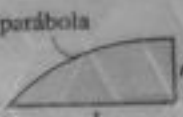
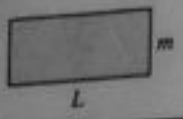
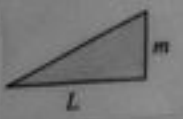
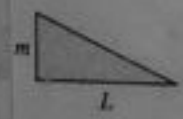
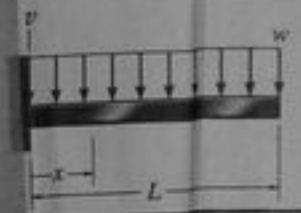
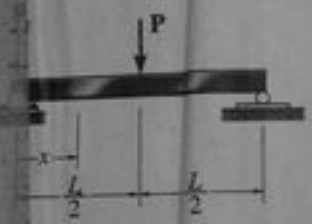
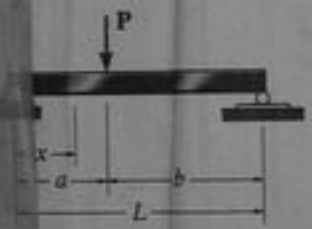
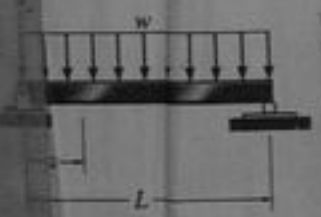
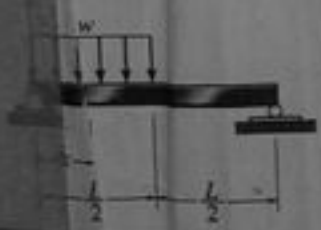
Tabla para la evaluación de $\int_0^L m\,m'\,dx$

$\int_0^L m\,m'\,dx$				
	$mm'L$	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{2}m(m'_1 + m'_2)L$	$\frac{2}{3}mm'L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}m(m'_1 + 2m'_2)L$	$\frac{5}{12}mm'L$
	$\frac{1}{2}m'(m_1 + m_2)L$	$\frac{1}{6}m'(m_1 + 2m_2)L$	$\frac{1}{6}[m'_1(2m_1 + m_2) + m'_2(m_1 + 2m_2)]L$	$\frac{1}{12}[m'(3m_1 + 5m_2)]L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'(L + a)$	$\frac{1}{6}m_1[m_1(L + b) + m_2(L + a)]$	$\frac{1}{12}mm'(3 + \frac{3a}{L} - \frac{a^2}{L^2})L$
	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'L$	$\frac{1}{6}m(2m'_1 + m'_2)L$	$\frac{1}{4}mm'L$

Deflexiones y pendientes en vigas

Carga	$v+\uparrow$	$\theta+\circlearrowright$	Ecuación $+\uparrow$ $+\circlearrowright$
	$v_{máx} = -\frac{PL^3}{3EI}$ en $x = L$	$\theta_{máx} = -\frac{PL^2}{2EI}$ en $x = L$	$v = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
	$v_{máx} = \frac{M_0L^2}{2EI}$ en $x = L$	$\theta_{máx} = \frac{M_0L}{EI}$ en $x = L$	$v = \frac{M_0}{2EI}x^2$

Deflexiones y pendientes en vigas (continuación)

	$v_{máx} = -\frac{wL^4}{8EI}$ en $x = L$	$\theta_{máx} = -\frac{wL^3}{6EI}$ en $x = L$	$v = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
	$v_{máx} = -\frac{PL^3}{48EI}$ en $x = L/2$	$\theta_{máx} = \pm\frac{PL^2}{16EI}$ en $x = 0$ o $x = L$	$v = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x),\ 0 \le x \le L/2$
		$\theta_L = -\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$ $\theta_R = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$	$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$v_{máx} = -\frac{5wL^4}{384EI}$ en $x = \frac{L}{2}$	$\theta_{máx} = \pm\frac{wL^3}{24EI}$	$v = -\frac{wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
		$\theta_L = -\frac{3wL^3}{128EI}$ $\theta_R = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v = -\frac{wx}{384EI}(9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = -\frac{wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x \le L$
	$v_{máx} = -\frac{M_O L^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_L = -\frac{M_O L}{6EI}$ $\theta_R = \frac{M_O L}{3EI}$	$v = -\frac{M_O x}{6EIL}(x^2 - 3Lx + 2L^2)$

R
624.1
H624a3

Russell C. Hibbeler

Análisis estructural

TERCERA EDICIÓN

PRENTICE-HALL
HISPANOAMERICANA, S. A.
EJEMPLAR DE CORTESIA
PROHIBIDA SU VENTA

TRADUCCIÓN:

Ing. José de la Cera Alonso
Universidad Autónoma Metropolitana
México

REVISIÓN TÉCNICA:

M. en I. Mario S. Ramírez Centeno
Ingeniero Civil
Universidad Nacional Autónoma de México
Profesor - Investigador
Universidad Autónoma Metropolitana

PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S.A.

MÉXICO • NUEVA YORK • BOGOTÁ • LONDRES • SYDNEY
PARÍS • MUNICH • TORONTO • NUEVA DELHI • TOKIO
SINGAPUR • RÍO DE JANEIRO • ZURICH

EDICIÓN EN ESPAÑOL:

DIRECTOR GENERAL: MOISÉS PÉREZ ZAVALA
GERENTE DIVISIÓN COLLEGE: JOSÉ TOMÁS PÉREZ BONILLA
GERENTE EDITORIAL: LUIS CEDEÑO PLASCENCIA
EDITOR: PABLO ROIG VÁZQUEZ
DIRECTOR DE EDICIONES: ALBERTO SIERRA OCHOA
GERENTE DE EDICIONES: JUAN ANTONIO RODRÍGUEZ MORENO
GERENTE DE TRADUCCIÓN: JORGE BONILLA TALAVERA
GERENTE DE PRODUCCIÓN: JULIÁN ESCAMILLA LIQUIDANO
SUPERVISORA DE TRADUCCIÓN: MARÍA TERESA SANZ FALCÓN
SUPERVISOR DE PRODUCCIÓN: MAGDIEL GÓMEZ MARINA

EDICIÓN EN INGLÉS:

Editor: William Stenquist
Production Supervisor: Rose Kernan
Text Designer: Robert Freese
Cover Designer: Jayne Conte
Cover Art (Photo): James Marshall/*The Stock Market*
Photo Researcher: Julie Tesser
Illustrations: Susan Sibille
Manufacturing Buyer: Julia Meehan

HIBBELER: ANÁLISIS ESTRUCTURAL, 3a. Ed.

Traducido del inglés de la obra: **STRUCTURAL ANALYSIS,** 3rd. Ed.

All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

Todos los derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1997 respecto a la primera edición en español publicada por:
PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
Calle 4 No. 25-2º Piso, Fracc. Industrial Alce Blanco
53330 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

ISBN 970-17-0047-3

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc.
A Simon & Schuster Company
Copyright © MCMXCVII
All rights reserved
ISBN 0-13-493370-2

IMPRESO EN MÉXICO/ PRINTED IN MEXICO

Prefacio

El objetivo de este libro es proporcionar al estudiante una presentación clara y amplia de la teoría y aplicación del análisis estructural, tal como se emplea en armaduras, vigas y marcos. Se pone énfasis en desarrollar la habilidad del estudiante para modelar y analizar una estructura. En esta tercera edición revisada, se han llevado a cabo ligeras mejoras y correcciones a lo largo de todo el libro, se han agregado fotografías y algunas páginas han sido reformadas. Estas mejoras parecieron necesarias desde que la producción de la tercera edición estaba en proceso y Prentice-Hall, Inc. adquirió los derechos de publicación de Macmillan, Inc. Igual que en la tercera edición, la presentación y disposición de algunos de los temas de la edición previa, fueron mejorados y los ejemplos y problemas fueron ampliados. En particular, se agregó un capítulo sobre cables y arcos y el contenido de un capítulo previo sobre los métodos de desplazamientos se incorporó al capítulo sobre el método de pendiente-desviación. Se incluyó además el método de integración para determinar la pendiente y deflexión de una viga. Se usaron fotografías adicionales y mejores dibujos para facilitar la comprensión del material, y se dio particular atención a la exactitud numérica y a la claridad en la definición y desarrollo de los conceptos.

Organización y método

Los contenidos de cada capítulo están ordenados en secciones con temas específicos indicados por sus títulos. Los análisis de importancia para una teoría en particular son breves pero completos. En la mayoría de los casos, sigue a este análisis una guía llamada "Procedimiento de análisis", que proporciona al estudiante un resumen de los conceptos importantes y un procedimiento sistemático para aplicar la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven usando este método delineado para aclarar su aplicación numérica.

El libro está dividido en tres partes. Los métodos clásicos de análisis se ven en los capítulos 2 al 7 para estructuras estáticamente determinadas y en los capítulos 8 al 12 para estructuras estáticamente indeterminadas. La tercera parte del libro, capítulos 13 al 15, presenta métodos matriciales para el análisis estructural. En años recientes ha aumentado el uso de las computadoras para analizar estructuras por medio del análisis matricial. Esta tendencia es bienvenida ya que descarga al ingeniero de los largos cálculos requeridos al analizar estructuras grandes o complicadas por medio de métodos clásicos. Aunque los métodos matriciales son más eficientes para un análisis estructural, el autor considera que los estudiantes que toman un primer curso sobre este tema, deben estar bien versados en los métodos clásicos. La práctica al aplicar esos métodos desarrollará un entendimiento más profundo de las ciencias básicas de la estática y de la mecánica de materiales. Además, la habilidad para resolver problemas se desarrolla cuando las diversas técnicas se razonan y aplican en una forma clara y ordenada; puede entonces entenderse mejor la manera en que las cargas se transmiten a través de las estructuras y obtenerse una idea más completa de cómo se deforman éstas bajo carga. Finalmente, los métodos clásicos proporcionan un medio para verificar los resultados de la computadora y no tener que depender solamente de los listados generados por ésta.

Problemas

La mayoría de los problemas en el libro reflejan situaciones realistas que se encuentran en la práctica. Se espera que esto estimule el interés del estudiante en el análisis estructural y desarrolle su habilidad para reducir cualquiera de esos problemas, de su descripción física a un modelo o representación simbólica a la que puede aplicarse la teoría apropiada. Se usan tanto el sistema métrico decimal (SI) como el sistema inglés a lo largo de todo el libro. Los problemas se presentan al final de cada capítulo y están ordenados para cubrir el material en orden secuencial y por orden de dificultad. La intención aquí ha sido generar problemas que prueben la habilidad del estudiante al aplicar la teoría, teniendo en cuenta que aquellos problemas que requieren cálculos tediosos pueden relegarse al análisis con computadora. Las

respuestas a todos, excepto cada cuarto problema (indicados con un asterisco) están dadas al final del libro. Todas las soluciones han sido revisadas por otras personas y las respuestas numéricas se han verificado cuidadosamente.

Contenido

Este libro consta de 15 capítulos. El capítulo 1 presenta un breve análisis de los varios tipos de formas y cargas estructurales. El análisis de las estructuras estáticamente determinadas se ve en los siguientes seis capítulos. El capítulo 2 muestra la determinación de las fuerzas en los soportes y conexiones de una estructura. En el capítulo 3 se analizan los diversos tipos de armaduras estáticamente determinadas y en el capítulo 4 se presentan las funciones y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para vigas y marcos. En el capítulo 5 se presenta el análisis de los sistemas de cables y arcos simples y en el capítulo 6 se estudian las líneas de influencia para vigas, trabes y armaduras. Finalmente, en el capítulo 7 se consideran varias técnicas comunes para el análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas.

En la segunda parte del libro, el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas se cubre en cinco capítulos. En el capítulo 8 se presentan métodos tanto geométricos como de energía para el cálculo de deflexiones. El capítulo 9 cubre el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas usando el método de las fuerzas y además trata las líneas de influencia para vigas. En el capítulo 10 se ven los métodos de desplazamientos, en particular, el método de pendiente-desviación y el de distribución de momentos se ve en el capítulo 11. Finalmente, en el capítulo 12 se consideran las vigas y marcos con miembros de secciones no prismáticas.

La tercera parte del libro trata el análisis de estructuras usando métodos matriciales. El capítulo 13 presenta una breve introducción al álgebra de matrices. Los capítulos 14 y 15 desarrollan el análisis de armaduras y marcos, respectivamente, usando el método de la rigidez global. Este método es de gran aplicación en conjunción con las computadoras.

Reconocimientos

Muchos de mis colegas en la profesión docente y de mis alumnos han hecho críticas constructivas que han ayudado en esta revisión y quisiera reconocer aquí todas sus valiosas sugerencias y comentarios. En particular quisiera dar las gracias a los revisores contratados por mi editor: Ahmed M. Abdel-Ghaffar, Princeton University; Ahmet Emin Aktan, Louisiana State University; Richard A. Behr, University of Missouri en Rolla; William L. Bingham, North Carolina State

University; Michael C. Constantinou, State University of New York en Buffalo; Mike Gingrich, Olivet Nazarene University; Phillip L. Gould, Washington University en St. Louis; Harry D. Knostman, Kansas State University; Daryl Logan, Rose-Hulman Institute of Technology; Seroj Mackertich, Pennsylvania State University en Harrisburg; David F. Mazurek, U.S. Coast Guard Academy; B. B. Muvdi, Bradley University; John F. Ritter, Youngstown State University; Masoud Sanayei, Tufts University; Scott D. Schiff, Clemson University; Jack W. Schwalbe, Florida Institute of Technology; Charles T. Stephens, Oregon Institute of Technology; Leon R. L. Wang, Old Dominion University; R. Warren, Point Park College; y Aspasia Zerva y Tolga Ergunay, Drexel University. Muchas gracias también a Susan Sibille por producir las excelentes ilustraciones usadas a través de todo el libro y a Barry Nolan por su ayuda en producir la última versión del programa de computadora STRAN. Finalmente, quisiera reconocer la ayuda obtenida de mi esposa Conny, de quien siempre recibí un gran apoyo y auxilio en la preparación del manuscrito para su publicación.

R. C. H.

Contenido

1 Tipos de estructuras y cargas

1.1 Introducción 1
1.2 Clasificación de las estructuras 2
1.3 Cargas 9
Problemas 20

2 Análisis de estructuras estáticamente determinadas

2.1 Estructura idealizada 25
2.2 Principio de superposición 40
2.3 Ecuaciones de equilibrio 41
2.4 Determinación y estabilidad 42
2.5 Aplicación de las ecuaciones de equilibrio 54
Problemas 67

3 Análisis de armaduras estáticamente determinadas

3.1 Tipos comunes de armaduras 81
3.2 Clasificación de las armaduras coplanares 87

3.3 El método de los nudos 98
3.4 Miembros de fuerza cero 104
3.5 El método de las secciones 107
3.6 Armaduras compuestas 116
3.7 Armaduras complejas 122
3.8 Armaduras espaciales 126
Problemas 136

4 Cargas internas desarrolladas en miembros estructurales

4.1 Cargas internas en un punto específico 147
4.2 Funciones de fuerza cortante y momento flexionante 153
4.3 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga 159
4.4 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para un marco 176
4.5 Diagramas de momento construidos con el método de superposición 184
Problemas 188

5 Cables y arcos

5.1 Cables 197
5.2 Cables sometidos a cargas concentradas 198
5.3 Cables sometidos a carga uniforme distribuida 202
5.4 Arcos 210
5.5 Arco de tres articulaciones 212
Problemas 218

6 Líneas de influencia para estructuras estáticamente determinadas

6.1 Líneas de influencia 223
6.2 Líneas de influencia para vigas 235
6.3 Líneas de influencia cualitativas 242
6.4 Líneas de influencia para trabes de piso 254

6.5 Líneas de influencia para armaduras 259
6.6 Cargas vivas para puentes 266
6.7 Influencia máxima en un punto debido a una serie de cargas concentradas 268
6.8 Fuerza cortante y momento flexionante máximos absolutos 280
Problemas 289

7 Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas

7.1 Uso de métodos aproximados 303
7.2 Armaduras 304
7.3 Cargas verticales sobre marcos de edificios 310
7.4 Marcos de portal y armaduras 314
7.5 Cargas laterales en marcos de edificios: método del portal 320
7.6 Cargas laterales en marcos de edificios: método del voladizo 326
Problemas 333

8 Deflexiones

8.1 Diagramas de deflexión y curva elástica 341
8.2 Teoría de la viga elástica 345
8.3 El método de la doble integración 347
8.4 Teoremas de área-momento 354
8.5 Método de la viga conjugada 370
8.6 Trabajo externo y energía de deformación 381
8.7 Principio del trabajo y de la energía 384
8.8 Principio del trabajo virtual 385
8.9 Método del trabajo virtual: armaduras 388
8.10 Método del trabajo virtual: vigas y marcos 397
8.11 Energía de deformación virtual causada por carga axial, fuerza cortante, torsión y temperatura 410
8.12 Teorema de Castigliano 417
8.13 Teorema de Castigliano para armaduras 419
8.14 Teorema de Castigliano para vigas y marcos 426
Problemas 437

9 Análisis de estructuras estáticamente indeterminadas por el método de las fuerzas

9.1 Estructuras estáticamente indeterminadas 449
9.2 Método de análisis de las fuerzas: procedimiento general 453
9.3 Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos; Ley de Betti 458
9.4 Método de análisis de las fuerzas: vigas 459
9.5 Diagramas de momentos generales para vigas estáticamente indeterminadas 470
9.6 Método de análisis de las fuerzas: marcos 471
9.7 Método de análisis de las fuerzas: armaduras 476
9.8 Estructuras compuestas 479
9.9 Observaciones adicionales al método de análisis de las fuerzas 482
9.10 La ecuación de los tres momentos 484
9.11 Líneas de influencia para vigas estáticamente indeterminadas 494
9.12 Líneas de influencia cualitativas para marcos 504
Problemas 506

10 Método de análisis de los desplazamientos: ecuaciones de pendiente-desviación

10.1 Método de análisis de los desplazamientos: procedimiento general 517
10.2 Ecuaciones pendiente-desviación 520
10.3 Análisis de vigas 527
10.4 Análisis de marcos sin desplazamiento lateral 539
10.5 Análisis de marcos con desplazamiento lateral 545
Problemas 556

11 Método de análisis de los desplazamientos: distribución de momentos

11.1 Principios generales y definiciones 563
11.2 Distribución de momentos para vigas 568
11.3 Modificaciones al factor de rigidez 578

11.4 Distribución de momentos para marcos sin desplazamiento lateral 585
11.5 Distribución de momentos para marcos con desplazamiento lateral 588
11.6 Distribución de momentos para marcos de varios niveles 598
Problemas 600

12 Análisis de vigas y marcos formados por miembros no prismáticos

12.1 Deflexiones de miembros no prismáticos 608
12.2 Análisis de propiedades de carga de miembros no prismáticos con el método de la viga conjugada 610
12.3 Propiedades de carga de miembros no prismáticos disponibles en publicaciones 618
12.4 Distribución de momentos para estructuras con miembros no prismáticos 621
12.5 Ecuaciones de pendiente-desviación para miembros no prismáticos 628
Problemas 630

13 Algebra matricial para el análisis estructural

13.1 Definiciones básicas y tipos de matrices 635
13.2 Operaciones con matrices 638
13.3 Determinantes 643
13.4 Inversa de una matriz 646
13.5 Método de Gauss para resolver ecuaciones simultáneas 649
Problemas 651

14 Análisis de armaduras con el uso del método de la rigidez

14.1 Fundamentos del método de la rigidez 653
14.2 Matriz de rigidez de un miembro de armadura 657

14.3 Matrices de transformación de desplazamientos y fuerzas 659
14.4 Matriz de rigidez global de un miembro 663
14.5 Matriz de rigidez de la estructura 665
14.6 Aplicación del método de la rigidez al análisis de armaduras 671
14.7 Análisis de armaduras espaciales 682
Problemas 684

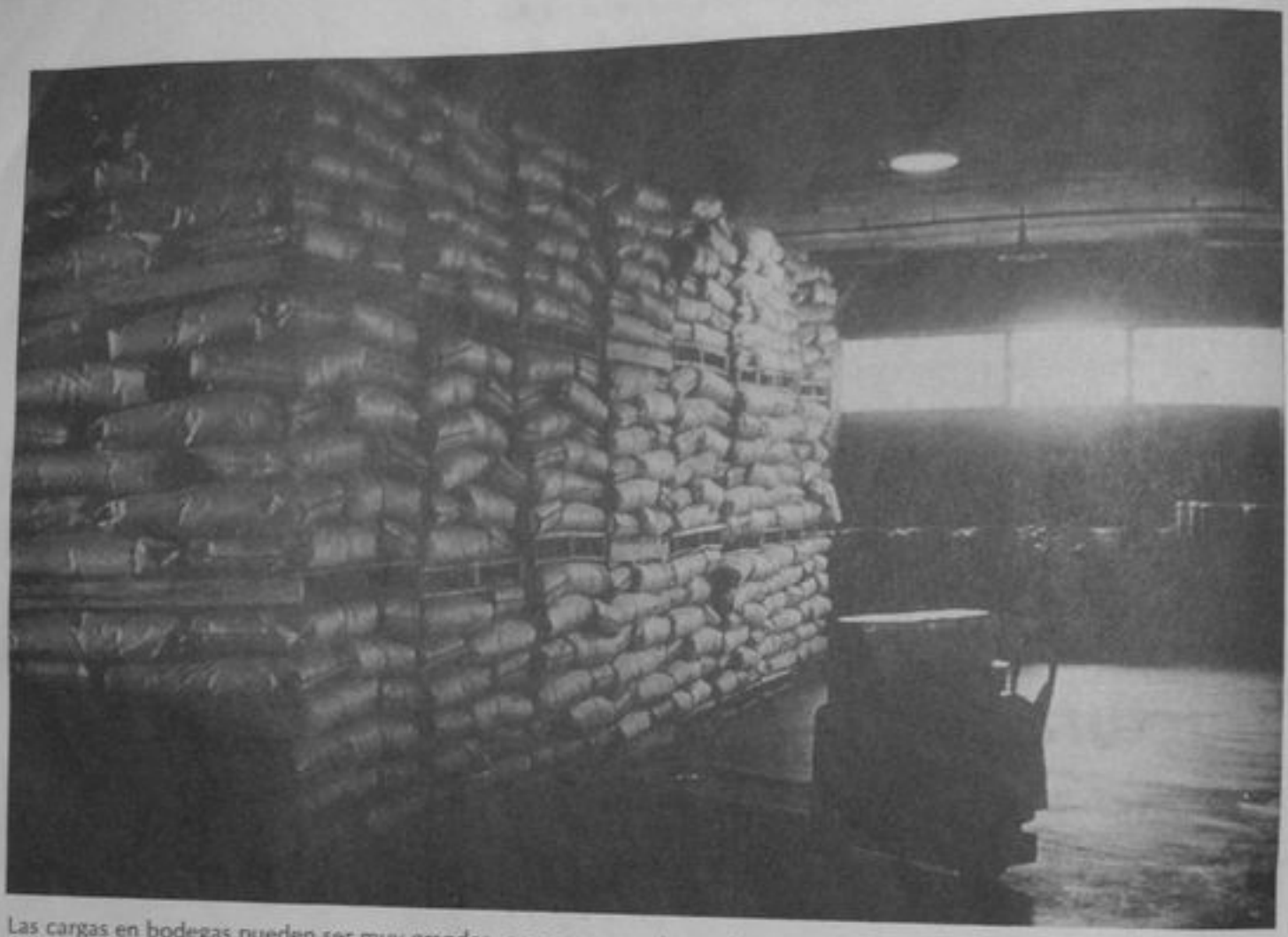
15 Análisis de vigas y marcos planos con el uso del método de la rigidez

15.1 Observaciones preliminares 687
15.2 Matriz de rigidez de un miembro de un marco 691
15.3 Matrices de transformación de desplazamientos y fuerzas 693
15.4 Matriz de rigidez global de un miembro de un marco 696
15.5 Matriz de rigidez global de una viga 697
15.6 Aplicación del método de la rigidez al análisis de vigas y marcos 698
Problemas 712

Respuestas 717

Índice 727

Análisis estructural



Las cargas en bodegas pueden ser muy grandes, como se aprecia aquí. Para diseñar apropiadamente el edificio es necesario estimar la magnitud de la carga y especificar dónde quedará ésta localizada dentro del edificio. (*Fotografía por cortesía de la Portland Cement Association.*)

1

Tipos de estructuras y cargas

En este capítulo explicaremos las diversas etapas necesarias para producir una estructura. Definiremos también los tipos básicos de estructuras, sus elementos y sus soportes. Finalmente, se dará una breve explicación de los tipos de cargas que deben considerarse para llevar a cabo un análisis y diseño estructural apropiados.

1.1 Introducción

Una *estructura* consiste en una serie de partes conectadas con el fin de soportar una carga. Ejemplos de ellas son los edificios, los puentes, las torres, los tanques y las presas. El proceso de crear cualquiera de estas estructuras requiere planeación, análisis, diseño y construcción. A continuación se hace un análisis breve de cada una de esas etapas para ilustrar qué debe considerarse en la práctica.

Planeación

Al crear una estructura para que cumpla una función específica de uso público, primero debe considerarse la selección de una forma estructural que sea segura, estética y económica. Ésta es usualmente la fase más difícil y a la vez más importante de la ingeniería estructural. A menudo se requieren varios estudios independientes de diferentes soluciones antes de decidir cuál es la forma (arco, armadura, marco, etc.) más apropiada. Una vez tomada esta decisión, se especifican entonces las cargas, materiales, disposición de los miembros y sus

dimensiones de conjunto. Está claro que la habilidad necesaria para llevar a cabo esas actividades de planeación se adquiere normalmente después de varios años de experiencia en el arte y ciencia de la ingeniería.

Análisis

Para analizar apropiadamente una estructura, deben hacerse ciertas idealizaciones sobre cómo están soportados y conectados los miembros entre sí. Una vez que se ha determinado esto y se han especificado las cargas, las fuerzas en los miembros y sus desplazamientos pueden encontrarse utilizando la teoría de la mecánica estructural, que es el tema de este libro.

Diseño

Una vez obtenidas las cargas internas de un miembro, el tamaño de éste puede determinarse de manera que se satisfagan los criterios de resistencia, estabilidad y deflexión, como está asentado en las normas y códigos en vigor. Además, las conexiones entre los miembros pueden diseñarse por resistencia y las dimensiones detallarse de manera que todas las partes queden ajustadas entre sí en forma apropiada.

Construcción

La fase final requiere ordenar los diversos componentes de la estructura y planear las actividades que implica el montaje real de ésta. Respecto a esto, todas las fases de la construcción deben inspeccionarse para garantizar que la estructura está siendo construida de acuerdo con los planos de diseño especificados.

1.2 Clasificación de las estructuras

Es importante que un ingeniero estructural reconozca los diversos tipos de elementos que componen una estructura y que sea capaz de clasificar las estructuras de acuerdo con su forma y función. Presentaremos por ahora algunos de esos aspectos y hablaremos más sobre ellos en los puntos apropiados a lo largo del texto.

Elementos estructurales

Algunos de los elementos más comunes de que constan las estructuras son los siguientes.

Tirantes. Los miembros estructurales sometidos a una *fuerza de tensión* se denominan *tirantes* o *puntales de arriostramiento*. Debido a la naturaleza de esta carga, estos miembros son esbeltos y para formarlos se escogen perfiles redondos, rectangulares (varillas y barras), ángulos, canales, etc., mostrados en la figura 1–1.

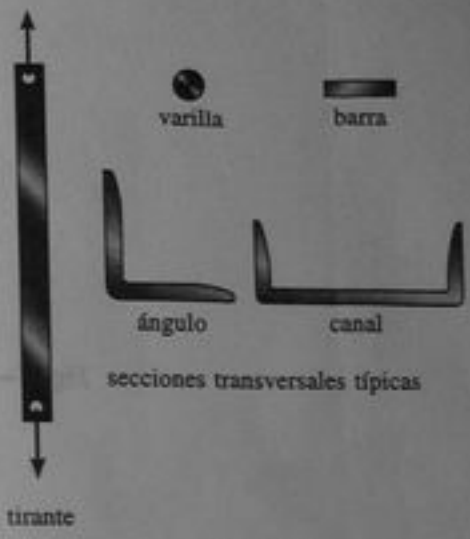


Fig. 1–1

Vigas. Las vigas son usualmente miembros horizontales rectos usados principalmente para soportar cargas verticales, figura 1–2. A menudo se clasifican según la manera en que están apoyadas, como se indica en la misma figura. En particular, cuando la sección transver-

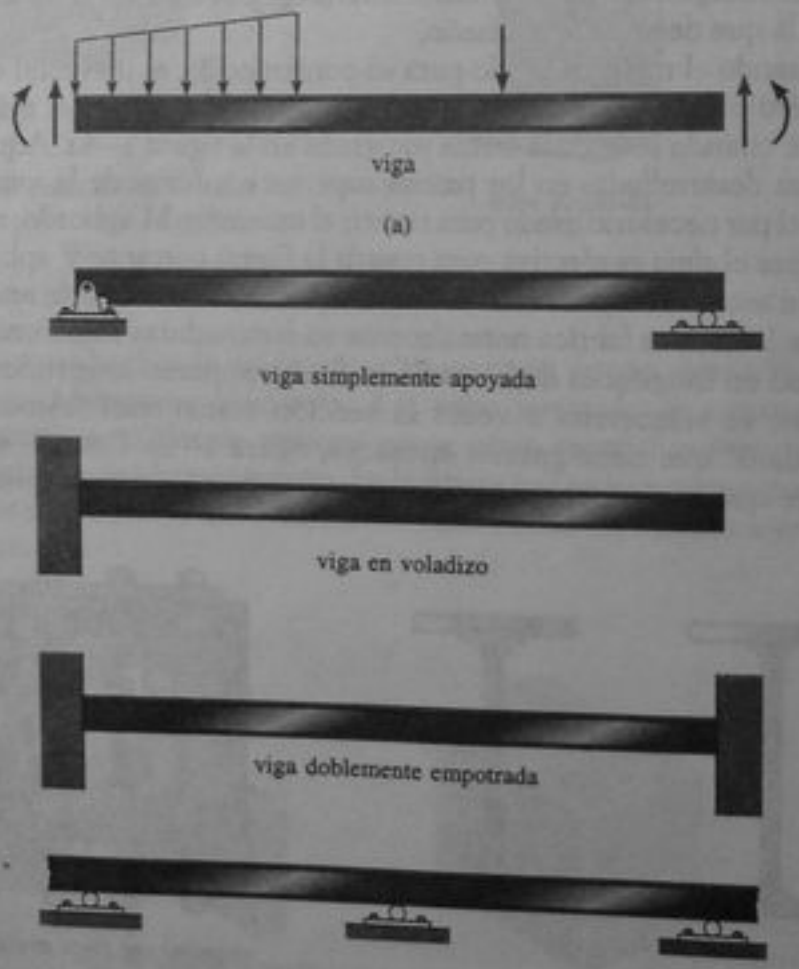


Fig. 1–2

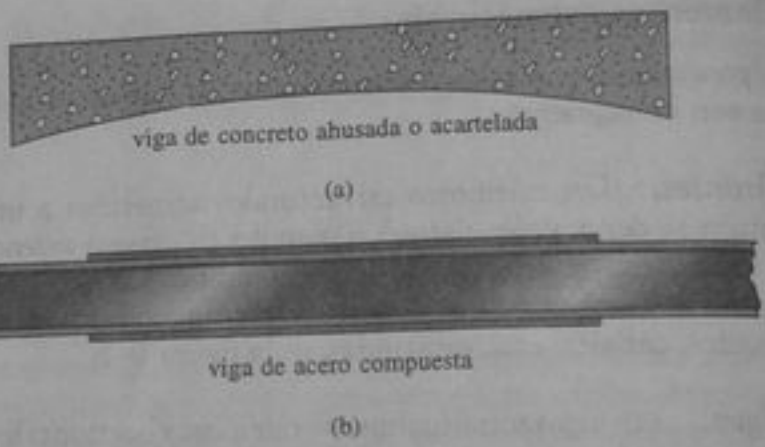


Fig. 1–3

sal varía, la viga se denomina ahusada o acartelada, figura 1–3*a*. Las secciones transversales de las vigas son también "compuestas", como en los casos en que se añaden placas en sus partes superior e inferior, figura 1–3*b*.

