base de exponenciales complejas, no es otra cosa que la Transformación de Fourier, que veremos más adelante. Así, la función $H(f)$, que se escribe:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-2\pi jf\theta}d\theta$$

corresponde a la transformada de Fourier de la respuesta impulsional $h(t)$. También se le denomina Ganancia compleja o Función de Transferencia. Notar que aquí la dimensión de la función de transferencia es 0, por lo tanto podemos representarla en *decibeles* (su módulo, $|H(f)|$).

1.3.2. Medición de la Función de Transferencia

En el método temporal, aplicamos una impulsión de Dirac a la entrada y medimos la respuesta impulsional a la salida. El método armónico nos entrega la ganancia compleja. Existe otro método, denominado estocático, donde la entrada es una señal de tipo aleatoria con una cierta densidad espectral de potencia (Ej. ruido blanco, Gausiano, etc.).

Principio del método armónico

Consideramos un sistema lineal, invariante en el tiempo, o equivalentemente, regido por ecuaciones integro–diferenciales a coeficientes constantes A una señal de entrada $A\cos 2\pi ft$ le corresponde una señal $B\cos(2\pi ft - \phi)$. La razón B/A, que es una función de f, es la Ganancia de la Función de Transferencia; el ángulo de fase ϕ se denomina desfase.
Este resultado se puede encontrar simplemente si consideramos como señal de entrada $Ae^{2\pi jft}$. Así, en la salida tendremos $Be^{2\pi jft-\phi}$. Si hacemos la razón salida/entrada,

$$\frac{Be^{2\pi jft-\phi}}{Ae^{2\pi jft}} = \frac{B}{A}e^{-j\phi}$$

Claramente el módulo de esta función, B/A, es la *ganancia* y ϕ el *desfase*. Entonces bastaría medir para cada frecuencia, la razón de amplitudes (peak–to–peak) y el desfase, para tener punto por punto la Función de Transferencia del sistema en estudio.

Nociones Adicionales de Función de Transferencia

Aquí veremos la forma de la función de transferencia utilizando únicamente los diagramas de bloque de la figura 1.6.

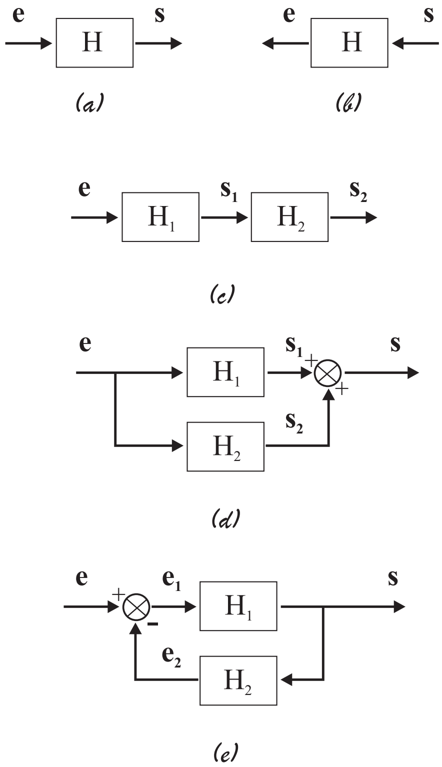


Figura 1.6: *Diagramas de bloque mostrando propiedades de Funciones de Transferencia*

Consideremos el sistema H (Figura 1.6 a) con una entrada e que provoca una salida s. Es evidente que la relación entre entrada y salida puede escribirse como $H \cdot e = s$ o mejor,

$$H = \frac{s}{e}$$

Donde H es la función de transferencia del sistema, así como vimos anteriormente.
Entre las propiedades importantes de esta función de transferencia está la denominada **irreversibilidad**. Los diagramas de la figura 1.6 nos ayudaran.
La figura 1.6 a), indica que:

$$s = H \cdot e$$

pero si cambiamos el sentido de las flechas, como en la figura 1.6 b), tendremos que $e = H_1 \cdot s$ y por lo tanto,

$$s = \frac{1}{H_1} \cdot e \Rightarrow H = \frac{1}{H_1}$$

con lo cual concluímos que hay que precisar el sentido de las flechas sobre el diagrama de bloque: Un sentido de flecha corresponde a una función de transferencia dada.

Consideremos una función de transferencia en **série**, como aparece en la figura 1.6 c). Tenemos que $H_1 \cdot e = s_1$ y s_1 es la entrada de H_2, entonces reemplazando s_1 por su valor anterior:

$$s_2 = H_2 \cdot H_1 e$$

Donde la función de transferencia global es $H = H_2 \cdot H_1$ y además (demostrar en casa) $H = H_2 \cdot H_1 = H_1 \cdot H_2$ (conmutatividad).

Ahora consideremos una función de transferencia en **paralelo**. Aquí se pueden distinguir dos casos que se aprecian en las figuras 1.6 d), e):

1. En la figura 1.6 d) tenemos que

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ s &= H_1 e + H_2 e \\ s &= (H_1 + H_2) e \\ H &= H_1 + H_2 \end{aligned}$$

2. En la figura 1.6 e) tenemos que

$$\begin{aligned} s &= H_1 e \\ e_1 &= e - e_2 \\ e_2 &= H_2 \cdot s \quad \Rightarrow \\ s &= H_1 \left[e - H_2 s \right] \\ &\rightarrow s \left[1 + H_1 H_2 \right] = H_1 e \\ \frac{s}{e} &= H = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} \\ H &= \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} \end{aligned} \tag{1.39}$$

si en el sumador hubiésemos tenido dos signos $+$ en lugar de un signo $+$ y uno $-$, entonces la función de transferencia global hubiese sido:

$$H = \frac{H_1}{1 - H_1 H_2}$$

1.3.3. Introducción a los sistemas discretos

Estos sistemas se caracterizan por señales digitales o numéricas, que son representaciones discretas de señales continuas.
Las señales naturales son representadas por funciones continuas del tiempo: señales análogas. Actualmente, para utilizar microprocesadores, uno muestrea esas señales extrayendo una série de valores de esa señal (se dicretiza). En general uno realiza un muestreo regular y perfecto de la señal análoga, asociando a la señal análoga esta série de valores discretos en instantes de tiempo nT_e, siendo T_e el período de muestreo utilizado. Esta série discreta $x(nT_e)$ será la señal digital, $x(n)$. Estas señales, así como las señales análogas que vimos anteriormente, pueden ser usadas en sistemas lineales e invariantes en el tiempo, los llamados sistemas muestreados o discretos.

Definición de sistemas muestreados

Consideremos un sistema muestreado (discreto) sometido a una entrada discreta $x(n)$. El entrega en al salida $y(n)$. El sistema es lineal si posee las mismas propiedades de homogeneidad y aditividad mencionadas anteriormente. Además el sistema será invariante en el tiempo si también cumple la propiedad correspondiente para sistemas continuos.
Podemos resumir esas correspondencias como:

$$x_1(n) \longrightarrow y_1(n) \tag{1.40}$$

$$x_2(n) \longrightarrow y_2(n) \tag{1.41}$$

$$\alpha_1 x_1(n-n_0) + \alpha_2 x_2(n-n_0) \rightarrow \alpha_1 y_1(n-n_0) + \alpha_2 y_2(n-n_0) \tag{1.42}$$

En este tipo de sistema discreto, las señales de entrada pueden ligarse a través de una ecuación de diferencias, que veremos más adelante.

Respuesta Impulsional

Consideremos ahora, la entrada como una función de Dirac *discreta*:

$$\delta(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 0 & \text{si}\, n \neq 0 \\ 1 & \text{si}\, n = 0 \end{cases}$$

Así como lo vimos anteriormente en sistemas continuos, la respuesta impulsional es la salida correspondiente a la impulsión de Dirac aplicada a la entrada. Sea $h(n)$ la respuesta impulsional.Entonces:

$$y(n) = \sum_p h(n-p)x(p) = \sum_p h(p)x(n-p)$$

Esta relación es la *Convolución a Tiempo Discreto*. Estos sistemas muestreados, pueden ser descritos en función de las frecuencias; Nosotros volveremos a ese punto más adelante, luego de haber introducido la Transformada en $\mathbf{Z}$. Con ello uno puede describir estos sistemas a través de ecuaciones de diferencias que son el equivalente a ecuaciones diferenciales para los sistemas a tiempo continuo.

Ecuación de Diferencias

La relación lineal e invariante en el tiempo más general que permite relacionar dos señales a tiempo discreto $x(n)$ y $y(n)$ es la ecuación de diferencias:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k x(n-k) \tag{1.43}$$

Uno considera generalmente que el sistema descrito por esta ecuación es causal y además no puede involucrar señales de salida futuras. Si normalizamos por a_0 tenemos:

$$y(n) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x(n-k)$$

Esta relación describe de manera general los sistemas lineales y estacionarios causales.
En la práctica, uno se limita a valores del retardo sobre las variables $y(n)$ y $x(n)$, lo que conduce a:

$$y(n) + \sum_{1}^{P} a_k y(n-k) = \sum_{0}^{M} b_k x(n-k)$$

Esta expresión de la relación salida/entrada es muy útil, porque nos entrega un algoritmo de fácil implementación para calcular la salida en el instante n cuando uno conoce las P y M salidas y entradas precedentes respectivamente.
En la literatura técnica sobre estos sistemas, encontramos la clasificación sgte [2]:

- Filtros Autoregresivos (AR): en estos sistemas discretos, la salida en el instante n se calcula a partir de las P salidas precedentes y sólo de la entrada al instante n, es decir: $b_k = 0 \text{ para } k > 0$.

  Se elige casi siempre $b_0 = 1$ que significa una normalisación de la entrada. El filtro autoregresivo (AR) se describe con la ecuación de diferencias:

  $$y(n) + \sum_{1}^{P} a_k y(n-k) = x(n)$$

- Filtros de Promedio Ajustable (PA). es el caso simétrico de los filtros que cumplen: $a_k = 0 \text{ para } k \geq 1$ y nos dan la relación:

$$y(n) = \sum_{0}^{M} b_k x(n-k)$$

En estos filtros la salida en el instante n es un promedio de los valores de la entrada en el instante n y en los instantes precedentes.

La respuesta impulsional $h(n)$ de estos filtros (PA) se obtiene haciendo $x(n) = \delta(n)$ con lo cual se obtiene $h(k) = b_k$, lo que muestra que la respuesta impulsional tiene una largo finito (M). Se les llama también filtros de respuesta impulsional finita (RIF). Por el contrario, se puede apreciar que los filtros AR tienen una respuesta impulsional infinita, de donde proviene la denominación de filtros de respuesta impulsional infinita (RII).

- Finalmente, los filtros descritos por la relación 1.43, el caso más general, se denominan filtros ARMA, que son filtros RII.

1.4. Transformación de Señales

La naturaleza nos entrega señales continuas en el tiempo. En los sistemas modernos esas señales son muestreadas para producir señales a tiempo discreto que sean accesibles para los métodos numéricos actuales. Nosotros veremos tres tipos de descripciones de esas señales y sus respectivas transformaciones. La dualidad entre señales discretas y continuas y la dualidad de la representación tiempo y frecuencia nos entrega cuatro clases de señales asociadas a cuatro familias de transformaciones.
Las señales a tiempo y frecuencia continua están relacionadas a través de la Transformada de Fourier (TF) o la Transformada de Laplace (TL) que hacen transitar la señal $t \rightleftharpoons \nu$. Las señales periódicas poseen un estatus particular. Son señales a tiempo continuo y frecuencia discreta (fundamental y armónicos). Su representación tiempo–frecuencia esta relacionada a través de las Series de Fourier.
Ahora bien, las señales a tiempo discreto hacen aparecer la denominada Transformada en $\mathbf{Z}$. Lamentablemente la noción de frecuencia no está bien representada en la Transformada en $\mathbf{Z}$, con lo cual uno debe incorporar la Transformada en Frecuencias Reducidas para poder recuperar la noción intuitiva de frecuencia. Estas señales a tiempo discreto dependerán de una variable continua en frecuencia.
Por último, las señales a tiempo y frecuencia discretos serán representadas a través de la Transformada de Fourier Discreta (TFD) que posee una versión (algoritmo) muy conocido denominado *Fast Fourier Transform, FFT*.

1.4.1. Transformada de Fourier

Transformada de Fourier Directa

Sea $x(t)$ una señal transitoria (no periódica) que verifica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \quad \text{FINITA}$$

La transformada de Fourier nos entrega el *Espectro* complejo de $x(t)$:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j \nu t} \, dt \rightarrow X(\nu) = TF[x(t)] \tag{1.44}$$

Este espectro es una función de valores complejos. Las partes Real e Imaginaria del espectro son:

$$Re[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi\nu t) \, dt \tag{1.45}$$

$$Im[X(\nu)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi\nu t) \, dt \tag{1.46}$$

Son componentes en Fase ($\cos$) y Cuadratura ($\sin$) a la frecuencia ν. Típicamente el espectro se escribirá en módulo (espectro de amplitud):

$$|X(\nu)| = \left\{Re[X(\nu)]^2 + Im[X(\nu)]^2\right\}^{1/2}$$

y en fase (espectro de fase):

$$\phi_{X(\nu)} = \arctan\left\{\frac{Im[X(\nu)]}{Re[X(\nu)]}\right\}$$

Transformada de Fourier Inversa

Una de las propiedades esenciales de la TF es que es invertible. Se puede reconstruir una señal a partir de su espectro complejo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{2\pi j\nu t}\,df \rightarrow x(t) = TF^{-1}[X(\nu)] \tag{1.47}$$

La TF inversa (TF^{-1}) permitirá interpretar a $x(t)$ como una suma de componentes de frecuencias puras ($e^{2\pi j\nu t}$) donde el módulo y la fase están determinados (fijos) a través del espectro complejo $X(\nu)$.

Otras notaciones

Generalmente la TF se representa usando la frecuencia física ν en unidades de ciclos/segundo (Hertz, Hz). Hay gente que prefiere representar la TF usando la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$ en unidades de rad/segundo. En ese caso, la TF y la TF^{-1} se pueden escribir como:

$$X(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1.48}$$

$$x(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,dt \tag{1.49}$$

Sin embargo el algebra resultante es la misma.

