EL3005 - Señales y Sistemas I

Otoño 2012

Tarea No. 3

Entrega: Viernes 18 de Mayo.

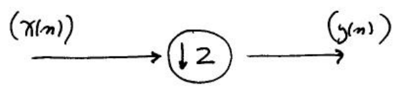
Entregar preguntas en hojas SEPARADAS

1. **Problema 1:**
   Sea un sistema LTI con respuesta al impulso ($h(n)$).

   i) Verifique que frente a una entrada sinusoidal real del tipo: $x(n) = ACos(w_0 n + \phi)$, la salida esta dada por $y(t) = |H(w_0)| \cdot cos(w_0 n + \phi + \angle H(w_0))$.

   ii) Si $x(n) = 7 - 4Sin(\pi/2n) + 10cos(\pi n)$ y $h(n) = (1/2)^n \cdot u(n)$, determine de forma explicita la salida.

2. **Problema 2:**
   Considere el sistema de down-sampling por 2 de la figura:



   donde $y(n) = x(2n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

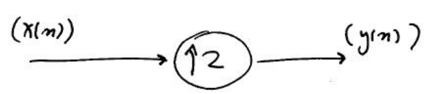
   i) Encuentre la relación entre $Y(w)$ y $X(w)$.

   ii) Generalice el teorema de muestreo en este escenario discreto, y encuentre las condiciones bajo las cuales $X(w)$ se puede determinar a partir de $Y(w)$.

   iii) Bajo las condiciones anteriores, determine el inter-polar óptimo tal que

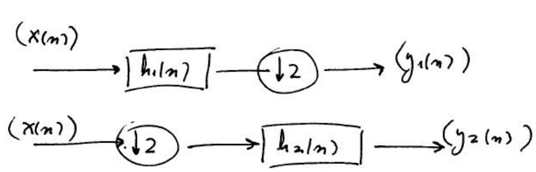
$$x(n) = f_n(...y(-1), y(0), y(1), ...).$$

   iv) Considere el operador de up-sampling por 2:



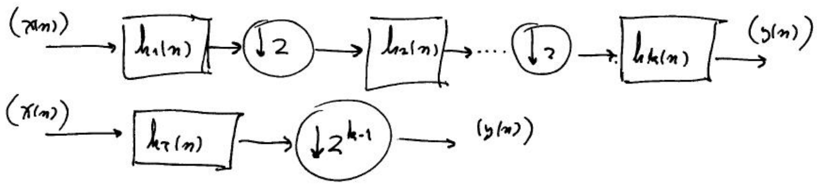
   donde $y(n) = x(n/2)$ si n es par y $y(n)$ es cero en caso contrario. Determine la relación entre $Y(w)$ y $X(w)$. Que efecto tiene la redundancia de $y(n)$ en su espectro?

   v) Considere los dos sistemas de la figura:



   Encuentre la relación entre $H_1(w)$ y $H_2(w)$ tal que caractericen sistemas equivalentes.

vi) Generalice el análisis anterior y verifique (por inducción) que los siguientes sistemas:



son equivalentes si,

$$H_T(w) = \prod_{j=1}^{N} H_j(w \cdot 2^{j-1}), \forall w \in (-\pi, \pi]. \tag{1}$$

3. **Problema 3:**
En este problema analizaremos un banco de filtros *diadico* inducido por medio del procesamiento multi-tasa introducido en la pregunta anterior. Específicamente, considere el filtro pasa bajo y pasa alto ideal dado por:

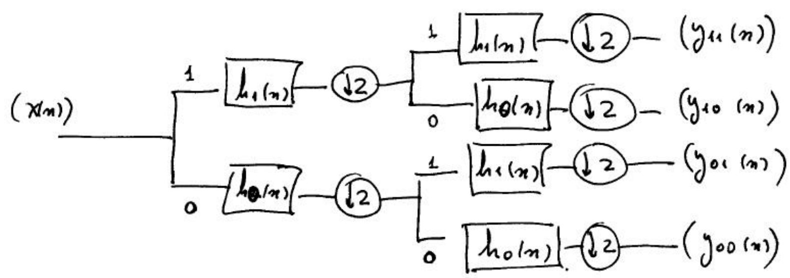
$$|\mathbf{H}_0(\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega \in [-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

y

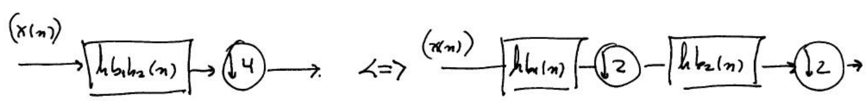
$$|\mathbf{H}_1(\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega \in [\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

i) Determines las expresiones para $(h_0(n))$ y $(h_1(n))$ y verifique que $h_0(n) = (-1)^n \cdot h_1(n)$.

ii) Considere el banco de filtros de dos niveles de la figura:



Para cada rama indexada por la palabra binaria $(b_1, b_2) \in \{0,1\}^2$ determine el filtro $H_{b_1,b_2}(w)$ tal que:

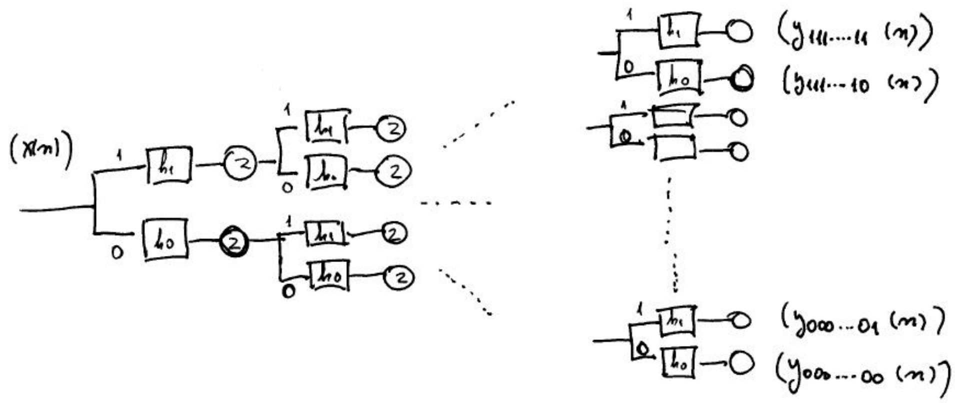


iii) Determine el soporte en frecuencia

$$I_{b_1,b_2} = soporte(H_{b_1,b_2}(w)) \equiv \{w \in (-\pi, \pi] : |H_{b_1,b_2}(w)| > 0\}$$

para todo camino binario $(b_1, b_2) \in \{0,1\}^2$. Verifique que $\left\{ I_{b_1,b_2} : (b_1,b_2) \in \{0,1\}^2 \right\}$ determina una equi-partición del intervalo $(-\pi, \pi]$. Con este análisis determine y grafique la respuesta en frecuencia de los filtros $H_{b_1,b_2}(w)$.

iv) Si iteramos este principio a k-niveles



por inducción demuestre que $largo(H_{b_1,b_2,..,b_k}(w)) = 2\pi/2^k$ (ancho de banda del filtro) y que

$$\left\{I_{b_1,b_2,..,b_k} = soporte(H_{b_1,b_2,..,b_k}(w)) : (b_1, b_2, .., b_k) \in \{0,1\}^k\right\}$$

es una equi-partición del intervalo de frecuencias fundamentales $(-\pi, \pi]$.

v) Específicamente determine y grafique los filtros $H_{0,0,..,0}(w)$ y $H_{1,1,..,1}(w)$.

vi) [OPCIONAL: Difícil] Determine una regla para caracetizar $I_{b_1,b_2,..,b_k} = soporte(H_{b_1,b_2,..,b_k}(w))$ como función del camino binario $(b_1, b_2, .., b_k) \in \{0,1\}^k$.