La mayoría de las veces, las vigas se diseñan principalmente para resistir el momento flexionante; sin embargo, si son cortas y soportan grandes cargas, la fuerza cortante interna puede resultar muy grande y ser la que determine el diseño.

Cuando el material usado para su construcción es un metal como el acero o el aluminio, la sección transversal de una viga es más eficiente cuando se le da la forma mostrada en la figura 1–4*a*. Aquí, las fuerzas desarrolladas en los *patines* superior e inferior de la viga forman el par necesario usado para resistir el momento M aplicado, mientras que el *alma* es efectiva para resistir la fuerza cortante V aplicada. A esta sección transversal se le llama comúnmente "de patín ancho", figura 1–4*b*, y se fabrica normalmente en laminadoras como una sola unidad en longitudes de hasta 75 ft. Si se requieren longitudes más cortas, se selecciona a veces la sección transversal "American Standard" que tiene patines ahusados, figura 1–4*b*. Cuando se requiere que la viga tenga un claro muy grande y las cargas aplicadas

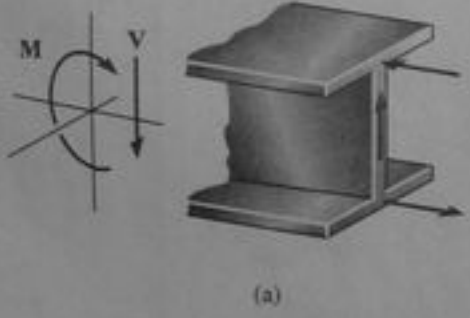
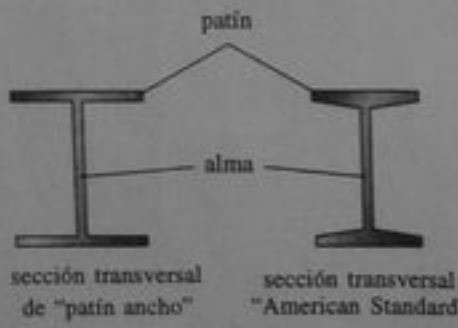


Fig. 1–4



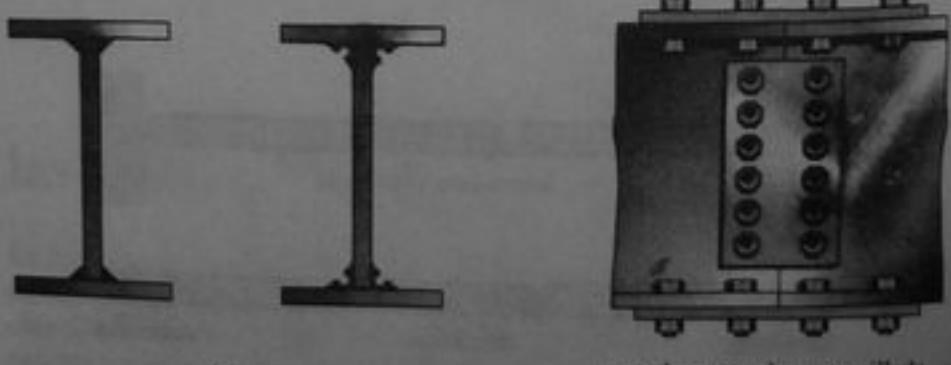


Fig. 1–5 **trabe armada**

son bastante grandes, la sección transversal puede tomar la forma de una *trabe armada*. Este miembro se fabrica usando una gran placa para el alma y soldando placas en sus extremos, o uniendo éstas con pernos, de modo que hagan la función de patines, figura 1–5*a*. A menudo la trabe se transporta a la obra en segmentos, los cuales se diseñan para ser empalmados en puntos donde la trabe recibe momentos internos pequeños, figura 1–5*b*.

Las vigas de concreto generalmente tienen secciones transversales rectangulares, ya que es fácil construir esta forma directamente en la obra. Como el concreto es bastante débil en su resistencia a la tensión, se cuelan dentro de la viga "barras de refuerzo" en las regiones de la sección transversal sometidas a tensión, figura 1–6*a*. Las vigas o trabes de concreto precolado se fabrican en un taller de la misma manera, figura 1–6*b*, y luego se transportan al lugar de la obra.

Fig. 1–6

Las vigas hechas de madera pueden aserrarse de una pieza sólida de madera o fabricarse laminadas. Las vigas *laminadas* se construyen de secciones sólidas de madera que se unen entre sí por medio de pegamentos de alta resistencia. En la figura 1–7 se muestran ejemplos típicos de secciones transversales de vigas hechas de madera aserrada o laminada.

FACULTAD DE INGENIERIA
BIBLIOTECA
USAC

Fig. 1–7

Fig. 1–8

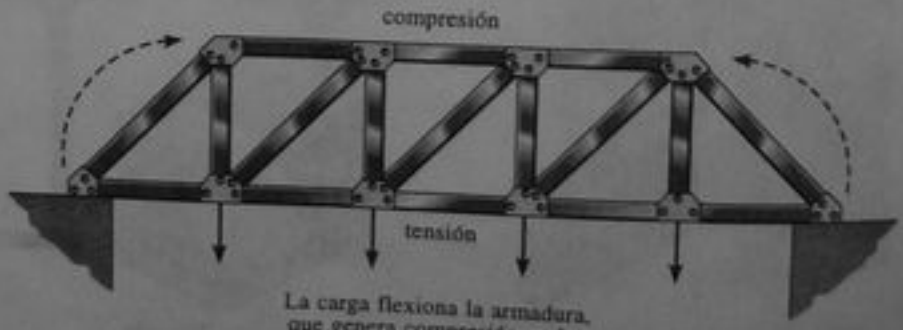
Columnas. Los miembros que generalmente son verticales y resisten cargas axiales de compresión se conocen como *columnas*, figura 1–8*a*. Para columnas metálicas se suelen usar secciones tubulares y secciones de patín ancho y para las de concreto son usuales las secciones circulares y cuadradas con barras de refuerzo, figura 1–8*b*. En ocasiones, las columnas están sometidas a carga axial y a momento de flexión como se muestra en la figura 1–8*a*. Esos miembros se llaman entonces *columnas flexocomprimidas*.

Tipos de estructuras

A la combinación de los elementos estructurales y los materiales de que están hechos se le llama *sistema estructural*. Cada sistema está construido de uno o más de cuatro tipos básicos de estructuras. Clasificados por el grado de complejidad de su análisis, tales tipos son los siguientes.

Armaduras. Cuando se requiere que el claro de una estructura sea grande y su altura no es un criterio importante de diseño, puede seleccionarse una armadura. Las *armaduras* consisten en barras en tensión y elementos esbeltos tipo columna, usualmente dispuestos en forma triangular. Las *armaduras planas* se componen de miembros situados en el mismo plano y se usan a menudo para puentes y techos, mientras que las *armaduras espaciales* tienen miembros en tres dimensiones y son apropiadas para grúas y torres.

Debido al arreglo geométrico de sus miembros, las cargas que causan flexión en la armadura, figura 1–9, se convierten en fuerzas de tensión o compresión en los miembros y por esto una de las ventajas principales de una armadura, respecto a una viga, es que usa menos material para soportar una carga dada. Además, una armadura se construye con *elementos de relativamente poco peso* que pueden arreglarse de varias maneras para soportar una carga impuesta. Con frecuencia es económicamente factible usar una armadura para salvar claros de 30 ft a 400 ft, aunque en ocasiones se han usado en claros mayores de 400 ft.



La carga flexiona la armadura, que genera compresión en los miembros superiores y tensión en los inferiores.

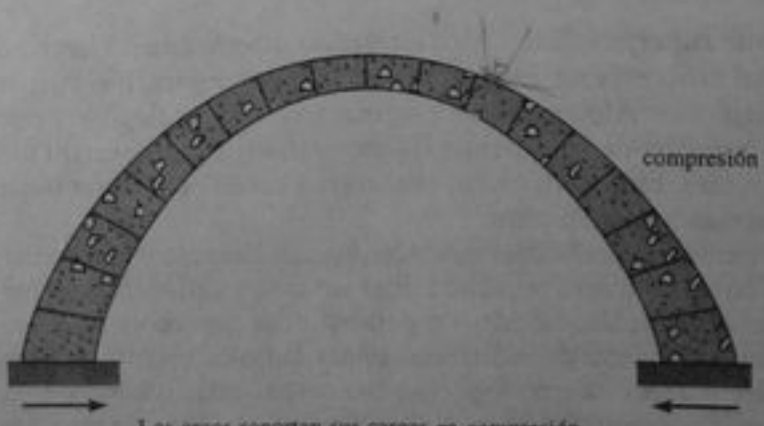
Fig. 1–9

Los cables soportan sus cargas en tensión

Fig. 1–10

Cables y arcos. Otras dos formas de estructuras que se usan para salvar grandes distancias son el cable y el arco. Los *cables* suelen ser flexibles y soportan sus cargas en tensión. Sin embargo, a diferencia de los tirantes, la carga externa no se aplica a lo largo del eje del cable y, en consecuencia, el cable adopta una forma acorde con la carga aplicada, figura 1–10. Los cables se usan generalmente para soportar puentes y techos de edificios. Cuando se usan para estos fines, el cable tiene una ventaja sobre la viga y la armadura, especialmente en claros mayores de 150 ft. Como siempre están en tensión, los cables no resultan inestables ni se desploman repentinamente como puede suceder con vigas o armaduras. Además, la armadura requiere costos adicionales de construcción y un peralte creciente conforme aumenta el claro. Por otra parte, el uso de cables está limitado sólo por su peso y los métodos de anclaje.

El arco logra su resistencia en compresión ya que tiene una curvatura inversa a la del cable, figura 1–11. Sin embargo, el arco debe ser rígido para mantener su forma y esto genera cargas secundarias en que interviene la fuerza cortante y el momento flexionante, que deben considerarse en su diseño. Los arcos son frecuentemente usados en estructuras de puentes, domos para techos y en aberturas para muros de mampostería.



Los arcos soportan sus cargas en compresión

Fig. 1–11

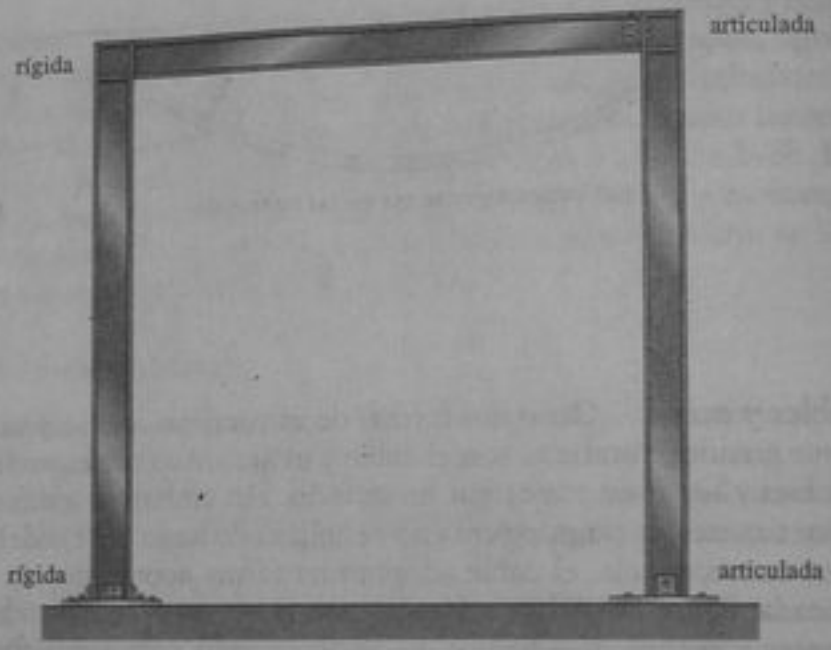
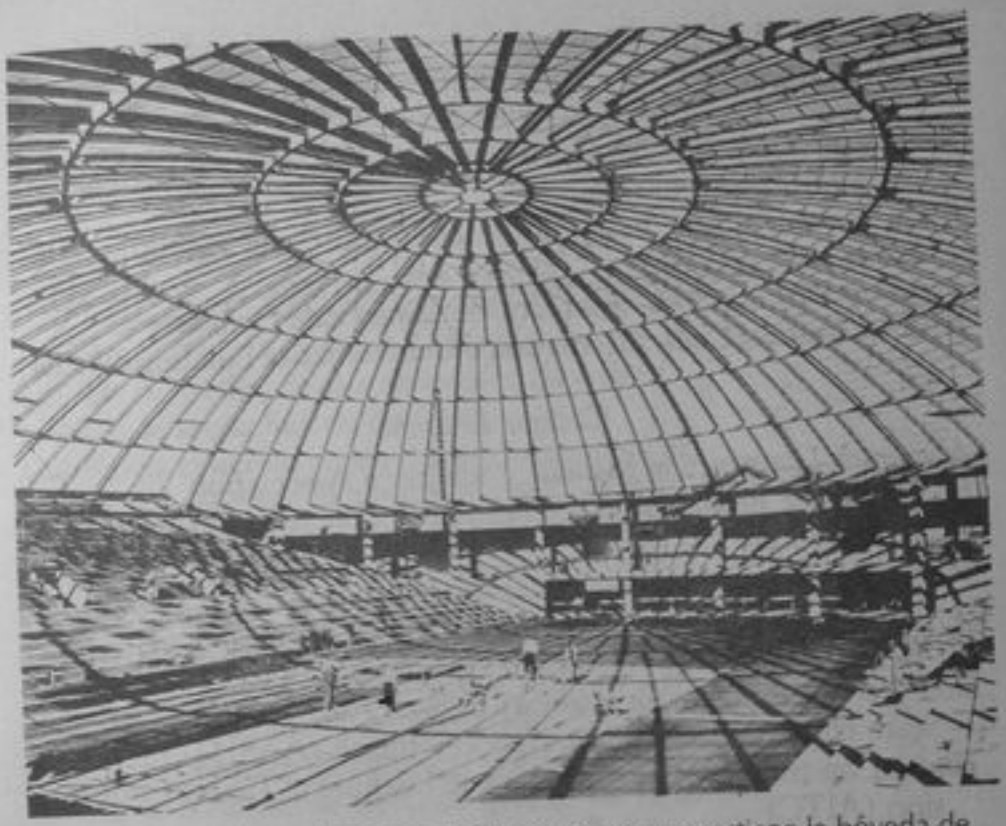


Fig. 1–12

Marcos. Los marcos se usan a menudo en edificios y se componen de vigas y columnas que están articuladas o bien son rígidas en sus conexiones, figura 1–12. Igual que las armaduras, los marcos pueden ser bidimensionales o tridimensionales. La carga en un marco ocasiona flexión en sus miembros, y debido a las conexiones rígidas, esta estructura es generalmente "indeterminada" desde el punto de vista del análisis. La resistencia de un marco se deriva de las interacciones de momento entre las vigas y las columnas en los nudos rígidos y, en consecuencia, los beneficios económicos de usar un marco dependen de la eficiencia que se obtiene al usar tamaños menores de vigas respecto a tamaños mayores en las columnas debido a la acción "viga-columna" causada por la flexión en los nudos.

Estructuras superficiales. Una *estructura superficial* está hecha de un material cuyo espesor es muy pequeño en comparación con sus otras dimensiones. Algunas veces este material es muy flexible y puede tomar la forma de una tienda de campaña o de una estructura inflada con aire. En ambos casos, el material actúa como una membrana sometida a tensión pura.

Las estructuras superficiales también pueden hacerse con materiales rígidos como concreto reforzado. En este caso pueden dársele formas de placas plegadas, cilindros o paraboloides hiperbólicos, y entonces se les llama *placas delgadas* o *cascarones*. Estas estructuras actúan como cables o arcos ya que soportan sus cargas principalmente en tensión o en compresión, con muy poca flexión. A pesar de esto, las



Las costillas y trabes anulares forman la estructura que sostiene la bóveda de techo de una pista para patinar sobre hielo.

placas o los cascarones son muy difíciles de analizar debido a la geometría tridimensional de sus superficies. Tal análisis va más allá del alcance de este texto y es materia de libros dedicados enteramente a ese tema.

1.3 Cargas

La carga de diseño de una estructura suele especificarse en códigos. En general, el ingeniero estructural trabaja con dos tipos de códigos: los códigos generales de construcción y los códigos de diseño. Los *códigos generales de construcción* especifican los requisitos de instituciones oficiales relativos a las cargas mínimas de diseño para estructuras y los estándares mínimos para las construcciones. Los *códigos de diseño* proporcionan normas técnicas detalladas y se usan para establecer los requisitos del diseño estructural. La tabla 1–1 muestra algunos de los códigos importantes usados en la práctica. Sin embargo, debe quedar claro que los códigos proporcionan sólo una guía general para el diseño. La *responsabilidad final* del diseño reside en el ingeniero estructural.

El diseño en sí de una estructura comienza con aquellos elementos que están sometidos a las cargas principales que debe tomar la estructura y procede en secuencia con los varios elementos de soporte hasta que se llega a la cimentación. Así, por ejemplo, en primer lugar se

Tabla 1–1 Códigos

Códigos generales de construcción

American National Standard Building Code, American National Standards Institute (ANSI)
Basic Building Code, Building Officials and Code Administrators International
Standard Building Code, Southern Building Code Congress
Uniform Building Code, International Conference of Building Officials

Códigos de diseño

Aluminum Construction Manual, Aluminum Association
Building Code Requirements for Reinforced Concrete, American Concrete Institute (ACI)
Manual of Steel Construction, American Institute of Steel Construction (AISC)
PCI Design Handbook, Prestressed Concrete Institute (PCI)
Standard Specifications for Highway Bridges, American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO)
Timber Construction Manual, American Institute of Timber Construction (AITC)
Manual for Railway Engineering, American Railway Engineering Association (AREA)

diseñaría la losa de piso de un edificio, seguida por las vigas, columnas y finalmente por las zapatas de la cimentación. Por tanto, para diseñar una estructura, es necesario primero especificar las cargas que actuarán sobre ella. Generalmente una estructura está sometida a varios tipos de cargas. A continuación se presenta un breve análisis de esas cargas para ilustrar cómo debe uno considerar sus efectos en la práctica.

Cargas muertas

Las *cargas muertas* consisten en los pesos de los diversos miembros estructurales y en los pesos de cualesquiera objetos que estén permanentemente unidos a la estructura. Entonces, para un edificio, las cargas muertas comprenden los pesos de las columnas, vigas y trabes, losas de piso, el techo, muros, ventanas, plomería, instalación eléctrica y otros dispositivos diversos.

En algunos casos, una carga muerta estructural puede estimarse satisfactoriamente por medio de fórmulas basadas en los pesos y tamaños de estructuras similares. Con experiencia, se puede también "estimar" la magnitud de esas cargas. Sin embargo, una vez determinados los materiales y tamaños de los diversos componentes de la estructura, sus pesos pueden determinarse a partir de tablas que dan

sus densidades. Una porción de una de tales tablas, tomada del American National Standard Building Code (Código estadounidense de normas de construcción), se da en la tabla 1–2. El cálculo de las cargas muertas con base en los datos tabulados en la tabla 1–2 es bastante directo, como se muestra en el ejemplo 1–1 de este texto.

Tabla 1–2 Cargas muertas mínimas de diseño*

	lb/ft^2
Muros	
Ladrillo de arcilla, de alta absorción, de 4 in.	34
Ladrillo de arena limosa, de 4 in.	38
Ladrillo de concreto de agregado grueso, de 4 in.	46
Ladrillo de concreto de agregado ligero, de 4 in.	33
Ladrillo de arcilla, de alta absorción, de 8 in.	69
Ladrillo de arcilla, de mediana absorción, de 8 in.	79
Ladrillo de arcilla, de baja absorción, de 8 in.	89
Ladrillo de arena limosa, de 8 in.	74
Ladrillo de concreto de agregado grueso, de 8 in.	89
Ladrillo de concreto de agregado ligero, de 8 in.	68
Bloque de concreto de agregado grueso, de 8 in.	55
Bloque de concreto de agregado grueso, de 12 in.	85
Bloque de concreto de agregado ligero, de 8 in.	35
Bloque de concreto de agregado ligero, de 12 in.	55
Mamparas	
Yeso sólido de 2 in.	20
Yeso sólido de 4 in.	32
Pies derechos de madera de 2 × 4, sin enyesar	4
Pies derechos de madera de 2 × 4, enyesadas por un lado	12
Pies derechos de madera de 2 × 4, enyesadas por los dos lados	20
Losas de concreto	
Concreto, grava reforzada, por pulgada de espesor	$12\frac{1}{2}$
Concreto, grava simple, por pulgada de espesor	12
Concreto reforzado, peso ligero, por pulgada de espesor	9
Concreto simple, peso ligero, por pulgada de espesor	$8\frac{1}{2}$
Concreto de ceniza volcánica, por pulgada de espesor	9
Techos	
Yeso sobre teja o concreto	5
Listones metálicos suspendidos y yeso	10
Tejas asfálticas	2
Tableros de fibra, $\frac{1}{2}$ in.	0.75

*Reproducida con autorización de la American National Standard Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ANSI A58.1–1982. Las copias de estas especificaciones pueden adquirirse en la ANSI, 1430 Broadway, Nueva York, N.Y. 10018.

Ejemplo 1–1

La viga de piso en la figura 1–13 se usa para soportar una losa de concreto reforzado de peso ligero de 6 ft. de ancho y 4 in. de espesor. El fondo de la losa está recubierto de yeso. Además, un muro de bloques de concreto de agregado ligero de 8 ft. de altura y 12 in. de ancho se apoya directamente sobre el patín superior de la viga. Determine la carga sobre la viga en libras por pie de longitud de viga.

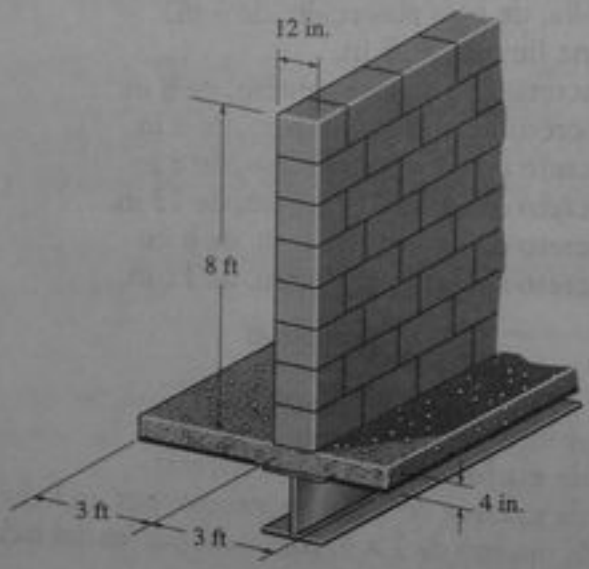


Fig. 1–13

Solución

Usando los datos en la tabla 1–2, tenemos

Losa de concreto	[9 lb/(ft² · in.)](4 in.)(6 ft)	= 216 lb/ft
Plafón de yeso	(5 lb/ft²)(6 ft)	= 30 lb/ft
Muro de bloque	(55 lb/ft²)(8 ft)	= 440 lb/ft
Carga total		686 lb/ft *Resp.*

Cargas vivas

Las *cargas vivas* pueden variar en magnitud y localización, y pueden ser causadas por los pesos de objetos colocados temporalmente sobre una estructura, por vehículos en movimiento o por fuerzas naturales. Las cargas vivas mínimas especificadas en los códigos se determinan estudiando la historia de sus efectos sobre estructuras existentes. Usualmente, esas cargas incluyen un margen para tener una protección contra deflexiones excesivas o sobrecargas repentinas. En el capítulo 6 veremos procedimientos para especificar la localización apropiada de las cargas vivas en la estructura de modo que éstas ocasionen los mayores esfuerzos o deflexiones en los miembros. Veremos ahora diversos tipos de cargas vivas.

Cargas en edificios. Se supone que los pisos de edificios están sometidos a *cargas vivas uniformes*, que dependen del propósito para el cual el edificio es diseñado. Esas cargas están tabuladas en códigos locales, estatales o nacionales. Un ejemplo representativo de esas *cargas mínimas uniformes*, tomadas del American National Standard Building Code, se muestra en la tabla 1–3. Estos valores se determinaron con base en la historia de carga de varios edificios. Ellos incluyen márgenes como protección contra la posibilidad de sobrecarga debido a cargas de construcción y requisitos de servicio. Además de las cargas uniformes, algunos códigos especifican *cargas vivas concentradas mínimas*, causadas por carretillas, automóviles, etc., que deben aplicarse también en cualquier punto del sistema de piso. Por ejemplo, cargas vivas, tanto uniformes como concentradas deben considerarse en el diseño de la losa de un estacionamiento para automóviles.

Tabla 1–3 Cargas vivas mínimas*

Ocupación o uso	*Carga viva (lb/ft²)*	*Ocupación o uso*	*Carga viva (lb/ft²)*
Áreas de reunión y teatros		Edificios de oficinas	
Asientos fijos	60	Vestíbulos	100
Asientos removibles	100	Oficinas	50
Salones de baile	100	Residencial	
Garages (sólo automóviles)	50	Casas (una y dos familias)	40
Bodegas de almacenamiento		Hoteles y casas multifamiliares	40
Ligero	125	Salones de clase	40
Pesado	250		

* Reproducido con autorización de la American National Standard Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures, ANSI A58.1–1982, pág. 10.

Para algunos tipos de estructuras muchos códigos permiten una *reducción* en la carga viva uniforme para un *piso*, ya que es improbable que la carga viva prescrita se presente simultáneamente en la estructura entera en un momento dado. Por ejemplo, ANSI A58.1–1982 permite una reducción de la carga viva en un miembro que tenga un *área de influencia* de 400 ft² o mayor. Esta carga viva reducida se calcula usando la siguiente ecuación.

$$L = L_o\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_I}}\right) \qquad (1\text{–}1)$$

donde

L = carga viva de diseño reducida por pie cuadrado de área soportada por el miembro

L_o = carga viva de diseño no reducida por pie cuadrado de área soportada por el miembro (véase la tabla 1–3)

A_I = área de influencia en pie cuadrado igual a cuatro veces el área de piso tributaria o portadora de carga efectiva para una columna, y a dos veces el área de piso tributaria o portadora de carga efectiva para una viga.*

La carga viva reducida definida por la ecuación 1–1 está limitada a no menos que 50% de L_o para miembros que soportan un piso o a no menos que 40% de L_o para miembros que soportan más de un piso. Ninguna reducción se permite para estructuras usadas para reuniones públicas, garajes o techos. El ejemplo 1–2 ilustra su aplicación.

Cargas de puentes. En Estados Unidos, las cargas vivas de diseño para puentes carreteros están especificadas en el código de la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) (Asociación Estadounidense de Funcionarios del Transporte y Carreteras Estatales); el diseño de puentes ferrocarrileros se basa en las especificaciones de la American Railway Engineering Association (AREA) (Asociación Estadounidense de Ingeniería Ferroviaria). Ambos códigos dan las cargas y la separación de las ruedas de diferentes tipos de camiones y trenes. Para el diseño, una serie de tales cargas se colocan una junto a otra dentro de regiones críticas del puente y se calculan los esfuerzos máximos por carga viva en los miembros. Además, como los vehículos están en movimiento continuo, cualquier rebote que ocurre implica un impacto de las cargas sobre el puente. Para tomar esto en cuenta, los códigos AASHTO y AREA dan fórmulas empíricas usadas para determinar la *fracción de impacto*, que especifica el porcentaje en que debe incrementarse la carga viva máxima. En la sección 6.6 se verán ejemplos específicos de tales fórmulas así como de las cargas de vehículos.

* Ejemplos específicos sobre la determinación de áreas tributarias para vigas y columnas se dan en la sección 2.1.

Ejemplo 1–2

Un edificio de oficinas de dos niveles tiene columnas interiores separadas entre sí a 22 ft en dos direcciones perpendiculares. Si la carga de techo (plano) es de 20 lb/ft², determine la carga viva reducida soportada por una columna interior típica de la planta baja.

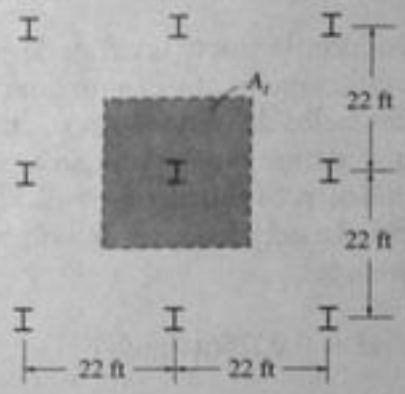


Fig. 1–14

Solución

Como se muestra en la figura 1–14, cada columna interior tiene un área tributaria o área cargada efectiva de $A_t = (22\text{ ft})(22\text{ ft}) = 484\text{ ft}^2$. Una columna de la planta baja soporta entonces una carga viva de techo de

$$F_R = (20\text{ lb/ft}^2)(484\text{ ft}^2) = 9680\text{ lb} = 9.68\text{ k}^*$$

Esta carga no se reduce, ya que no es una carga de piso. Para el segundo piso, la carga viva se toma de la tabla 1–3: $L_o = 50\text{ lb/ft}^2$. Como $A_t = 4A_T = 4(484\text{ ft}^2) = 1936\text{ ft}^2$ y $1936\text{ ft}^2 > 400\text{ ft}^2$, la carga viva puede reducirse usando la ecuación 1–1. Así,

$$L = 50\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{1936}}\right) = 29.55\text{ lb/ft}^2$$

La reducción de carga aquí es $(29.55/50)100\% = 59.1\% > 50\%$. Por lo tanto,

$$F_F = (29.55\text{ lb/ft}^2)(484\text{ ft}^2) = 14{,}300\text{ lb} = 14.3\text{ k}$$

La carga viva total soportada por la columna de la planta baja es entonces

$$F = F_R + F_F = 9.68\text{ k} + 14.3\text{ k} = 24.0\text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

*La unidad k se refiere a "kip", o sea, kilolibras. Así, 1 k = 1000 lb.

Cargas de viento. Cuando las estructuras impiden el flujo del viento, la energía cinética de éste se convierte en energía potencial de presión, lo que causa la carga de viento. El efecto del viento sobre una estructura depende de la densidad y velocidad del aire, del ángulo de incidencia del viento, de la forma y rigidez de la estructura y de la rugosidad de su superficie. Para propósitos de diseño, las cargas de viento pueden tratarse usando un procedimiento estático o uno dinámico.

En el *procedimiento estático*, la fluctuación de la presión causada por un viento soplando continuamente se aproxima por una *presión media* que actúa sobre los lados de barlovento y sotavento de la estructura. Esta presión q se define por su energía cinética $q = \frac{1}{2}\rho v^2$, donde ρ es la densidad del aire. Si tomamos $\rho = 2.376\ (10^{-3})$ slug/ft^3 y especificamos la velocidad v del viento en millas por hora, tenemos después de convertir unidades,

$$q \text{ psf} = 0.00256(v \text{ mi/h})^2 \qquad (1\text{–}2)$$

Aquí q se mide en libras por pie cuadrado y actúa sobre una superficie plana perpendicular a la velocidad del viento. Un viento de 100 mph suele usarse para el diseño de muchas estructuras de poca altura. Sin embargo, valores más exactos de la velocidad, que dependen de la localización geográfica de la estructura y de su elevación desde el suelo, pueden obtenerse en los *mapas de zonificación eólica*, dadas generalmente en los códigos.* Esos mapas son elaborados por el Servicio Meteorológico y representan en general la máxima velocidad del viento en una elevación especificada sobre el terreno, durante un periodo de recurrencia de 50 años. La elevación sobre el terreno es aquí importante ya que la velocidad del viento crece con la elevación. En consecuencia, cuanto más alta es la estructura, más severa resulta la carga de viento.

