EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.04: Variables Aleatorios

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

Contenidos de la Clase (1)

Motivación

- Muchos procesos inherentemente aleatorios son conocidos a través de mediciones numéricas o arreglos de ellas.
- Las nociones de variable aleatoria y vector aleatorio son el formalismo introducido en probabilidades para tratar esta idea.

Variables Aleatorias (1)

- *Definición*: Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función medible desde el conjunto Ω a otro conjunto E, que habitualmente corresponde a los números reales.
- Para que esta aplicación sea **medible**, el par $(\Omega, \mathcal{F})$ debe ser medible, es decir, $\mathcal{F}$ debe incluir todos los subconjuntos abiertos de Ω.

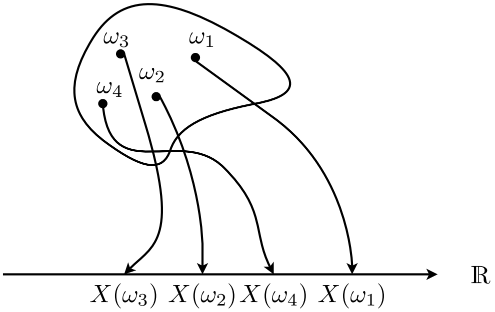
Variables Aleatorias (2)

- Una función $f : \Omega \to E$ se dice que es medible si y sólo sí, $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(E, \mathcal{E})$ son medibles, y para cada $B \in \mathcal{E}$, la preimagen de B a través de f pertenece a $\mathcal{F}$, i.e.

$$\forall\ B \in \mathcal{E}, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

- La medibilidad de una función es una característica más general que la continuidad.
- Los valores que una variable aleatoria X toma serán denominados **realizaciones** de la variable aleatoria, serán denotada en minúsculas (x).

Variables Aleatorias (3)



Variables Aleatorias (4)

- Conceptualmente, no hay mayor diferencia entre una variable aleatoria, un vector aleatorio, una secuencia aleatoria o un proceso estocástico.
- Lo que cambia es el conjunto de llegada del mapeo:
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}$: **variable** aleatoria.
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$: **vector** aleatoria.
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}^\infty$: **secuencia** aleatoria o **serie de tiempo**.
  - $X : \Omega \to$ Espacio de Funciones: **proceso estocástico**.

Variables Aleatorias (5)

- Ejemplos de espacios de funciones usados son:
  - $\mathcal{C}[a, b]$: espacio de funciones continuas en $[a, b]$.
  - $\mathcal{L}_p$: espacio de funciones continuas cuya norma p es finita:

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}. \tag{2}$$

  con $p \geq 1$.

Distribución de Probabilidad (1)

- Definición: La función **distribución de probabilidad acumulativa** de una v.a. X es una función de valores reales entre 0 y 1 definida como la medida del conjunto de nivel $\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\}$, esto es:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x\} \\ &= P(X \leq x). \end{aligned} \tag{3}$$

- Propiedades:
  1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

Distribución de Probabilidad (2)

2. $F_X(x)$ es no decreciente.
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
4. $F_X(x)$ es continua por la derecha, es decir

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} F(x + \epsilon) = F(x).$$

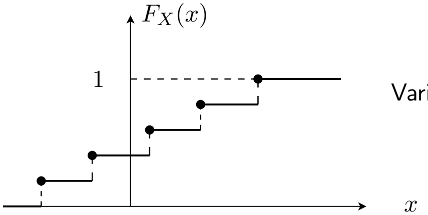
5. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
6. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

Distribución de Probabilidad (3)

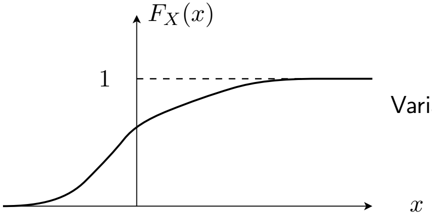
- Notar que la es necesario que X sea medible para que la función distribución esté correctamente definida:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$
$$\Rightarrow F_X(x) = P\big(X^{-1}(]-\infty, x])\big).$$

Distribución de Probabilidad (4)



Variable Aleatoria
Discreta



Variable Aleatoria
Continua

Densidades de Probabilidad (1)

- Definición: La **función de densidad de probabilidad** (f.d.p.) de una variable aleatoria continua X es la derivada de $F_X(x)$ con respecto a x:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x). \tag{4}$$

- Propiedades:
  1. $f_X(x) \geq 0$.
  2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

Densidades de Probabilidad (2)

3. $\int_a^b f_X(x)dx = P(a < X \leq b)$.
4. en general
$$P(X \in A) = \int_{x \in A} f_X(x)dx$$
5. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$.