Significado Físico

$X(\nu)$ y $x(t)$ representan el mismo observable físico en dos representaciones diferentes. Para $x(t)$ la señal se desplaza en un dominio amplitud–tiempo y para $X(\nu)$ la señal se desplaza en un dominio amplitud compleja–frecuencia.

Es importante notar que ambas relaciones 1.44 y 1.47 son complemetarias. Una señal localizada en el plano de Fourier corresponderá a una señal totalmente des–localizada en el espacio directo. A la inversa es lo mismo. Esto se explica por una relación de *Incerteza* que nos obligará a predecir con un cierta precisión una componente en ambos espacios (Heisenberg).

Condiciones de Existencia

Se puede demostrar que, para que una función $f(t)$ tenga una TF, función de ν definida por 1.44 es necesario y suficiente que:

1. La función $f(t)$ sea acotada (no diverja)

2. La integral de $|f(t)|$ entre $[-\infty, +\infty]$ tenga un valor finito

3. Las discontinuidades de $f(t)$ y sus máximos y mínimos sean, en número, finitos.

Es decir para que la TF de $f(t)$ exista es necesario que la señal contenga una energía finita (observar en un intervalo de tiempo o ventana temporal).

Algunas Propiedades de la TF

LINEALIDAD

La TF es una operación **lineal**:

$$\begin{aligned} f(t) &\rightleftharpoons F(\nu) \\ g(t) &\rightleftharpoons G(\nu) \end{aligned} \tag{1.50}$$

Estas dos relaciones permiten ver la linealidad:

$$af(t) + bg(t) \rightleftharpoons aF(\nu) + bG(\nu)$$

PARIDAD

Relaciones de paridad de la TF	
$x(t)$	$X(\nu)$
Real y Par	Real y Par
Real e Impar	Imaginaria e Impar
Imaginaria y Par	Imaginaria y Par
Imaginaria e Impar	Real e Impar
Compleja y Par	Compleja y Par
Compleja e Impar	Compleja e Impar
Real Cualquiera	Parte Real Par
Real Cualquiera	Parte Imaginaria Impar
Imaginaria Cualquiera	Parte Imaginaria Par
	Parte Real Impar
Parte Real Par y Parte Imaginaria Impar	Real
Parte Real Impar y Parte Imaginaria Par	Imaginaria

Si $x(t)$ es cualquiera (por ej. compleja) tenemos las relaciones siguientes, donde el asterisco significa complejo conjugado:

$$
\begin{aligned}
x(t) &\rightleftharpoons X(\nu) \\
x^*(t) &\rightleftharpoons X^*(-\nu)
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

Aquí vienen otras relaciones simples entre la TF de $x(t)$, $x^*(t)$ y $x(-t)$:

Relaciones Simples de la TF		
$x(t)$	$x^*(t) \rightleftharpoons X^*(-\nu)$	$x(-t) \rightleftharpoons X(-\nu)$
Real	$X(\nu)$	$X^*(\nu)$
Imaginaria	$-X(\nu)$	$-X^*(\nu)$
Par Cualquiera	$X^*(\nu)$	$X(\nu)$
Impar Cualquiera	$-X^*(\nu)$	$-X(\nu)$
Cualquiera	$X^*(-\nu)$	$X(-\nu)$

Las relaciones de paridad pueden quedar más claras si analizamos un ejemplo: Suponga que la función $q(t)$ es REAL y posee una transformada de Fourier $Q(\nu)$ dada por :

$$Q(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)e^{-2\pi j\nu t}dt$$

Donde

$$Q(\nu) \equiv U(\nu) + jV(\nu)$$

Si identifica los términos haciendo:

$$\begin{aligned} U(\nu) + jV(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)e^{-2\pi j\nu t}dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\cos(2\pi\nu t)dt}_{U(\nu)} - j\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\sin(2\pi\nu t)dt}_{V(\nu)} \end{aligned} \tag{1.52}$$

Esto implica que $U(\nu) = Re[Q(\nu)]$ es PAR y $V(\nu) = Im[Q(\nu)]$ es IMPAR. Con ello tenemos que: $U(\nu) = U(-\nu)$ y $V(\nu) = -V(-\nu)$. Al usarlo en $Q(\nu)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} Q(-\nu) &= U(-\nu) + jV(-\nu) \\ &= U(-\nu) - jV(\nu) \\ &= \underbrace{U(\nu) - jV(\nu)}_{Q^*(\nu)} \end{aligned} \tag{1.53}$$

Esto se resume diciendo que si $q(t) \in \mathbf{R}$ entonces $Q(-\nu) = Q^*(\nu)$ donde el símbolo $*$ representa el complejo conjugado. Este es el principio de reflexión. También es válido al revés: Si se cumple este principio, entonces la función $q(t)$ es real.

Similitud

La ecuación $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ conduce a una relación de escala:

$$f(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Una agrandamiento de la escala de tiempo conduce a una *contracción* de la escala de frecuencias (ver figura 1.7).

Traslación

La ecuación $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ conduce a una relación de translación:

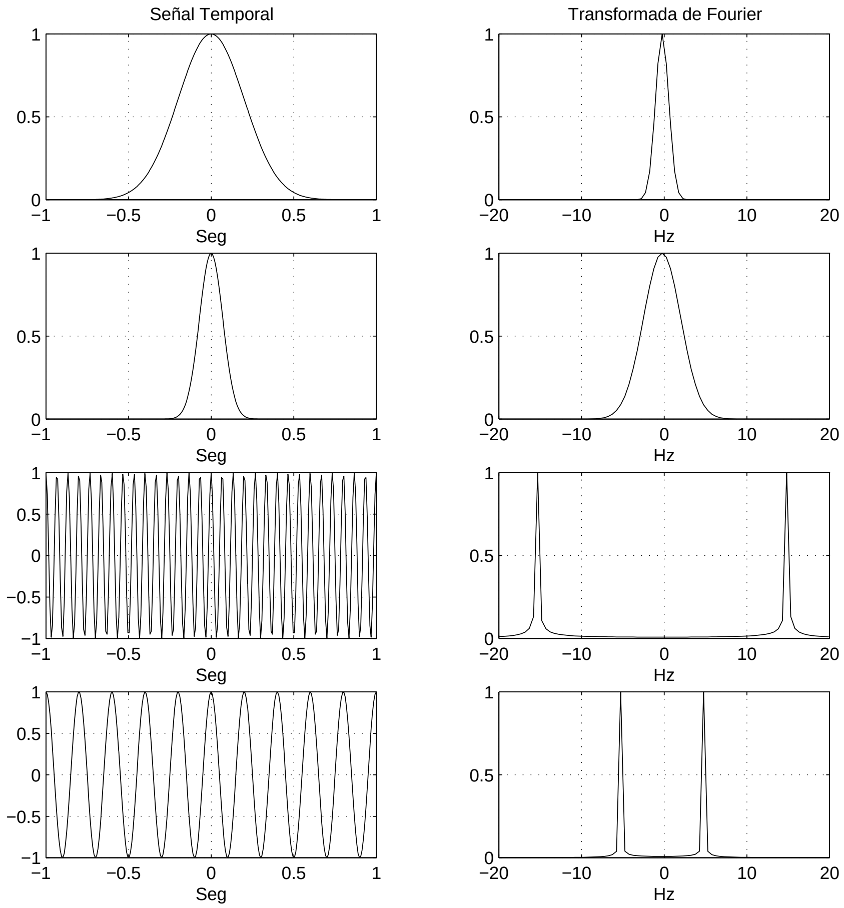


Figura 1.7: *Ilustración de la Propiedad de Similitud*

$$\begin{aligned} f(t-a) &= e^{-2\pi j a\nu} F(\nu) \\ f(t-a) &= \cos(2\pi\nu a)F(\nu) - j\sin(2\pi\nu a)F(\nu) \end{aligned} \tag{1.54}$$

Ambas TF de $f(t)$ y $f(t-a)$ tienen el mismo módulo pero la TF de $f(t-a)$ sufre una *rotación* de fase en el plano de Fourier de $-2\pi a\nu$.

En el caso de una función cualquiera dada, una translación crea una deformación de las partes Real e Imaginaria de la TF, pero más importante aún, la translación puede modificar la pendiente de la fase de la señal de origen. Esta propiedad es obviamente reciproca, es decir que si $F(\nu) \rightleftharpoons f(t)$ entonces

$$F(\nu - a) \rightleftharpoons f(t)e^{+2\pi j a t}$$

Como ejemplo tomemos la Distribución de Dirac $\delta(\nu)$, que posee una TF cosntante:

$$\delta(\nu) \rightleftharpoons 1$$

Si efectuamos una translación en la Delta en $-a$ y $+a$ tenemos:

$$\begin{aligned} \delta(\nu - a) &= e^{+2\pi jat} \\ \delta(\nu + a) &= e^{-2\pi jat} \\ \delta(\nu + a) + \delta(\nu - a) &= 2\cos 2\pi at \end{aligned} \tag{1.55}$$

Translación en Frecuencia y Modulación

Sabemos que la relación $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ conduce a:

$$f(t)e^{-2\pi j\nu_p t} \rightleftharpoons F(\nu - \nu_p)$$

Esto corresponde a una $Modulación$ de la señal $e^{-2\pi j\nu_p t}$ por la señal $f(t)$, muy utilizado en telecomunicaciones. La señal $f(t)$ es la señal $Modulante$ y la señal oscilatoria $e^{-2\pi j\nu_p t}$ es la $Portadora$ (Carrier Wave), cuya frecuencia depende del canal utilizado en la comunicación. La translación en frecuencia en una señal $f(t)$ se hace multiplicando por una frecuencia pura. En el caso de señales reales, la multiplicación se hace con coseno o seno:

$$f(t) \longrightarrow f(t)\cos 2\pi\nu_p t$$

Evidentemente, la TF de la señal modulada es:

$$TF[f(t)\cos 2\pi\nu_p t] = \frac{1}{2}\{F(\nu - \nu_p) + F(\nu + \nu_p)\}$$

Esta operación queda clara en la figura 1.8. La señal de baja frecuencia $f(t)$ luego de la multiplicación por $\cos 2\pi\nu_p t$ queda **localizada** alrededor de las frecuencias $+\nu_p$ y $-\nu_p$. No le recuerda esto la localización de una función cuando le aplicamos una Delta de Dirac ? (Vea la ecuación 1.55).

Derivación

Si tenemos :

$$\begin{aligned} x(t) &\rightleftharpoons X(\nu) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\rightleftharpoons (2\pi j\nu)X(\nu) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\rightleftharpoons (2\pi j\nu)^n X(\nu) \end{aligned}$$

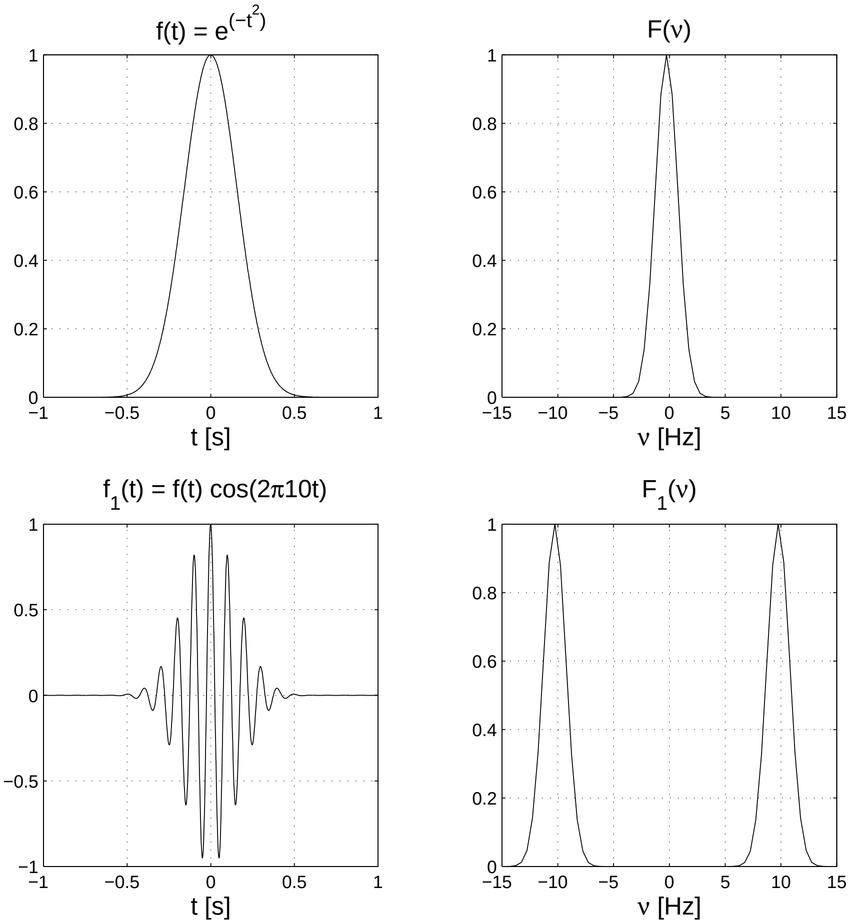


Figura 1.8: *Ilustración de la Propiedad de Modulación. Aquí la frecuencia de la portadora es $\nu_p = 10$ Hz*

Esta propiedad se aclara con una Gaussianna:

$$\begin{aligned} e^{-\pi t^2} &\rightleftharpoons e^{-\pi\nu^2} \\ te^{-\pi t^2} &\rightleftharpoons -j\nu e^{-\pi\nu^2} \end{aligned}$$

Detalle del Proceso de Modulación

Como dijimos anteriormente, la modulación es la alteración de alguna propiedad de una onda portadora (carrier wave) producida por otra señal la cual contiene información relevante. Las portadoras pueden ser sinusoides o trenes de pulsos. En el caso de las sinusoides, la señal modulante puede alterar la amplitud

o la frecuencia de la portadora. Para los pulsos, la señal modulante puede modificar la amplitud o la duración de ellos provocando alteración de fase.
La modulación es usada en tres áreas:

1. Señales de TV, radio, cintas magnéticas. Cuando la señal modulante no puede ser transmitida directamente en un medio dada su baja frecuencia.

2. Señales Multicarrier. Cuando se necesita transmisión de muchos canales sobre un sólo medio. Se usan muchas portadoras a diferentes frecuencias. El caso de la fibra óptica.