Una vez calculada la presión media q del viento, su magnitud se multiplica por varios coeficientes para obtener la presión p estática de diseño que se aplica a la estructura. Por ejemplo, en el código ANSI A58.1–1982 hay tres coeficientes que toman en cuenta la importancia de la estructura, la posibilidad de ráfagas de viento y la diferencia de presión afuera y dentro de la estructura. La selección de esos factores depende de la altura y orientación de la estructura, de sus características de vibración y del número de aberturas en la estructura. En el reporte ASCE se usan también coeficientes geométricos o de forma. Por ejemplo, para un edificio con *lados verticales*, el factor de forma para el lado de barlovento es de 0.8 y para el lado (opuesto)

* Véase "Wind Forces on Structures", *Trans. ASCE*, vol. 126, parte 2, 1961; también *Building Code Requirements for Minimum Design Loads in Buildings and Other Structures*, ANSI A58.1–1982.

de sotavento es de 0.5. Por tanto, para un viento de 100 mph, la presión (o empuje) que actúa sobre el lado de barlovento es $p = 0.8q$ $= 0.8(0.00256)(100)^2 = 20.5$ lb/ft^2 y la succión (o tensión) sobre el lado de sotavento es $p = 0.5q = 0.5(0.00256)(100)^2 = 12.8$ lb/ft^2.

Para edificios altos o cuya forma o localización los hace sensibles al viento, se recomienda usar un *procedimiento dinámico* para determinar las cargas de viento. Esto requiere efectuar pruebas en túneles de viento de un modelo a escala del edificio y sus alrededores que simule el ambiente natural. Los efectos de la presión del viento sobre el edificio se determinan a partir de transductores de presión unidos al modelo. Además, si el modelo tiene características de rigidez en escala apropiada a la del edificio, pueden determinarse entonces las deflexiones dinámicas de éste.

Cargas de nieve. En algunas regiones, las cargas en techos debidas a la nieve pueden ser muy severas, por lo que la protección contra posibles fallas resulta muy importante. Las cargas de diseño dependen típicamente de la forma general del edificio y geometría del techo, de la exposición al viento y de la localización. Igual que en el caso del viento, las cargas de nieve se determinan generalmente con ayuda de un mapa de zonas, el cual suele registrar intervalos de recurrencia de 50 años de alturas extremas de nieve. Por ejemplo, en algunos estados del oeste y noreste de Estados Unidos, es común usar 45 lb/ft^2 para el diseño. Ningún código puede cubrir todas las implicaciones de este tipo de carga. En vez de ello, el ingeniero debe usar su buen juicio respecto a la posibilidad de considerar efectos adicionales causados por lluvia, movimiento de la nieve acumulada y si al edificio diseñado debe proporcionársele calefacción.

Cargas de sismo. Los sismos producen cargas sobre una estructura por medio de la interacción del movimiento del suelo y las características de respuesta de la estructura. Esas cargas resultan de la distorsión en la estructura causada por el movimiento del suelo y la resistencia lateral de ésta. Sus magnitudes dependen de la cantidad y tipo de aceleraciones del suelo, así como de la masa y rigidez de la estructura. Para adquirir una idea de la naturaleza de las cargas sísmicas, considere el modelo simple estructural mostrado en la figura 1–15. Este modelo puede representar un edificio de un solo piso, donde el bloque superior es la masa "concentrada" del techo y el bloque intermedio es la rigidez concentrada de todas las columnas del edificio. Durante un sismo, el suelo vibra tanto horizontal como verticalmente. El movimiento vertical es ligero y usualmente se desprecia en el diseño. Como consecuencia de las aceleraciones horizontales, las fuerzas cortantes en la columna tratan de poner el bloque en movimiento secuencial con el suelo. Si la columna es *rígida* y el bloque tiene una masa *pequeña*, el periodo de vibración del bloque será *corto* y el bloque se acelerará con el mismo movimiento que el

Fig. 1–15

Otras cargas naturales. Otros distintos tipos de cargas también deben considerarse en el diseño de una estructura, dependiendo de su localización o uso. Entre éstas se cuentan el efecto de explosiones, cambios de temperatura y los asentamientos diferenciales de la cimentación. Igual que para los otros efectos mencionados antes, los códigos de diseño especifican usualmente los límites de esas cargas y las combinaciones en que deben aplicarse simultáneamente para causar los efectos máximos realistas de carga viva sobre la estructura.

BIBLIOGRAFÍA

American Institute of Steel Construction, Inc. *Manual of Steel Construction*, 8th ed., AISC, Inc., New York, 1980.

American National Standard Building Code Requirements for Minimum Design Loads in Buildings and Other Structures, 1990, Am. Nat. Standards Inst., New York.

American Society of Civil Engineers, "Locomotive Loadings for Railroad Bridges," *Transactions*, ASCE, Vol. 86, 1923.

American Society of Civil Engineers, "Wind Bracing in Steel Buildings," *Transactions*, ASCE, Vol. 105, 1940, 1713–1739.

American Society of Civil Engineers, "Wind Forces on Structures," *Transactions*, ASCE, Structural Division, 84, Part I, 1958, and 126, Part II, 1961.

Basic Building Code, Building Officials and Code Administrators International, Chicago, Il.

PCI Design Handbook, Prestressed Concrete Institute, Chicago, 1971.

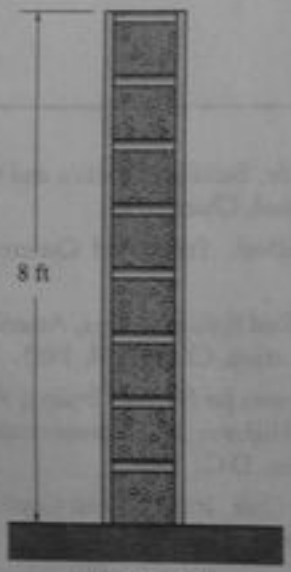
Specifications for Steel Railway Bridges, American Railway Engineering Association, Chicago, Il, 1965.

Standard Specifications for Highway Bridges, American Association of State Highway and Transportation Officials, 14th ed., Washington, D.C., 1989.

Uniform Building Code, International Conference of Building Officials, Whittier, Ca., 1988.

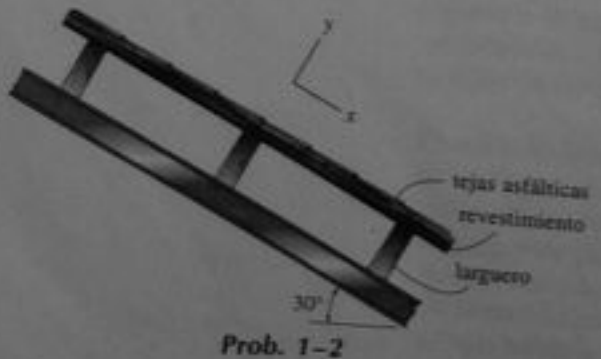
PROBLEMAS

1–1. La pared de un edificio consiste en bloques de concreto de agregado ligero de 12 in. con enyesado de 2 in. por ambos lados. Si el muro es de 8 ft de altura, determine la carga, en libras por pie de longitud de muro, que éste ejerce sobre el piso.



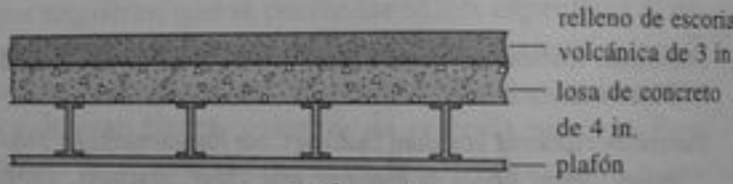
Prob. 1–1

1–2. La viga soporta el techo hecho de tejas asfálticas y tablones de revestimiento de madera. Si los tablones tienen un espesor de $1\frac{1}{2}$ in. y un peso específico de 50 lb/ft³ y la inclinación del techo es de 30°, determine la carga muerta (por pie cuadrado) del techo que es soportada en las direcciones x y y por los largueros.



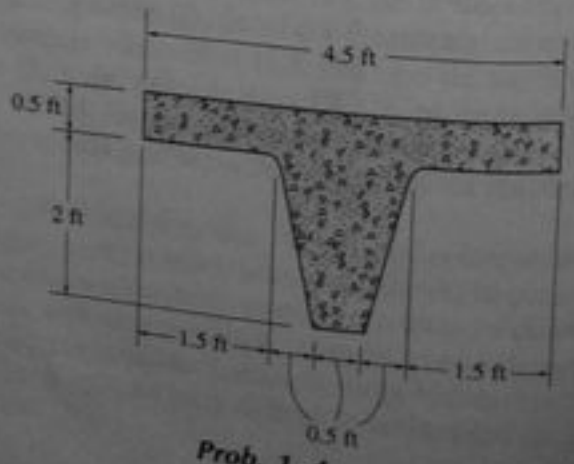
Prob. 1–2

1–3. El segundo piso de una fábrica de manufacturas ligeras está construido con una losa de concreto reforzado de 4 in. de espesor recubierta con una capa de concreto de escoria volcánica de 3 in. de espesor, como se muestra en la figura. Si el plafón suspendido del primer piso es de yeso con listones metálicos, determine la carga muerta de diseño en libras por pie cuadrado de área de piso.



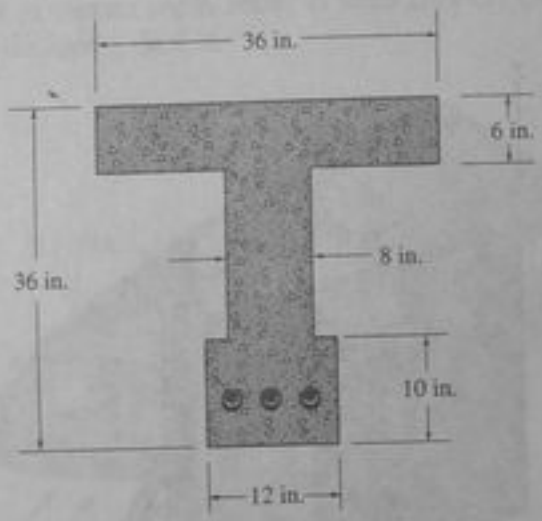
Prob. 1–3

***1–4.** La viga precolada de piso está hecha de concreto con peso específico de 150 lb/ft³. Si va a usarse para el piso de un edificio de oficinas, calcule sus cargas muerta y viva por pie de longitud de viga.



Prob. 1–4

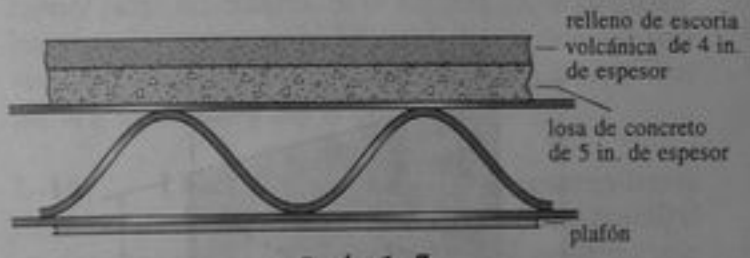
1–5. Una viga T usada en una bodega de almacenamiento pesado está hecha de concreto con peso específico de 125 lb/ft³. Determine la carga muerta por pie de longitud de viga y la carga viva sobre la parte superior de la viga por pie de longitud de viga. Desprecie el peso del acero de refuerzo.



Prob. 1–5

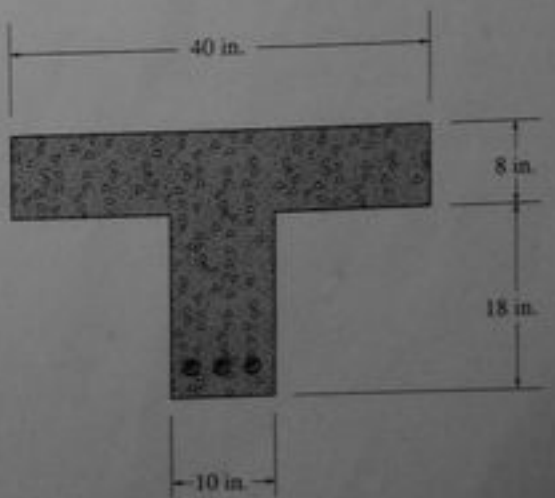
1–6. El piso de una bodega de almacenamiento pesado está hecho de concreto reforzado de peso ligero de 6 in. de espesor. Si el piso es una losa con longitud de 15 ft y ancho de 10 ft, determine la fuerza resultante causada por la carga muerta y por la carga viva.

1–7. El segundo piso de una fábrica de manufacturas ligeras está construido con una losa de concreto reforzado de 5 in. de espesor recubierta con una capa de concreto de escoria volcánica de 4 in. de espesor, como se muestra en la figura. Si el plafón suspendido del primer piso es de yeso con listones metálicos, determine la carga muerta de diseño en libras por pie cuadrado de área de piso.



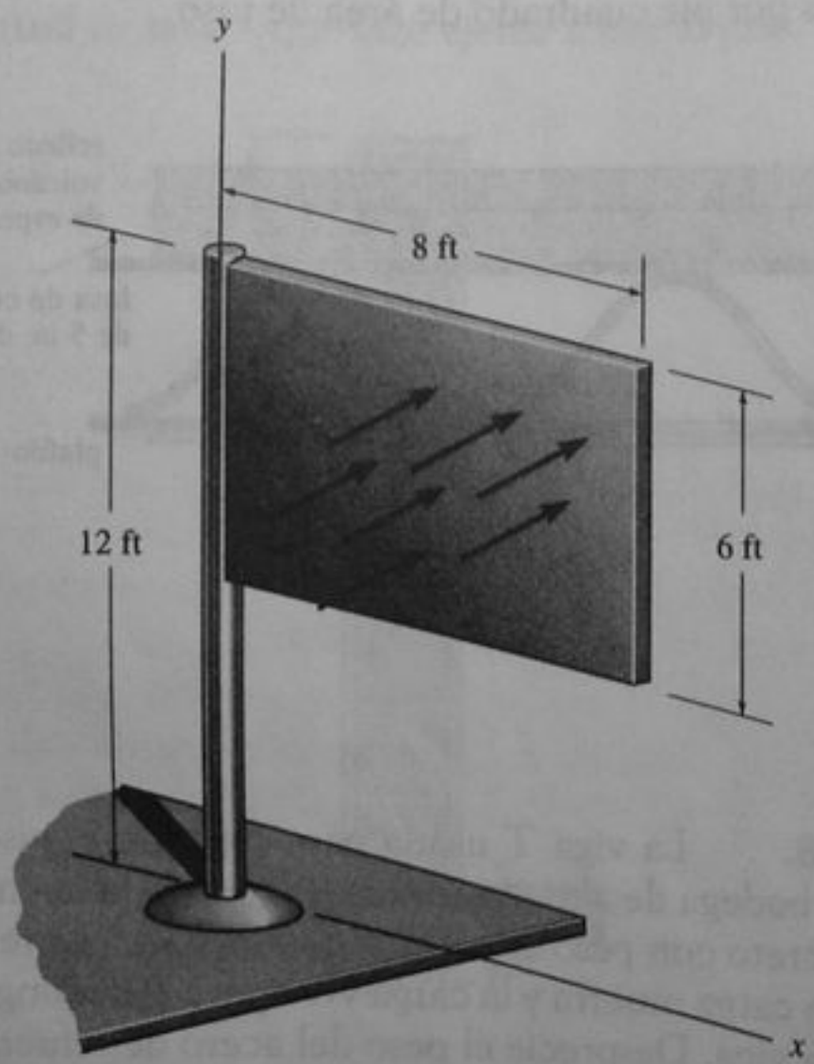
Prob. 1–7

***1–8.** La viga T usada para soportar el piso de una bodega de almacenamiento ligero está hecha de concreto con peso específico de 150 lb/ft³. Determine la carga muerta y la carga viva por pie de longitud de la viga. Desprecie el peso del acero de refuerzo.



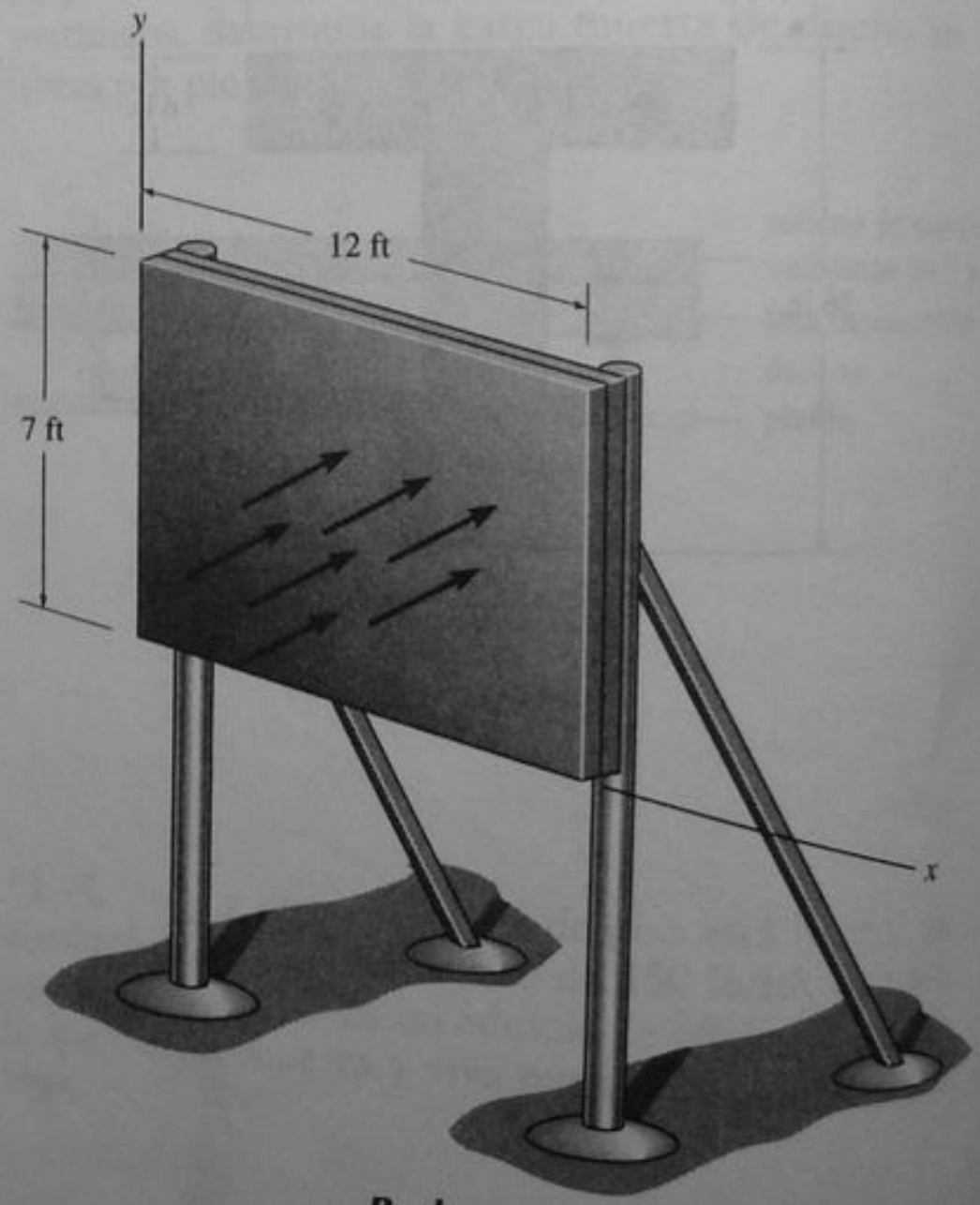
Prob. 1–8

1–9. La cara de un letrero está sometida a un viento de 125 millas por hora. Determine la fuerza resultante del viento y especifique las coordenadas x y y de su posición sobre el letrero. Use un factor de forma de 0.8.



Prob. 1–9

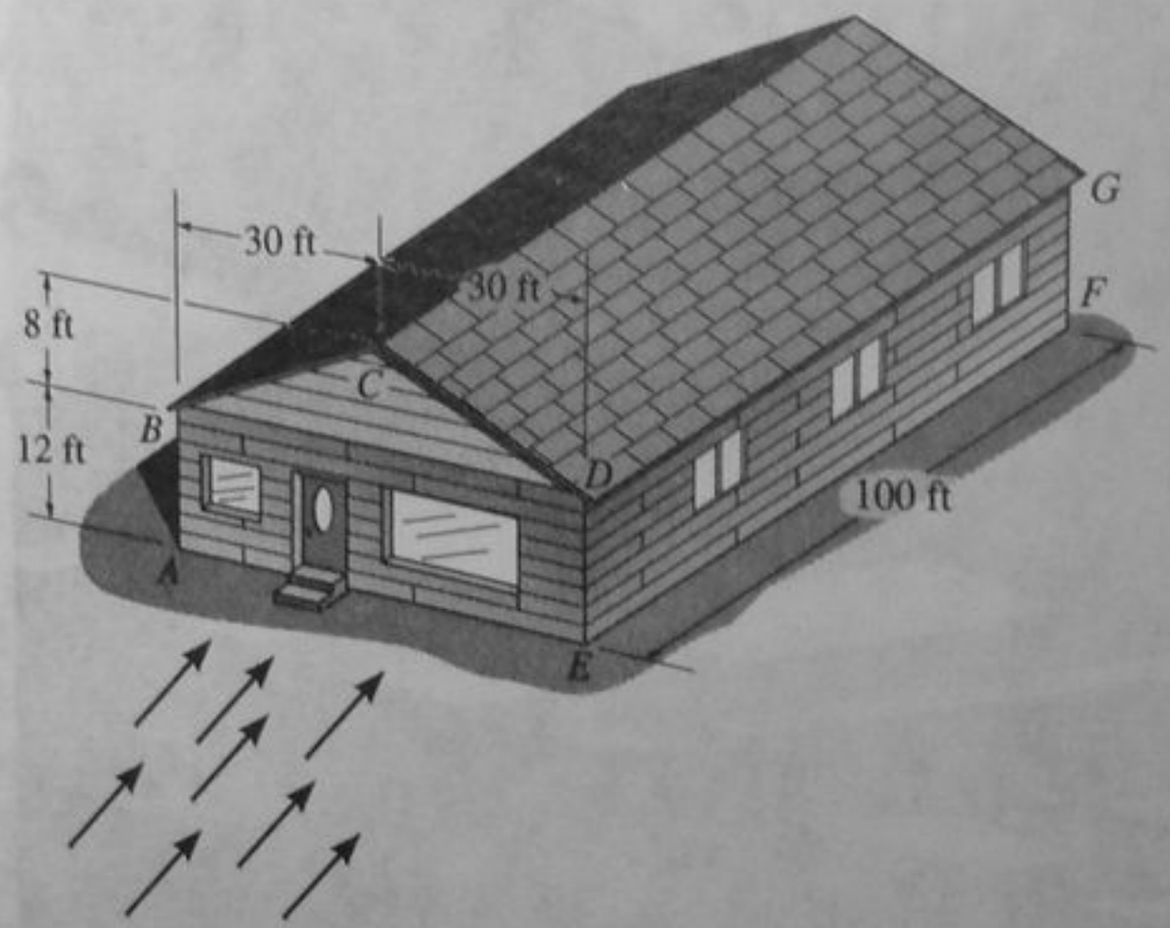
1–10. Determine la presión p que actúa sobre la cara del letrero sometido a un viento de 75 millas por hora. Use un factor de forma de 0.8. Si el letrero tiene un ancho de 12 ft y una altura de 7 ft, como se indica, ¿cuál es la fuerza resultante de esta presión? Especifique las coordenadas x y y sobre la cara del letrero en que esta fuerza actúa.



Prob. 1–10

1–11. El viento sopla directamente sobre el frente del edificio con una velocidad de 100 millas por hora. Si el factor de forma para la pared *ABCDE* en el lado de barlovento es de 0.8, determine la fuerza resultante de empuje sobre esta pared.

*1–12. Resuelva el problema 1–11 considerando que el viento sopla sobre el lado *DEFG*. Use un factor de forma de 0.8.



Probs. 1–11/1–12

1–13. Una escuela de dos niveles tiene columnas interiores separadas entre sí por 15 ft en dos direcciones perpendiculares. Si se estima que la carga sobre el techo plano es de 20 lb/ft^2, determine la carga viva reducida soportada por una columna típica interior en (a) la planta baja y (b) el primer piso.

1–14. Un hotel de tres niveles tiene columnas interiores separadas entre sí por 20 ft en dos direcciones perpendiculares. Si se estima que la carga sobre el techo plano es de 30 lb/ft^2, determine la carga viva soportada por una columna típica interior en (a) la planta baja y (b) el primer piso.

1–15. Un edificio de oficinas de cuatro niveles tiene columnas interiores separadas entre sí por 30 ft en dos direcciones perpendiculares. Si se estima que la carga sobre el techo plano es de 30 lb/ft^2, determine la carga viva reducida soportada por una columna interior típica en la planta baja.

A menudo, los elementos de una estructura, como las vigas y trabes de esta estructuración, están conectados entre sí, de tal forma que el analísis resulta estáticamente determinado.

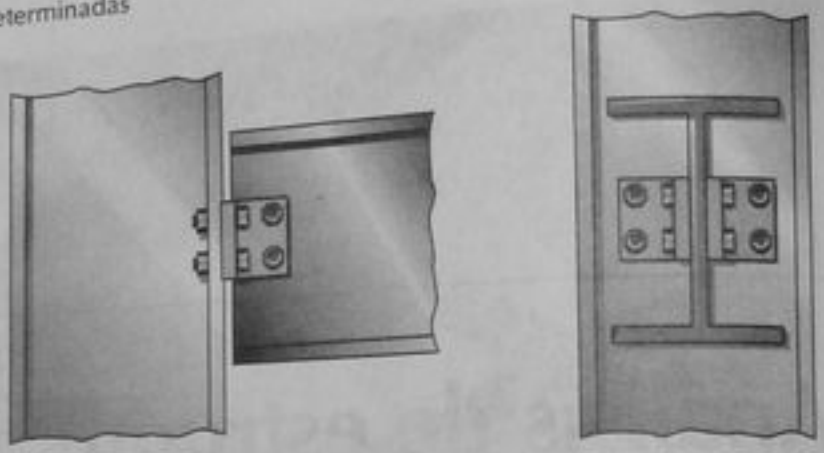
2

Análisis de estructuras estáticamente determinadas

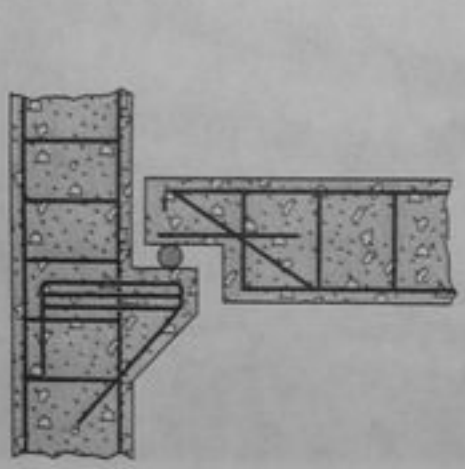
Los tipos de estructuras más comunes que el ingeniero tiene que analizar son las estructuras planas sometidas a un sistema de fuerzas en el mismo plano en que están contenidas. Por ello, en este capítulo dirigiremos nuestra atención al análisis de este tipo de estructuras. Comenzamos analizando la importancia de escoger un modelo analítico apropiado para una estructura, de modo que las fuerzas en ella puedan determinarse con precisión razonable. Luego estudiamos los criterios necesarios para la estabilidad estructural. Finalmente, se presenta el análisis de las estructuras planas estáticamente determinadas, conectadas por pasadores.

2.1 La estructura idealizada

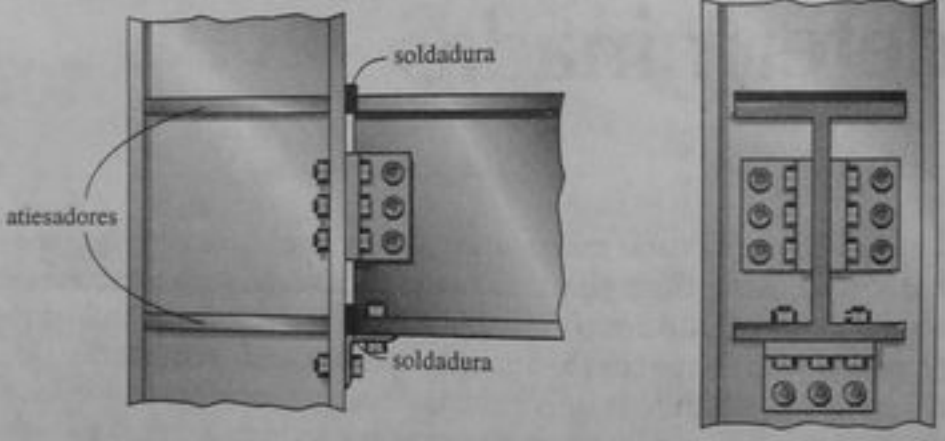
El análisis exacto de una estructura nunca puede en realidad llevarse a cabo, ya que siempre tienen que hacerse estimaciones de las cargas y de las resistencias de los materiales que componen la estructura. Además, los puntos de aplicación de las cargas deben también estimarse. Por esto, es importante que el ingeniero estructural desarrolle la habilidad de modelar o idealizar una estructura, de tal manera que él pueda efectuar un análisis práctico de las fuerzas en los miembros. En esta sección desarrollaremos los procedimientos básicos necesarios para hacer esto.



conexión típica "articulada" (en metal)
(a)

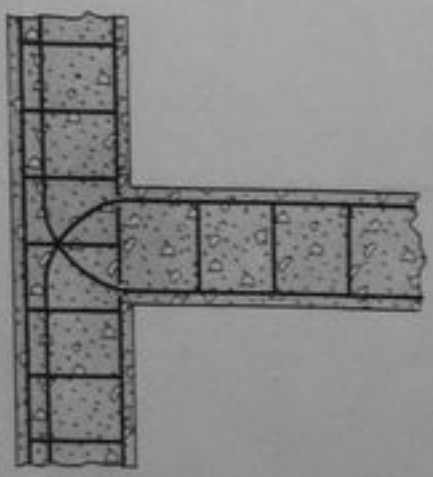


conexión típica con "apoyo de rodillo" (en concreto)
(a)



conexión típica "empotrada" (en metal)
(b)

Fig. 2–1



conexión típica "empotrada" (en concreto)
(b)

Fig. 2–2

Conexiones en los soportes

Los miembros estructurales se conectan entre sí de varias maneras que dependen de la intención del diseñador. Los dos tipos de uniones que se especifican con mayor frecuencia son la conexión por pasador y el nudo rígido. Una conexión por pasador permite pequeñas rotaciones, mientras que un nudo rígido no permite ninguna rotación relativa entre los miembros conectados y es, en consecuencia, más cara de fabricar. Ejemplos de esas conexiones, en metal y en concreto, respectivamente, se muestran en las figuras 2–1 y 2–2. En la mayoría de las estructuras de madera se supone que los miembros están conectados por pasador, ya que la unión a sus soportes con pernos o clavos, no restringe suficientemente la rotación de uno respecto al otro.