Función de Masa de Probabilidad (1)

- Definición: La **función de masa de probabilidad** (f.m.p.) de una variable aleatoria discreta X, corresponde al equivalente a las densidades de probabilidad del caso continuo.
- La f.m.p. queda definida como

$$p_i = P(X = x_i). \tag{5}$$

- Propiedades:

1. $p_i \geq 0$.

Función de Masa de Probabilidad (2)

2. $\sum_i p_i = 1$.
3. $P(a < X \leq b) = \sum_{i:a<x\leq b} p_i$.
4. en general

$$P(X \in A) = \sum_{i \in A} p_i$$

5. $F_X(x) = \sum_{i \leq x} p_i$.

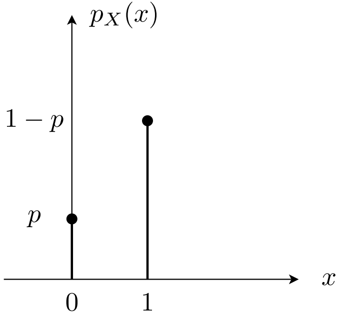
Sobre la Relevancia de las Distribuciones

- La función distribución de probabilidad es un elemento que caracteriza en forma completa el comportamiento de una variable aleatoria.
- Está siempre bien definida, porque es función directa de P.
- Aunque las nociones de densidad y función de masa son más cómodas para trabajar, no siempre se pueden definir.
- Por otro lado, las integrales habitualmente tampoco se pueden calcular en forma analítica (gaussiana por ejemplo).

V.A. Bernoulli (p)

- **Bernoulli** (p). Una v.a. Bernoulli (p) es una v.a. que toma sólo dos valores, como por ejemplo, 0 y 1 con probabilidad p y $1-p$.

  Aplicación: modela los errores introducidos por un canal binario, o los símbolos emitidos por una fuente de información binaria.



V.A. Binomial (p, n) (1)

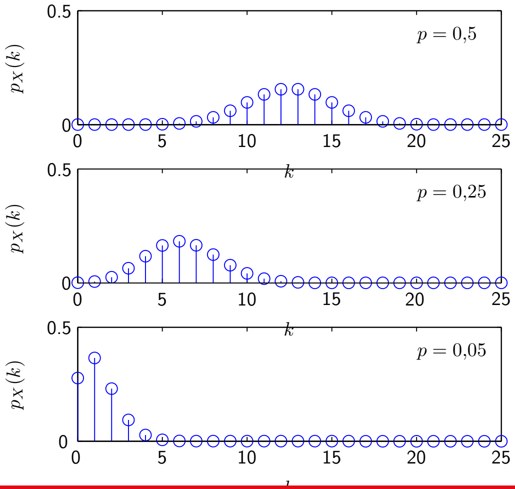
- **Binomial** (p, n). Una v.a. binomial (p, n) es una v.a. que representa n repeticiones de una v.a. Bernoulli (p).

  La f.m.p. corresponde a

$$P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

  Aplicación: Esta v.a. modela el número de bits erróneos recibidos en una transmisión, en un canal binario que comete errores con probabilidad p.

V.A. Binomial (p, n) (2)

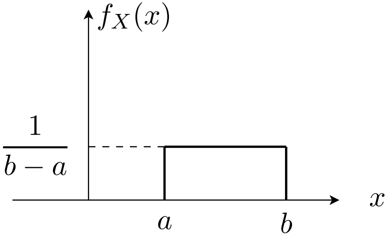


V.A. Uniforme $[a, b]$

- **Uniforme** $[a, b]$. Es una v.a. continua que toma valores no nulos en el intervalo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Su f.d.p. es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Aplicación: Esta v.a. sirve para modelar parámetros sobre lo único que se sabe es que pertenecen a un rango dado.