3. Mejorar razón señal/ruido. En mediciones eléctricas, ópticas. Aquí la modulación es usada para mover el ancho de banda correspondiente a la señal que contiene información a una porción del espectro donde el ruido es menor.

Para que la modulación tenga utilidad, debe ser un proceso reversible. Esto se denomina **demodulación.**

Modulación de Amplitud, DSB y AM

La señal modulante (la información) alterará la amplitud de una portadora sinusoidal. La frecuencia de la onda portadora es en general mucho más grande que las frecuencias contenidas en la señal modulante. Con este procedimiento, la información en la señal modulante es trasladada (shift) hacia las altas frecuencias, logrando llevarla a regiones del espectro libres de ruidos, como el ruido típico $1/\nu$, el ruido asociado a los 50 Hz alterno y sus armónicos etc.
Dentro de la modulación de amplitud existen dos tipos: Modulación DSB (Double Side Band) y Modulación AM (Amplitude Modulation). Consideremos el caso particular de una onda modulante sinusoidal de la forma $f(t) = A_o \cos(\omega_o t)$. La portadora es en general también sinusoidal, de la forma : $p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$, con $\omega_p \gg \omega_o$.
Comenzamos con la modulación DSB, que consiste en multiplicar ambas señales directamente (a través de un dispositivo electrónico, ej AD554). El resultado es una señal de la forma:

$$M(t) = f(t) \cdot p(t) = \frac{A_o A_p}{2} \left(\cos(\omega_p + \omega_o)t + \cos(\omega_p - \omega_o)t\right)$$

Donde sólo aparecen las frecuencias suma y diferencia: $(\omega_p \pm \omega_o)$. Esto se verá reflejado en el espectro. Sólo apareceran estas frecuencias, no veremos las rayas espectrales ni de $f(t)$ ni de $p(t)$. Por este motivo a este tipo de modulación se le denomina DSB, dos rayas espectrales a ambos lados de la frecuencia de la portadora ω_p sin que esta aparezca directamente.
Ahora veamos el proceso de modulación AM. Este es el proceso de modulación usado en señales radio. La única diferencia con la modulación DSB es que aquí se agrega (suma) a la señal resultante $M(t)$ la onda portadora $p(t)$:

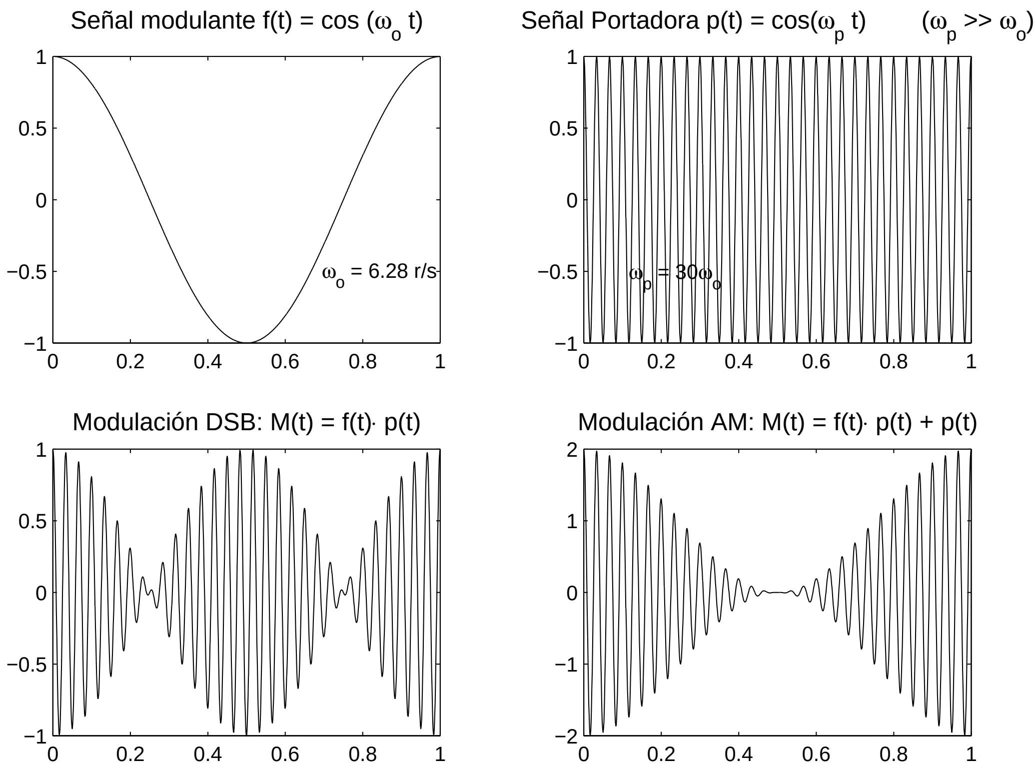


Figura 1.9: *Procesos de Modulación tipo DSB y AM*

$$M(t) = f(t) \cdot p(t) + p(t)$$

Aunque esto parezca una diferencia insignificante, tiene profundas consecuencias en el proceso de *demodulación*. La gracia de la modulación AM es que la envolvente de la señal $M(t)$ es exactamente la señal modulante $f(t)$. En general esto no es cierto para la modulación DSB, porque allí los cambios de signo de $f(t)$ se codifican en cambios de fase de $M(t)$ y esto complica la demodulación. Los circuitos para demodulación AM son más simples que para modulación DSB, con lo cual se explica la popularidad de la modulación AM (demuestre que un cambio de signo en una señal $f(t)$ produce cambis de fase o inversión de fase en la señal $M(t)$).

En la figura 1.9 se aprecia que sólo en el caso de la modulación AM, la envolvente de $M(t)$ coincide exactamente con la señal modulante $f(t)$. La señal resultante de la AM es entonces:

$$M(t) = [1 + A_o \cos(\omega_o t)] \cos(\omega_p t)$$

Con ello, aparecen en el espectro tres rayas espectrales asociadas a: $\omega_p \pm \omega_o$ y a ω_p. Note que el proceso de modulación es No Lineal, y en el curso vimos que la aparición de las frecuencias $\omega_p \pm \omega_o$ es característico de este tipo de procesos.

Demodulación

El método general para demodulación de amplitud, DSB o AM, es la multiplicación *síncrona* con una señal sinusoidal, $d(t)$, de igual frecuencia y fase que la portadora $p(t)$, seguido de un filtraje pasa-baja (electrónico). Este proceso traslada la señal $M(t)$ hacia las bajas frecuencias en el espectro hacia su ubicación original, pero genera algunas componentes de alta frecuencia ($2\omega_p$). De esta manera es posible decodificar la información transmitida en el proceso de modulación. Note que si no puede crear una señal $d(t)$ de igual frecuencia y fase con $p(t)$, entonces tendrá que transmitirla junto a $M(t)$ para poder realizar la demodulación (especialmente en el caso de DSB).
En la figura 1.10 se aprecia el proceso de demodulación, usando la referencia $d(t) = A_p \cos(\omega_p t)$.

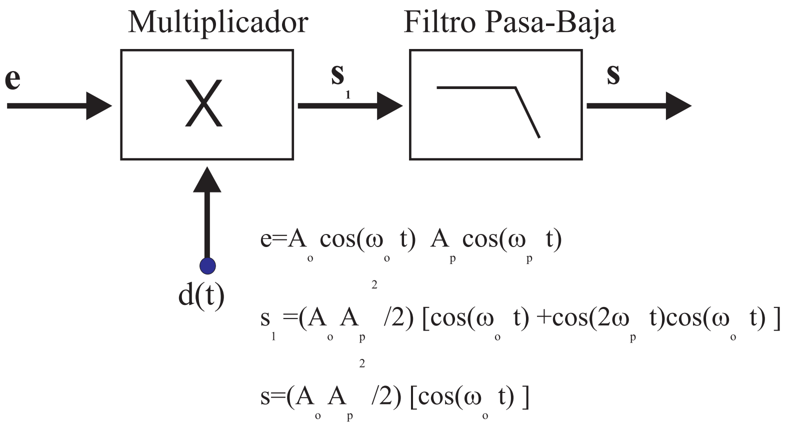


Figura 1.10: a) *Proceso de Demodulación para casos DSB y AM*

En los experimentos de laboratorio se usa preferentemente la modulación DSB, en particular para muestreo síncrono de señales luminosas y sonoras.

Casos particulares

Función Ventana (Window)

Esta función, $\sqcap_T(t)$, se aprecia en la figura 1.7, vale 1 dentro del intervalo $[-T/2, +T/2]$ y cero fuera de él. Su TF es la siguiente (Ejercicio para la casa):

$$\sqcap_T(t) \rightleftharpoons T \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi \nu T}$$

Si efectuamos una translación, $\sqcap_T(t - T/2)$, su TF es la TF de $\sqcap_T(t)$ multiplicada por $e^{-\pi j \nu T}$, osea :

$$\sqcap_T(t-T/2) \rightleftharpoons T\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}[\cos(\pi\nu T) - j\sin(\pi\nu T)$$

Distribución de Dirac

La TF de la Delta sabemos que es: $\delta(t) \rightleftharpoons 1$, Con lo cual:

$$\delta(t-t_0) \rightleftharpoons e^{-2\pi\nu t_0}$$

Peine de Dirac

El peine de Dirac se escribía :

$$\delta_T^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

con la ayuda de las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j\frac{t}{T}n) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) &\rightleftharpoons \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\frac{1}{T})\end{aligned}$$

Así la TF del Peine es:

$$\delta_T^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) \rightleftharpoons \frac{1}{T}\delta_{1/T}^{\uparrow\uparrow\uparrow}(\nu)$$

Frecuencias Negativas

La TF de una función está definida para frecuencias tanto positivas como negativas. No es fácil dar una interpretación física a las frecuencias negativas, aunque hay casos como en la velocimetría Laser Doppler (http://en.wikipedia.org/wiki/Laser_Doppler_velocimetry), donde el sentido físico de dichas frecuencias se asocia al efecto de una modulación de la señal de interés producto del movimiento de párticulas dentro de un fluido, produciéndose un corrimiento (shift) de la componente espectral de la señal. Un ejemplo más cotidiano son los cambios en la frecuencia audible de un móvil que se acerca o se aleja de un observador (ambulancias), producto del efecto Doppler (http://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect)
Generalmente, las señales usadas en experiencias de laboratorio son reales, y si calculamos la transformada de Fourier de una señal real, el espectro de Fourier es una función par. Ahora bien, si quisiéramos construir una señal compleja a partir de una señal real dada, podemos, a partir de la TF para $\nu \geq 0$, tratar de reconstruir por simetría la TF a frecuencias negativas. A esta técnica se le denomina Señal Analítica.

Transformada de Hilbert

En tratamiento de señales, generalmente se necesita relaciones entre la parte real e imaginaria de una señal. Esas relaciones son normalmente descritas con ayuda de la transformada de Hilbert. Esta transformación, muy utilizada en teoría de comunicaciones, permite describir la *envolvente* de una señal real (portadora) y su *frecuencia instantánea.*
En el diagrama de la figura 1.11 se muestra el proceso de modulación de una señal $x(t)$ usando la portadora $\cos(\omega t)$ entregada por el oscilador. El módulo de transformación de Hilbert crea una señal $sin(\omega t)$ a partir de la señal $\cos(\omega t)$.

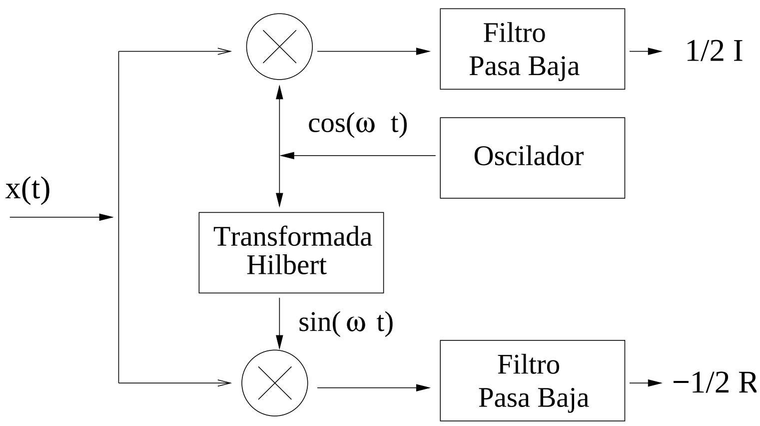


Figura 1.11: *Rol de la transformada de Hilbert en el proceso de Modulación*

Este diagrama entrega dos componentes (R, I, real e imaginaria) de la señal modulada.