Los *modelos idealizados* usados en el análisis estructural que representan soportes de pasador y empotramientos así como nudos de

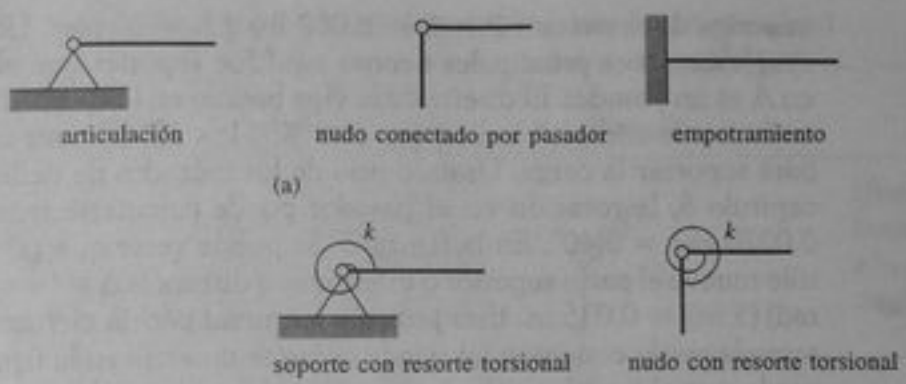


Fig. 2–3

pasador y nudos rígidos, se muestran en las figuras 2–3*a* y 2–3*b*. En realidad todas las conexiones tienen cierta rigidez respecto a rotaciones debido a la fricción y al comportamiento del material; por ello, un modelo más apropiado para un soporte o para un nudo sería el mostrado en la figura 2–3*c*. Si la constante *k* torsional del resorte es igual a cero, la unión es de pasador (articulación), y si $k \to \infty$, la unión o nudo es rígido.

Al seleccionar un modelo particular para cada soporte o nudo, el ingeniero debe ser consciente de cómo las hipótesis afectarán el desempeño real del miembro y de si las hipótesis son razonables para el diseño estructural. Por ejemplo, considere la viga de la figura 2–4*a*, que se usa para soportar una carga concentrada **P**. La conexión por medio de un perfil angular en el soporte *A* es como la de la figura 2–1*a* y puede por tanto idealizarse como un soporte típico de pasador. Además, el soporte en *B* proporciona un punto de contacto liso aproximado, por lo que puede idealizarse como un rodillo. El espesor de la viga puede despreciarse por ser pequeño en comparación con su longitud, de ahí que el modelo idealizado de la viga sea como se muestra en la figura 2–4*b*. El análisis de las cargas en esta viga debe dar resultados muy aproximados al análisis de las cargas en la viga real. Para mostrar que el modelo es apropiado, considere el caso específico de

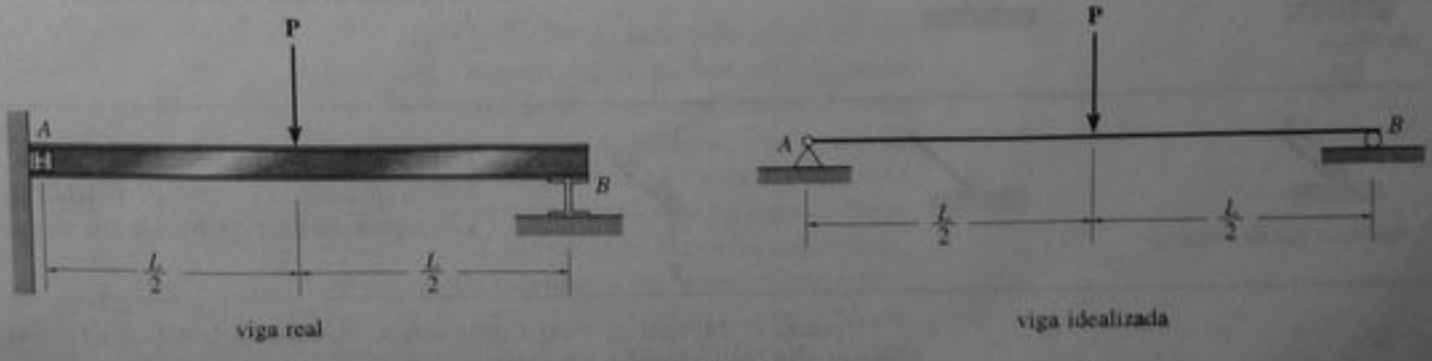
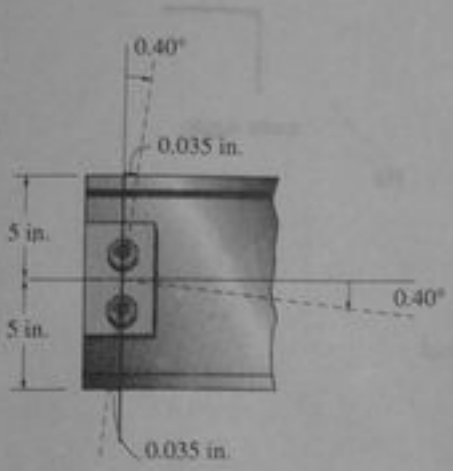


Fig. 2–4



(c)

una viga de acero con $P = 8$ k (8,000 lb) y $L = 20$ pies. Una de las simplificaciones principales hechas aquí fue suponer que el soporte en A es un pasador. El diseño de la viga basado en los procedimientos estándar de código,* indica que una W 11 × 22 debe ser adecuada para soportar la carga. Usando uno de los métodos de deflexión del capítulo 8, la rotación en el pasador puede calcularse igual a $\theta = 0.0070$ rad $= 0.40°$. En la figura 2–4c puede verse que tal rotación sólo mueve el patín superior o inferior una distancia $\Delta = \theta r = (0.0070$ rad$)(5$ in$) = 0.035$ in. Esta *pequeña magnitud* podría ciertamente ser tomada por la conexión fabricada como se muestra en la figura 2–1*a*, por lo que el pasador sirve como un modelo apropiado.

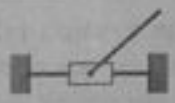
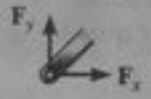
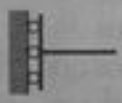
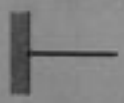
Otros tipos de conexiones muy comunes en estructuras coplanares se incluyen en la tabla 2–1. Es importante poder reconocer los símbolos para esas conexiones y los tipos de reacciones que ellas ejercen sobre los miembros conectados. Esto puede hacerse fácilmente observando cómo la conexión *impide* cualquier grado de libertad o desplazamiento del miembro. En particular, el soporte desarrollará una

Tabla 2-1 Soportes para estructuras coplanares

Tipo de conexión	*Símbolo idealizado*	*Reacción*	*Número de incógnitas*
(1) cable ligero; eslabón sin peso			Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa en la dirección del cable o eslabón.
(2) rodillos; mecedora			Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto. Simbólicamente, la fuerza puede tener cualquier sentido (esto es, hacia arriba o hacia abajo).
(3) superficie lisa de contacto			Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.

*Usando el *Manual of Steel Construction*, American Institute of Steel Construction, para un acero con esfuerzo de fluencia $F_y = 36$ k/in^2.

Tabla 2-1 Soportes para estructuras coplanares (continuación)

Tipo de conexión	*Símbolo idealizado*	*Reacción*	*Número de incógnitas*
(4) collarín liso conectado a un pasador			Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(5) pasador o articulación lisa			Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza.
(6) corredera collarín rígidamente conectado			Dos incógnitas. Las reacciones son una fuerza y un momento; simbólicamente, pueden tener cualquier sentido.
(7) empotramiento			Tres incógnitas. Las reacciones son el momento y las dos componentes de fuerza.

fuerza sobre el miembro si *impide la traslación* de éste y desarrollará un *momento* si *impide su rotación*. Por ejemplo, un miembro en contacto con una superficie lisa (3) se ve impedido de trasladarse sólo en una dirección, que es perpendicular o normal a la superficie. Por tanto, la superficie ejerce sólo una *fuerza normal* **F** sobre el miembro en esta dirección. La magnitud de esta fuerza representa *una incógnita*. Note también que el miembro puede girar libremente sobre la superficie, por lo que no puede desarrollarse un momento en la superficie sobre el miembro. Otro ejemplo es el caso (7) en que el soporte de empotramiento impide *tanto* la traslación como la rotación de un

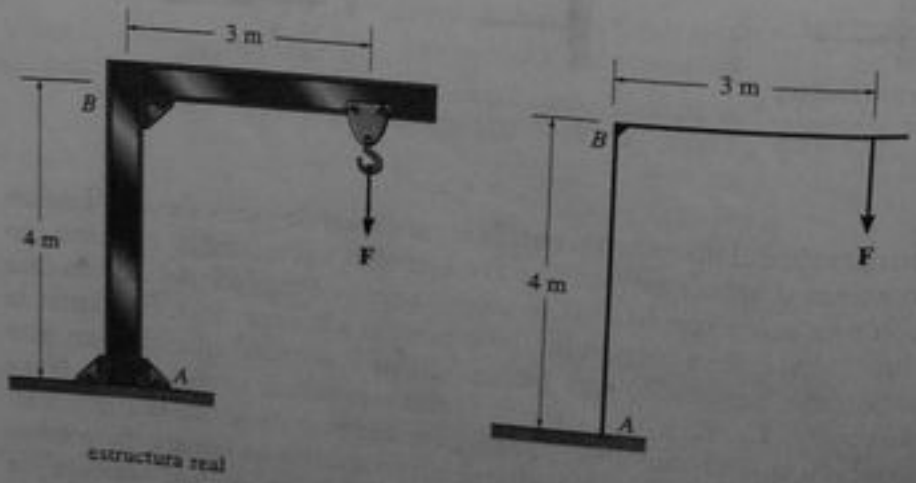
miembro en el punto de la conexión. Por tanto, este tipo de soporte ejerce dos componentes de fuerza y un momento sobre el miembro. La "rotación" del momento se encuentra en el plano de la página ya que el giro es impedido en ese plano. Por tanto, se tienen *tres incógnitas* en un empotramiento.

En realidad, todos los soportes estructurales ejercen *cargas superficiales distribuidas* sobre los miembros en contacto. Las fuerzas y momentos concentrados que se muestran en la tabla 2–1 representan *las resultantes* de esas distribuciones de carga. Esta representación es, por supuesto, una idealización; sin embargo, se usa aquí ya que el área de la superficie sobre la que actúa la carga distribuida es considerablemente *menor* que el área *total* superficial de los miembros conectados.

Estructura idealizada

Una vez expuestas las diversas maneras en que las conexiones en una estructura pueden idealizarse, podemos ahora analizar algunos de los medios usados por los ingenieros para representar los sistemas estructurales con base en modelos idealizados.

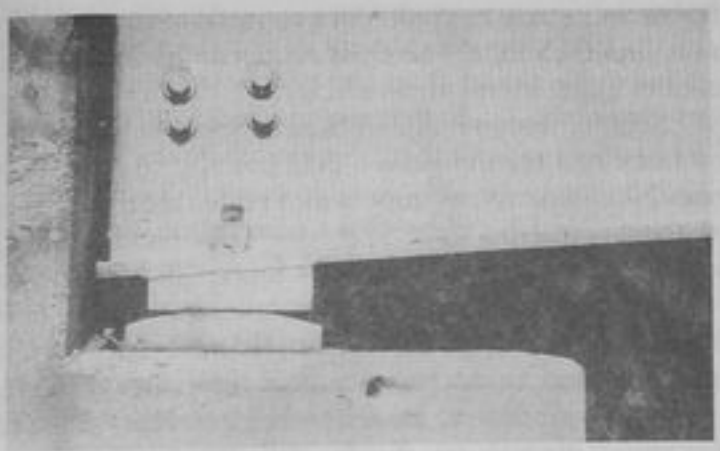
Como primer ejemplo consideremos la grúa viajera en la figura 2–5*a*. Para el análisis estructural podemos despreciar el espesor de los dos miembros principales y supondremos que el nudo *B* es rígido por construcción. Además, la conexión del soporte en *A* puede modelarse como un empotramiento y los detalles del trole pueden excluirse. Así, los miembros de la estructura idealizada se representan por dos líneas unidas, y la carga sobre el gancho se representa por una sola fuerza concentrada **F**, figura 2–5b. Esta estructura idealizada que se muestra aquí como un *dibujo de línea* puede ahora usarse como medio para aplicar los principios del análisis estructural que finalmente conducirá al diseño de sus dos miembros principales.



estructura real (a)

estructura idealizada (b)

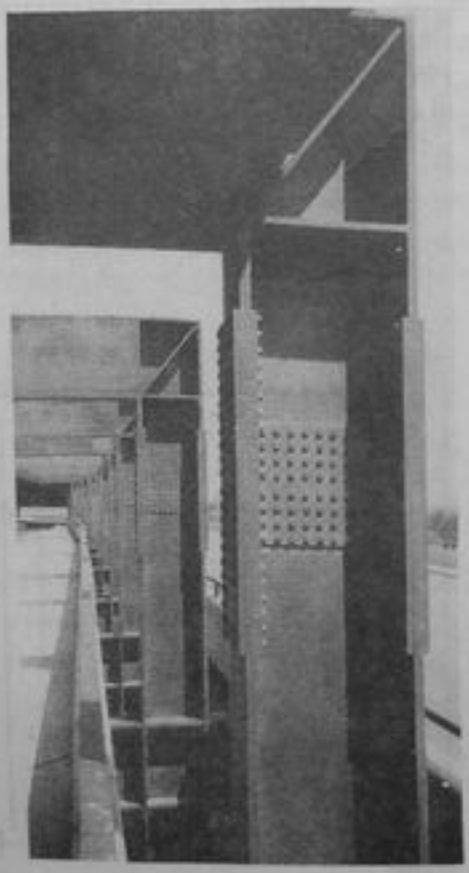
Fig. 2–5



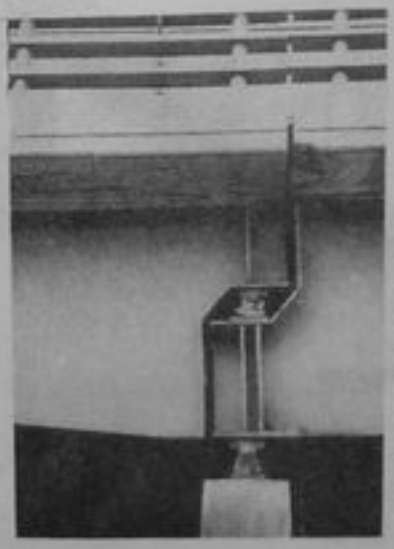
Soporte típico de mecedora o balancín usado para la trabe de un puente.

Este soporte está hecho con un material de baja resistencia a la fricción; por ello, puede modelarse como un rodillo.

Los rodillos con sus cojinetes de apoyo se usan para soportar las trabes de concreto preesforzado de un puente carretero.

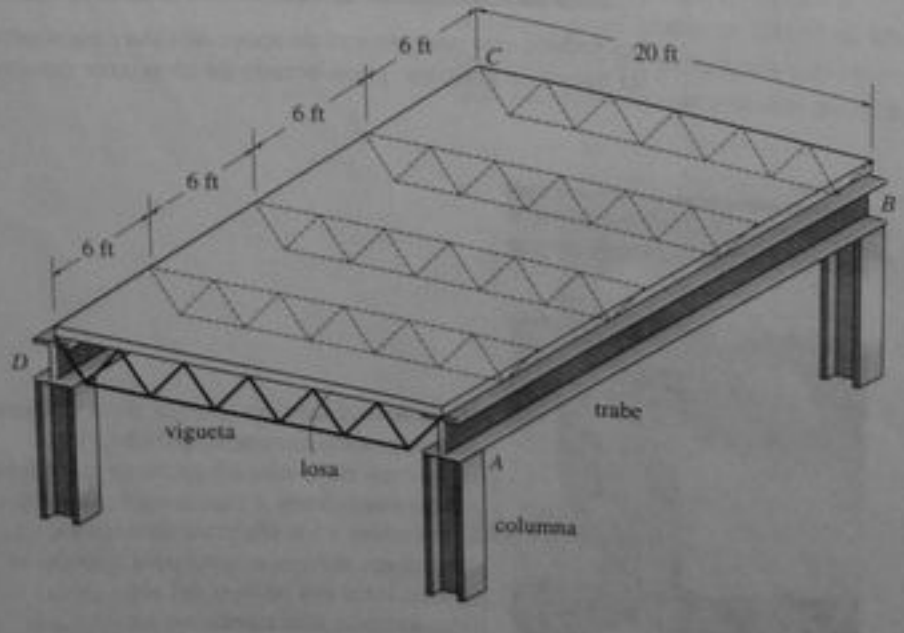


Una conexión soldada típica de un nudo rígido de rodilla en un marco de acero. Note cómo las placas de empalme se usan para formar una conexión rígida de columna.

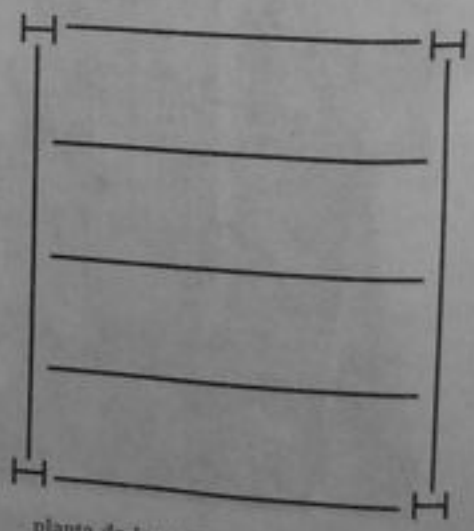


Observe la dilatación térmica de la cubierta de este puente carretero, debido a la inclinación de la mecedora. Note también el uso de atiesadores o placas verticales sobre la mecedora y los soportes de pasador. Los atiesadores son necesarios para impedir el pandeo local del patín o del alma de la trabe armada, que puede ser ocasionado por las grandes reacciones en el apoyo.

Las vigas y trabes se usan a menudo para soportar pisos de edificios. En particular, una *trabe* es el principal elemento portador de la carga del piso mientras que los menores elementos, de menor claro y conectados a las trabes, se llaman *vigas*. A menudo, las cargas aplicadas a una viga o trabe son transmitidas a ésta por el piso soportado por la viga o trabe. Nuevamente, es importante poder idealizar apropiadamente el sistema como una serie de modelos que puedan usarse para determinar, con buena aproximación, las fuerzas que actúan en los miembros. Considere por ejemplo la estructuración usada para soportar una losa típica del piso de un edificio, figura 2–6*a*. Aquí, la losa está soportada por *viguetas de piso* situadas a intervalos de 6 pies y éstas a su vez están soportadas por las dos trabes laterales *AB* y *CD*. Para el análisis es razonable suponer que las viguetas están conectadas mediante pasadores, rodillos, o ambos, a las trabes y que éstas están conectadas de la misma manera a las columnas. La vista superior de la planta de la estructuración para este sistema se muestra en la figura 2–6*b*. En este esquema "gráfico", note que las "líneas" que representan las viguetas no tocan las trabes y las líneas que representan a las trabes no tocan las columnas. Esto simboliza una conexión de apoyo simple mediante pasador o rodillo. Por otra parte, si se pretende que el plano de estructuración represente miembros conectados rígidamente, como aquellos que están soldados entre sí en vez de



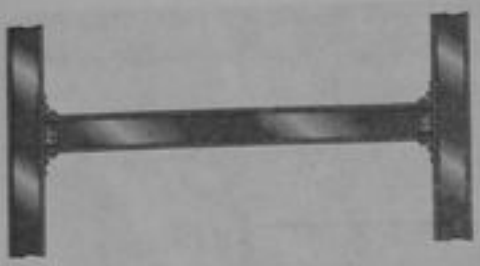
(a)



planta de la estructuración idealizada

(b)

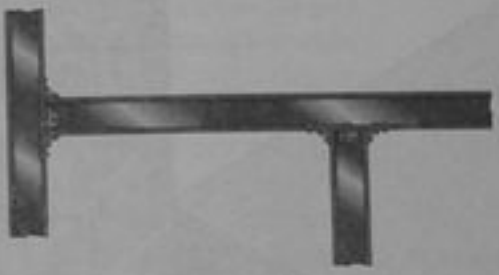
Fig. 2–6



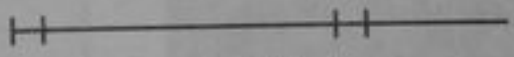
viga empotrada

viga idealizada

Fig. 2–7



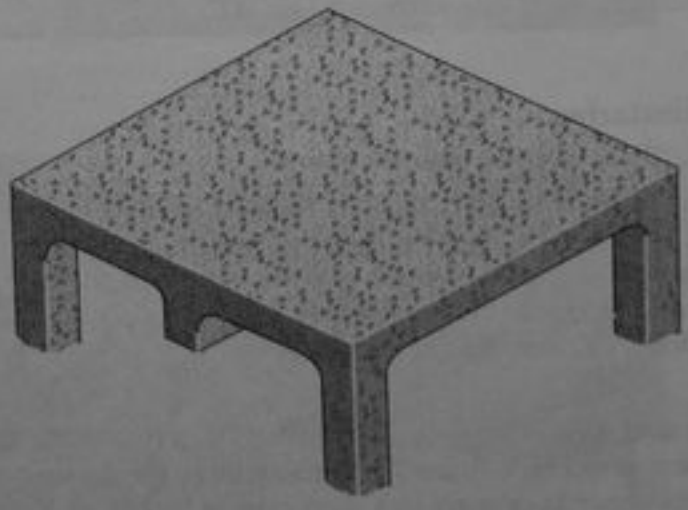
viga empotrada con voladizo



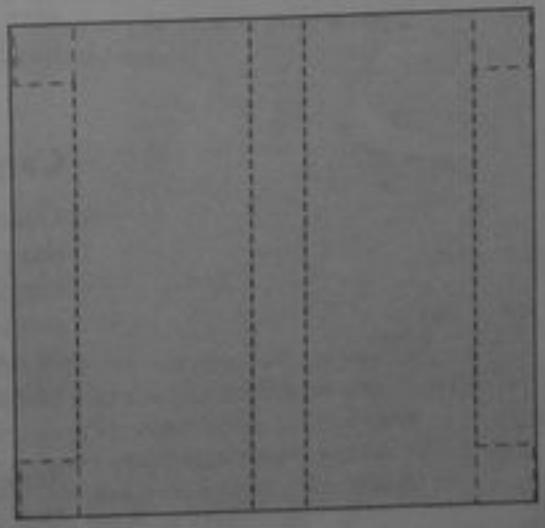
viga idealizada

Fig. 2–8

estar conectados mediante pasadores o rodillos, entonces las líneas para las vigas o trabes si tocan las columnas, como en la figura 2–7. Similarmente una viga empotrada con voladizo se representa en vista superior como en la figura 2–8. Si se usa construcción de concreto reforzado, las vigas y trabes se representan con líneas dobles. Estos sistemas están en general conectados rígidamente por lo que los miembros se dibujan tocando los soportes. Por ejemplo, la gráfica estructural para el sistema de concreto reforzado colado en obra en la figura 2–9*a* se muestra en vista superior en la figura 2–9*b*. Las líneas para las vigas están punteadas porque las vigas se encuentran bajo la losa.



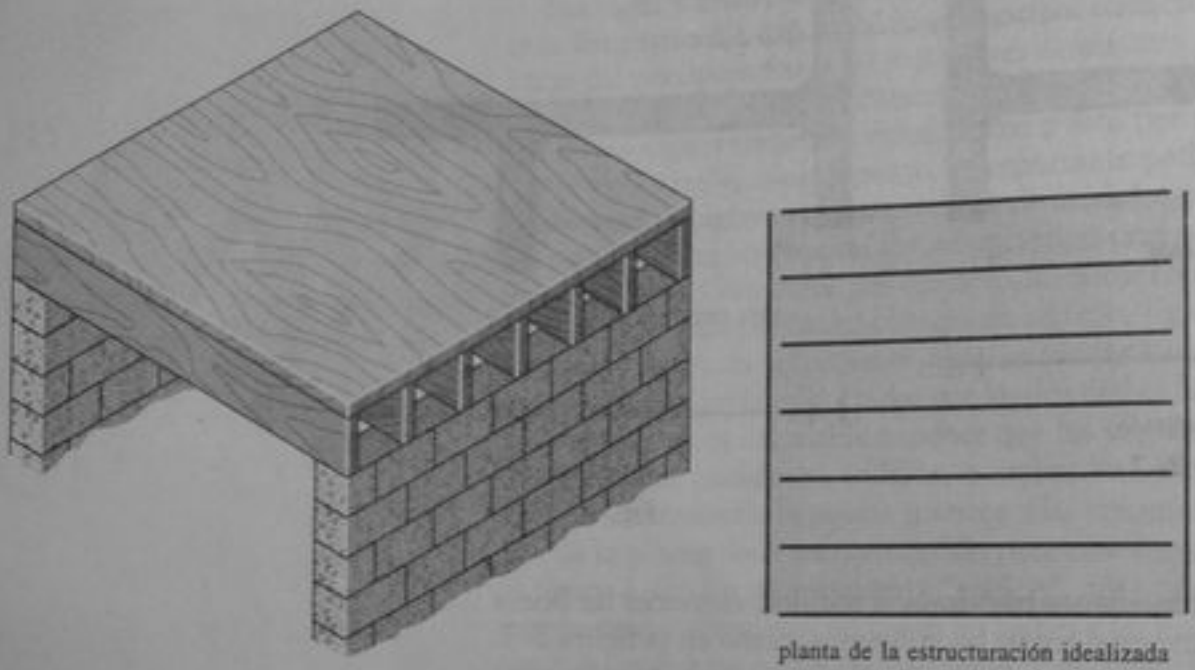
(a)



planta de la estructuración idealizada

(b)

Fig. 2–9



(a) (b)

Fig. 2–10

Las gráficas estructurales e idealizaciones para estructuras de madera son similares a las hechas para estructuras metálicas. Por ejemplo, el sistema estructural que se muestra en la figura 2–10*a* representa una construcción de vigas y muros en la cual la cubierta del techo está soportada por viguetas de madera que transmiten la carga a un muro de mampostería. Las viguetas pueden suponerse simplemente apoyadas sobre los muros, de modo que la planta de estructuración idealizada sería como el que se muestra en la figura 2–10*b*.

Cargas tributarias

Cuando superficies planas como muros, pisos o techos están soportadas por una estructura, es necesario determinar cómo se transmite la carga sobre esas superficies a los varios elementos de la estructura usada para soportarla. En general, hay dos maneras en que esto puede hacerse, que dependen de la geometría del sistema estructural, del material usado y del método de construcción.

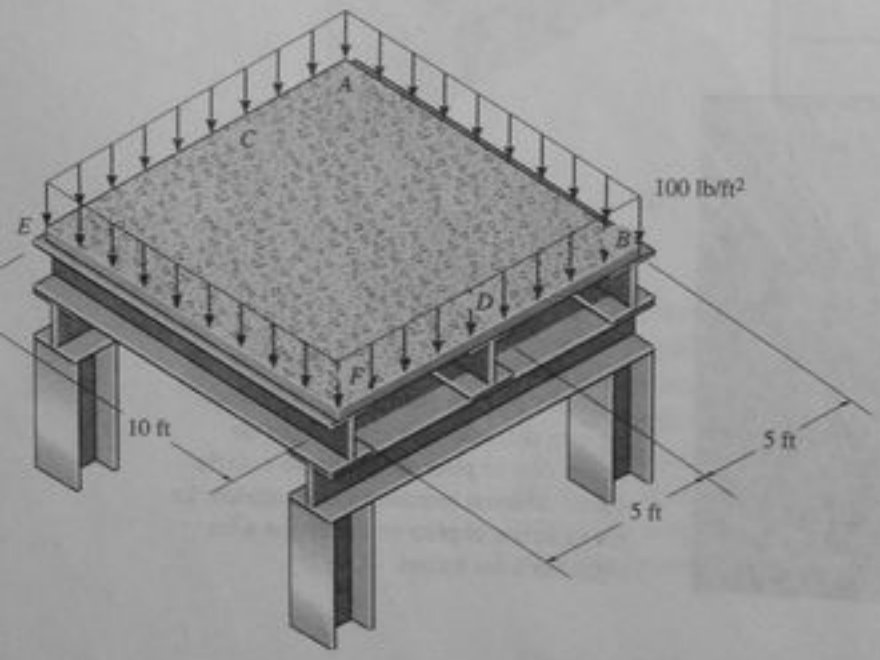
Sistema en una dirección. Se dice que una losa o cubierta soportada como se muestra en la figura 2–10 transmite su carga a los miembros de soporte por acción en una dirección; a la losa se le llama entonces *losa en una dirección*. Para ilustrar el método de transmisión de carga, consideremos el sistema de estructuración que se muestra en la figura 2–11*a* donde las vigas *AB*, *CD* y *EF* descansan sobre las

La estructura de este edificio consiste en viguetas de piso de concreto coladas en obra usando cimbra metálica. Estas viguetas están simplemente apoyadas sobre las trabes que a su vez están simplemente apoyadas sobre las columnas.

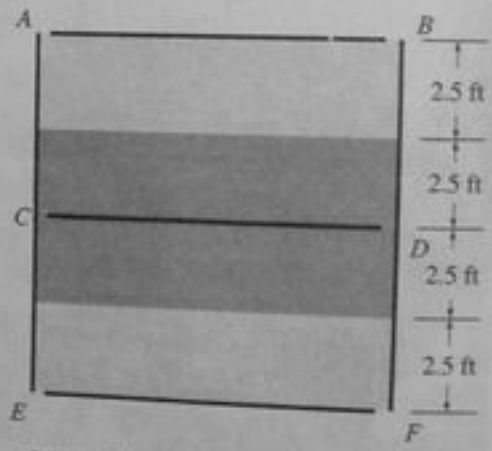
Ejemplo de una construcción de losa en una dirección en un edificio de acero con el piso de concreto colado sobre tableros metálicos corrugados. La carga sobre el piso se transmite a las vigas no a las trabes.

La carga de piso en este edificio se transmite primero por acción en una dirección a las viguetas de alma abierta que a su vez están soportadas por las trabes laterales o de fachada. Las trabes transmiten luego la carga a las columnas. Se usan bloques de mampostería para las paredes, pero éstas no se han diseñado como soporte estructural para las trabes.

trabes *AE* y *BF*. Si se coloca una carga uniforme de 100 lb/ft² sobre la losa, se supone entonces que la viga central *CD* soporta la carga que actúa sobre el *área tributaria* que aparece sombreada sobre la planta estructural en la figura 2–11*b*. El miembro *CD* está entonces sometido a una distribución *lineal* de carga de (100 lb/ft²)(5 ft) = 500 lb/ft, como se ve en la viga idealizada de la figura 2–11*c*. Las reacciones sobre esta viga (2,500 lb) se aplican entonces en el centro de las trabes *AE* (y *BF*), mostradas en forma idealizada en la figura 2–11*d*. Usando el mismo concepto, ¿advierte usted cómo la porción restante de la carga de la losa se transmite a los extremos de la trabe con un valor de 1,250 lb?