V.A. Gaussiana $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ (1)

- **Gaussiana** $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$. Es una variable cuya f.d.p. es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big(- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big), \; x \in \mathbb{R}.$$

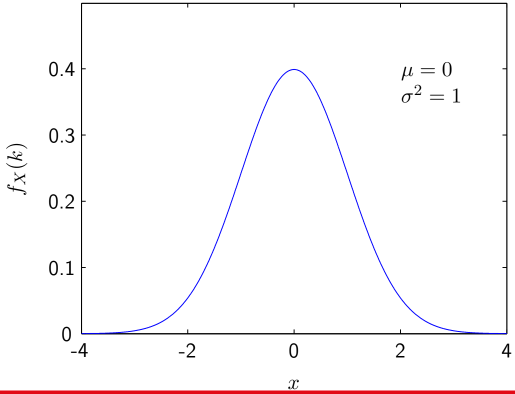
  La v.a. Gaussiana tiene dos parámetros:

  - μ: valor medio de X.
  - σ: desviación estándar de X respecto de la media μ.

  La v.a. Gaussiana $\mathcal{N}(0, 1)$ recibe el nombre de normal estándar.

V.A. Gaussiana $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ (2)

- Aparece frecuentemente en problemas de comunicaciones.
- Modela el ruido termal introducido por los equipos de comunicaciones en el canal.



V.A. Gaussiana $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ (3)

- La función acumulativa de probabilidad de una $\mathcal{N}(0,1)$ se puede expresar de dos formas:
  - La función de error $\text{erf}(x)$, que corresponde a

$$\text{erf}(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = F_X(x).$$

  - La función $Q(x)$ definida como

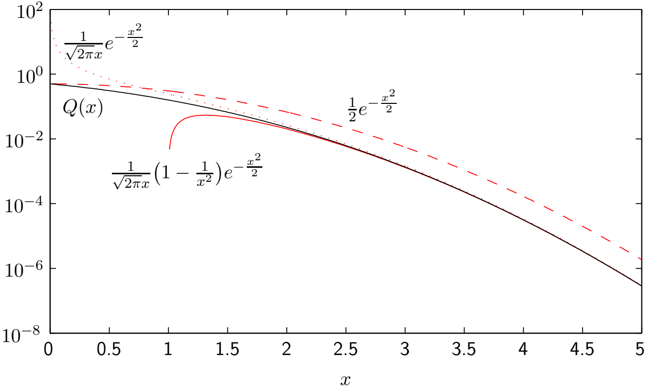
$$Q(x) \triangleq \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 - F_X(x).$$

- La función $Q(x)$ representa el área en la cola de la distribución.

Propiedades de la Función $Q(x)$

- $Q(-x) = 1 - Q(x)$.
- $Q(0) = \dfrac{1}{2}$.
- $Q(\infty) = 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < Q(x) < \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$
  para todo $x \geq 0$.

Cotas para la Función $Q(x)$



Función de una Variable Aleatoria

- Una función $Y = g(X)$ puede ser una variable aleatoria también.
- Si la función es continua o al menos tiene un número finito de discontinuidades, podremos asegurar que Y es una variable aleatoria también.
- La distribución de Y la podemos obtener utilizando la definición

$$F_Y(y) = P\{\omega \in \Omega : \ g(X(\omega)) \leq y\}. \tag{6}$$

Ejemplo (1)

Sea X una v.a. Gaussiana con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Determine la función densidad de probabilidad de $Y = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

SOLUCIÓN

En este caso $y = g(x) = ax + b$. Por lo tanto, $x = \dfrac{y-b}{a}$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
P\{\omega \in \Omega :\ g(X(\omega)) \leq y\} &= P\{\omega \in \Omega :\ aX(\omega) + b \leq y\} \\
&= P\{\omega \in \Omega :\ X(\omega) \leq \frac{y-b}{a}\} \\
&= F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big).
\end{aligned}
$$

Ejemplo (2)

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y}{dy}(y) \\ &= \frac{dF_Y}{dy}\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ &= \frac{d}{dx}F_X(x) \times \frac{dx}{dy}. \\ &= f_X(x) \times \frac{1}{dy/dx}. \end{aligned}$$

Ejemplo (3)

En este caso entonces tenemos:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)$$
$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = a.$$

Por lo tanto,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \exp\Big(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\Big).$$

Es decir, si X es una variable aleatoria Gaussiana, $Y = aX + b$ también lo es. En efecto, si X es $\mathcal{N}(0,1)$, entonces Y es $\mathcal{N}(b, a^2)$.