La transformada de Hilbert (TH) se define como

$$TH[x(t)] = x(t) * \frac{1}{\pi t} = V.P. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t-\theta} \, d\theta$$

donde V.P. es el valor principal de la integral, es decir, el valor de la integral al evitar las singularidades en $\theta = t$ y $\theta = \pm\infty$.
Al escribir la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de la función $x(t)$ y usando el teorema del producto de Convolución, tenemos

$$TF\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) = TF\left(\frac{1}{\pi t}\right) X(\nu) \qquad \text{donde} \qquad TF\left(\frac{1}{\pi t}\right) = -j\, sgn(\nu)$$

Un truco es expresar la función *signo* como $sgn(\nu) = 2\Theta(\nu) - 1$, donde $\Theta(\nu)$ es la función escalón unitario en el dominio frecuencial. De esta manera,

$$TF\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) = \begin{cases} -jX(\nu) & \nu > 0 \\ +jX(\nu) & \nu < 0 \end{cases}$$

Esto se traduce en que la transformada de Hilbert produce una rotación de -90^o en las componentes de frecuencia positivas y una rotación de $+90^o$ en las componentes de frecuencia negativas de la señal $x(t)$ (al multiplicar por $\pm j$).
Algunos ejemplos:

Transformada de Hilbert	
Señal $x(t)$	TH[$x(t)$]
$\sin(t)$	$-\cos(t)$
$cos(t)$	$\sin(t)$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t}{1+t^2}$
$\frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1-\cos(t)}{t}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$

Señal analítica

Cuando uno considera una señal real, su espectro es par, por lo que los valores del espectro para las frecuencias negativas son superfluos y pueden no considerarse sin tener ningun efecto sobre la señal de interés. Sólo nos interesan las frecuencias positivas. Si es necesario construir una señal compleja $z_x(t)$ que represente a $x(t)$, tal que $Z_x(\nu) = TF[z_x(t)]$ sea idénticamente nula para $\nu < 0$ e igual a $2X(\nu)$ para $\nu \geq 0$, tenemos que la señal análìtica de $x(t)$ es $Z_x(t)$ dada por

$$Z_x(t) = x(t) + j\,TH[x(t)] \qquad \text{y en Fourier} \qquad Z_x(\nu) = X(\nu) + X(\nu)sgn(\nu)$$

Donde la función sgn se puede re-definir por:

$$sgn(\nu) = \begin{cases} +1 & \text{si}\,\nu \geq 0 \\ 0 & \text{si}\,\nu = 0 \\ -1 & \text{si}\,\nu < 0 \end{cases}$$

Ahora la función $z_x(t)$ es compleja:

$$z_x(t) = TF^{-1}[Z_x(\nu)] = x(t) + jTF^{-1}[-jsgn(\nu)X(\nu)]$$

Lo cual nos entrega:

$$z_x(t) = x(t) + j\frac{1}{\pi t} * x(t)$$

Donde la TH es (idem anteriormente)

$$TH[x(t)] = x(t) * \frac{1}{\pi t} = V.P.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\theta)}{t-\theta}\,d\theta$$

Así, nuestra función analítica queda representada por

$$z_x(t) = x(t) + jTH[x(t)]$$

Note que la TH equivale a filtrar la señal con un filtro de ganancia compleja, dado por: $j\,sgn(\nu)$ como vimos anteriormente.

Ejemplo 1: Si $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ entonces $TH[x(t)] = \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega_0 t)$. Y la señal analítica es entonces $Z_x(t) = \cos(\omega_0 t) + j \cdot \sin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t}$.

Ejemplo 2: Si $x(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$, entonces $Z_x(t) = e^{j|\omega_1|t} + e^{j|\omega_2|t}$.

Nota para fanáticos de Matlab: Si Ud. tiene una función real $v_r(t)$ y quiere encontrar la señal analítica, $v_a(t)$, correspondiente, puede usar, en Matlab, el comando siguiente:

$$v_a = v_r + j \star Imag(hilbert(v_r))$$

Transformada de Fourier del Producto de Convolución

La idea es determinar cual es el aspecto del producto de convolución en el espacio de Fourier.
El producto de convolución entre dos funciones $g(t), r(t)$ está definido por la relación:

$$(g * r)_t = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')r(t')dt'$$

Si calculamos la TF del producto de convolución, obtenemos lo sgte:

$$\begin{aligned} TF[g*r] &= \int e^{-2\pi j\nu t}\left(\int g(t-t')r(t')dt'\right)dt \\ TF[g*r] &= \underbrace{\int g(t-t')e^{-2\pi j\nu(t-t')}d(t-t')}_{G(\nu)}\underbrace{\int e^{-2\pi j\nu t'}r(t')dt'}_{R(\nu)} \\ TF[g*r] &= G(\nu)R(\nu) \end{aligned} \tag{1.56}$$

Esto es, la TF del producto de convolución en el espacio real de dos funciones, se transforma en el producto simple entre las TF de cada una de las funciones.
Lo mismo ocurrirá, en sentido inverso, si calculamos la TF^{-1} del producto de convolución entre dos funciones en el espacio de Fourier. Obtendremos el producto simple de ambas funciones en el espacio real. Es decir:

$$TF^{-1}\left[\int G(\nu-\nu')R(\nu')d\nu'\right] = g(t)r(t)$$

1.4.2. Transformada de Laplace

Como hemos venido viendo, la función de transferencia de un sistema lineal es la razón entre la salida y la entrada del sistema. Cuando el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales es díficil calcular esa razón s/e. Por este motivo hemos introducido ya la TF y ahora la Transformada de Laplace.

Definición

Sea $f(t)$ una función de variable real t y NULA para $t < 0$, osea una función causal. La transformada de Laplace (**TL** o **L**) es:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \to F(s) = TL[f(t)] \tag{1.57}$$

En esta integral, s puede ser una variable real o compleja. Si s es compleja se supone que la parte real de s es superior a un cierto valor σ_0 y que en esas condiciones la integral converge. Osea que si $s = \sigma + j\omega$ entonces $\sigma > \sigma_0$.

Si s es imaginaria pura ($s = j\omega$), $F(s)$ se reduce a la Transformada de Fourier de la función $f(t)$, y será igual a 0 si $t < 0$ y a $f(t)$ si $t \geq 0$. Escribiremos continuamente $F(s) = TL[f(t)]$. Además esta transformación es LINEAL, con lo cual:

$$\begin{aligned} TL[f_1(t) + f_2(t) &= TL[f_1(t)] + TL[f_2(t)] \\ TL[\alpha f(t)] &= \alpha TL[f(t)] \end{aligned} \tag{1.58}$$

La transformada inversa de Laplace está dada por la integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds \to f(t) = TL^{-1}[F(s)] \tag{1.59}$$

Demostración

Mostramos anteriormente que la TF de una función $f(t)$ existe si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ es finita. Esto requiere que $f(\pm\infty) = 0$. Pero si $f(t)$ tiene las sgtes. propiedades:

1. $f(t) = 0$ para $t < 0$
2. $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-ct} = 0$ con $Re(c) > 0$

Podemos deducir la integral que representa la TL de $f(t)$. La propiedad 2 no requiere que $f(\infty) = 0$ o incluso finita, sino que requiere que $f(t)$ se aproxime a su límite al infinito en forma más lenta que e^{ct}. Definimos:

$$q(t) \equiv \begin{cases} f(t)e^{-ct} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Donde c es real y mayor que cero. Además conocemos la función escalon de Heaviside $\Theta(t)$ definida por:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Al usar $\Theta(t)$ podemos escribir la función $q(t)$ como:

$$q(t) = \Theta(t)f(t)e^{-ct}$$

Le calculamos la transformada de Fourier a $q(t)$ que gracias a $\Theta(t)$ nos entrega en realidad la TF de $f(t)$

$$Q(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t)f(t)e^{-(c+2\pi j\nu)t}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(c+2\pi j\nu)t}dt \tag{1.60}$$

Escribimos también la transformada inversa de Fourier como:

$$q(t) = f(t)e^{-ct} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\nu)e^{2\pi j\nu t}d\nu \quad t > 0$$

Multiplicamos por e^{ct} a ambos lados, con lo cual nuestra función $f(t)$ queda definida por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\nu)e^{(c+2\pi j\nu)t}d\nu \quad t > 0 \tag{1.61}$$

Si hacemos el cambio de variables

$$s \equiv c + 2\pi j\nu$$

La integral 1.60 se transforma en:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad \rightarrow F(s) = TL[f(t)]$$

Y la integral 1.61 se transforma en:

$$f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\frac{ds}{2\pi j} \quad \rightarrow F(s) = TL^{-1}[f(t)]$$

En la tabla siguiente se resumen algunas de las propiedades de la Transformada de Laplace.

Propiedades de la Transformada de Laplace		
Transformada de Laplace	Función Temporal	Comentario
$F(s)$	$f(t)$	Par de transformación
$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Superposición
$F(s)e^{-s\lambda}$	$f(t-\lambda)$	Shift temporal
$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	Escala
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	Shift frecuencial
$sF(s) - f(0)$	$\frac{df(t)}{dt}$	Derivación
$s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	Derivación
$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}[\int f(t)dt]_0$	$\int f(t)dt$	Integración
$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t) * f_2(t)$	Convolución
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$tf(t)$	Multiplicación por t
$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\theta)F_2(s-\theta)d\theta$	$f_1(t)f_2(t)$	Producto de funciones

A continuacion se presenta una lista de TL's de las funciones típicas. Más adelante veremos que la gracia de la TL aplicada a una función del tiempo es que convierte la ecuación diferencial que gobierna el sistema en una ecuación algebraica. La TL va a ser usada para encontrar la solución (en el dominio s) de las ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes (para $t \geq 0$).

Tabla de pares transformados de Laplace		
$F(s)$	$f(t)\ t \geq 0$	Comentario
1	$\delta(t)$	Dirac
$1/s$	$\Theta(t)$	Escalon unitario
$1/s^2$	t	Rampa unitaria
$2!/s^3$	t^2	Parabola
$3!/s^4$	t^3	Cubica
$m!/s^{m+1}$	t^m	Potencia m
$1/(s+a)$	e^{-at}	Exponencial
$1/(s+a)^2$	te^{-at}	Exponencial
$1/(s+a)^3$	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$	Exponencial
$1/(s+a)^m$	$\frac{1}{(m-1)!}t^m e^{-at}$	Exponencial
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	Exponencial
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at-1+e^{-at})$	Rampa-Escalon-Exp
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	Exponencial
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	Exponencial
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}(1+at)$	Exponencial
$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt}-ae^{-at}$	Combinacion
$\frac{a}{(s^2+a^2)}$	$\sin at$	Sinusoide
$\frac{s}{(s^2+a^2)}$	$\cos at$	Sinusoide
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$	Modulacion
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$	Modulacion
$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-at}\left(\cos bt+\frac{a}{b}\sin bt\right)$	Combinacion
$\frac{a^2}{s^2+2\zeta as+a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta at}\sin(a\sqrt{1-\zeta^2}t)$	Sist. 2^o orden

Casos Interesantes

Aquí veremos algunos trucos asociados al cálculo de Transformadas de Laplace y que serán utilizados en el análisis de sistemas de control en los capítulos siguientes del curso.

Considere la TL de la Delta de Dirac δ.

$$TL[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,dt = \begin{cases} e^{-st_0} & t_0 > 0 \\ 0 & t_0 < 0 \end{cases}$$

Si ahora calculamos la TL^{-1}, obtenemos otra representación integral de la δ

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)}\,ds \;\; t_0 > 0$$

Considere ahora la TL de la función escalón (step) de Heaviside $\Theta(t-t_0)$:

$$TL[\Theta(t-t_0) = \int_0^\infty \Theta(t-t_0)e^{-st}\,dt = \int_{t_0}^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}e^{-st_0}$$

con lo cual la función escalón se puede representar en forma integral como:

$$\Theta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)}\frac{ds}{s}$$

Si tomamos la derivada de esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\Theta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)}ds = \delta(t-t_0)$$

Parece más o menos claro que la derivada de una función escalón es nula alrededor del punto de quiebre y es justo allí donde la derivada se hace infinita, asemejándose a una linda Delta de Dirac. Este caso se puede estudiar en detalle al modelar el punto de quiebre con una función suave, a la cual le hacemos tender el radio de curvatura a cero.

Considere la función $f(t)$ que posee una TL dada por $F(s)$. Su derivada c/r al tiempo es df/dt. Calculemos la $TL[df/dt]$:

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{df}{dt}\right] &= \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= (\underbrace{e^{-s\infty}}_{=0}f(\infty) - f(0)) + sTL[f(t)] \end{aligned} \tag{1.62}$$

Ojo que el primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior es nulo siempre y cuando $Re(s) > 0$. Finalmente, tenemos que:

$$TL\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Para la derivada de segundo orden, el cálculo es también simple y nos entrega:

$$TL\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Se advierte que gracias a la TL, aparecen naturalmente las condiciones iniciales asociadas a los operadores de diferenciación, $f(0), f'(0)$.

Calculemos ahora la TL de una integral. Sea $R(t)$ una función del tiempo dada por:

$$R(t) = \int_0^t f(t')dt'$$

Calculamos sabiendo que $TL[f(t)] = F(s)$:

$$\begin{aligned} TL[R(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}R(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t')dt'dt \\ &= \left(-\frac{1}{s}e^{-st} - R(t)\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\frac{dR}{dt}dt}_{F(s)} \\ &= \frac{1}{s}R(0) + \frac{1}{s}F(s) \\ &= \frac{1}{s}\left(\int_0^t f(t')dt'\right)\Big|_0 + \frac{1}{s}F(s) \end{aligned} \tag{1.63}$$

Evaluación de Integrales de Laplace

Obtener la TL de una función del tiempo es simplemente calcular una integral. En la mayoría de los casos para obtener la transformada inversa se usa una tabla, pero no siempre funciona. Hay casos en que se debe evaluar la integral a través del cálculo de la integral por integración compleja (Teorema de Cauchy) usando el cálculo de residuos que aprendió en los cursos de Variable Compleja. Si ud. está interesado en entender esta técnica de evaluación de integrales, le sugiero revisar algún texto de Variable Compleja.

Ejemplo

Tenemos la sgte. ecuación diferencial de un oscilador (péndulo) efectuando oscilaciones de pequeña amplitud.

$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

Aplicamos la TL a dicha ecuación término por término, usando la tabla de pares transformados dada en clases, y obtenemos:

$$\begin{aligned} TL[m\ddot{x}] &= m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) \\ TL[kx] &= kX(s) \\ TL[f(t)] &= F(s) \end{aligned}$$

Con lo cual, ordenando, obtenemos:

$$(ms^2 + k)X(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) = F(s)$$

Despejamos $X(s)$:

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{ms^2 + k}}_{\text{Sol. Particular}} + \underbrace{\frac{msx(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}}_{\text{Efecto Condiciones Iniciales}}$$

Evidentemente si queremos la solución temporal $x(t)$ debemos calcular la transformada de Laplace Inversa TL^{-1}. Esta la calculamos utilizando la tabla de pares transformados de Laplace dada en clases. Pero antes de ello, debemos definir cual es la función $f(t)$, función forzante del oscilador. Supongamos (algo simple) que es una función escalón de Heaviside $\Theta(t)$, cuya TL está dada en la tabla, y es $F(s) = TL[\Theta(t)] = 1/s$. Con lo cual,

$$\begin{aligned} x(t) &= TL^{-1}\left[\frac{1}{s(ms^2 + k)}\right] + TL^{-1}\left[\frac{msx(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}\right] \\ x(t) &= \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}t}\right] + \left[x(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}t} + \dot{x}(0)\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}t}\right] \end{aligned}$$

1.5. Transformación de Señales a Tiempo Discreto

Las señales a tiempo discreto son usadas en el tratamiento numérico de datos. Se obtienen a través de un muestreo de señales análogas. Para poder expandir la representación frecuencial a las señales de tiempo discreto, se introduce ls Transformada en Z y la Transformada en Frecuencias Reducidas.