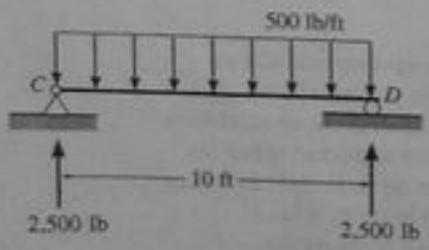


(a)



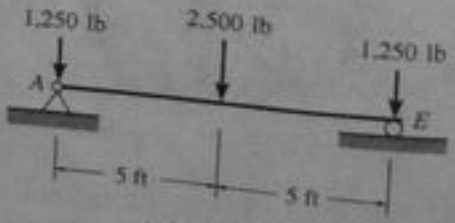
planta de la estructuración idealizada

(b)



viga idealizada

(c)

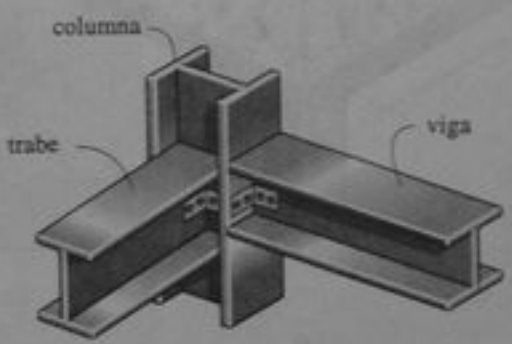


trabe idealizada

(d)

Fig. 2–11

En algunos sistemas de piso, las vigas y trabes se conectan a las columnas a la *misma elevación*, como en la figura 2–12*a*. Si este es el caso, la losa puede en algunas ocasiones considerarse también como "losa en una dirección". Por ejemplo, si la losa es de concreto reforzado con refuerzo en *sólo una dirección*, o el concreto se cuela sobre un tablero de metal corrugado, como en la figura 2–12*b*, entonces puede suponerse una acción en una dirección en la transmisión de la carga. Por otra parte, si la losa es plana y se refuerza en *dos direcciones*, entonces debe considerarse la *posibilidad* de que la carga se transmita a los miembros de soporte desde cualquiera de las dos direcciones. Por ejemplo, considere la losa y la planta estructural en la figura 2–12*c*. Como regla general, *si* $L_2 \geq L_1$ *y si la razón de claros* $(L_2/L_1) \geq 2$, *la losa se comportará como una losa en una dirección* ya que al hacerse L_1 más pequeña, las vigas *AB*, *CD* y *EF* proporcionan la mayor rigidez para tomar la carga.

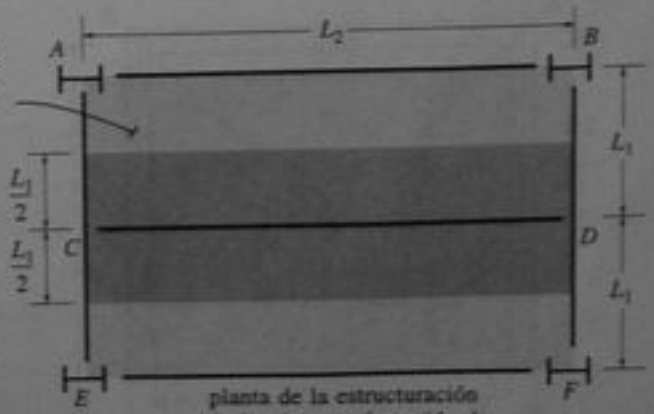


(a)

construcción típica de una losa en una dirección

(b)

losa de concreto reforzada en dos direcciones, colada sobre cimbra plana

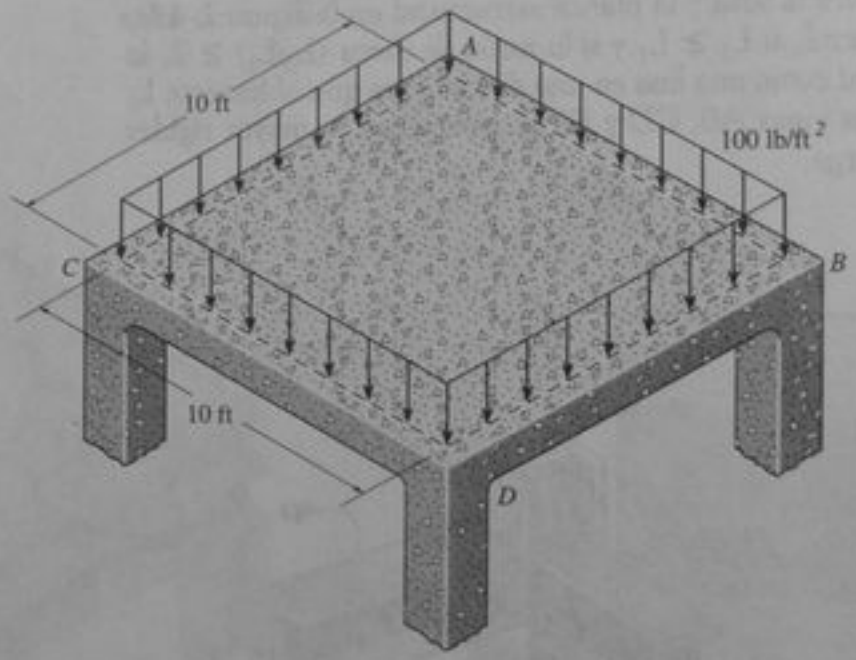


planta de la estructuración idealizada; para la acción de losa en una dirección se requiere que $L_2/L_1 \geq 2$

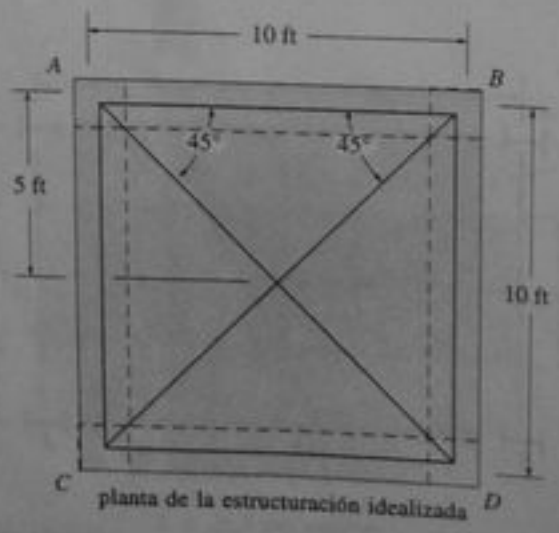
(c)

Fig. 2–12

Sistema en dos direcciones. Si la razón de claros en la figura 2–12*c* es $(L_2/L_1) < 2$, la carga se transmite a las vigas y trabes de soporte en dos direcciones y cuando éste es el caso, la losa se denomina *losa en dos direcciones*. Para mostrar un método de cómo tratar este caso, considere la losa cuadrada de concreto reforzado en la figura 2–13*a* la cual es soportada por cuatro vigas de borde de 10 ft. de longitud.

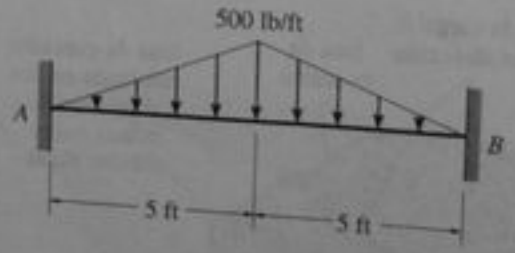


(a)



planta de la estructuración idealizada

(b)

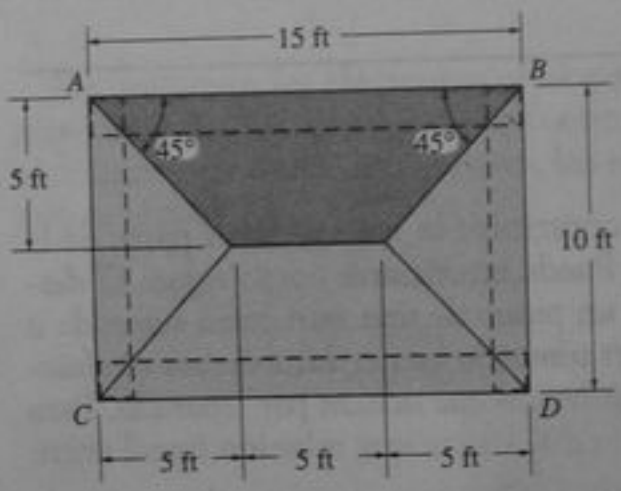


viga idealizada

(c)

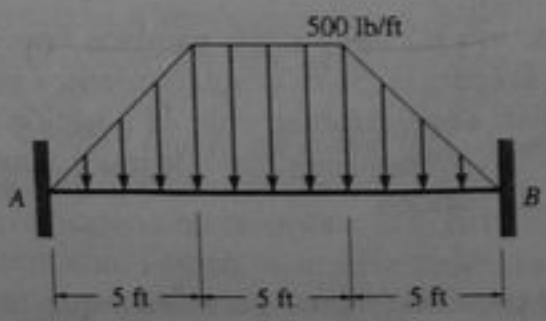
Fig. 2–13

Aquí, $L_2/L_1 = 1$. Debido a la acción de losa en dos direcciones, el *área tributaria* supuesta para la viga AB se muestra con un sombreado oscuro en la figura 2–13*b*. Esta área se determina trazando líneas diagonales a 45° como puede observarse. Por tanto, si se aplica una carga uniforme de 100 lb/ft² a la losa, se aplicará una intensidad pico de (100 lb/ft²)(5 ft) = 500 lb/ft al centro de la viga AB, con una distribución *triangular* de carga, como se muestra en la figura 2–13*c*. Para otras geometrías que generan acción en dos direcciones puede usarse un procedimiento similar. Por ejemplo, en el caso en que $L_2/L_1 = 1.5$, figura 2–14*a*, es necesario trazar líneas a 45° que se intersequen como se muestra. Una carga de 100 lb/ft² colocada sobre la losa producirá entonces cargas distribuidas *trapezoidales* y *triangulares* sobre los miembros AB y AC como se muestra en las figuras 2–14*b* y 2–14*c*, respectivamente.



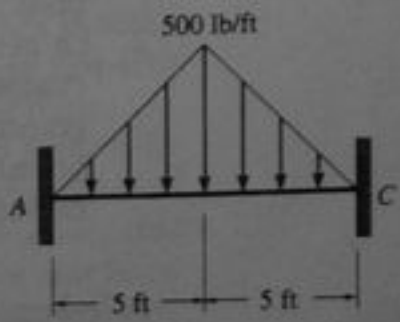
planta de la estructuración idealizada

(a)



viga idealizada

(b)



viga idealizada

(c)

Fig. 2–14

La habilidad para reducir una estructura real a una forma idealizada, como se vio en los ejemplos anteriores, sólo puede adquirirse con la experiencia. Para adquirir práctica en esto, los problemas de ejemplo y los problemas de ejercicios en este libro se apegan a situaciones reales y los enunciados de los problemas ayudan a explicar cómo las conexiones y soportes pueden modelarse con base en los listados en la tabla 2–1. En la práctica de la ingeniería, si surgen dudas respecto a cómo modelar una estructura o transferir las cargas a los miembros, lo mejor es considerar *varias* estructuras y cargas idealizadas y luego diseñar la estructura real de manera que pueda resistir las cargas en todos los modelos idealizados.

2.2 Principio de superposición

El principio de superposición constituye la base de gran parte de la teoría del análisis estructural. Puede enunciarse como sigue: *El desplazamiento o esfuerzo total en un punto de una estructura sometida a varias cargas se puede determinar sumando los desplazamientos o esfuerzos que ocasiona cada una de las cargas que actúan por separado.* Para que esto sea válido, es necesario que exista una relación lineal entre las cargas, esfuerzos y desplazamientos.

Dos requisitos deben imponerse para que el principio de superposición sea aplicable:

1. El material estructural debe comportarse de manera elástica-lineal, a fin de que sea válida la ley de Hooke y la carga sea proporcional al desplazamiento.
2. La geometría de la estructura no debe sufrir cambios importantes cuando se aplican las cargas. Si los desplazamientos son grandes, entonces cambian considerablemente la posición y orientación de las cargas. Un ejemplo es el caso de una columna sometida a una carga de pandeo.

A lo largo de todo este texto consideraremos que tales requisitos se cumplen; únicamente se suscitará el comportamiento lineal-elástico del material, y los desplazamientos producidos por las cargas no cambiarán en forma significativa las direcciones de las cargas aplicadas n las dimensiones usadas para calcular los momentos de las fuerzas.

2.3 Ecuaciones de equilibrio

Se recordará de la estática que una estructura o uno de sus miembros está en equilibrio cuando mantiene un balance de fuerzas y momentos. En general, esto requiere que las ecuaciones de equilibrio por fuerzas y momentos se satisfagan a lo largo de tres ejes independientes, esto es,

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x &= 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned} \tag{2–1}$$

Sin embargo, los elementos principales portadores de carga de la mayoría de las estructuras, se encuentran en un solo plano, y como las cargas son también coplanares, los requisitos anteriores de equilibrio se reducen a

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0 \end{aligned}} \tag{2–2}$$

Aquí, ΣF_x y ΣF_y representan, respectivamente, las sumas algebraicas de las componentes x y y de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura o sobre uno de sus miembros, y ΣM_O representa la suma algebraica de los momentos de esas componentes de fuerza respecto a un eje perpendicular al plano x–y (eje z) que pasa por el punto O.

Siempre que se apliquen estas ecuaciones, es *necesario primero dibujar un diagrama de cuerpo libre de la estructura o de sus miembros*. Si se selecciona un miembro, éste debe dibujarse aislado de sus soportes y entorno. Deben mostrarse todas las fuerzas y momentos asociados que actúan *sobre el miembro*. Con respecto a esto, los tipos de reacciones en los soportes pueden determinarse usando la tabla 2–1. Recuerde que las fuerzas comunes a dos miembros actúan con iguales magnitudes pero sentidos opuestos en los respectivos diagramas de cuerpo libre de los miembros.

Fig. 2–15

cargas internas

Si se requiere determinar las *fuerzas internas* en un punto específico de un miembro, es preciso usar el *método de las secciones*. Para ello, se necesita practicar un "corte" perpendicular al eje del miembro en el punto en que deben determinarse las fuerzas internas; luego, se aísla un diagrama de cuerpo libre de cualquiera de los segmentos del miembro "cortado" y, finalmente, se determinan las fuerzas internas a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas al segmento. En general, las fuerzas internas que actúan en la sección cortada del miembro consistirán en una fuerza normal **N**, una fuerza cortante **V** y un momento flexionante **M**, como se muestra en la figura 2–15.

Veremos en la sección 2–5 los principios de la estática que se usan para aplicar las ecuaciones de equilibrio en la determinación de las reacciones externas de estructuras. En el capítulo 4 analizaremos las fuerzas internas en miembros estructurales.

2.4 Determinación y estabilidad

Antes de comenzar el análisis de fuerzas de una estructura, es necesario establecer la determinación y la estabilidad de la estructura.

Determinación

Las ecuaciones de equilibrio proporcionan condiciones *necesarias* y *suficientes* para el equilibrio. Cuando todas las fuerzas en una estructura pueden determinarse estrictamente a partir de esas ecuaciones, la estructura se denomina *estáticamente determinada*. Las estructuras que tienen más fuerzas desconocidas que ecuaciones de equilibrio disponibles se llaman *estáticamente indeterminadas*. Como regla general, una estructura puede identificarse como estáticamente determinada o como estáticamente indeterminada trazando diagramas de cuerpo libre de todos sus miembros o de partes seleccionadas de sus miembros, y luego comparando el número total de reacciones de fuerza y momento desconocidas con el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles.* Para una estructura coplanar se dispone cuando

*El dibujo de los diagramas de cuerpo libre no es estrictamente necesario, ya que puede también hacerse un "conteo mental" del número de incógnitas y compararse con el número de ecuaciones de equilibrio.

más de *tres* ecuaciones de equilibrio para cada parte, de modo que si hay un total de n partes y r componentes de fuerza y momento reactivas, tenemos que

$$\begin{array}{|l|}\hline r = 3n, \text{ estáticamente determinada} \\ r > 3n, \text{ estáticamente indeterminada} \\ \hline \end{array} \qquad (2\text{–}3)$$

En particular, si una estructura es *estáticamente indeterminada*, las ecuaciones adicionales necesarias para encontrar las reacciones desconocidas se obtienen al relacionar las cargas aplicadas y reacciones al desplazamiento o pendiente en puntos diferentes sobre la estructura. Esas ecuaciones, conocidas como *ecuaciones de compatibilidad*, deben ser igual en número al *grado de indeterminación* de la estructura. Las ecuaciones de compatibilidad contienen las propiedades geométricas y físicas de la estructura y se verán con más detalle en el capítulo 9.

Veremos ahora algunos ejemplos para mostrar cómo clasificar la determinación de una estructura. En el primer ejemplo se consideran vigas; en el segundo, estructuras conectadas por pasadores; en el tercero analizaremos marcos. La clasificación de armaduras se verá en el capítulo 3.

El sistema estructural para el piso de este edificio puede modelarse como una serie de vigas de piso y trabes conectadas por pasadores que las hacen estáticamente determinadas.

Ejemplo 2–1

Clasifique cada una de las vigas que se muestran en las figuras 2–16*a* a la 2–16*e* como estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. Si resulta estáticamente indeterminada, indique el número de grados de indeterminación. Las vigas están sometidas a cargas externas supuestas conocidas que pueden actuar en cualquier parte de las vigas.

Solución

Las *vigas compuestas*, como las que se muestran en las figuras 2–16*c* a la 2–16*e*, formadas por miembros conectados por pasadores o por eslabones cortos, deben desarmarse para su análisis. Note que en esos casos, las fuerzas reactivas desconocidas deben mostrarse por parejas, iguales pero opuestas. Los diagramas de cuerpo libre de cada miembro se muestran en las figuras 2–16*f* a la 2–16*j*. Usando la ecuación 2–3, las clasificaciones resultantes son entonces

Fig. 2–16*f*, $r = 3$, $n = 1, 3 = 3(1)$ Estáticamente determinada *Resp.*

Fig. 2–16*g*, $r = 5$, $n = 1, 5 > 3(1)$ Estáticamente indeterminada de segundo grado *Resp.*

Fig. 2–16*h*, $r = 6$, $n = 2, 6 = 3(2)$ Estáticamente determinada *Resp.*

Fig. 2–16*i*, $r = 10$, $n = 3, 10 > 3(3)$ Estáticamente indeterminada de primer grado *Resp.*

Fig. 2–16*j*, $r = 9$, $n = 3, 9 = 3(3)$ Estáticamente determinada *Resp.*

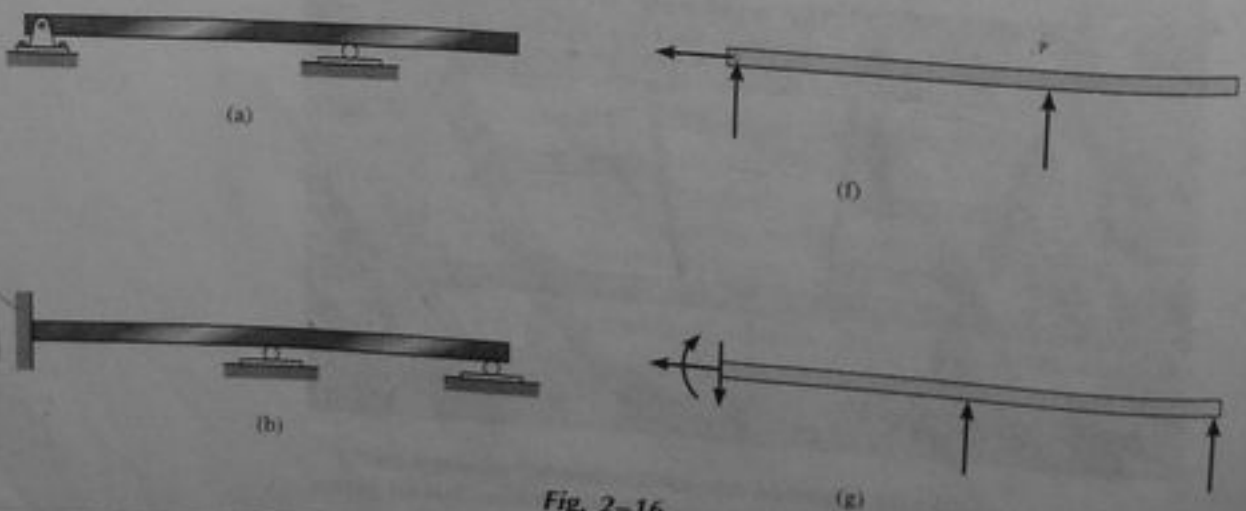
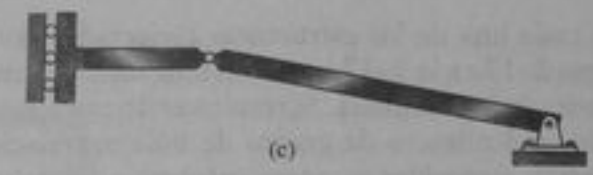
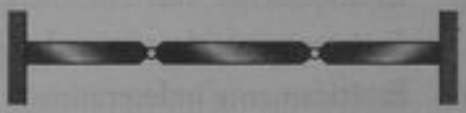


Fig. 2–16



(c)

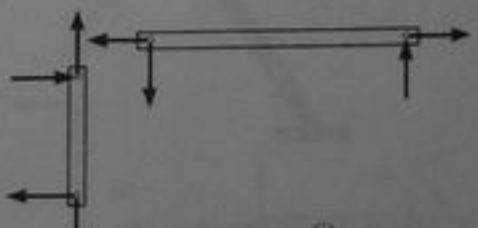
(h)



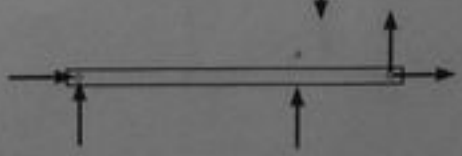
(d)

(i)

(e)



(j)



Ejemplo 2–2

Clasifique cada una de las estructuras conectadas por pasadores de las figuras 2–17*a* a la 2–17*d* como estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. Si resulta estáticamente indeterminada, indique el número de grados de indeterminación. Las estructuras están sometidas a cargas externas arbitrarias supuestas conocidas que pueden actuar en cualquier parte de las estructuras.

Solución

La clasificación de las estructuras conectadas por pasadores es similar a la de las vigas. Los diagramas de cuerpo libre de los miembros se muestran en las figuras 2–17*e* a la 2–17*h*. Aplicando $r = 3n$ o $r > 3n$, la clasificación resultante es como sigue

Fig. 2–17*e*, $r = 7$, $n = 2$, $7 > 6$, Estáticamente indeterminada de primer grado *Resp.*

Fig. 2–17*f*, $r = 9$, $n = 3$, $9 = 9$, Estáticamente determinada *Resp.*

Fig. 2–17*g*, $r = 10$, $n = 2$, $10 > 6$, Estáticamente indeterminada de cuarto grado *Resp.*

Fig. 2–17*h*, $r = 9$, $n = 3$, $9 = 9$, Estáticamente determinada *Resp.*

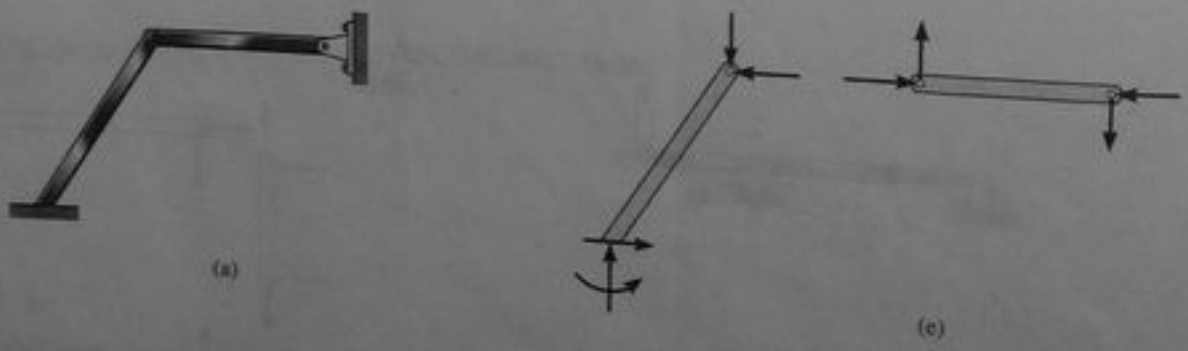
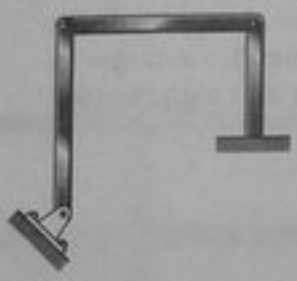
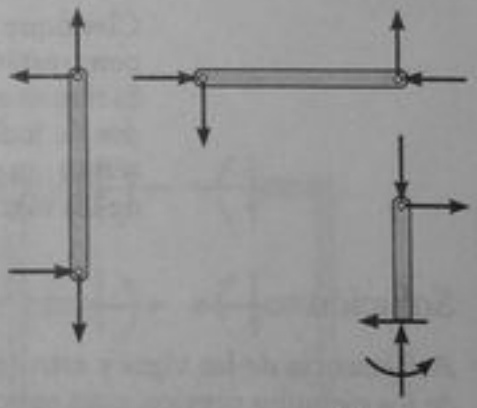


Fig. 2–17

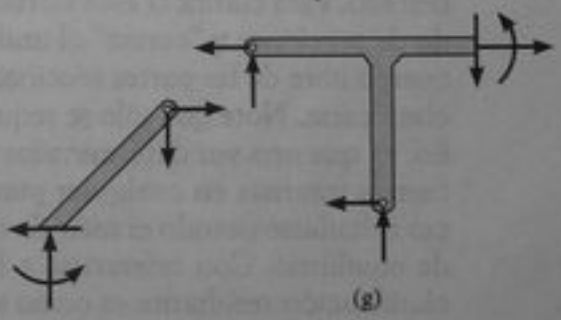


(b)

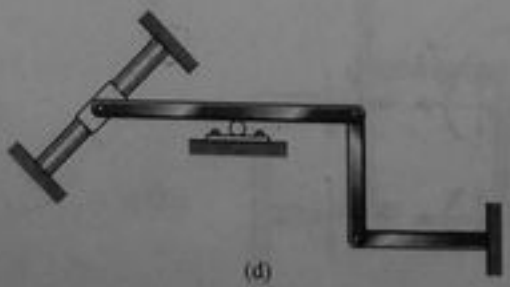


(f)

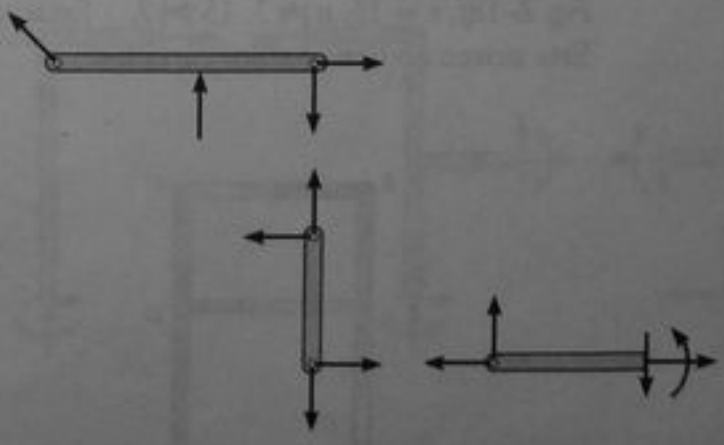
(c)



(g)



(d)



(h)

Ejemplo 2–3

Clasifique cada uno de los marcos de las figuras 2–18*a* a la 2–18c como estáticamente determinado o estáticamente indeterminado. Si resulta estáticamente indeterminado, indique el número de grados de indeterminación. Los marcos están sometidos a cargas externas supuestas conocidas que pueden actuar en cualquier parte de los marcos.

Solución

A diferencia de las vigas y estructuras conectadas por pasadores de los ejemplos previos, *estos marcos consisten en miembros que están unidos entre sí por juntas rígidas y los dos primeros forman anillos cerrados*. Por ejemplo, en la figura 2–18*a*, *ABCD* forma un anillo cerrado. Para clasificar esas estructuras es necesario usar el método de secciones y "cortar" el anillo. Se dibujan los diagramas de cuerpo libre de las partes seccionadas y el marco puede entonces clasificarse. Note que sólo se requiere *una sección* a través del anillo, ya que una vez determinadas las incógnitas en la sección, las fuerzas internas en cualquier punto del miembro pueden entonces calcularse usando el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio. Con referencia a las figuras 2–18*d* a la 2–18*f*, la clasificación resultante es como sigue

Fig. 2–18d, $r = 9$, $n = 2, 9 > 6$, Estáticamente indeterminada de tercer grado ***Resp.***

Fig. 2–18e, $r = 20, n = 3, 20 > 9$, Estáticamente indeterminada de undécimo grado ***Resp.***

Fig. 2–18f, $r = 15, n = 3, 15 > 9$, Estáticamente indeterminada de sexto grado ***Resp.***

Este marco no tiene anillos cerrados.

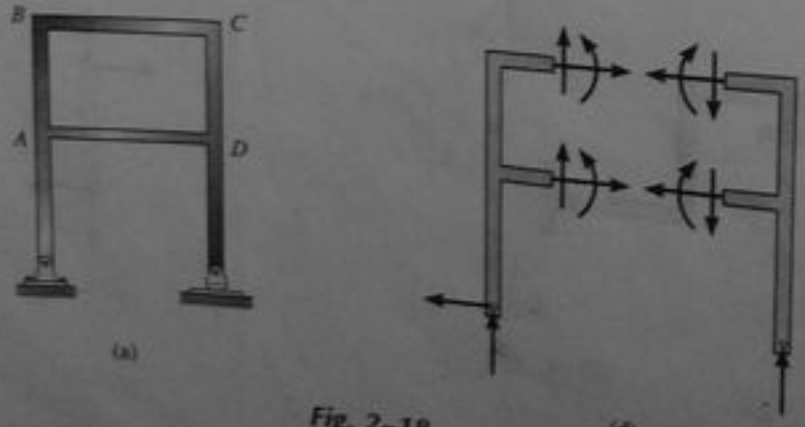
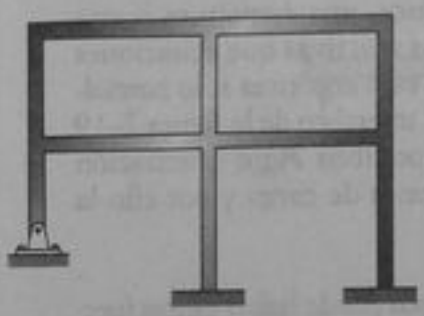
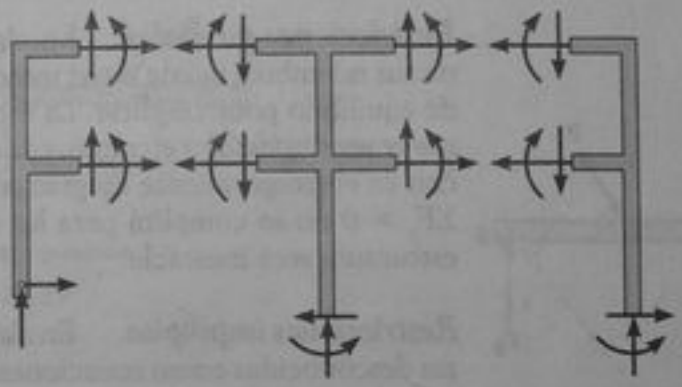


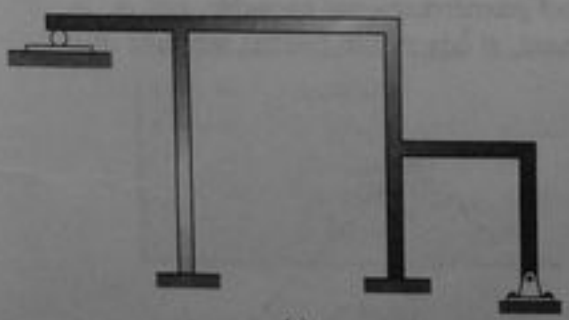
Fig. 2–18



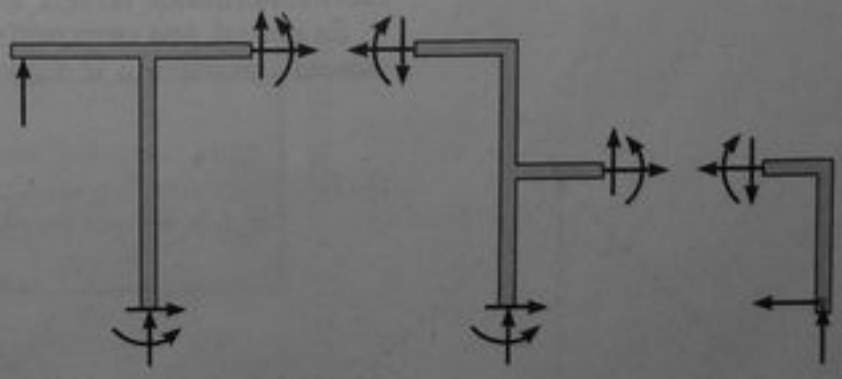
(b)



(c)



(c)

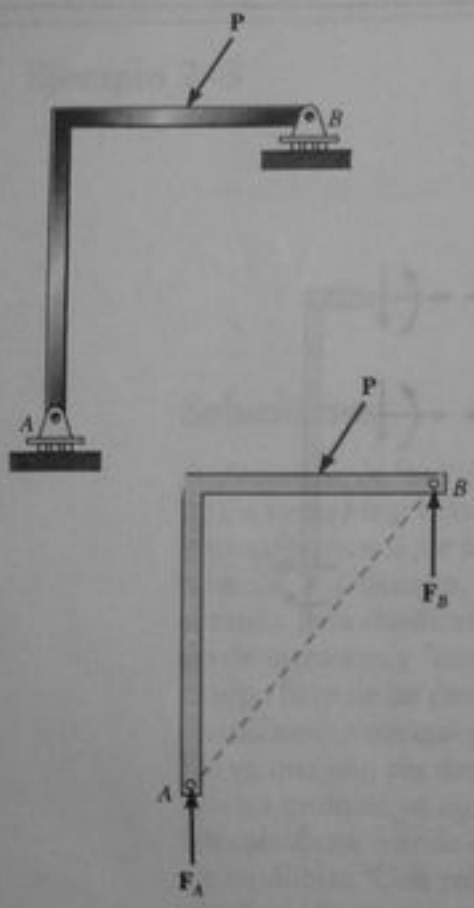


(f)

Estabilidad

Para garantizar el equilibrio de una estructura o de sus miembros, no sólo es necesario que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio, sino también que sus miembros estén apropiadamente soportados o restringidos por sus apoyos. Pueden presentarse dos situaciones en que las condiciones de restricción apropiada no se cumplen.

