Tarea No. 1 : Problemas 1, 2 y 3
Tarea No. 2 : Problemas 4, 5 y 6

Entrega: **Tarea 1: Viernes 6 de Abril**; **Tarea 2: Viernes 13 de Abril** (secretaria docente).

Entregar preguntas en hojas SEPARADAS

1. **Problema 1:**
   Considere la familia de funciones sinusoidales continuas $S_\Omega = \left\{s_k(t) = (e^{jk\Omega t})_{t\in\mathbb{R}}, \forall k \in \mathbb{N}\right\}$.

   i) Verifique en este caso que si $F = \frac{\Omega}{2\pi}$, entonces $s_k(t)$ (la componente armónica k-esima de S_Ω) tiene periodo fundamental $T_k = \frac{1}{F\cdot k}$ y por tanto cualquier combinación lineal de estas funciones armónicas,
   $$x_a(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \cdot s_k(t), \tag{1}$$
   es $T = \frac{1}{F}$ periódica.[1]

   ii) Veamos el caso discreto. Considere para ello la familia de funciones sinusoidales discretas asociada a la frecuencia $f_o = \frac{1}{N_o}$ (con $N_o \geq 2$) dada por:
   $$S_{N_o} = \left\{s_k(n) = (e^{j2\pi knf_o})_{n\in\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
   Muestre en este contexto que, $\forall k \geq 0$,
   $$(s_{k+N_o}(n)) = (s_k(n)) \tag{2}$$
   y con ello que $\chi_{N_o} = \{(s_o(n)), (s_1(n)), \ldots, (s_{N_o-1}(n))\}$ representa completamente S_{N_o}. Formalmente encuentre la relación entre $s_k(n)$ y su ALIAS en χ_{N_o}.

   iii) Muestre que $\forall k > 0$, el periodo fundamental de $s_k(n)$ esta dado por $\frac{N}{GCD(k,N_o)}$, donde $GCD(k, N_o)$ es el divisor mayor común entre k y N_o. Con ello muestre que si N_o es primo, entonces cualquier combinación lineal,
   $$x(n) = \sum_{k=0}^{N_o-1} c_k \cdot s_k(n), \tag{3}$$
   tiene periodo fundamental N_o.

2. **Problema 2:**

   i) Determine si las siguientes funciones son periódicas y en tal caso determine su periodo fundamental.
   - $x(n) = cos(5n + \pi/6)$
   - $x(n) = cos(n/8)cos(\pi n/8)$
   - $x(n) = cos(\pi n/2) + sin(\pi n/8) \cdot cos(\pi n/4 + \pi/3)$
   - $x(n) = \sum_{k=1}^{L} cos(\pi n/2^k)$, con $L > 1$
   - $y(n) = x(2n)$ donde $x(n)$ tiene periodo fundamental $N_o > 1$

[1] De forma reciproca veremos en los siguientes capítulos del curso que cualquier función T periódica puede escribirse como combinación lineal de elementos en S_Ω.

- $y(2n) = x(n)$ y $y(2n+1) = 0$, donde $x(n)$ tiene periodo fundamental $N_o > 1$

ii) Sea $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos funciones periódicas con periodo fundamental $N_1 > 1$ y $N_2 > 1$, respectivamente. Encuentre una expresión para el periodo fundamental de $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$.

3. **Problema 3:**
Considere el sistema de variable discreta:

$$y(n) = T[x(n)] = x(n^2)$$

a) Determine si el sistema es TI (invariante en el tiempo).

b) Para aclarar los resultados obtenidos en a) suponga que se aplica la siguiente señal al sistema:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1) Bosqueje la señal $x(n)$.
2) Determine y bosqueje la señal $y(n) = T[x(n)]$.
3) Bosqueje la señal $y_2'(n) = y(n-2)$.
4) Determine y bosqueje la señal $x_2(n) = x(n-2)$.
5) Determine y bosqueje la señal $y_2(n) = T[x_2(n)]$.
6) Compara las señales $y_2(n)$ y $y_2'(n)$. Concluya al respecto.

c) Repita la parte b) para el sistema:

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Puede a partir del resultado determinar si el sistema es TI? Comente.

d) Repita las partes b) y c) para el sistema:

$$y(n) = T[x(n)] = nx(n)$$

4. **Problema 4:**
Considere una señal continua $x_a(t)$ periódica con periodo fundamental T_a (en segundos).

   i) Si se muestrea la señal $x_a(t)$ a una tasa constante de F_s muestras por segundo, i.e., se induce la señal discreta
   $$x(n) \equiv x_a(n/F_s), \ \forall n \in \mathbb{Z},$$
   encuentre la(s) condición(es) que garantice(n) que $x(n)$ es periódica y con ello determine su periodo fundamental.

   ii) Del punto anterior justifique la siguiente afirmación. Si $x(n)$ es periódica, siempre su periodo fundamental (equivalente en SEGUNDOS) es igual a un múltiplo de T_a.

   iii) Si $x(n)$ es periódica, determine bajo que condiciones (si existen) su periodo fundamental (equivalente en SEGUNDOS) es igual a T_a.

5. **Problema 5:**
Determine la convolución $(y(n)) = (x(n)) * (h(n))$ para los siguientes pares de funciones:

   a) $x(n) = a^n u(n), h(n) = b^n u(n)$. Para los casos $a = b$ y $a \neq b$

   b) $x(n) = \begin{cases} 1 & n = -2, 0, 1 \\ 2 & n = -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$

   c)
   $$x(n) = u(n+1) - u(n-4) - \delta(n-5)$$
   $$h(n) = [u(n+2) - u(n-3)] \cdot (3 - |n|)$$

   d)
   $$x(n) = u(n) - u(n-5)$$
   $$h(n) = u(n-2) - u(n-8) + u(n-11) - u(n-17)$$

6. **Problema 6:**

   i) Dos sistemas de tiempo discreto $T_1()$ y $T_2()$ son conectados en cascada para formar un nuevo sistema dado por $T() = T_2(T_1())$. Al respecto, determine la veracidad de los siguientes postulados

      a) Si T_1 y T_2 son lineales, entonces T es lineal (i.e. que la conexión en cascada de dos sistemas lineales es lineal).
      b) Si T_1 y T_2 son TI, entonces T es TI.
      c) Si T_1 y T_2 son causales, entonces T es causal.
      d) Si T_1 y T_2 son LTI (lineal invariante en el tiempo), entonces T es LTI.
      e) Si T_1 y T_2 son estables, entonces T es estable.

   ii) Se tiene un sistema T del cual sólo se conocen N pares de valores $(y_i(n), x_i(n))$ tales que $y_i(n) = T[x_i(n)]; i = 1, 2, ..., N$ (i.e. N pares de entradas y salidas)

      a) Si se sabe que el sistema T es lineal describa el tipo de funciones de entrada cuya salida puede determinarse a partir de la información aquí enunciada.
      b) Repita el punto a) pero ahora para un sistema T TI en lugar de lineal.