1.5.1. La Transformada en Z (TZ)

La transformada en Z de una señal a tiempo discreto $x(n)$ es la función de variable compleja z:

$$X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Esta función está definida en un disco del plano complejo. Entre sus propiedades poder mencionar la Linealidad, es decir, si $X(z) = TZ[x(n)]$ y $Y(z) = TZ[y(n)]$ entonces:

$$TZ[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$$

También existe la translación en iempo discreto, que nos permite dar un significado físico a z^{-1}:

$$\begin{aligned} TZ[x(n-n_0)] &= X(z) z^{-n_0} \\ TZ[x(n-1)] &= X(z) z^{-1} \end{aligned}$$

Con esto z^{-1} representa la operación *retardo unitario*. Esta propiedad hace que la TZ sea tan útil en teoría de muestreo de señales.

Función de Transferencia

Sea un sistema discreto (muestreado) de respuesta impulsional $h(n)$. Le aplicamos $x(n)$ a la entrada y en la salida obtenemos $y(n)$. Nosotros conocemos la ecuación de convolución,

$$y(n) = \sum_p h(n-p) x(p)$$

Si le calculamos la TZ a esta ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_p y(n) z^{-n} = \sum_n \sum_p h(n-p) x(p) z^{-n} \\ &= \sum_{n-p} \sum_p h(n-p) z^{-(n-p)} x(p) z^{-p} \\ Y(z) &= H(z) X(z) \end{aligned} \tag{1.64}$$

Así como vimos en la transformada de Fourier y la transformada de Laplace, también en la transformada en Z el producto de convolución se transforma en un producto simple en el espacio transformado. Ojo que será $H(z)$ la función de transferencia de nuestro sistema discreto.

Polos y ceros

La salida $y(n)$ y la entrada $x(n)$ de un sistema discreto pueden relacionarse a través de la *ecuación de diferencias* vista anteriormente.

$$y(n) + \sum_{1}^{P} a_k y(n-k) = \sum_{0}^{M} b_k x(n-k)$$

Si tomamos la TZ a esta ecuación y usamos las propiedades de linealidad y translación en el tiempo, entonces obtenemos:

$$Y(z)(1 + \sum_{1}^{P} a_k z^{-k}) = X(z) \sum_{0}^{M} b_k z^{-k}$$

Si además sabemos que el sistema debe tener un función de transferencia $H(z)$ tal que:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Entonces, esta función estará dada por:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_0^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_1^P a_k z^{-k}}$$

Esta es una función tipo fración racional en z. Si factorizamos el numerador y el denominador, tenemos que:

$$H(z) = b_0 z^{P-M} \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_{0i})}{\prod_{j=1}^{P}(z - z_{pj})}$$

Los ceros del numerador z_{0i} son CEROS del sistema o de $H(z)$. Los ceros del denominador son z_{pj} son POLOS del sistema o de $H(z)$. Los polos y ceros van a describir toda la dinámica del sistema alrededor de un factor de amplitud (b_0) y un retardo (z^{P-M}).

1.5.2. Transformada en frecuencias Reducidas, (TR)

Esta transformación, originada por la TZ, permite extender el concepto de frecuencia a las señales a tiempo discreto.

La TR

Si escribimos la transformada de Fourier (TF) de una señal a tiempo continuo:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi j\nu t}dt$$

Para llevar esta TF a señales a tiempo discreto hay que hacer lo sgte: Reemplazar la integral $\int$ por una sumatoria $\sum$ (una série discreta) y cambiar la variable temporal t continua por un tiempo discreto n. Para una señal muestreada con un período de muestreo T_E, el producto νt se trasnforma en $\nu n T_E$. Ahora introducimos la *frecuencia reducida*

$$\lambda = \nu T_E$$

que es un número sin dimensión, con lo cual:

$$X(\lambda) = TR[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-2\pi j\lambda n}$$

Esta transformada en frecuencias reducidas está relacionada a la transformada en Z, al hacer:

$$z = e^{2\pi j\lambda}$$

la TR es la TZ obtenida al describir, en el plano complejo de z, un círculo de radio 1 (cf. Figura 1.12). Esto se puede interpretar diciendo que la frecuencia está contenida en la *fase* de z : $2\pi\lambda$.

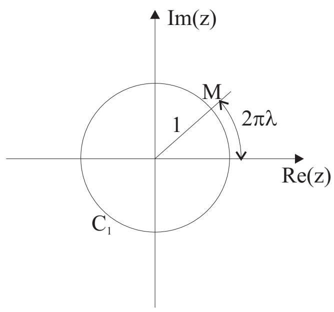


Figura 1.12: *Plano complejo de z y la frecuencia reducida*

Frecuencia y frecuencia reducida

A partir de la TR, uno puede encontrar la señal a tiempo discreto dada por:

$$x(n) = \int_{+1/2}^{+1/2} X(\lambda)e^{2\pi j\lambda n}d\lambda$$

Esta expresión permite de re encontrar la interpretación frecuancial que habíamos dado a las señales a tiempo continuo. La señal a tiempo discreto es una suma de señales a frecuencia pura $e^{2\pi j\lambda n}$. Para asociar a λ una dimensión de frecuencia, hay que introducir el período de muestreo, con lo cual, la frecuencia es: λ/T_e en [Hertz].
En la ecuación anterior, la integral no fue tomada entre $\pm\infty$ sino que enfrecuencias reales de $-1/(2T_E)$ a $1/(2T_E)$. Esto porque debe cumplir el teorema de Shanon del muestreo de señales que veremos más adelante.

Propiedades de la TR

Esta es lineal (como la TF, TL, TZ)

$$TR[ax(n) + by(n)] = aX(\lambda) + bY(\lambda)$$

La translación en el tiempo conduce a:

$$TR[x(n - n_0)] = X(\lambda)e^{-2\pi j\lambda n_0}$$

1.5.3. Algunos ejemplos

Integradores

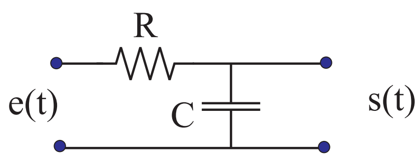


Figura 1.13: *Integrador analógico*

El INTEGRADOR ANALÓGICO clásico está formado de una resistencia R y de un condensador de capacidad C. La salida $s(t)$ está relacionada con la entrada $e(t)$ a través de la ecuación diferencial:

$$e(t) = s(t) + RC\frac{ds(t)}{dt}$$

Es también representado como un filtro de entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ tal que:

$$y(t) + \tau_R\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Donde τ_R es la constante de tiempo (RC). La respuesta impulsional del integrador analógico es:

$$h(t) = \frac{1}{\tau_R}e^{-t/\tau_R}\Theta(t)$$

Donde $u(t)$ es la función escalón de Heaviside: $\Theta(t) = 1(t \geq 0)$ y $\Theta(t) = 0(t < 0)$.
Se obtiene de dos maneras: (a) Mirando lso pares transformados de la tabla de transformadas de Fourier o (b) Por integración Compleja utilizando el cálculo de residuos ([?]).
La función de transferencia en frecuencia $H(\nu)$ es:

$$H(\nu) = |H(\nu)|e^{j\phi_H(\nu)} = \frac{1}{1 + 2\pi j\nu\tau_R}$$

Este filtro calcula la integral de la señal de entrada en un intervalo de tiempo τ_R.
El INTEGRADOR DISCRETO se usa para señales discretas (muestreadas). También se comporta como un filtro, pero esta vez como filtro de tipo AR1 (Autoregresivo de retardo unitario).

$$y(n) - a_1 y(n-1) = x(n) \qquad 0 \leq a_1 \leq 1$$

La respuesta impulsional de este integrador es:

$$h(n) = a_1^n u(n)$$

Obviamente con $u(n) = 1(n \geq 0)$ y $u(n) = 0(n < 0)$.
La función de transferencia se puede calcular usando la TZ sobre $h(n)$ considerando la relación $\sum_0^\infty br^n = b/(1-r)$

$$TZ[h(n)] = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_1^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_1/z)^n 1 = \frac{1}{1 - a_1/z}$$

También se puede calcular tomando la TZ de la ecuación del filtro AR1, con el lado derecho $x(n) = \delta(n)$.

$$H(z) - a_1 H(z) z^{-1} = 1$$

Con lo cual la función de transferencia en Z es:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - a_1}$$

Y la función de transferencia en frecuencias reducidas se obtiene haciendo: $z = e^{-2\pi j\lambda}$, con lo cual:

$$H(\lambda) = |H(\lambda)|e^{j\phi_H(\lambda)} = \frac{1}{1 - a_1 e^{-2\pi j\lambda}}$$

El POLO de este filtro es : $z_p = a_1$ (cf. Figura 1.14).
El módulo de la función de transferencia en Z puede deducirse GEOMÉTRICAMENTE a través de la posición del POLO:

$$|H(\lambda)| = |\frac{e^{2\pi j\lambda}}{e^{2\pi j\lambda} - a_1}| = \frac{1}{|e^{2\pi j\lambda} - a_1|}$$

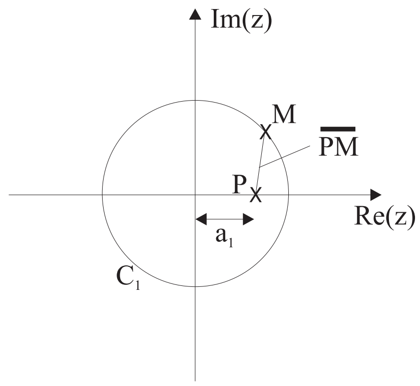


Figura 1.14: *Polo del integrador discreto*

Sea M un punto que describe el círculo de radio 1, $e^{2\pi j\lambda}$. Sea P el punto a_1 (cf. Figura 1.14).

$$|H(\lambda)| = \frac{1}{PM}$$

El módulo de la función de transferencia del filtro se VE como el inverso de la distancia del segmento MP. El tiempo de integración puede relacionarse de manera simple al MÓDULO DEL POLO.

$$h(nT_E) = u(n)e^{n\log|z_p|}$$

Donde el tiempo de integración es : $\tau_R = -\frac{T_E}{\log|z_p|}$

Ejercicio–Transformaciones

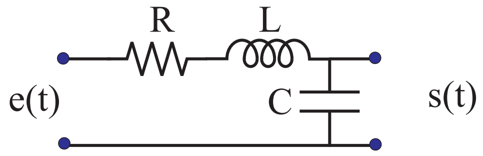


Figura 1.15: *Resonador Analógico*

Resonador Analógico

El circuito resonante analógico de la figura 1.15 está constituído por una resistencia R en série con una inductancia L y un condensador de capacidad C.

1. Encuentre la ecuación diferencial que gobierna la salida $s(t)$ en función de la entrada $e(t)$.
2. Calcule la respuesta impulsional $h(t)$
3. Calcule la función de transferencia $H(s)$ y $H(j\omega)$.
4. Calcule la frecuencia de resonancia. Para ello, Ud. debe saber que la frecuencia de resonancia ω_r hace diverjer la función $H(j\omega)$.

Resonador Numérico

El circuito resonante de la figura 1.15 puede ser descrito por una ecuación de diferencias tipo filtro AR2 que relaciona la entrada $e(n)$ con la salida $s(n)$.

$$s(n) - a_1 s(n-1) - a_2 s(n-2) = e(n)$$

Para obtener un filtro resonante debe considerar $a_1 = 2\rho\cos\theta$, $a_2 = -\rho^2$ ($0 < \rho < 1$, con ρ cercano a 1).

1. Escriba la respuesta impulsional del filtro AR2, $h(n)$
2. Escriba la función de transferencia en Z
3. Escriba la función de transferencia en frecuencias reducidas TR
4. Encuentre los polos de $H(z)$ y estime geométricamente el módulo de la función de transferencia $|H(\lambda)|$.

Transformada de Fourier

Encuentre la TF de :

1. $$f(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at}\sin(bt) & x > 0 \end{cases}$$

2. Si $G(\nu) = TF[g(t)]$, calcule la TF de
$$f(at)e^{ibt}$$
en función de $G(\nu)$ con $a > 0$

3. Si $f(t) = dg/dt$, $\int_{t_0}^{t} f(t')dt' = g(t) - g(t_0)$. Encuentre la $TF[\int_{t_0}^{t} f(t')dt']$ en función de $G(\nu)$ y $R(t_0)$.

4. Demuestre que la función delta se puede expresar como
$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu(t-t_0)} d\nu$$
Calcule la TF del producto de convolución entre $\delta(t - t_0)$ y $\cos(2\pi\nu_0 t)$

5. Determine la primera derivada de la función-δ de Dirac $d\delta(t - t_o)/dt$.

6. Use el teorema del producto de convolución aplicado a las trasnformadas de Fourier para evaluar la integral
$$f(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-t')^2/2} e^{-t'^2/2} dt'$$

En Matlab: (a) Cree un eje temporal t. Construya la función $x(t) = x_0 cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$ para un valor de ν_0, ϕ que Ud. elige. Usando la función FFT de Matlab, calcule la transformada de Fourier (TF). Grafique versus frecuencia la amplitud del espectro complejo, $|X(\nu)|$, y la fase de $X(\nu)$. Observe como varía la posición del máximo de amplitud para diferentes valores de ν_0 y la forma de la fase para diferentes valores de ϕ.

En Matlab: (b) Cree un eje temporal t. Construya la función $y(t) = y_0\cos(2\pi\nu_0 t) + y_1\cos(2\pi\nu_1 t)$. Considere $\nu_0 \sim \nu_1$. Usando la función FFT de Matlab, calcule la TF. Grafique versus frecuencia la amplitud del espectro complejo, $|Y(\nu)|$. Que observa ?. Ahora calcule la TF($y^2(t)$). Que observa ?.
En Matlab: (c) Para la función $z(t) = e^{-\sigma t}\cos(2\pi\nu_0 t)$ construya la función analítica correspondiente que llamaremos $z_a(t)$. Grafique la *envolvente*, $|z_a(t)|$ y la *fase* de $z_a(t)$ versus tiempo. Explique la forma de la envolvente y de la fase. Le adelanto que la fase crece linealmente en el tiempo. Realice un fit usando la función POLYFIT de Matlab, para encontrar la pendiente de la fase. Explique su valor.