Restricciones parciales. En algunos casos, una estructura o uno de sus miembros puede tener *menos* fuerzas reactivas que ecuaciones de equilibrio por cumplirse. La estructura está entonces sólo *parcialmente restringida*. Por ejemplo, considere el miembro de la figura 2–19 con su correspondiente diagrama de cuerpo libre. Aquí la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no se cumplirá para las condiciones de carga y por ello la estructura será inestable.



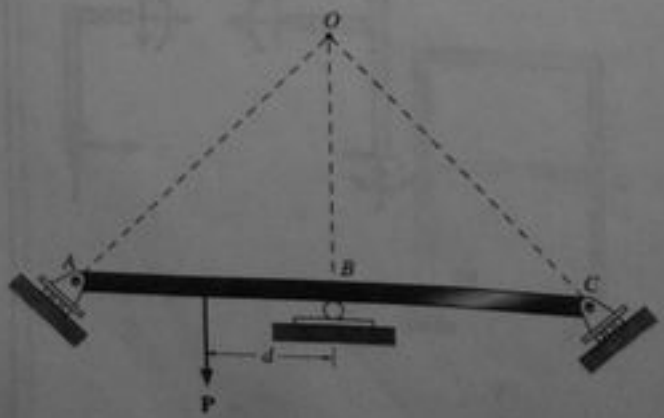
restricciones parciales

Fig. 2–19

Restricciones impropias. En algunos casos puede haber tantas fuerzas desconocidas como ecuaciones de equilibrio; sin embargo, debido a una *restricción impropia* de los soportes, puede desarrollarse una *inestabilidad* o movimiento de una estructura o de sus miembros. Esto puede ocurrir si todas las *reacciones en los soportes concurren* en un punto. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 2–20. Del diagrama de cuerpo libre de la viga puede verse que la suma de momentos respecto al punto O *no* será igual a cero ($Pd \neq 0$); se tendrá entonces una rotación alrededor del punto O.

Otra forma en que una restricción impropia conduce a una situación de inestabilidad ocurre cuando las *fuerzas reactivas* son todas *paralelas*. Un ejemplo de este caso se muestra en la figura 2–21. Aquí, cuando se aplica una fuerza inclinada **P** la suma de fuerzas en la dirección horizontal no será igual a cero.

En general, una estructura será geométricamente inestable, esto es, se moverá ligeramente o se desplomará, si hay menos fuerzas reactivas que



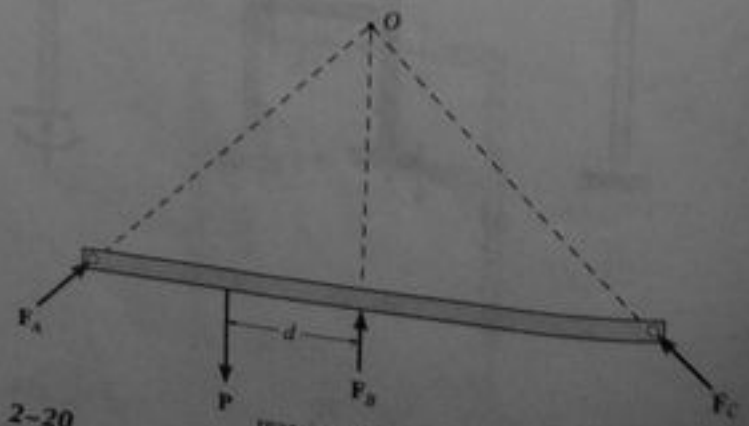
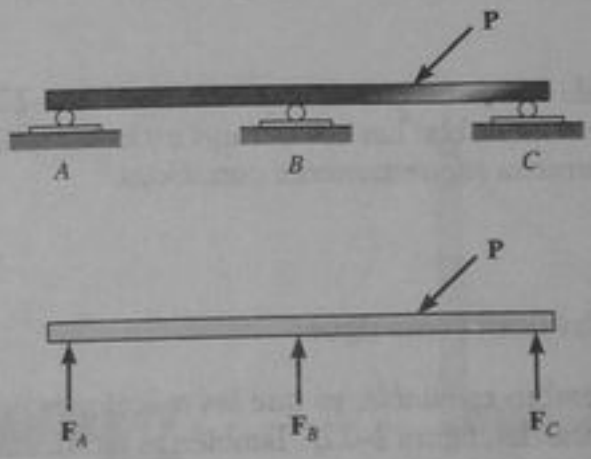


Fig. 2–20

reacciones concurrentes



reacciones paralelas

Fig. 2–21

ecuaciones de equilibrio o, si hay suficientes reacciones, la inestabilidad se presentará si las líneas de acción de las fuerzas reactivas intersecan un punto común o son paralelas entre sí. Si la estructura consiste en varios miembros o componentes, la inestabilidad local de uno o de varios de esos miembros puede generalmente determinarse *por inspección*. Si los miembros forman un mecanismo susceptible de colapso, la estructura será inestable. Formularemos ahora esos enunciados para una *estructura coplanar* con n miembros o componentes y r reacciones desconocidas. Como se tienen tres ecuaciones de equilibrio para cada miembro o componente, tenemos

$r < 3n$	inestable
$r \geqslant 3n$	inestable si las reacciones de los miembros son concurrentes o paralelas o algunas de las componentes forman un mecanismo de colapso

(2–4)

Si la estructura es inestable, *no importa* si es estáticamente determinada o indeterminada. En todos los casos, tales tipos de estructuras deben evitarse en la práctica.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo las estructuras o sus miembros pueden clasificarse como estables o inestables. Las estructuras en forma de armadura se verán en el capítulo 3.

Ejemplo 2–4

Clasifique cada una de las estructuras en las figuras 2–22*a* a la 2–22*e* como estable o inestable. Las estructuras están sometidas a cargas externas arbitrarias supuestamente conocidas.

Solución

Las estructuras se clasifican como sigue:

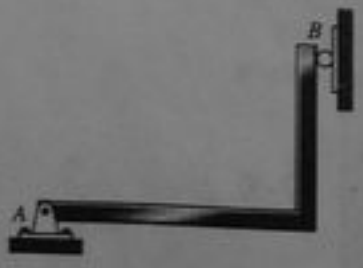
Fig. 2–22a. El miembro es *estable*, ya que las reacciones no son ni concurrentes ni paralelas, figura 2–22*f*. También es estáticamente determinado. ***Resp.***

Fig. 2–22b. La viga compuesta es *estable*, figura 2–22*g*. Es también indeterminada de segundo grado. ***Resp.***

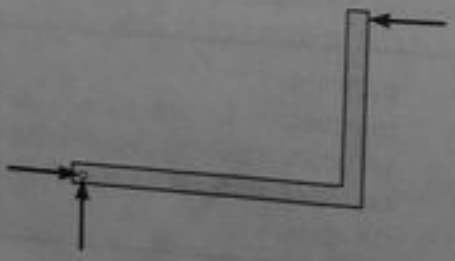
Fig. 2–22c. El miembro es *inestable* ya que las tres reacciones son concurrentes en *B*, figura 2–22*h*. ***Resp.***

Fig. 2–22d. La viga es *inestable* ya que las tres reacciones son paralelas, figura 2–22*i*. ***Resp.***

Fig. 2–22e. La estructura es *inestable* ya que $r = 7$ y $n = 3$, figura 2–22*j*, por lo que, según la ecuación 2–4, $7 < 9$. Esto puede verse también por inspección, figura 2–22*e*, ya que *AB* puede moverse horizontalmente sin restricción. ***Resp.***



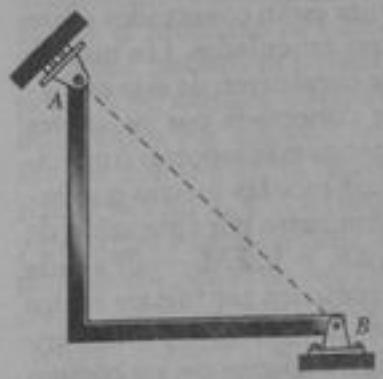
(a)



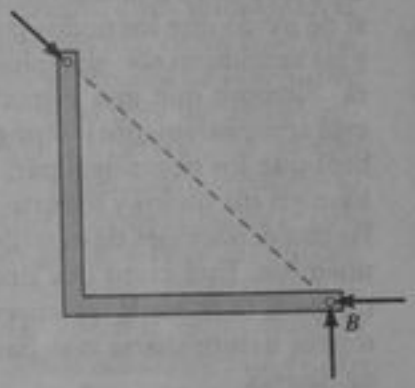
(f)

(b)

(g)



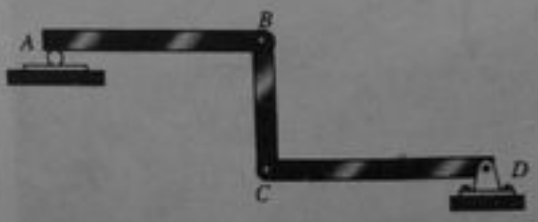
(c)



(h)

(d)

(i)



(e)

(j)

Fig. 2–22

2.5 Aplicación de las ecuaciones de equilibrio

En ocasiones los miembros de una estructura están conectados entre sí de modo que los nudos pueden suponerse articulados. Los marcos y las armaduras son ejemplos típicos que se construyen de esta manera. Siempre que una estructura coplanar conectada por pasadores esté apropiadamente restringida, y no contenga más soportes o miembros que los necesarios para prevenir su colapso, las fuerzas que actúan en sus nudos y soportes pueden determinarse por aplicación de las tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_O = 0$) a cada miembro. Está claro que una vez que se obtienen las fuerzas en los nudos el tamaño de los miembros, conexiones y soportes pueden entonces determinarse con base en las especificaciones de los códigos de diseño.

Para ilustrar el método de análisis de fuerzas, consideremos el marco de tres miembros mostrado en la figura 2–23*a*, que está sometido a

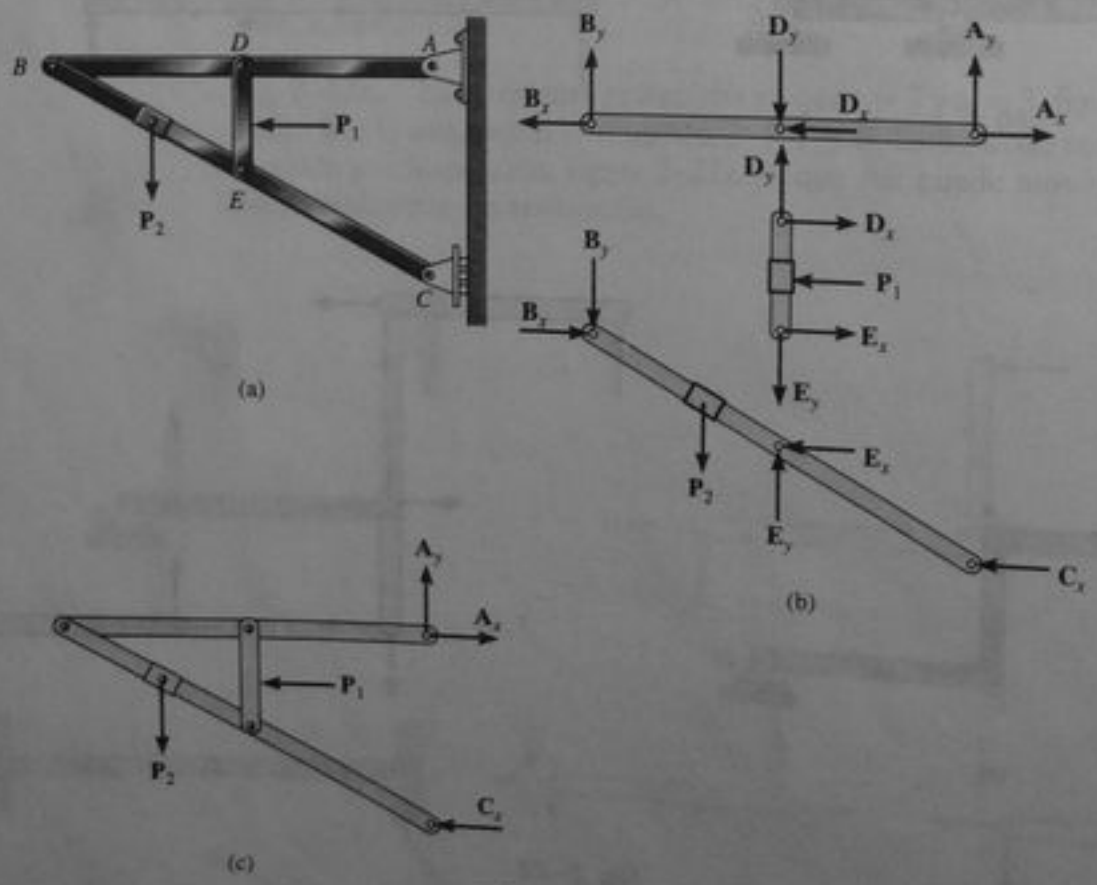
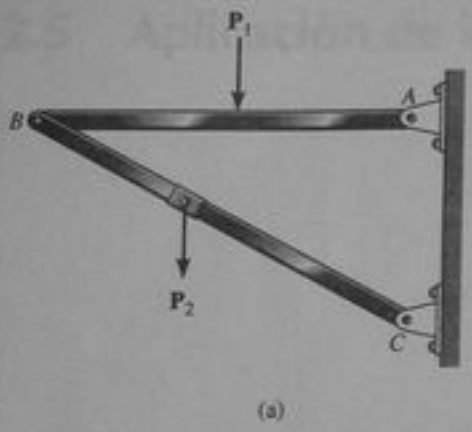


Fig. 2–23

las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$. El diagrama de cuerpo libre de cada miembro se muestra en la figura 2–23*b*. En total hay nueve incógnitas; se pueden escribir nueve ecuaciones de equilibrio, tres para cada miembro, por lo que el problema es *estáticamente determinado*. Para solucionar el problema *también* es posible, y a veces conveniente, considerar una porción del marco o bien su totalidad al aplicar algunas de esas nueve ecuaciones. Por ejemplo, un diagrama de cuerpo libre del marco entero se muestra en la figura 2–23*c*. Se podrían determinar las tres reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{C}_x$ en este sistema "rígido" conectado por pasadores y luego proceder a analizar *cualquiera de sus dos* miembros, figura 2–23*b*, para obtener las otras seis incógnitas. Además, las respuestas pueden comprobarse en parte aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al "tercer" miembro restante. Entonces, para resumir, este problema puede resolverse escribiendo *cuando más* nueve ecuaciones de equilibrio usando diagramas de cuerpo libre de cualesquiera miembros y combinaciones de miembros conectados. Más de nueve ecuaciones serían redundantes respecto a las nueve ecuaciones originales y sólo servirían para verificar los resultados.

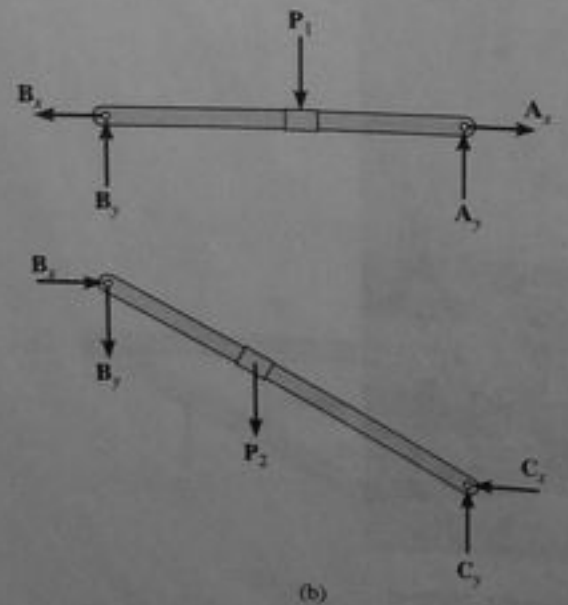
Ejemplo de un puente carretero con trabes simplemente apoyadas. Note el uso de soportes de rodillo en el estribo izquierdo.



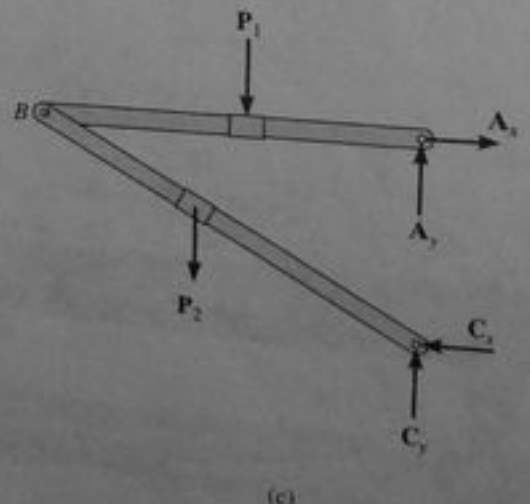
(a)

Consideremos ahora el marco de dos miembros mostrado en la figura 2–24*a*. Aquí, los diagramas de cuerpo libre de los miembros revelan seis incógnitas, figura 2–24*b*; sin embargo, pueden escribirse seis ecuaciones de equilibrio, tres para cada miembro, por lo que el problema es nuevamente estáticamente determinado. Como en el caso anterior, puede también usarse un diagrama de cuerpo libre de todo el marco para parte del análisis, figura 2–24*c*. Aunque, como se muestra, el marco tiene la tendencia a colapsarse sin sus soportes, girando alrededor del pasador en B, esto no ocurrirá porque el sistema de fuerzas que actúa en él lo mantiene en equilibrio. Por consiguiente, si así se desea, las seis incógnitas pueden determinarse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al marco entero, figura 2–24c, y también a cualquiera de sus miembros.

Los dos ejemplos anteriores ilustran que si una estructura está soportada apropiadamente y no contiene más soportes o miembros que los necesarios para evitar el colapso, el marco es estáticamente determinado y las fuerzas desconocidas en los soportes y conexiones, pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio aplicadas a cada miembro. Además, si la estructura permanece *rígida* (no colapsable) cuando se retiran los soportes (figura 2–23*c*), las tres reacciones en los soportes pueden determinarse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a la estructura entera. Sin embargo, si la estructura parece ser no rígida (colapsable) después de quitar los soportes (figura 2–24*c*), deberá ser desmembrada y considerarse el equilibrio de los miembros individuales para obtener suficientes ecuaciones que permitan determinar *todas* las reacciones en los soportes.



(b)



(c)

Fig. 2–24

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento permite determinar las reacciones en los nudos de estructuras compuestas de miembros conectados por pasadores.

Diagramas de cuerpo libre. Desarme la estructura y dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada miembro. Además, puede ser conveniente complementar un diagrama de cuerpo libre de miembro con un diagrama de cuerpo libre de la *estructura entera*. Algunas o todas las reacciones en los soportes puede entonces determinarse usando este diagrama.

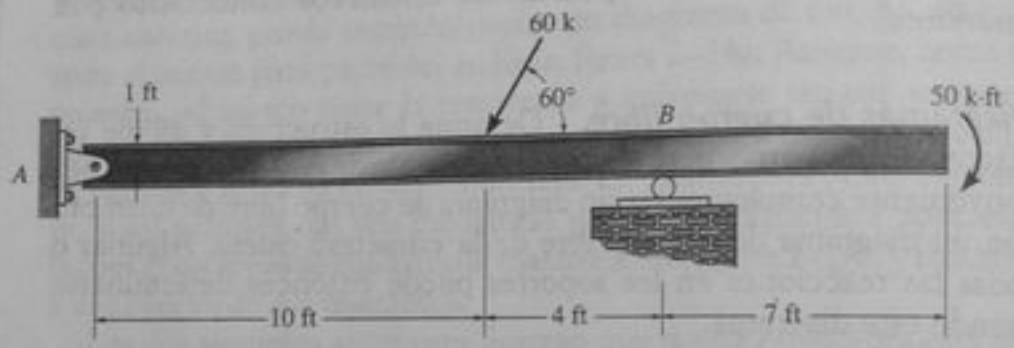
Recuerde que fuerzas reactivas comunes a dos miembros actúan con magnitudes iguales pero con direcciones opuestas sobre los diagramas respectivos de cuerpo libre de los miembros. Específicamente, las reacciones desconocidas que actúan en los nudos deben representarse por sus componentes rectangulares. Además, deben identificarse todos los miembros de dos fuerzas. Estos miembros, independientemente de su forma, no tienen cargas externas sobre ellos y por tanto, sus diagramas de cuerpo libre se representan con fuerzas colineales iguales pero opuestas actuando en sus extremos. En muchos casos es posible determinar por inspección el sentido correcto de una fuerza o momento concentrado desconocidos; sin embargo, si esto se dificulta, el sentido puede suponerse.

Ecuaciones de equilibrio. Cuente el número total de incógnitas para asegurarse que es posible escribir un número equivalente de ecuaciones de equilibrio y llegar a una solución. Exceptuando los miembros de dos fuerzas, recuerde que en general pueden escribirse tres ecuaciones de equilibrio para cada miembro. Muchas veces, la obtención de las incógnitas será directa si se aplica la ecuación de momentos $\Sigma M_O = 0$ respecto a un punto (O) que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible. También, al aplicar las ecuaciones de fuerzas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, oriente los ejes x y y a lo largo de líneas que conduzcan a la expresión más simple para las fuerzas en sus componentes x y y. Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da una magnitud *negativa* para una fuerza o momento desconocidos, esto indica que su sentido es *opuesto* al supuesto en el diagrama de cuerpo libre.

Los siguientes problemas de ejemplo ilustran este procedimiento numéricamente.

Ejemplo 2–5

Determine las reacciones de la viga que se muestra en la figura 2–25*a*.

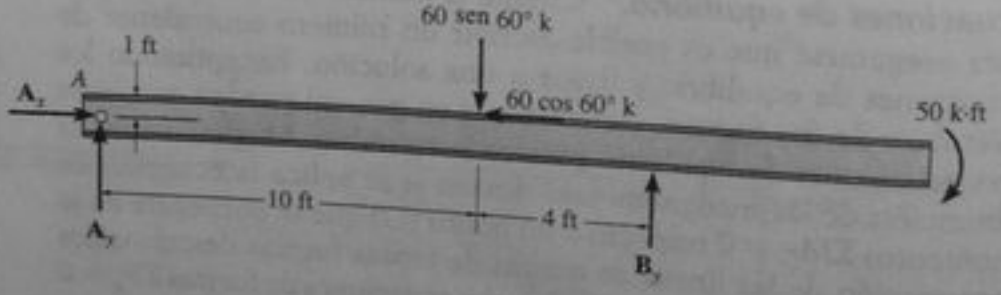


(a)

Fig. 2–25

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 2–25*b*, la fuerza de 60 k se descompone en componentes *x* y *y*. Además, la dimensión de 7 ft no se necesita ya que un momento concentrado es un *vector libre* y puede por ello actuar en cualquier parte sobre la viga con el fin de calcular las reacciones externas.



(b)

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando las ecuaciones 2–2 en secuencia y usando los resultados calculados antes, obtenemos

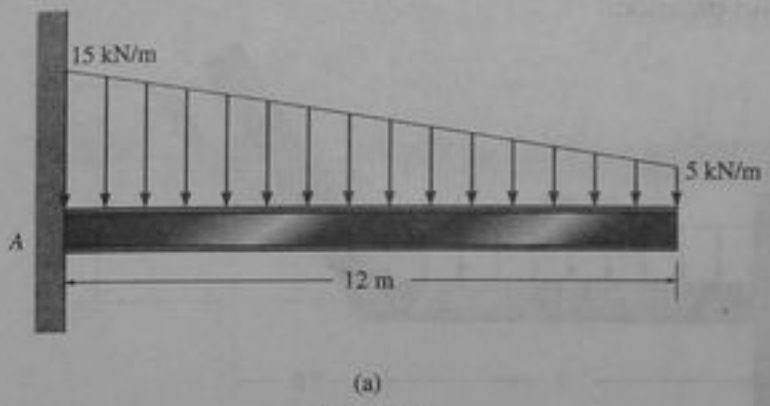
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad A_x - 60\cos 60° = 0 \qquad A_x = 30.0\ \text{k} \quad \textbf{Resp.}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad 60\,\text{sen}\,60°(10) - 60\cos 60°(1) - B_y(14) + 50 = 0 \qquad B_y = 38.5\ \text{k} \quad \textbf{Resp.}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad -60\,\text{sen}\,60° + 38.5 + A_y = 0 \qquad A_y = 13.4\ \text{k} \quad \textbf{Resp.}$$

Ejemplo 2–6

Determine las reacciones sobre la viga mostrada en la figura 2–26*a*.

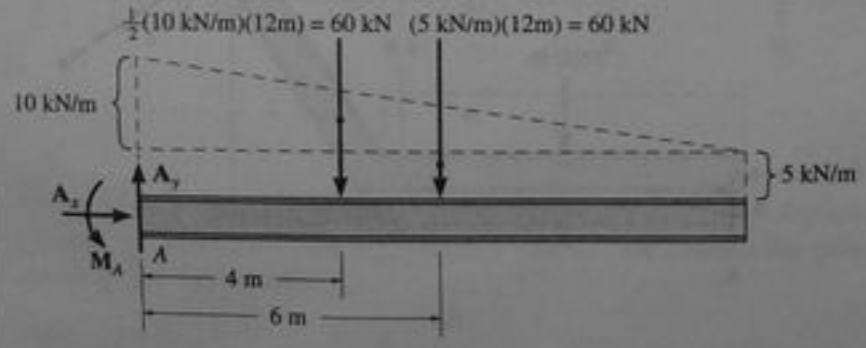


(a)

Fig. 2–26

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 2–26*b*, la carga trapezoidal distribuida se descompone en una carga triangular y en una carga uniforme. Las *áreas* bajo el triángulo y el rectángulo representan las fuerzas *resultantes*. Estas fuerzas actúan a través del centroide de sus áreas correspondientes.



(b)

Ecuaciones de equilibrio

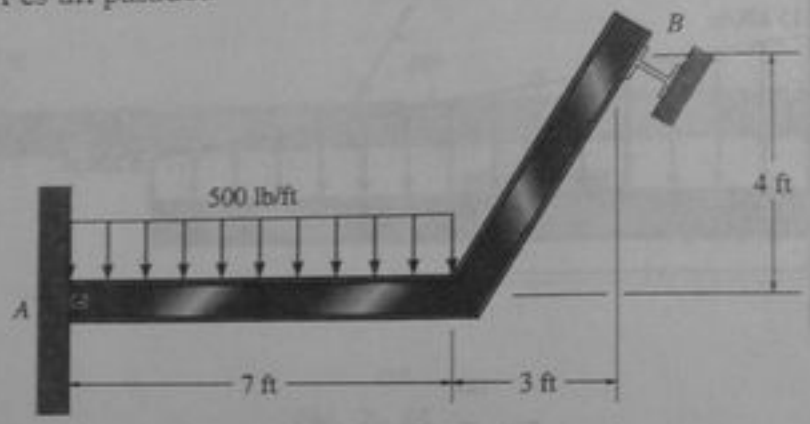
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad A_y - 60 - 60 = 0 \qquad A_y = 120\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad 60(4) + 60(6) - M_A = 0 \qquad M_A = 600\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 2–7

Determine las reacciones sobre la viga que se muestra en la figura 2–27*a*. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo (superficie lisa) y que *A* es un pasador.

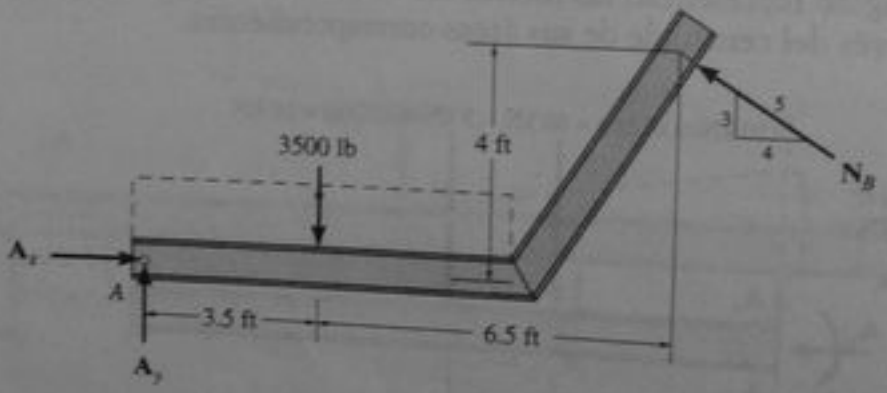


(a)

Fig. 2–27

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 2–27*b*, el soporte ("rodillo") en *B* ejerce una *fuerza normal* sobre la viga en su punto de contacto. La línea de acción de esta fuerza está definida por el triángulo 3-4-5.