Esperanza de una Variable Aleatoria (1)

- La esperanza de una variable aleatoria X se define como

$$E[X] = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx, \text{si la v.a. es continua} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} x p_X(x), \text{si la v.a. es discreta.} \end{cases} \tag{7}$$

- La esperanza de una función $g(\cdot)$, medible, de X es

$$E[g(X)] = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx, \text{si la v.a. es continua} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} g(x) p_X(x), \text{si la v.a. es discreta.} \end{cases} \tag{8}$$

Esperanza de una Variable Aleatoria (2)

- Aunque la noción de esperanza se puede definir en términos de las densidades, es una operación bastante más general y que tiene importancia por sí sola.
- En el caso que $g(x) = e^{tx}$, la esperanza de $E[g(X)]$ recibe el nombre de **función generadora de momentos**:

$$\theta(t) = E[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx, \tag{9}$$

- Esta función es la transformada bilateral de Laplace de $f_X(x)$.

Esperanza de una Variable Aleatoria (3)

- Por lo tanto, $\theta(t)$ reune toda la información necesaria para calcular $f_X(x)$ y viceversa.
- Por otro lado

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = E[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E[X^n] \tag{11}$$

- Los términos de la forma $E[X^n]$ se denominan **momentos de la variable aleatoria**.

Momentos de una Variable Aleatoria (4)

Definición

El n-ésimo momento de una variable aleatoria X queda definido por

$$E[X^n] \triangleq \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} x^n f_X(y)dx & \text{si } X \text{ es una v.a. continua} \\ \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}} x^n p_x & \text{si } X \text{ es una v.a. discreta} \end{cases} . \tag{12}$$

También se utiliza la notación $m_X^{(n)}$.

Utilidad de los Momentos y la Función Generadora de Momentos

- La función $\theta(t)$ permite:
  - Calcular en forma conveniente los momentos de X.
  - Puede ser utilizada para estimar $f_X(x)$ a partir de mediciones experimentales de los momentos.
  - Puede ser utilizada para resolver problemas que involucren sumas de variables aleatorias.
  - Se utiliza para demostrar el Teorema Central del Límite.

Momentos de una Variable Aleatoria (1)

- El momento de orden 0 nos entrega la condición de normalización:

$$m_X^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) dx = 1.$$

- El momento de orden 1 es llamado la **media**, **valor esperado** o simplemente **esperanza** de la v.a. X.

$$m_X^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} x f_X(y) dx = \mu.$$

El valor esperado de una variable aleatoria es denotado como $E[X]$.

Momentos de una Variable Aleatoria (2)

- El momento de orden 2 de una variable aleatoria permite saber cuan amplia es la variación de una v.a. en torno a su valor esperado.
- Esto es, se puede interpretar como el grado de impredictibilidad de una v.a.
- La varianza de una v.a., denotada por σ_X^2 se define por

$$\text{VAR}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

La desviación estándar de la v.a. X se define como

$$\sigma_X = \sqrt{\text{VAR}[X]}.$$

Momentos de una Variable Aleatoria (3)

- Se cumplen las siguientes propiedades:

$f(X)$	$E[X]$	$\mathsf{VAR}[X]$
cX	$cE[X]$	$c^2\mathsf{VAR}[X]$
c	c	0
$X+c$	$E[X]+c$	$\mathsf{VAR}[X]$

donde X es una v.a. a valores reales, y $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

Resumen

Hemos revisado:

- Conceptos de espacio de probabilidad, condicionalidad e independencia.
- Variables aleatorias, distribuciones y densidades.
- Momentos y función generadora de momentos.

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4, sección 4.1.