Transformada de Laplace

Calcule las funciones de transferencia del circuito de la figura 1.16 a). Use las leyes de Mallas y Nodos de Kirchhoff y acuérdese que

$$\begin{array}{rll} V = & Ri & \text{ley de Ohm} \\ i = & C\frac{dV}{dt} & \text{condensador} \\ V = & L\frac{di}{dt} & \text{inductancia} \\ V_+ & = V_- & \text{en la entrada del AmOp} \end{array}$$

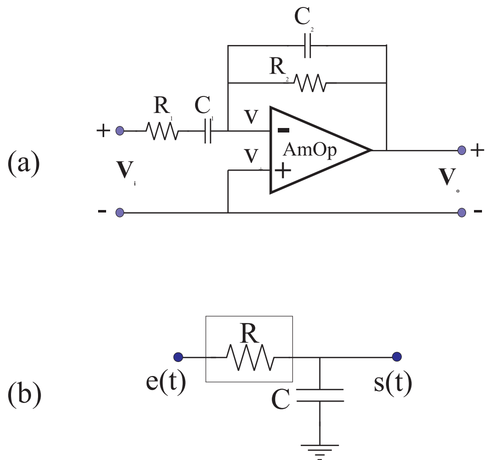


Figura 1.16: *a) Circuito con AmOp b) Circuito RC con componente No Lineal*

Linearización

1. El sistema de la figura 1.16, es un filtro pasa baja, donde $e(t), s(t)$ son voltaje de entrada y salida respectivamente. (a) Considere una resistencia constante R y encuentre la ecuación diferencial del sistema. (b) Calcule la función de transferencia del filtro. (c) Suponga que ahora la resistencia es no-lineal; Si la diferencia de voltajes entre sus bornes, fuese Δv, entonces $R = \Delta v^{-1}$. Considere que la entrada y la salida son perturbadas en torno a una condición de equilibrio (e_o, s_o) $(d/dt = 0)$, de forma que

   $$e(t) \rightarrow e_o + \epsilon(t) \qquad s(t) \rightarrow s_o + \gamma(t)$$

   (d) Escriba la ecuación diferencial entre $\epsilon(t)$ y $\gamma(t)$, despreciando los términos cuadráticos en las perturbaciones, bajo la hipótesis que $\epsilon \ll e_o$ y $\gamma \ll s_o$. (e) Si llamamos $K = (e_o - s_o)$, encuentre la constante de tiempo del sistema. (c) Cuál es el orden del sistema ??.

2. El estanque cónico de la figura 1.17 a) recibe un caudal de agua $q(t)$ y evacúa a través del orificio inferior a una tasa $q_R(t)$. Suponga que el estanque está funcionando en régimen estacionario donde

la altura de líquido es h_0, y el volumen es V_0. Encuentre la ecuación diferencial que gobierna la variación de volumen del estanque. Esta es una ecuación **no lineal**. Si Ud. quiere estudiar el comportamiento del sistema frente a perturbaciones de altura $h(t) = h_0 + h_\epsilon(h_\epsilon \ll h_0)$, y de caudal de entrada $q(t) = q_0 + q_\epsilon(q_\epsilon \ll q_0)$ debe linealizar las ecuaciones. Encuentre la función de transferencia del sistema. Dibuje el diagrama de bloque, considerando las perturbaciones como entradas adicionales al sistema.

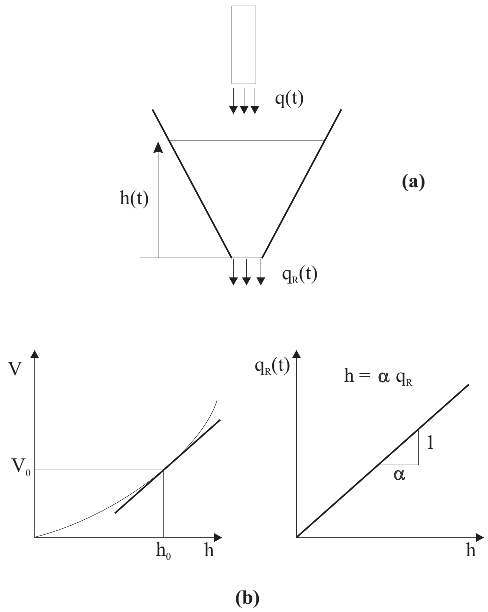


Figura 1.17: *a) Estanque cónico b) Curvas características*

1.6. Energía y Potencia de una Señal

Cualquier transmisión de información está ligada a una transmisión de energía. Cuando se realiza una medición de una variable, el sistema medido sufre una pérdida de energía, provocada por el dispositivo de medición.
Así, la energía de una señal es un concepto importante, que puede ser descrito o representado ya sea en el tiempo o en frecuencia.

1.6.1. Concepto de energía

Sea $s(t)$ una señal (Real o Compleja) que transporta una cierta cantidad de energía. Si $s(t)$ es compleja, $s(t) = a(t) + j\,b(t)$.

De manera general la energía de esta señal será

$$E_s = K \int |s(t)|^2 \, dt$$

Donde K es un factor de normalización que depende del tipo de señal.
Por ejemplo, suponga un circuito eléctrico simple: una resistencia R en cuyos extremos se aplica una diferencia de potencial o tensión $v(t)$, que a su vez hace transitar una corriente $i(t)$ por R. Aquí la señal de interés puede ser la corriente $i(t)$ o el voltaje $v(t)$. La energía es asociada a cada una es

$$\begin{aligned} E_i &= R \int |i(t)|^2 \, dt \\ E_v &= \frac{1}{R} \int |v(t)|^2 \, dt \end{aligned}$$

Suponga ahora una onda acústica propagándose en un medio fluído de densidad en reposo ρ_0 y velocidad del sonido c. Si $p(t), u(t)$ corresponden a las fluctuaciones de presión y velocidad asociadas al paso de la onda, entoces la energía acústica es

$$E_a = \int p(t)u(t) \, dt = \rho_0 c \int |u(t)|^2 \, dt = \frac{1}{\rho_0 c} \int |p(t)|^2 \, dt$$

La misma nomenclatura aparece para una onda electromagnética propagándose en un medio de impedancia Z_0,

$$E_{em} = \frac{1}{Z_0} \int_s |\mathbf{E}(t)|^2 \, dt$$

Donde el subíndice s indica que es la energía que atraviesa las superficies perpendiculares al vector de Poynting [3].

Energía de interacción

La energía puede ser escrita como la integral del producto de dos cantidades físicas. En forma general, para dos señales $x(t), y(t)$ la energía se escribe

$$E_{xy} = \int x(t)y^*(t) \, dt$$

Donde * indica complejo conjugado. En el caso de la resitencia tenemos

$$E_R = \int v(t)i^*(t) \, dt$$

que correpsonde a la energia disipada en R.
Así la energía de una sola señal puede entenderse como la energía de interacción entre ella misma.

1.6.2. Energía en frecuencia

En teoría de señales, el teorema de Parseval [?] entrega una equivalencia entre la representación energética de una señal en el espacio directo (t) y en el espacio de frecuencias o de Fourier (ν).

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu$$

Si aplicamos el teorema de Parseval a la energía de interacción entre $x(t), y(t)$, tenemos

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) Y^*(\nu) \, d\nu$$

Donde $X(\nu)$ e $Y(\nu)$ son las transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente.
Esta representación permite calcular la energía, o el contenido energético de una señal, en ambos espacios.

1.6.3. Concepto de Potencia

La potencia es la energía por unidad de tiempo. Sin embargo se puede monitorear la potencia en función del tiempo, a condición de definir previamente la potencia instantánea.
En regla general, uno va a evaluar la *potencia promedio* en un intervalo de tiempo T, que en general corrresponde al tiempo de respuesta del aparato de medición.

Potencia instantánea

Dada una señal $x(t)$, la potencia instantánea es

$$P_x(t) = |x(t)|^2$$

Con lo cual la energía es

$$E_x = \int |x(t)|^2 \, dt = \int P_x \, dt$$

De igual forma, la potencia instantánea de interacción es

$$P_{xy}(t) = x(t) y^*(t)$$

Para obtener la potencia promedio en un intervalo de duración T, tenemos

$$P_x(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P_x(t) \, dt$$

A veces es preferible utilizar una definición simétrica [?]

$$P_{Sx}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

Para obtener la potencia promedio general, tenemos

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt$$

También se puede usar la definición simétrica anterior.

Note que cuando posee una señal cuya energía es finita, que es el caso de señales transitorias, tenemos

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt \quad \text{finita}$$

Así que la potencia promedio P_x es cero.

Ud. se dará cuenta que si tenemos una señal *periódica* su energía es infinita, son señales no localizadas en el tiempo. Sin embargo, su potencia promedio es finita.

1.6.4. Densidad espectral de energía [EED] y potencia [PSD]

Así como la potencia instantánea está distribuída en el tiempo, las relaciones de Parseval [2] permiten entender cómo está distribuída la energía en el espacio de frecuencias.

Señales transitorias

El término *densidad espectral de energía* (EED) se usa para SEÑALES TRANSITORIAS [2], cuyo espectro es continuo, pero que tienen una *potencia* constante (finita).

Las señales periódicas, poseen potencia promedio finita, pero su energía es infinita.

En términos de energía, una señal posee una EED de la forma

$$S_x(\nu) = |X(\nu|^2 \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu)\,d\nu \quad \text{caso de una señal}$$

Para el caso de interacción,

$$S_{xy}(\nu) = X(\nu)Y*(\nu) \Rightarrow E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\nu)\,d\nu \quad \text{dos señales en interacción}$$

Entienda en el espacio de Fourier, el eje de frecuencias va $\nu \in (-\infty, +\infty)$, así que podemos calcular, por ejemplo, la densidad espectral de energía, asociada a una *banda de frecuencias* B.

$$S_x(\nu, B) = \frac{1}{B}\int_{\nu-B/2}^{\nu+B/2} S_x(\nu)\,d\nu$$

Señales periódicas

Cuando la señal posee potencia promedio finita y energía infinita (las relaciones de Parseval diverjen), debemos considerar la repartición de potencia en función de la frecuencia, lo que nos lleva a la densidad espectral de potencia, PSD.
Una definición corriente para la PSD es tomar el cuadrado del módulo de la transformada de Fourier de la señal temporal y normalizarla por una constante apropiada.
Si tenemos una señal $x(t)$ de energía infinita, podemos llevarla a energía finita si troncamos la señal en un intervalo temporal. Usemos la función ventana cuadrada, definida con la ayuda de 2 funciones de Heaviside

$$Sq_T(t) = \Theta(t - t_0) - \Theta(t - t_1) \qquad T = (t_1 - t_0)$$

$Sq_T(t)$ vale 1 en el intervalo de duración T, así, definimos una señal a energía finita, $x_T(t)$,

$$x_T(t) = Sq_T(t)x(t)$$

La densidad espectral de potencia se obtiene al tomar el límite,

$$S_x(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X(\nu)|^2$$

Donde $X(\nu)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$.
Los equipos de medición que estiman la PSD lo hacen considerando T muy grande, con lo cual la diferencia entre EED y PSD se reduce a un factor constante: 1 o T^{-1}.

1.6.5. Correlación

El concepto de correlación entre dos señales (distintas o iguales) está directamente ligado con las densidades espectrales.

Correlación

El proceso de correlación consiste en comparar la senal $x(t)$ con copias **retardadas** de ella misma (u otra señal diferente, en cuyo caso se denomina intercorrelación). Ello conduce a la noción de *retardo*.
[**i**] Si $x(t)$ es una señal transitoria a energía finita, la correlación es

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)\, dt$$

Donde τ es la variable de retardo.
Claramente $C_x(\tau)$ tiene dimensiones de energía, y si tomamos $\tau = 0$, obtenemos la energía de la señal $x(t)$.

[ii] Si $x(t)$ es una señal periódica a potencia promedio finita, la correlación es

$$C_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t-\tau)\,dt$$

$C_x(\tau)$ es ahora una potencia y $C_x(0)$ es la potencia promedio.
En general se cumplirá la desigualdad de Schwartz [2] que nos dice que

$$|C_x(\tau)| \leq C_x(0)$$

La correlación a retardo nulo es máxima.

Ejercicio-Correlación

1. Considere una señal periódica $x(t)$ y demuestre que $C_x(\tau)$ es también periódica.

$$x(t) = a\cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$$

2. Demuestre, en forma rigurosa, que para señales periódicas $x(t)$ a potencia promedio finita, se cumple

$$S_x(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X(\nu)|^2$$

   Use el teorema de Parseval.

3. En Matlab:

Intercorrelación

Para dos señales $x(t)$ e $y(t)$ tenemos
[i] Para señales transitorias a energía finita

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)\,dt$$

[ii] Para señales periódicas a potencia promedio finita

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(t)y^*(t-\tau)\,dt$$

La intercorrelación es extremadamente útil para encontrar los retardos entre dos señales. Si Ud. supone que

$$y(t) = x(t-\tau_0) \quad \Rightarrow \quad C_{xy}(\tau) = C_{xx}(\tau-\tau_0)$$

Con ello, como el máximo de de correlación se encuentra para $C_{xx}(0)$ entonces Ud. puede encontrar ese retardo, osea $\tau = \tau_0$. Aquí la notación C_x es lo mismo que C_{xx}.
Al usar las relaciones de Parseval [2] para la intercorrelación se accede a otra manera para calcularla.

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\nu\tau} X(\nu) Y^*(\nu)\, d\nu$$

La cross-correlación o intercorrelación es la transformada de Fourier inversa de la PSD de interacción, que constituye la relación de Wiener-Khintchine [?].

Ejercicio-intercorrelación

1. Usando los resultados del ejercicio anterior, demuestre que la transformada de Fourier de la función de correlación $C_x(\tau)$, es la densidad espectral de potencia PSD.