(b)

Ecuaciones de equilibrio. Resolviendo $\mathbf{N}_B$ en componentes x y y y sumando momentos respecto a A se obtiene una solución directa para N_B. ¿Por qué? Usando este resultado, podemos obtener entonces A_x y A_y.

$$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad 3500(3.5) - (\tfrac{4}{5})N_B(4) - (\tfrac{3}{5})N_B(10) = 0$$

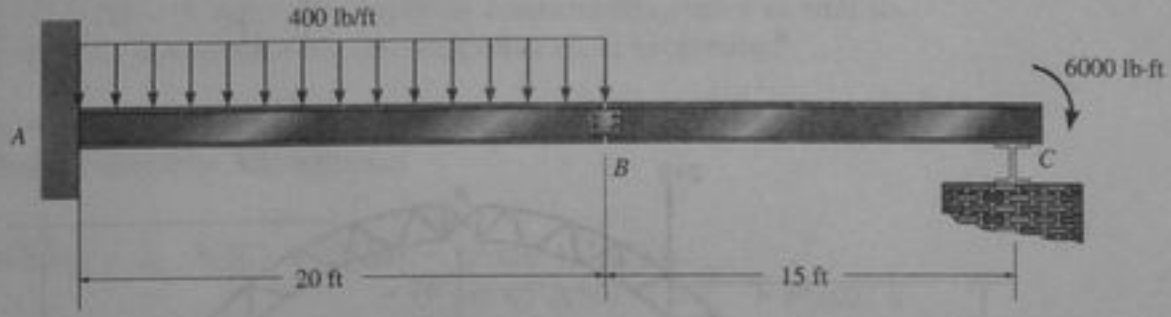
$$N_B = 1331.5 \text{ lb} = 1.33 \text{ k} \quad \textit{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad A_x - \tfrac{4}{5}(1331.5) = 0 \qquad A_x = 1.07 \text{ k} \quad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - 3500 + \tfrac{3}{5}(1331.5) = 0 \qquad A_y = 2.70 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 2–8

La viga compuesta de la figura 2–28*a* está empotrada en *A*. Determine las reacciones en *A*, *B* y *C*. Suponga que la conexión en *B* es un pasador y que *C* es un rodillo.

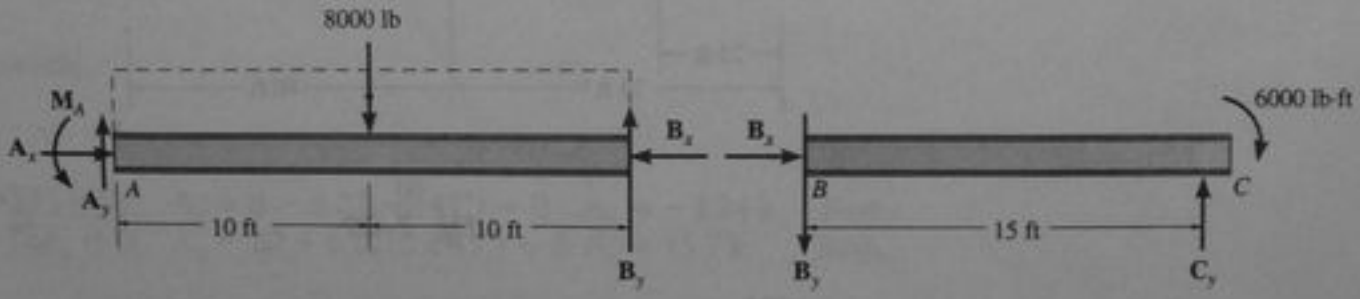


(a)

Fig. 2–28

Solución

Diagramas de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre de cada segmento se muestra en la figura 2–28*b*. ¿Por qué es el problema estáticamente determinado?



(b)

Ecuaciones de equilibrio. Se tienen seis incógnitas. Aplicando las seis ecuaciones de equilibrio y usando los resultados calculados antes, tenemos

Segmento *BC*:

$\curvearrowleft +\Sigma M_C = 0;\quad 6000 - B_y(15) = 0 \qquad B_y = 400\ \text{lb}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad -400 + C_y = 0 \qquad C_y = 400\ \text{lb}$ *Resp.*

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad B_x = 0$ *Resp.*

Segmento *AB*:

$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad -M_A + 8000(10) - 400(20) = 0$

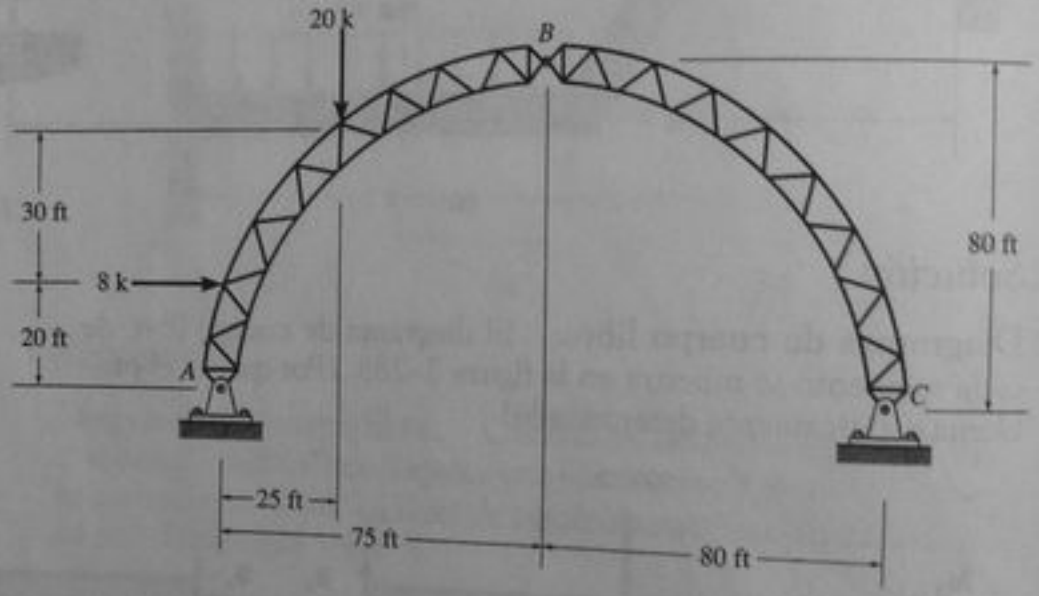
$M_A = 72.0\ \text{k}\cdot\text{ft}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - 8000 + 400 = 0 \qquad A_y = 7.60\ \text{k}$ *Resp.*

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x - 0 = 0 \qquad A_x = 0$ *Resp.*

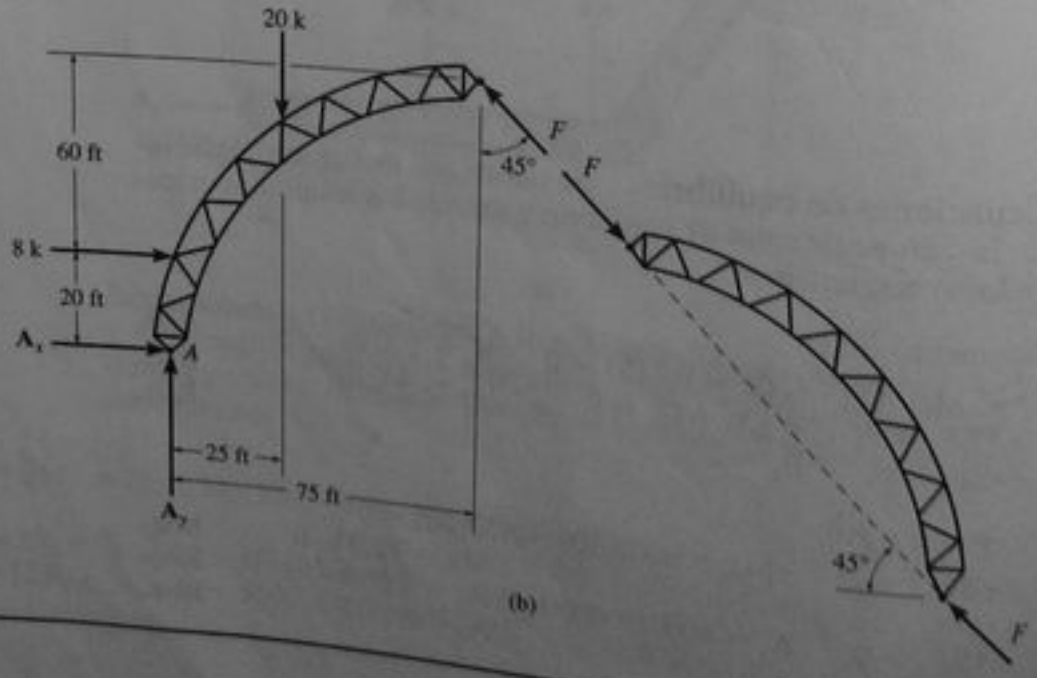
Ejemplo 2–9

El arco triarticulado está sometido a las dos fuerzas concentradas que se muestran en la figura 2–29*a*. Determine las componentes horizontales y verticales de las reacciones en los pasadores A, B y C.



(a)

Fig. 2–29



(b)

Solución

Diagramas de cuerpo libre. El miembro *BC* es un miembro de dos fuerzas, por lo que las fuerzas resultantes que actúan en *B* y *C* son iguales, opuestas y colineales, como se muestra en la figura 2–29*b*. Observe que esto simplifica considerablemente el análisis ya que hay entonces sólo tres incógnitas en el problema.*

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al miembro *AB*, tenemos

$$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad 8(20) + 20(25) - (F\cos 45°)(75) - (F \operatorname{sen} 45°)(80) = 0 \qquad F = 6.02\ \text{k}$$

Así, aunque no se muestran en la figura 2–29*b*,

$$B_x = C_x = 6.02(\operatorname{sen} 45°) = 4.26\ \text{k} \qquad \textit{Resp.}$$
$$B_y = C_y = 6.02(\cos 45°) = 4.26\ \text{k} \qquad \textit{Resp.}$$

Además,

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x + 8 - 6.02(\operatorname{sen} 45°) = 0 \quad A_x = -3.74\ \text{k} \qquad \textit{Resp.}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 20 + 6.02(\cos 45°) = 0 \quad A_y = 15.7\ \text{k} \qquad \textit{Resp.}$$

*Trate de resolver el problema colocando dos componentes $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$ en *B* y $\mathbf{C}_x$, $\mathbf{C}_y$ en *C*.

Ejemplo 2–10

El costado de la construcción en la figura 2–30*a* está sometido a una carga de viento lateral que genera una presión *normal* uniforme de 15 kPa sobre el lado de barlovento y una presión de succión de 5 kPa sobre el lado de sotavento. Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en las conexiones articuladas en A, B y C del arco a dos aguas.

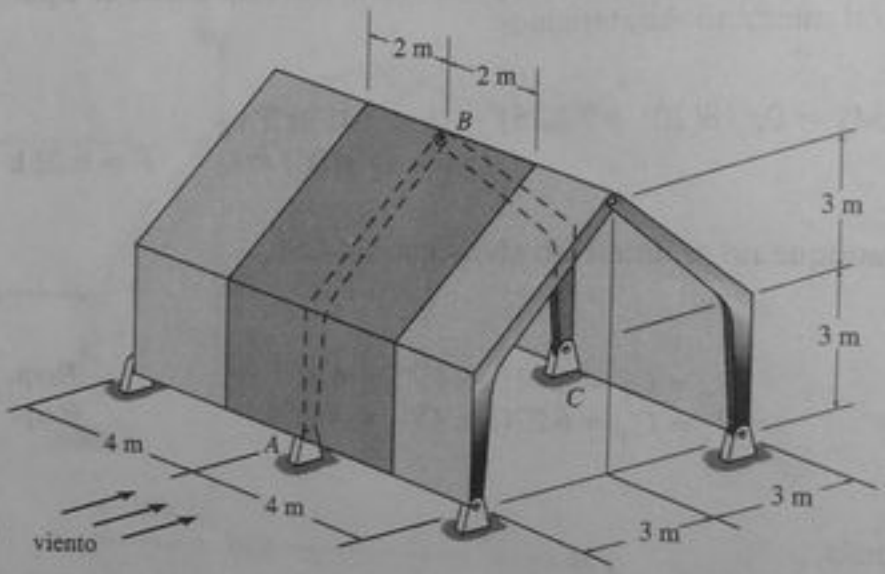
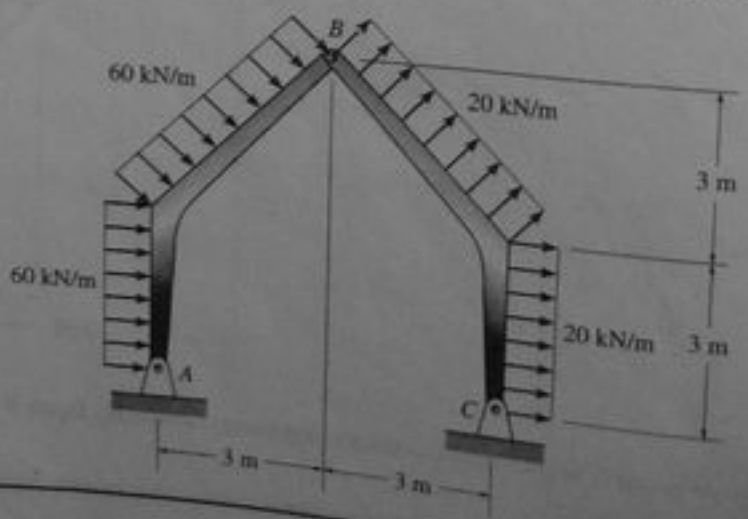


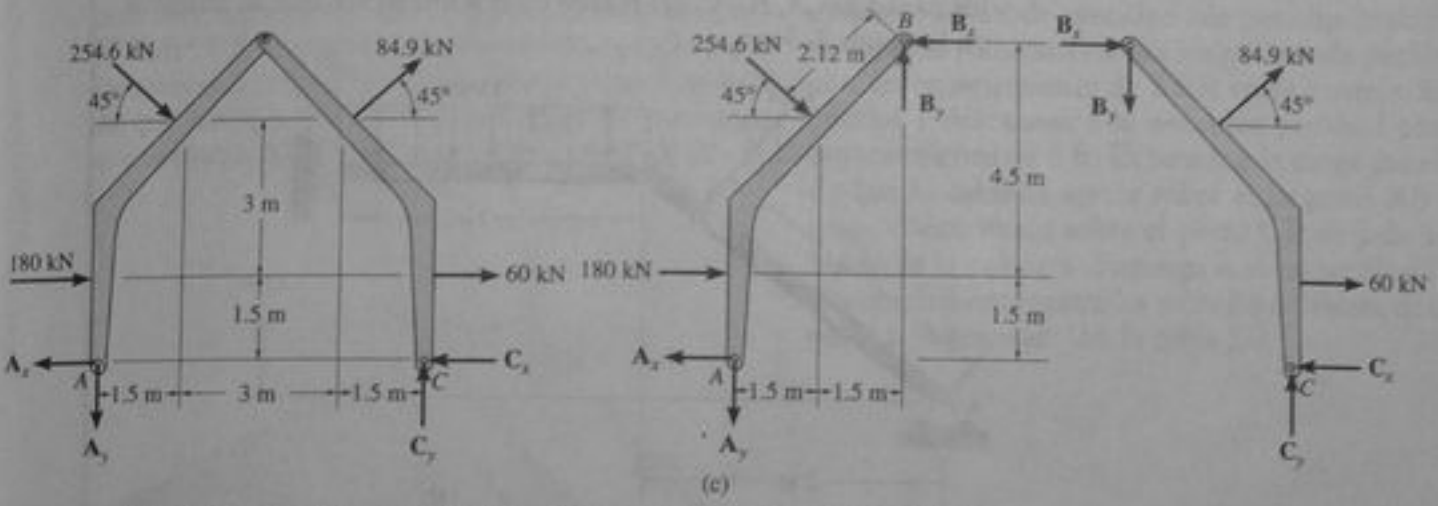
Fig. 2–30

Solución

Como la carga está uniformemente distribuida, el arco central a dos aguas soporta una carga que actúa sobre las paredes y techo del área tributaria sombreada. Esto representa una carga uniformemente distribuida de $(15\ kN/m^2)(4\ m) = 60\ kN/m$ sobre el lado de barlovento y $(5\ kN/m^2)(4m) = 20\ kN/m$ sobre el lado de succión, figura 2–30*b*.



Diagramas de cuerpo libre. Simplificando las cargas distribuidas, los diagramas de cuerpo libre del arco entero y de cada una de sus partes, se muestran en la figura 2–30c.



(c)

Ecuaciones de equilibrio. Una solución simultánea de las ecuaciones se evita aplicando las ecuaciones de equilibrio en el orden siguiente y usando los resultados previamente calculados.*

Arco entero:

$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad (180 + 60)(1.5) + (254.6 + 84.9)\cos 45°(4.5)$
$+ (254.6 \operatorname{sen} 45°)(1.5) - (84.9 \operatorname{sen} 45°)(4.5) - C_y(6) = 0$
$C_y = 240.0 \text{ kN}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad -A_y - 254.6 \operatorname{sen} 45° + 84.9 \operatorname{sen} 45° + 240.0 = 0$
$A_y = 120.0 \text{ kN}$ *Resp.*

Miembro AB:

$\curvearrowleft +\Sigma M_B = 0;\quad A_x(6) - 120.0(3) - 180(4.5) - 254.6(2.12) = 0$
$A_x = 285.0 \text{ kN}$ *Resp.*

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad -285.0 + 180 + 254.6\cos 45° - B_x = 0$
$B_x = 75.0 \text{ kN}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad -120.0 - 254.6 \operatorname{sen} 45° + B_y = 0$
$B_y = 300.0 \text{ kN}$ *Resp.*

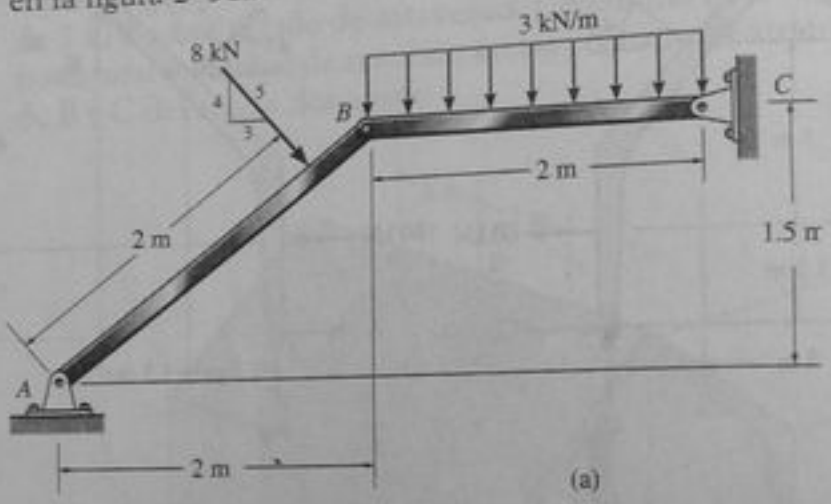
Miembro CB:

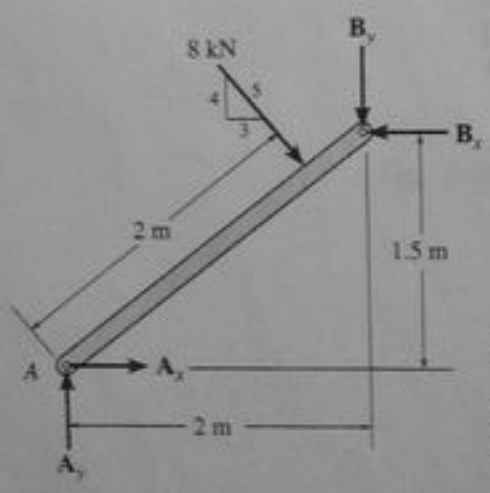
$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad -C_x + 60 + 84.9\cos 45° + 75.0 = 0$
$C_x = 195.0 \text{ kN}$ *Resp.*

*El problema puede también resolverse aplicando las seis ecuaciones de equilibrio sólo a los dos miembros. Si se hace así, es mejor sumar primero momentos respecto al punto A sobre el miembro AB y luego respecto al punto C sobre el miembro CB. Al hacerlo así, se obtienen dos ecuaciones que deben resolverse simultáneamente para $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$.

Ejemplo 2–11

Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en los pasadores A, B y C del marco de dos miembros que se muestra en la figura 2–31*a*.





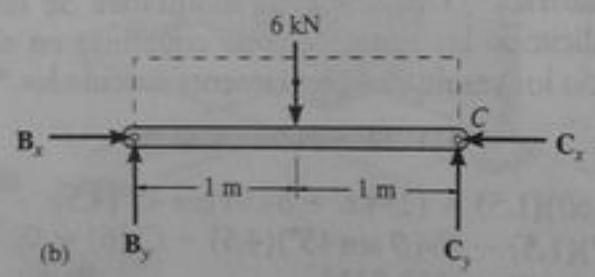


Fig. 2–31

Solución

Diagramas de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre de cada miembro se muestra en la figura 2–31*b*.

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando las seis ecuaciones de equilibrio en el orden siguiente, puede obtenerse una solución directa para cada una de las seis incógnitas.

Miembro *BC*:

$$\curvearrowleft +\Sigma M_C = 0; \quad B_y(2) - 6(1) = 0 \qquad B_y = 3\ \text{kN} \quad \textit{Resp.}$$

Miembro *AB*:

$$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad 8(2) + 3(2) - B_x(1.5) = 0 \qquad B_x = 14.7\ \text{kN} \quad \textit{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x + \tfrac{3}{5}(8) - 14.7 = 0 \qquad A_x = 9.87\ \text{kN} \quad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - \tfrac{4}{5}(8) - 3 = 0 \qquad A_y = 9.40\ \text{kN} \quad \textit{Resp.}$$

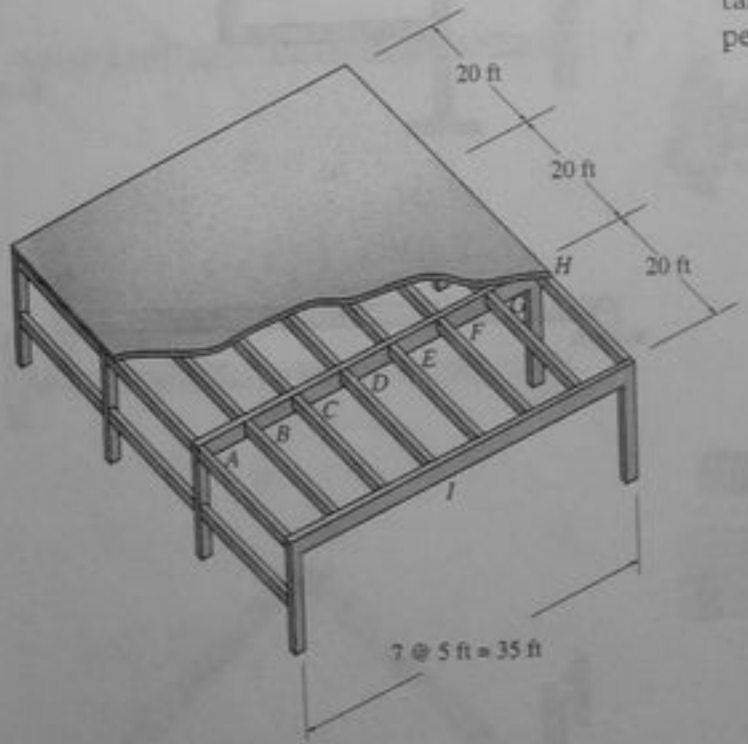
Miembro *BC*:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 14.7 - C_x = 0 \qquad C_x = 14.7\ \text{kN} \quad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3 - 6 + C_y = 0 \qquad C_y = 3\ \text{kN} \quad \textit{Resp.}$$

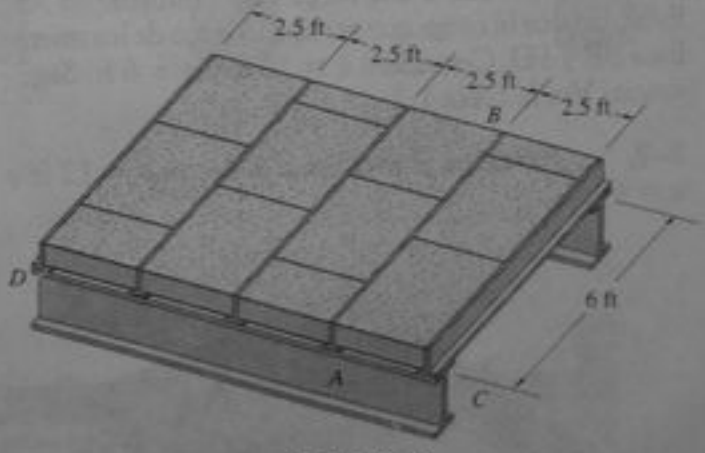
PROBLEMAS

2–1. La cubierta del techo del edificio de un solo piso está sometida a una carga viva más muerta de 95 lb/ft^2. Si los largueros están situados a cada 5 ft y los marcos a cada 20 ft, determine la carga distribuida que actúa a lo largo del larguero *DI* y las cargas que actúan sobre el marco en *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, G y *H*.



Prob. 2–1

2–2. La cubierta del techo está fabricada con concreto reforzado precolado de peso ligero de 3 in. de espesor y descansa sobre los patines de perfiles *T* con un espaciamiento de 2.5 ft entre centros. Estos perfiles *T* descansan a su vez sobre perfiles *I* con un espaciamiento de 6 ft. Determine la carga distribuida que la cubierta ejerce sobre el larguero *AB* y la carga concentrada sobre el perfil *CD* situado en el borde de la cubierta. Suponga que los perfiles *T* están simplemente apoyados sobre los extremos de cada perfil I. *Sugerencia*: Vea la tabla 1-2.

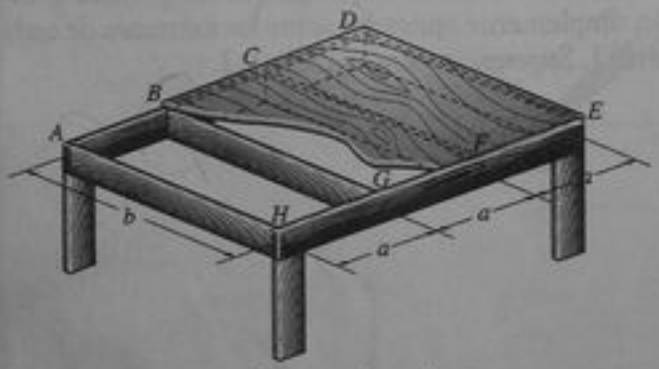


Prob. 2–2

2–3. El marco se usa para soportar la cubierta de madera de una residencia. Esboce la carga que actúa a lo largo de los miembros *BG* y *ABCD*. Considere $b = 10$ ft y $a = 5$ ft. *Sugerencia*: Vea la tabla 1-3.

***2–4.** Resuelva el problema 2–3 si $b = 8$ ft y $a = 8$ ft.

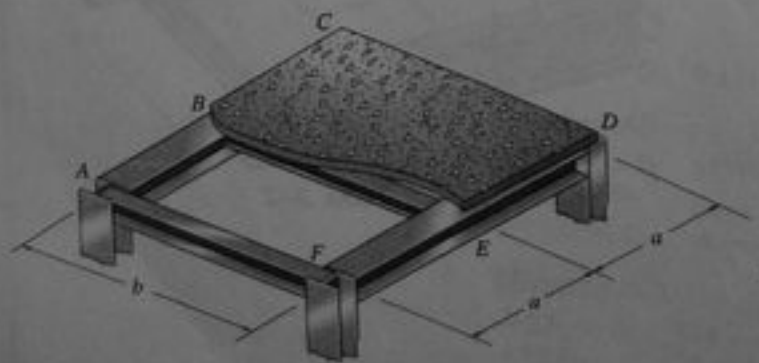
2–5. Resuelva el problema 2–3 si $b = 15$ ft y $a = 8$ ft.



Probs. 2–3/2–4/2–5

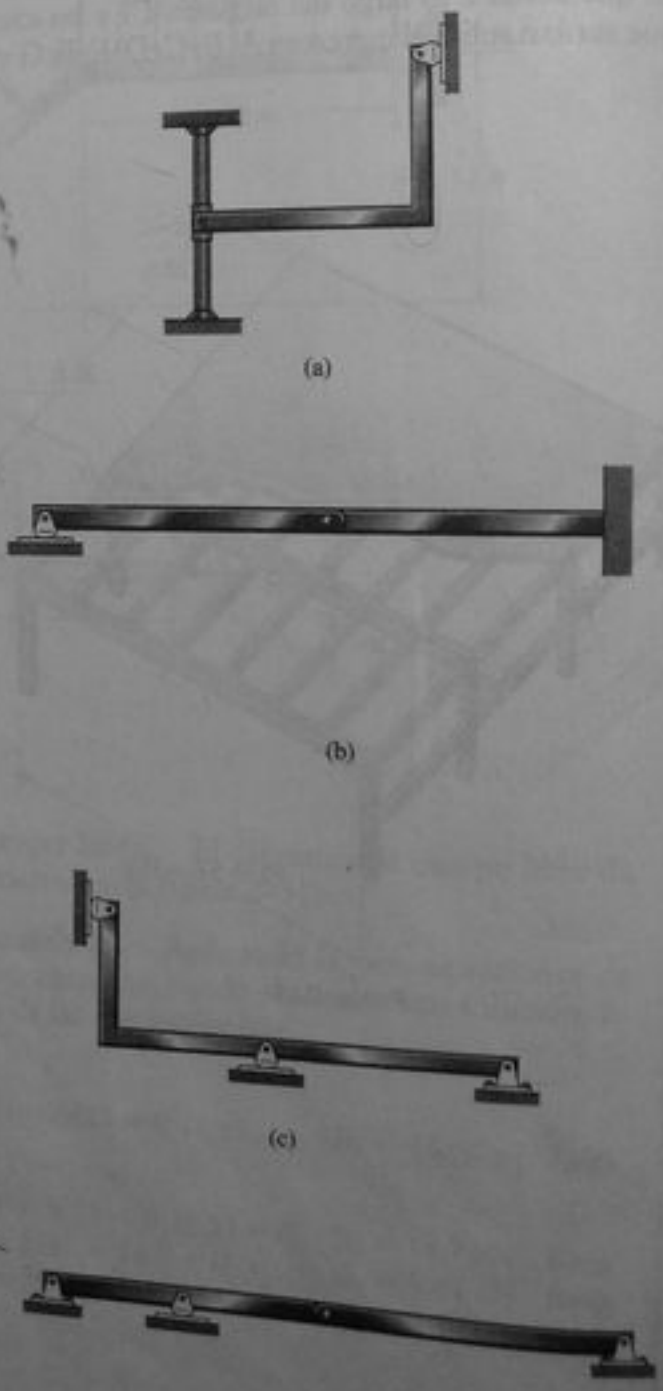
2–6. La estructura de acero se usa para soportar la losa de concreto reforzado de peso ligero de 4 in. de espesor que tiene una carga viva uniforme de 500 lb/ft^2. Esboce la carga que actúa a lo largo de los miembros *BE* y *FD*. Considere $b = 10$ ft y $a = 6$ ft. *Sugerencia*: Vea la tabla 1-2.

2–7. Resuelva el problema 2–6 con $b = 12$ ft y $a = 4$ ft.



Probs. 2–6/2–7

***2–8.** Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si resulta indeterminada, especifique el grado de indeterminación.



Prob. 2–8

2–9. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si resulta indeterminada, especifique el grado de indeterminación.

(a)

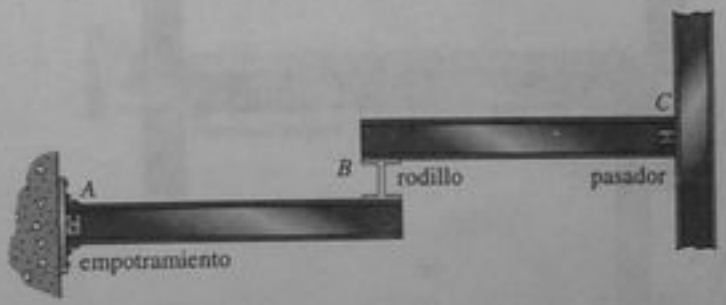
(b)

(c)

(d)

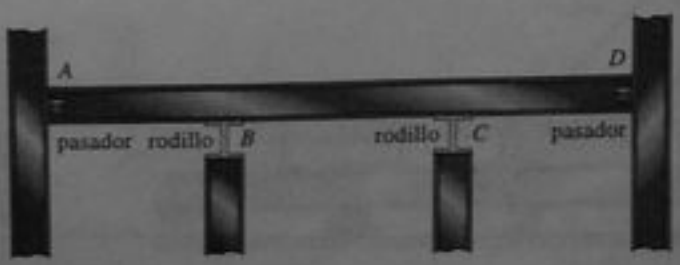
Prob. 2–9

2–10. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si resulta indeterminada, especifique el grado de indeterminación. Suponga los soportes y las conexiones como se indica en cada figura.