2. En Matlab: Genere un eje temporal t, luego una onda correspondiente un pulso cuadrado unitario de duración a, $x_a(t - t_1)$ y otro de igual duración pero partiendo en t_2, $y_a(t - t_2)$. Calcule la intercorrelación $C_{xy}(\tau)$ numéricamente, y encuentre el retardo entre ambos pulsos. Para ello puede utilizar la función XCORR de Matlab. Grafique C_{xy} versus retardo τ.

3. En Matlab: Idem al ejercicio anterior, pero esta vez calcule C_{xy} usando la relación de Wiener-Khintchine. Para ello use la función FFT de Matlab. Debe encontrar el mismo valor para el retardo.

1.7. Probabilidad y Estadística

Considere dos grandes grupos de observables o procesos físicos, P_x, P_y. Cada uno de ellos estará representado por muchas realizaciones del observable, denominadas $x_k(t), y_k(t)$. Estos eventos indexados por la variable k son series temporales.
$x_k(t)$ podría ser la energía cinética de la k-èsima bolita de acero (de una série de N bolitas fabricadas) cayendo dentro de un líquido desde una altura dada en función del tiempo. $y_k(t)$ podría ser la energía cinética para el caso de la k-ésima piedra (recogida de un río) cayendo en un recipiente de similares características (líquido, altura).
Está claro que N realizaciones (curvas) $x_k(t)$ van a entregar un resultado similar entre ellas. Lo mismo para N realizaciones de $y_k(t)$.
Uno se puede preguntar: Existe o no una **relación** entre los grupos de observables P_x y P_y ?. Es una pregunta con sentido, ya que para ambos observables hay sólo (en promedio) un cambio de forma en el cuerpo.

1.7.1. Promedios de Ensemble y PDF

Si existe una relación entre P_x y P_y, entonces existe un coeficiente a, tal que a un instante dado t_0, las realizaciones de P_x, y P_y se superponen o más bien, se asemejan bastante.
Considerando una pareja de realizaciones $[x_k(t_0), y_k(t_0)]$, el coeficiente a se define según la relación lineal

$$x_k(t_0) - a y_k(t_0) = \epsilon_k(t_0) \qquad \text{mínimo}$$

Si calculamos el promedio (media aritmética) para todos los pares de realizaciones k, tenemos

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_0) - a\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k(t_0) = \epsilon(a, t_0) \qquad \text{mínimo}$$

Si N es muy grande, $\epsilon(a, t_0) \to 0$ con lo cual

$$a(t_0) = \frac{\langle x(t_0)\rangle}{\langle y(t_0)\rangle}$$

y este promedio $\langle\rangle$ significa que es un promedio sobre todas las realizaciones N, o **promedio de ensemble**.
Este promedio de ensemble dá origen al concepto de *esperanza matemática* o *valor esperado*. Si $N \to \infty$, entonces, la esperanza matemática de $x(t_0)$ es $m_x = E[x(t_0)]$,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_0) = m_x$$

Esto dá origen, a su vez, al concepto de **Probabilidad**: Si los valores de $x_k(t_0)$ observados son divididos en intervalos iguales Δx, la variable $x_k(t_0)$ podrá tomar valores que son múltiplos de Δx. La probabilidad que esta variable alcance el valor $m\Delta x$ es

$$Prob[m\Delta x < x_k(t_0) \leq (m+1)\Delta x]$$

Con ello

$$E[x(t_0)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\Delta x \cdot Prob[m\Delta x < x_k(t_0) \leq (m+1)\Delta x]$$

O simplemente

$$E[x(t_0)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\Delta x \cdot P(m)$$

Esta definición origina el concepto de Función de Densidad de Probabilidad de primer orden (En inglés, PDF, Probability Density Function).

Densidad de probabilidad de 1^{er} orden

La noción de probabilidad aparece cuando $\Delta x \to 0$. Por definición, la probabilidad que una variable aleatoria X tome valores comprendidos entre x y $x + dx$ es $p(x)\,dx$; Donde $p(x)$ es la densidad de probabilidad.

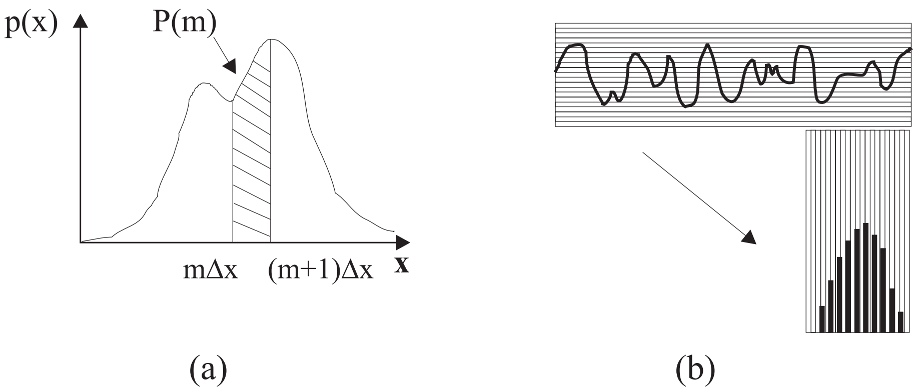


Figura 1.18: *(a) Función densidad de probabilidad. (b) Ilustración de la función densidad de probabilidad con un histograma*

La probabilidad que $x(t_0)$ esté comprendido entre $m\Delta x$ y $(m+1)\Delta x$ es simplemente (Figura 1.18 (a)),

$$\int_{m\Delta x}^{(m+1)\Delta x} p(x)\,dx = P(m)$$

La función de densidad de probabilidad es siempre normalizada, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

Esto se explica así: En una caja de dimensiones (a, b, c) hay una partícula (se mueve) que no puede salir de ella. La probabilidad de encontrar la partícula en una región del espacio (dentro de la caja) es $p(\mathbf{r})dx\,dy\,dz$.
Si integramos en toda la caja, la probabilidad de encontrar la partícula debe ser 1

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} p(\mathbf{r})\,dx\,dy\,dz = 1$$

En la figura 1.18 (b) se ilustra la noción de función de densidad de probabilidad. Imagine que cada línea horizontal del gráfico izquierdo es un hilo donde hay bolitas. La curva negra es construida por una serie de bolitas seguidas. Luego lo gira en 90 grados, y las bolitas se deslizan y acumulándose en la base del gráfico. Esto indica que allí donde hay más bolitas el valor de la función (curva negra) es más probable. Esta curva se denomina **histograma**.

Ejercicio-PDF1D

[1] El programa en Matlab listado a continuación, es una función que calcula la PDF de una serie de datos de manera eficiente. Escriba el código en un archivo cuyo nombre debe ser $Pdf1D.m$ y ejecútelo sobre una serie temporal dada. Los símbolos % indican comentarios en Matlab. [pdf,$axis$] corresponden a la PDF y al eje de variación de ella. [$Data$, $bins$] son la série de datos y el número N de casilleros en los que Ud. divide los valores observados de la série de datos(típicamente $bins = 100, 200$ etc.)

```
%*****************************************************************
% Routine: [pdf,axis] = Pdf1D(Data, bins)
% Compute The 1D Normalized Histogram (PDF) of Data with arbitrary Bins
% rhp 1996
%******************************************************************

function [pdf, axis] = pdf1D (Data, bins)
AVG = mean(Data); SDEV = std(Data);
Data = (Data - AVG)/SDEV;
ma = max(Data); mi = min(Data);
delta = (ma-mi)/(bins-1);
pdf = zeros(1,bins);
for i=1:length(Data),
j = floor( bins - (bins - 1)*((ma-Data(i))/(ma - mi)) );
pdf(j) = pdf(j) + 1.0;
end;
axis = mi:delta:ma;
C = trapz(pdf)*delta;        % pdf normalization using Trapezoidal Rule
pdf = pdf/C;

%***End of Program ****************
```

Densidad de probabilidad de 2^o orden

La probabilidad que la variable aleatoria $x(t)$ se encuentre (mida) entre x_1 y $x_1 + dx_1$ en el instante t_1 y que en el instante t_2 se encuentre entre x_2 y $x_2 + dx_2$ es por definición

$$p(x-1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

La probabilidad que $x_1(t_1)$ esté entre a_1 y b_1 y que x_2 esté entre a_2 y b_2 es

$$P[a_1 < x_1(t_1) < b_1; a_2 < x_2(t_2) < b_2] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} p(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_1{}^{\circ}, dx_2$$

Y así como en el caso de 1^{er} orden, la esperanza matemática queda definida, por ejemplo para el producto $x_1 \cdot x_2$, como,

$$R[x_1(t_1) \cdot x_2(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

Si se trata de dos procesos distintos $x(t)$ e $y(t)$, hablamos de probabilidad conjunta,
De igual forma, se pueden considerar densidades de probabilidad de orden superior, lo cual informa aún más sobre la naturaleza de un proceso aleatorio.

Ejercicio-PDF 2D

[1] Escriba un programa en Matlab, similar al código anterior, que sea capaz de encontrar la PDF conjunta (de 2^o orden), sobre dos series de datos diferentes. La representación de la PDF conjunta es un gráfico en dos dimensiones, un contorno. Para ello use la función CONTOUR de Matlab.

1.8. Detección de señales

Las aplicaciones de la función de correlación y de las densidades espectrales (energía o potencia) son super útiles cuando se quiere detectar, extraer, medir señales, por ejemplo periódicas, sumergidas en un ruido. También es posible, a través de estas técnicas, reducir el ruido y aumentar así la razón señal/ruido de una medida experimental.
Antes de entrar en materia, comenzaremos una descripción de los tipos de ruido más comunes presentes en señales.

1.8.1. Ruido

El ruido así como fluctuaciones aleatorias y no correladas, es el ingrediente presente siempre en un proceso de medición. Mientras más ruido hay presente en una medida, menor será la precisión que tenemos sobre ella. En general se desea realizar la medida con máxima precisión posible, lo cual nos lleva a maximizar nuestra señal con respecto al ruido presente en ella. Así, aparece el concepto de razón señal-ruido o signal-to-noise ratio en inglés, S/N.

Algunos tipos de ruido

Ruido térmico o thermal noise: También denominado ruido Johnson o ruido Nyquist, el ruido térmico es causado por la agitación de los portadores de carga en conductores, resistencias, detectores de fotones, condensadores y celdas eletroquímicas. Su origen proviene de las fluctuaciones térmicas de la densidad de electrones dentro del conductor. En la formulación, atribuída a Harry Nyquist en 1928, se supone una resistencia ideal que contiene un generador interno que causa una fem fluctuante en los terminales de ésta. Como para cualquier variable de promedio nulo, se expresa como el promedio cuadrático del voltaje (o también podría ser rms: root mean square),

$$\langle v^2 \rangle = 4kTR\Delta f$$

Donde k, T, R corresponden a la constante de Boltzmann ($k = 1{,}3807 \times 10^{-23} JK^{-1}$), la temperatura absoluta en K, y la resistencia e Ω respectivamente. Δf es el ancho de banda o band width del detector, como si éste fuese un filtro pasa-banda. Este ruido, que existe incluso en ausencia de corriente, es independiente del material del conductor. Además es constante con la frecuencia, dentro de Δf, por lo que se parece a un ruido blanco, o un ruido cuyo espectro de potencia es plano (Espectro de una delta de Dirac). Esto es válido hasta el rango de frecuencias de las microondas. Más allá de estas frecuencias, la naturaleza cuántica de las oscilaciones aleatorias de los portadores de carga, hace necesario modificar la fórmula de Nyquist. Para minimizarlo podemos disminuir la temperatura T, enfriando los componentes electrónicos. Típicamente, los detectores UV-visible, se enfrían hasta 77 K con nitrógeno líquido. También es posible reducir la resistencia R. Observe que Δf, el ancho de banda del detector que está midiendo este ruido molesto, y es inversamente proporcional al tiempo de respuesta de éste. Así, mientras más lento responde el detector, menor será el ruido térmico, pues Δf será más angosta (Amplificador selectivo).

Ruido Shot o Shot noise: Otro tipo de señales aleatorias y ruidosas, se deben a fluctuaciones de corriente i_{sh}. Típicamente, aparece en diodos, diodos Zener, resistencias calientes y descargas de gas en tubos. Este ruido obedece a la naturaleza cuántica, de los portadores de carga, por ejemplo electrones. Ocurre cuando se establece un flujo de electrones a través de una unión o contacto (junction en inglés). La tasa a la cual la corriente fluye por el contacto, depende de fluctuaciones estadisticas, como se aprecia en la ecuación siguiente.

$$\langle i_{sh}^2 \rangle = 2 i_{dc} e \Delta f \qquad \text{Fórmula de Schottky}$$

Donde i_{dc} es la corriente promedio, e la carga del electrón y Δf es el ancho de banda del detector. Este ruido es Gaussiano e independiente de la frecuencia desde pocos kHz hasta cientos de MHz. Los componentes típicos donde se manifiesta son uniones en fotoceldas, uniones semiconductors p-n en diodos y transistores y en algunas fuentes luminosas (hollow cathode lamps). Al igual que el ruido térmico, es un ruido blanco (no depende de la frecuencia).

Ruido Flicker (f) o Flicker noise: Si bien los ruidos anteriores no dependen de la frecuencia, es decir, son no correlados con la frecuencia, el ruido Flicker si depende de la frecuencia f. Su magnitud es inversamente proporcional a la frecuencia observada, $\propto 1/f$. Claramente domina el espectro a bajas frecuencias y es super molesto. A veces se le denomina ruido $1/f$ o ruido rosado. En general, se origina por fluctuaciones de resistencia en un conductor por donde transita una corriente (u otro componente) y su expresión detallada es,

$$\langle v \rangle^2 = A R^2 i^2 \Delta f / f$$

Donde A es una constante sin dimensiones (10^{-11} para carbón), R es la resistencia, i la corriente, Δf el ancho de banda del detector, y f la frecuencia a la cual el detector de ruido es sintonizado.

Ruido ambiente o Environmental noise: Como su nombre lo indica, se origina en el ambiente. Un ruido típico de éstos son las oscilaciones o fluctuaciones de voltaje de alimentación de 50 Hz. Tenga en cuenta que los ascensores, motores eléctricos, ondas de radio y TV etc, tránsito de vehículos, son fuentes de ruido ambiental.

Todos estos ruidos son incoherentes, y el ruido total de un sistema (en rms) es la raíz cuadrada de la suma $\sum$ de los cuadrados de todos ruidos presentes.

Derivación de fórmula de Nyquist

Tarea

1.8.2. Cómo incrementar S/N

Aquí presento algunas recetas para aumentar la razón señal-ruido S/N.

[**1**] Lo primero es aislar eléctricamente (y contra vibraciones) el instrumento de medida, conectando su carcasa a la masa o tierra, o a través de un blindaje metálico (caja de Faraday). Así es posible reducir el efecto del ruido ambiente.

[**2**] Suponga que usa amplificadores de instrumentación (no de potencia), para amplificar una señal muy pequeña. En general usará el amplificador junto con un sensor o transductor para medir la señal. Los amplificadores de instrumentación (SR 560) son diseñados en base a amplificadores operacionales (AmOp) para permitir que la ganancia en la primera etapa de amplificación pueda ajustarse usando una resistencia variable o potenciómetro. Así entregan un rechazo al modo común (CMRR, common mode rejection ratio) alto, antes de entrar a otras etapas de amplificación. Así el ruido es estadisticamente eliminado en lugar de amplificarlo junto con la señal.

[**3**] Puede usar filtros análogos (RC) para filtrar la señal de interés, siempre y cuando el contenido frecuencial de la señal que a Ud. le interesa, no se vea filtrado. Por ejemplo un filtro pasa alta, podrá eliminar el ruido $1/f$, sin embargo Ud. eliminará el contenido dc de su señal, es decir el voltaje continuo (dc), y puede ser que a Ud. le sea fundamental.

[**4**] Puede usar filtros digitales para eliminar ruido. Estos filtros usan la transformada de Fourier para convertir la señal desde el dominio temporal al de frecuencias. Luego en el espacio de frecuencias Ud. puede multiplicar el espectro por la función de transferencia transformada de un filtro adequado. Esto es lo mismo que convolucionar en el tiempo la señal con la función de transferencia temporal del filtro. Esto puede aumentar significativamente la razón S/N.

[**5**] Otra manera es modular la señal de interés, $s(t)$, si un filtro no tuviese efecto. Modular la señal $s(t)$ por una señal portadora $p(t)$ de alta frecuencia, significa multiplicar, es decir, la señal resultante es $r(t) = s(t)p(t)$. Al pasar al espacio de Fourier, el contenido espectral de la señal $s(t)$ estará ubicado en torno a la frecuencia de la portadora. Luego puede filtrar pasa baja $r(t)$ y así eliminar el ruido de baja frecuencia, por ejemplo, el ruido $1/f$. Para volver al espacio temporal, la señal $r(t)$ es demodulada. Así Ud. se libra fácilmente del ruido de baja frecuencia. Esto se realiza, generalmente, con un amplificador Lock-In.

[**6**] Otra manera de aumentar S/N frente a ruido no correlado, es realizar Promedios de Ensemble. Esto es eficiente cuando el ruido es aleatorio. Se adquiere un conjunto de señales $s_N(t)$, representativas de un conjunto de N experimentos idénticos y luego se promedian.

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} s_i(t)$$

Cada señal contendrá ruido, sin embargo, el ruido en cada señal $s_i(t)$, que denominaremos $b_i(t)$, no estará correlado, es decir que la correlación entre dos series de ruido, i, j, será típicamente nula,

$$C_{ij}(\tau) = \int_{t_i}^{t_f} b_i(t) b_j(t-\tau) dt \sim 0$$

Si t_i, t_f son muy grandes, $C_{ij}(\tau) \to 0$. Así, en promedio, el ruido se cancelará y con él, todo aquello que no esté correlado, o que sea incoherente. La razón señal-ruido será proporcional a $\sqrt{N}$.
[**7**] Uso de Promedios Boxcar. Este es un tipo de promedio deslizante y está relacionado al anterior. Es una manera de realizar un promedio móvil sobre una serie de datos, de manera de ir alisando progresivamente intervalos consecutivos de la señal original. Su desventaja es deformar excesivamente los eventos de interés presntes en la señal.

1.8.3. Detección por auto-correlación

El uso de la función de auto-correlación, puede ayudar bastante a extraer una señal de interés periódica $p(t)$ (desconocida) sumergida en un ruido $b(t)$. Supongamos que ambas poseen promedio nulo, es decir, se les sustrajo la componente dc.
Sea la señal resultante $r(t) = p(t) + b(t)$, así, su inter-correlación es

$$C_{rr}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) + b(t)][p(t-\tau) + b(t-\tau)]\, dt$$

Como la inter-correlación es una operación distributiva,

$$C_{rr}(\tau) = C_{pp}(\tau) + C_{bb}(\tau) + C_{pb}(\tau) + C_{bp}(\tau)$$

Si el ruido es *independiente* de la señal, los términos $C_{bp}(\tau)$ y $C_{pb}(\tau)$ son nulos. Evidentemente, para una medida experimental, el tiempo de integración T no es jamás infinito, con lo cual dichos términos no son exactamente nulos, sino que muy pequeños.
La función de auto-correlación del ruido, $C_{bb}(\tau)$ tiende a cero cuando $\tau \to \infty$. Si τ es grande, incurriremos en un pequeño error de estimación adicional. Asi es que esos tres términos pueden representarse por une error de estimación dado por $\epsilon(\tau)$. Así, nuestra función de auto-correlación será

$$C_{rr}(\tau) = C_{pp}(\tau) + \epsilon(\tau)$$

Mientras más grande sea nuestra ventana de integración T, menor será $\epsilon(\tau)$.
En resumen, este método permite encontrar o extraer la señal $p(t)$ sumergida en el ruido. Sin embargo, cuando la señal $p(t)$ posee varias componentes espectrales, dado que la auto-correlación entrega valores cuadráticos de las componentes espectrales de la señal de origen, se pierde toda información de la fase relativa entre dichas componentes. Evidentemente esto no ocurre cuando la señales una sinusoide pura.

Ejercicio–Rudio

[1] En Matlab, genere una serie temporal $b_n(t)$ correspondiente a un ruido cuya función de distribución es Gaussiana (RANDN). Luego genere una serie de ruido $b_u(t)$, cuya función de distribución es uniforme (RAND). Calcule la auto-correlación de cada ruido y grafíquela. Luego calcule la inter-correlación $C_{b_n,b_u}(\tau)$ y grafíquela. Explique los valores máximos de las correlaciones así como los retardos asociados.
[2] En Matlab, calcule y luego grafique los hstogramas de series de ruido largas, creadas con RAND y RANDN. A partir de los gráficos, que tipo de distribución observa ?.
[3] En Matlab, genere una señal sinusoidal $x(t) = cos(2\pi\nu_o t)$. Suponga que ha realizado N mediciones de $x(t)$ pero están sumergidas en un ruido $b(t)$ Gaussiano o Normal. En un ciclo FOR simule las N realizaciones de $x(t)$ (unas 500), que llamará $r_k(t) = x(t) + b_k(t)$, es decir, cada medición posee un ruido no correlado con las demás. Una vez que tenga las N realizaciones de $r_k(t)$, efectue promedios de ensemble sobre n de las N realizaciones, $\langle r\rangle_n(t)$ donde $n = 1, 2, 3...k, ..N$. A medida que $n \to N$, el promedio de ensemble se parecerá cada vez más a la señal $x(t)$, es decir $\langle r\rangle_n(t) \to x(t)$. Esto porque las series de ruido estarán in-correladas entre ellas (salvo a retardo nulo, $\tau = 0$). Para cada $\langle r\rangle_n(t)$ calcule la inter-correlación con $x(t)$ y construya un gráfico para el máximo de inter-correlación y el número n de promedios. Luego, calcule la diferencia de energía de las señales

$$E_n = \int |x^2(t) - \langle r\rangle_n^2(t)| dt$$

Grafique E_n versus n en un gráfico lineal y luego en uno LOG-LOG. En el gráfico LOG-LOG obtendrá una recta. Que quiere decir que sea una recta ?. Calcule la potencia del ruido $C_{bb}(0)$ en función de n.

La identificación de un evento particular en una serie de datos muestreada en el tiempo, puede servir como **patrón** de búsqueda de otros eventos similares que ocurrieron en la misma serie temporal. Si además dicha serie temporal ha sido adquirida en forma simultánea con otra serie, por ejemplo velocidad y presión en un flujo, entonces es posible obtener información de la segunda serie a través de estadísticas condicionadas a la aparición del patrón de la serie principal.

1. Indentificamos y luego aislamos, arbitrariamente, un motivo $s_p(t)$ (periódico o no) que contiene ruido. Su largo temporal es ζ, y se encuentra en la señal $s(t)$. Dicho motivo representa una estructura coherente $s_p(t)$.

2. Podemos calcular la correlación cruzada

$$\Gamma(\tau) = \int_t^{t+\zeta} s_p(t)s(t+\tau)dt$$

deslizando $s_p(t)$ sobre la señal $s(t)$.

3. Todos los motivos locales en $s(t)$ para los cuales $\Gamma(\tau)$ sea máxima (de hecho $\Gamma(\tau) > \Gamma_c$) y además aquellos cuya norma sea similar al motivo de búsqueda $s_p(t)$, son promediados coherentemente, obteniéndose el motivo promedio $\langle s_\zeta \rangle$.

El resultado es un modelo representativo de un patrón promediado coherentemente en el tiempo. Este podrá servir como evento condicionador para estadísticas sobre otras señales adquiridas simultáneamente con $s(t)$.
Además, dicha técnica puede ser adaptiva cuando el patrón de búsqueda es promediado sistemáticamente con los motivos o eventos similares encontrados en la señal $s(t)$.
En teoría de procesamiento de señales esta técnica se denomina AN OPTIMAL LINEAR FILTER [2].

Bibliografía

[1] Taneda S.*Visual Study of Unsteady Separated Flows Around Bodies.* Progr. Aerosp. Sci., Vol. 17, pp. 287–348.(1977).

[2] Papoulis A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw Hill, New York, (1965).

[3] Jackson J.D. *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, 3rd Ed., New York, (1999).

[4] Adrian, R. J., and Fingerson, L. M., ”*Laser Anemometry: Theory, Practice and Applications*, p. SE 9/18, TSI, Inc., St. Paul, 1977.

[5] Ahmed, S. *Analogue and digital electronics for engineers. An introduction*, University Press, Cambridge, segunda edición, 1984, página 148.

[6] Aplication Note de la página de microchip, http://www.microchip.com/Download/Appnote/ Category/17CXX/Motion/30602A12.pdf ”*DC Servo Motro Control Application Brief*”, 1998.

[7] Auvray, J., *Electronique des signaux analogiques*, Universidad de Dunod, Colección de Universidad de Dunod, serie electrónica, electrotecnia, automática. Paris 1980, pág 149-156.

[8] Boylestad, Robert L., Nashelsky, Louis, *Electrónica: Teoría de circuitos*, Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., sexta edición, 1997, Capítulo 11.

[9] Freymuth, P., *Frecuency Response and Electronic Testing for Constant-Temperature Hot-Wire Anemometers*, J. Phys. E, vol 10, pp. 705-710, 1977.

[10] Freymuth, P., *Noise in Hot-Wire Anemometers*, Rev. Sci. Instrum., vol 39, pp. 550-557, 1968.

[11] Freymuth, P., and Fingerson, L. M., *Electronic Testing of Frecuency Response for Thermal Anemometers*, TSI Q., vol. 3, pp. 5-12, 1977.

[12] Frenkiel, F. N. *Etude Statistique de la turbulence, Une mesure de la turbulence avec un fil chaud non-compense, 2 Influence de la longueur d'un fil chaud compense sur la mesure de la turbulence*, O.N.E.R.A. Rapp. Tech. 37, 1948.

[13] Goldstein, Richard J., *Fluid Mechanics Measurements*,Hemisphering Publishing Corporation, (1983).

[14] King, L. V., *On the Convection of Heat from Small Cylinders in a Stream of Fluid Determination of the Convection Constants of Small Platinum Wires, with Applications to Hot-Wire Anemometry*, Proc. R. Soc. London, vol. 90, pp. 563-570, 1914.

[15] Malvino, Albert *Principios de electrónica*, ed. Madrid: McGraw-Hill, 1994.

[16] Manual TSI, *Hot Wire/Hot Film Anemometry Probes & Accesories*, 1983.

[17] Kerker, M., *The Scattering of Light*, chap. 3, Academic, New York, 1969.

[18] *Página Web de Microchip, PICs de la línea 17* http://www.microchip.com/10/Lit/PICmicro /17C75X/index.htm

[19] Perry, A. E., y Morrison, G. L., *A Study of the Constant temperature Hot-Wire Anemometer*, J. Fluid Mech vol. 47, pp. 577-599, 1971.

[20] Smits, A. J., Perry, A. E., y Hoffman P. H., *The Response of Temperature Fluctuations of a Constant-Current Hot-Wire Anemometer*, J. Phys. E: Sci. Instr. vol. 11, pp. 909-914, 1978.

[21] Smits, A. J. y Perry, A. E., *The effect of varying resistance ratio on the behaviour of constant-temperature hot-wire anemometers*, J. Phys. E: Sci. Instr. vol. 13, pp. 451-456, 1980.

[22] Thermo-Systems Inc. *Hot film and hot wire Anemometry, theory and application*,Bulletin TB5

[23] Watmuff, J. H., *An Investigation of the Constant-Temperature Hot-Wire Anemometer*, Experimental Thermal and Fluid Science; vol. 11: pp. 117-134, 1995.

[24] Watmuff, J. H., *Some Higher-order Effects in the Behaviour of Constant Temperature Hot-wire Anemometer Systems*, ASME Symposium on Thermal Anemometry, Cincinnati, Ohio, Julio 1987.

[25] Wood, N. B., *A Method for Determination and Control of the Frequency Response of the Constant-Temperature Hot-Wire Anemometer*, J. Fluid Mech 67, 769-786, 1975.

[26] Batchelor G. K. 1967. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge University Press.

[27] Béchet C. 2003. *Étude Expérimentale de la Dynamique et de l'Éclatement des Anneaux de Vorticité.* École Centrale de Lyon–Universidad de Chile, Travail de Fin d'Études.

[28] Saffman P.G. 1992. *Vortex Dynamics.* Cambridge University Press.