(a)

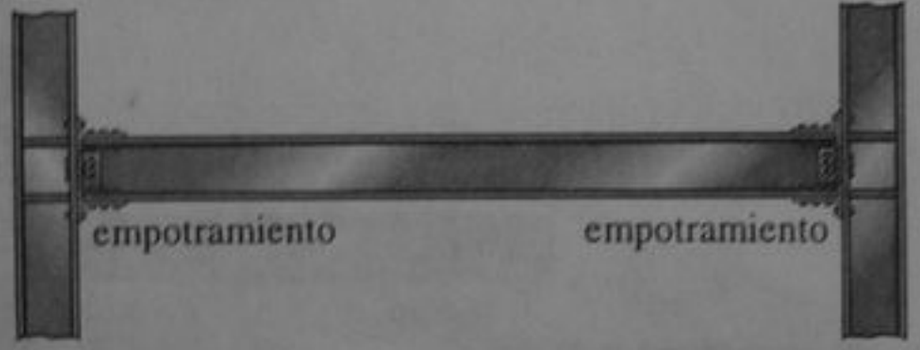
(b)



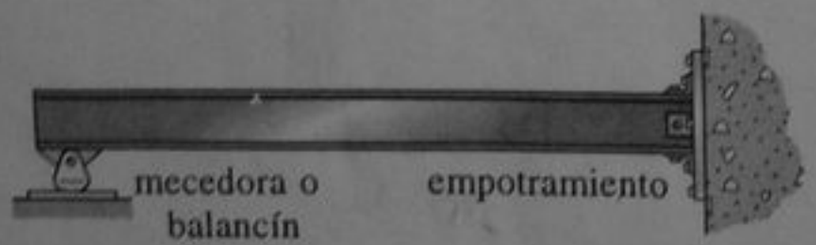
(c)

Prob. 2–10

2–11. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si resulta indeterminada, especifique el grado de indeterminación. Suponga los soportes y las conexiones como se indica en cada figura.

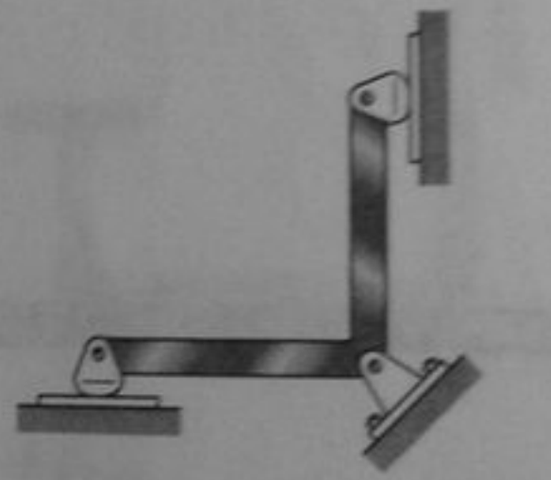


(a)

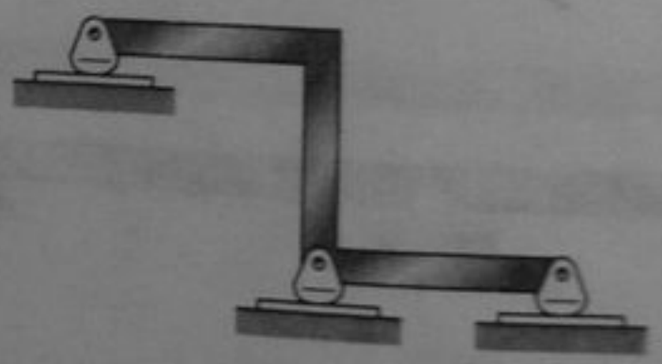


(b)

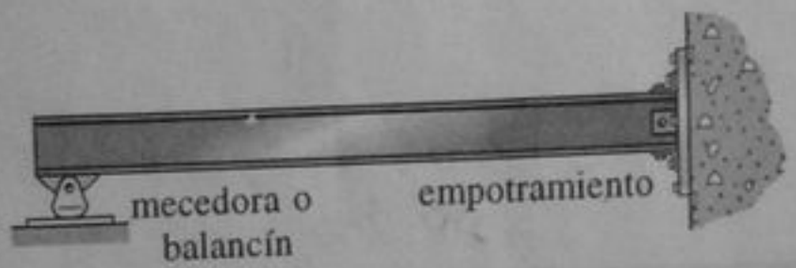
***2–12.** Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si resulta indeterminada, especifique el grado de indeterminación.



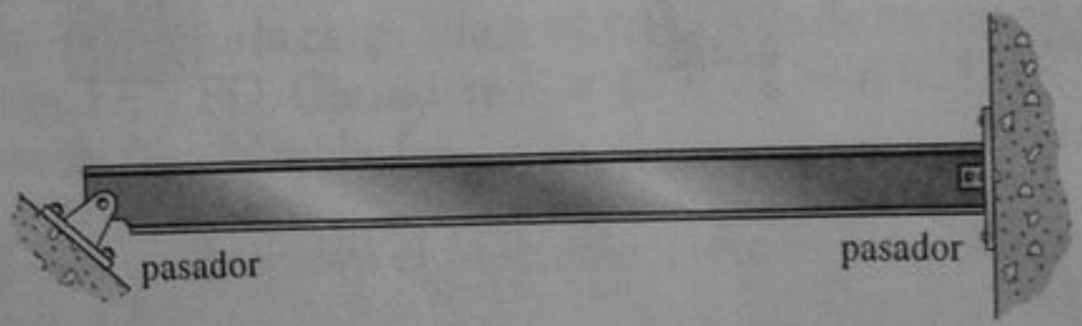
(a)



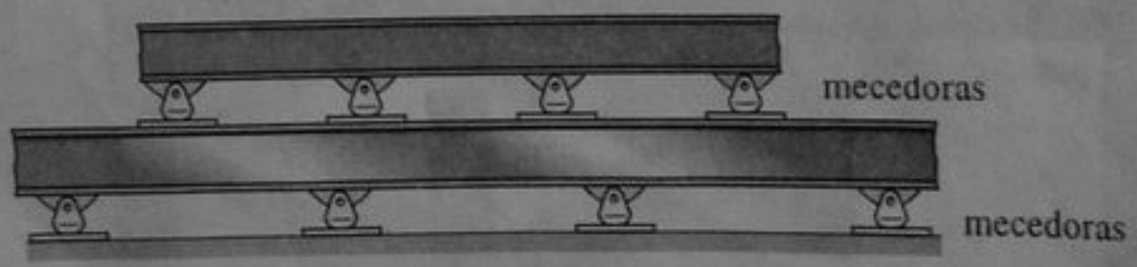
(b)



(b)

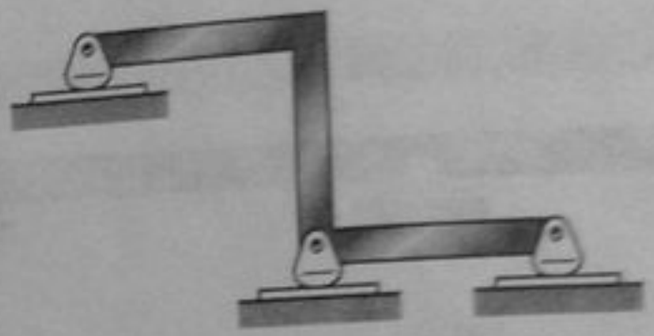


(c)

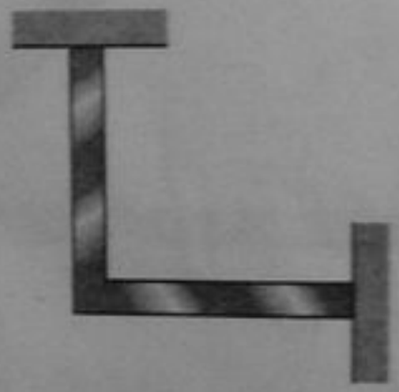


(d)

Prob. 2–11



(b)

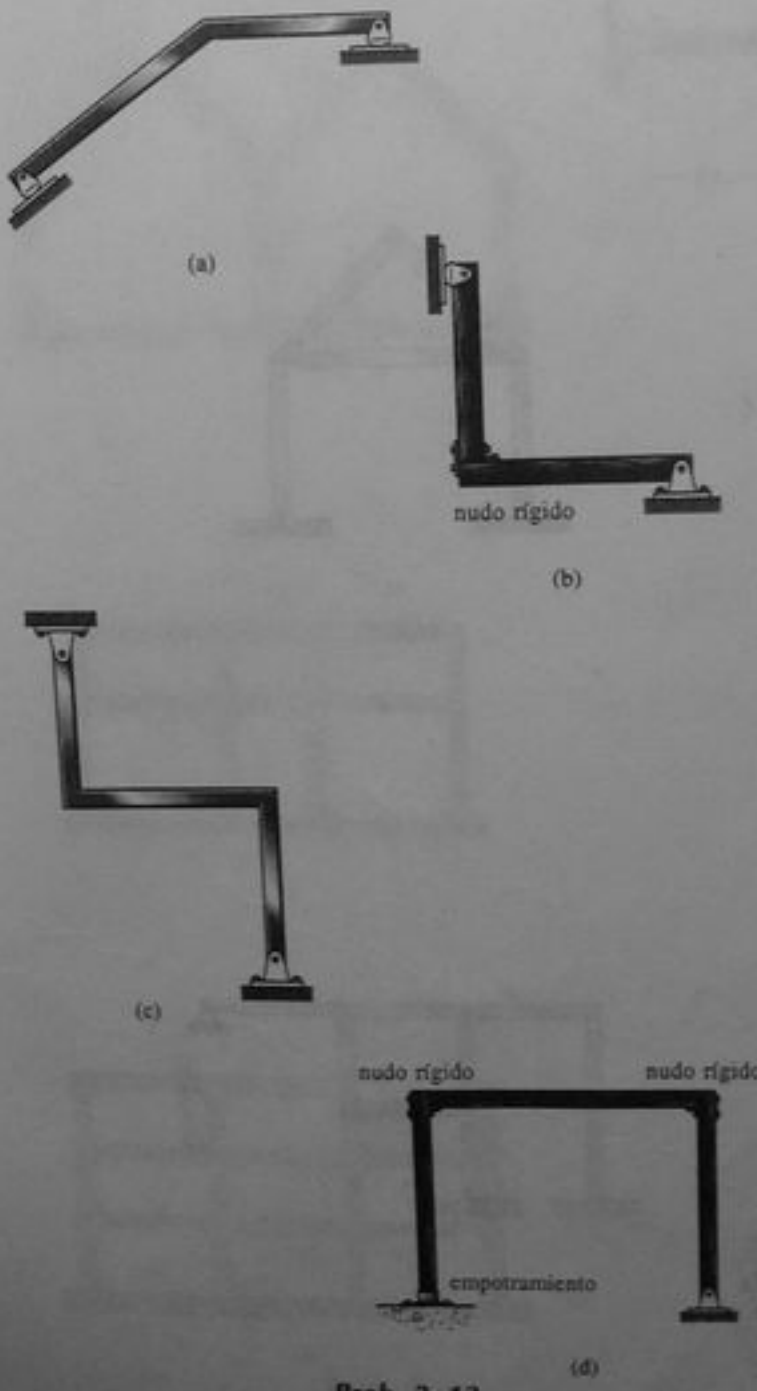


(c)

(d)

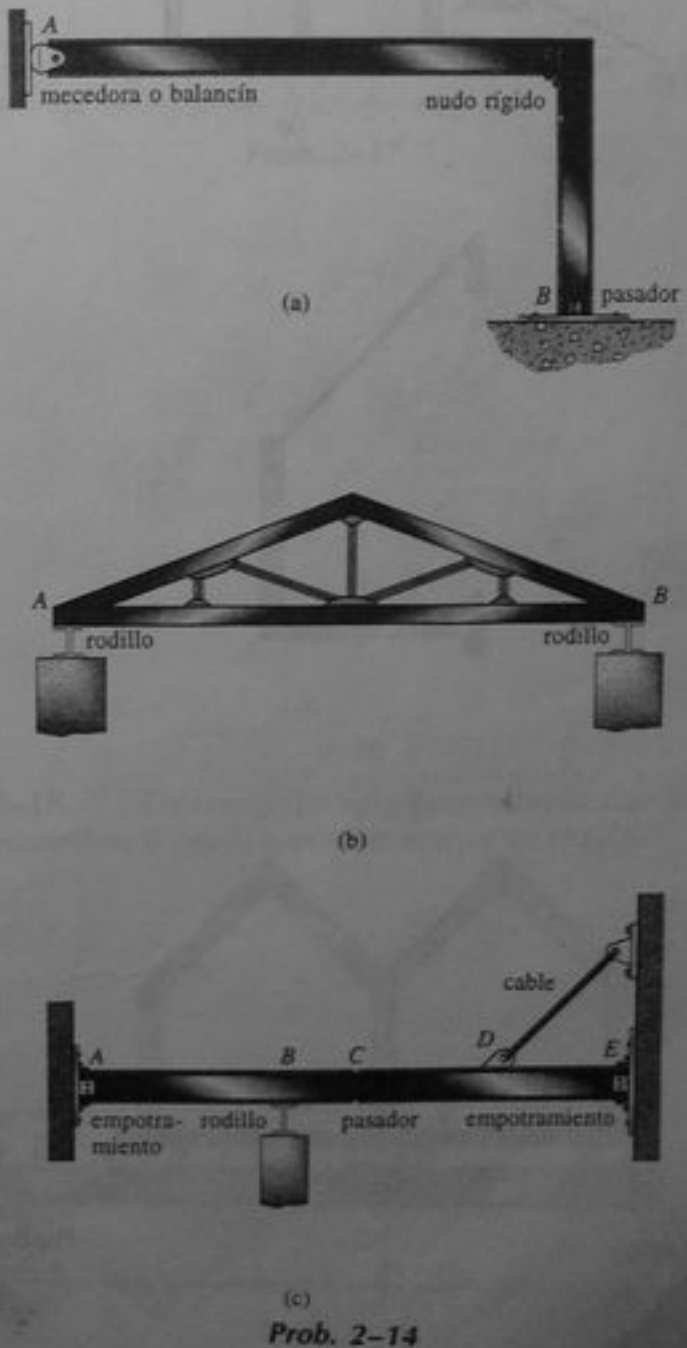
Prob. 2–12

2–13. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si resulta indeterminada, especifique el grado de indeterminación. Suponga los soportes y las conexiones como se indica en cada figura.



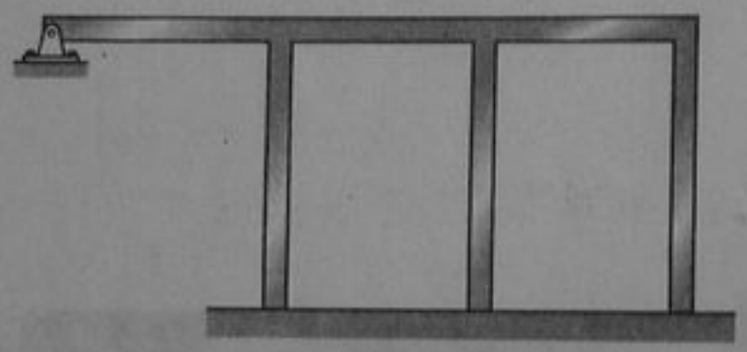
Prob. 2–13

2–14. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si resulta indeterminada, especifique el grado de indeterminación. Suponga los soportes y las conexiones como se indica en cada figura.

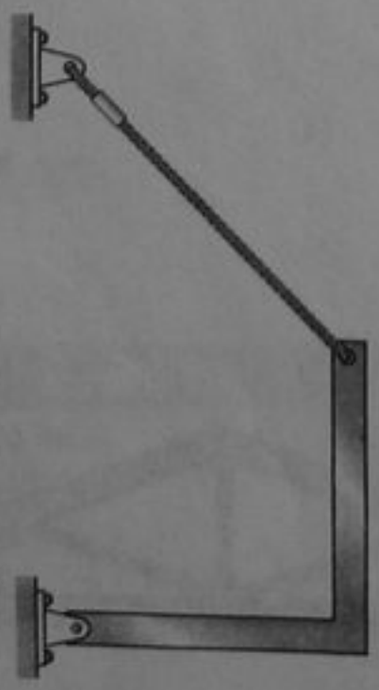


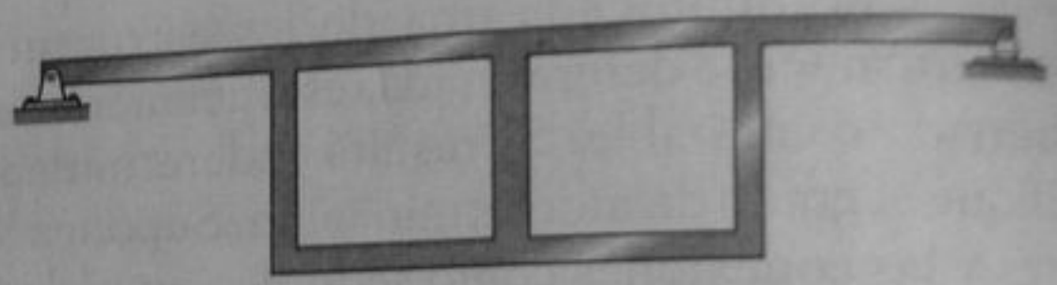
Prob. 2–14

2–15. Clasifique cada uno de los marcos como estáticamente determinado, estáticamente indeterminado o inestable. Si resulta indeterminado, especifique el grado de indeterminación. Todos los nudos internos están rígidamente conectados.

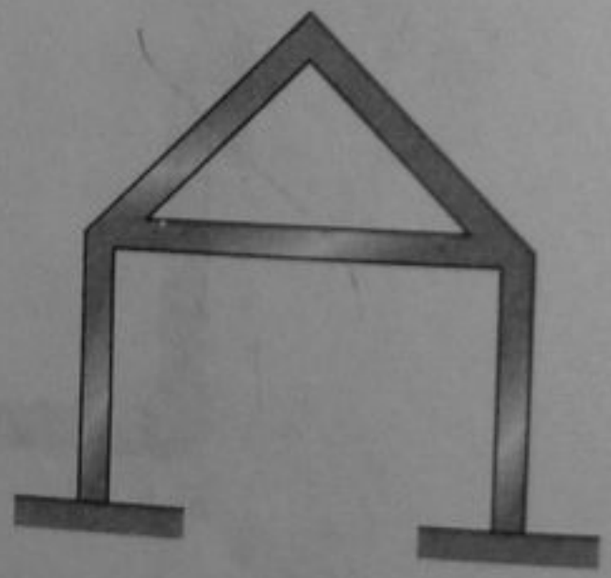


(a)



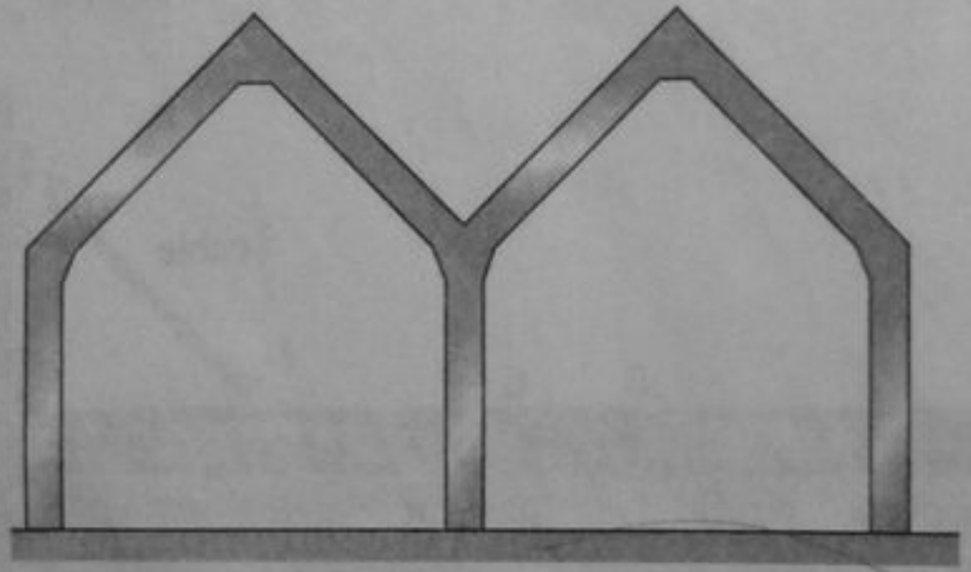


(d)

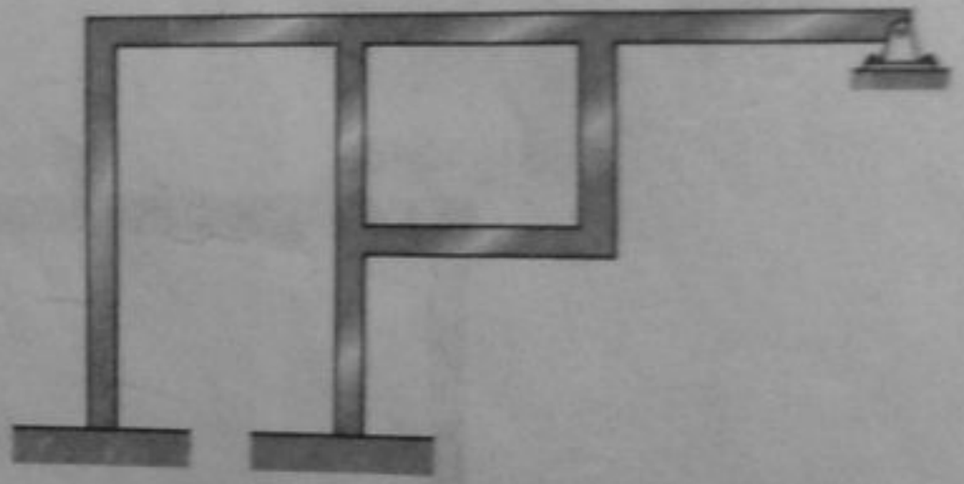


(e)

(b)



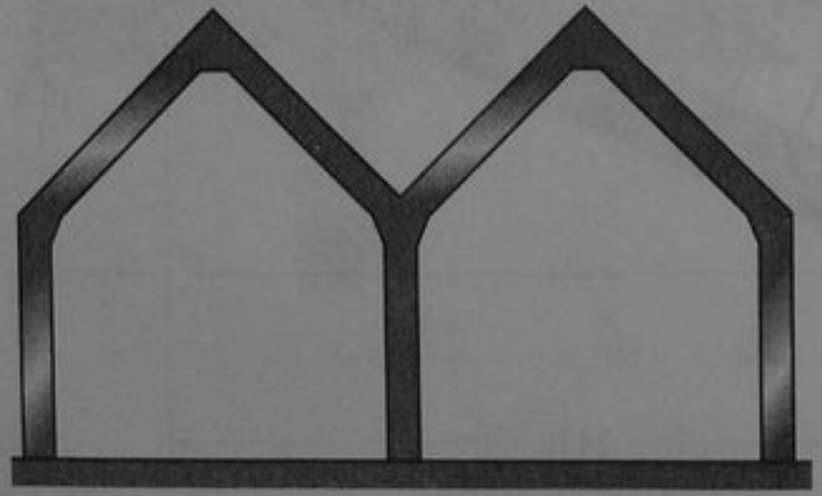
(c)



(f)

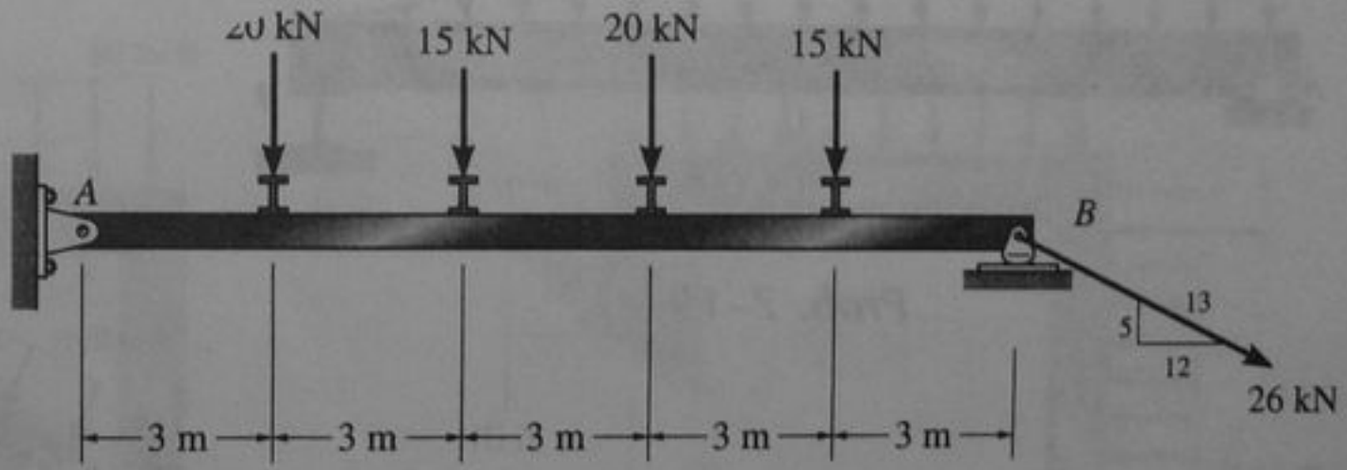
Prob. 2–15

*2–16. Clasifique cada uno de los marcos como estáticamente determinado, estáticamente indeterminado o inestable. Si resulta indeterminado, especifique el grado de indeterminación. Todos los nudos internos están rígidamente conectados.

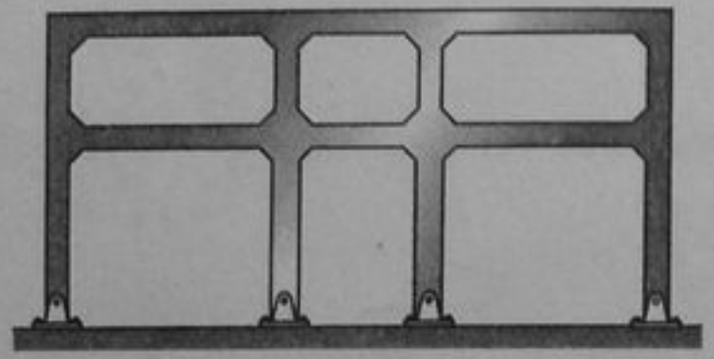


(a)

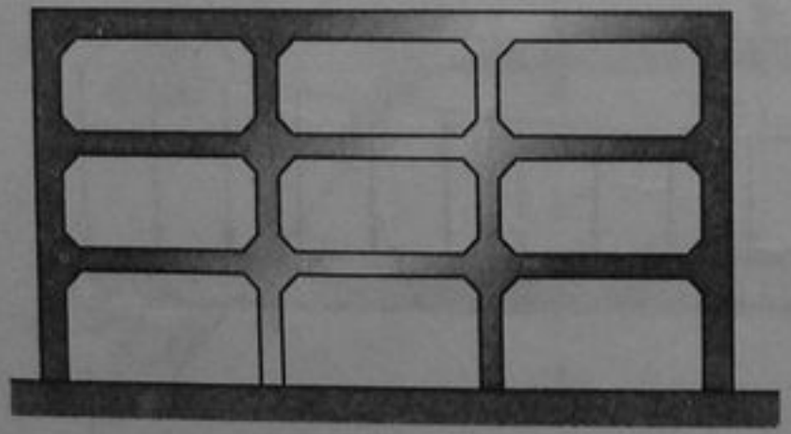
2–17. Determine las reacciones sobre la viga.



Prob. 2–17



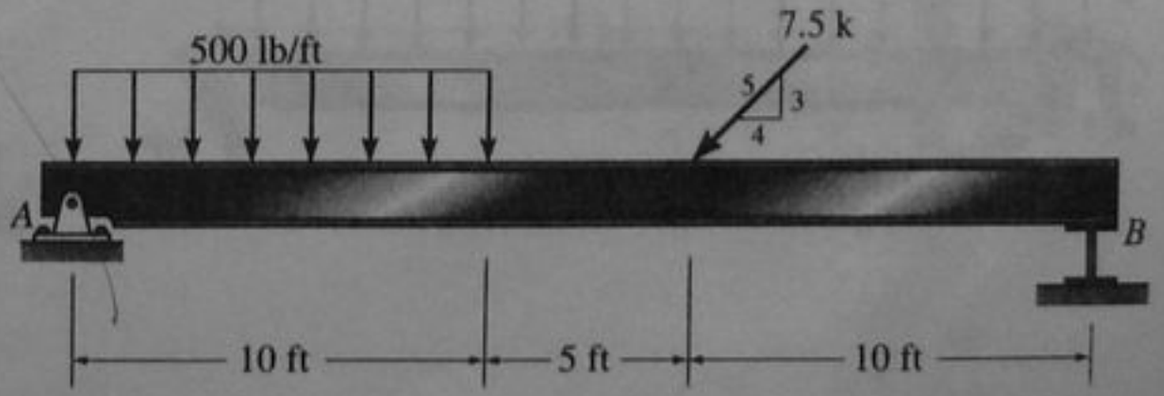
(b)



(c)

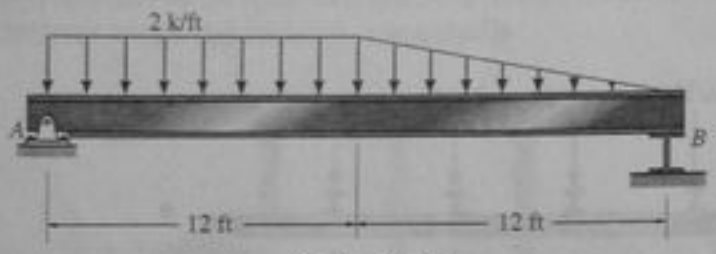
Prob. 2–16

2–18. Determine las reacciones sobre la viga. El soporte en *B* puede suponerse que es un rodillo.



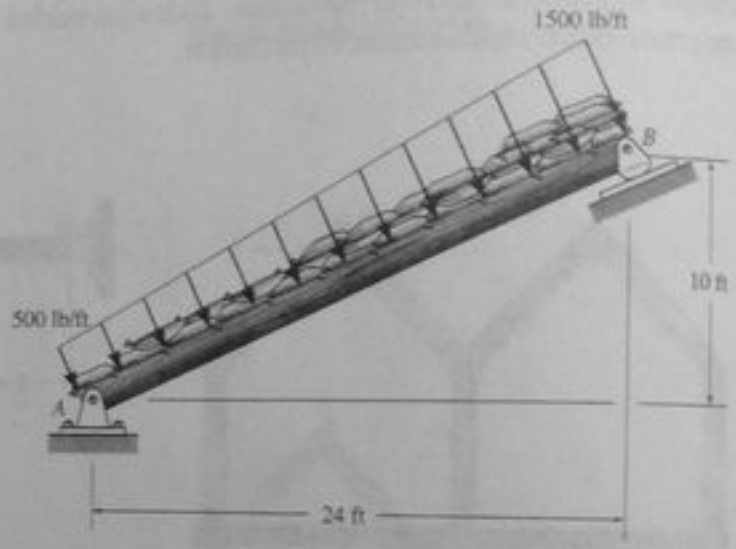
Prob. 2–18

2–19. Determine las reacciones sobre la viga. El soporte en *B* puede suponerse que es un rodillo.



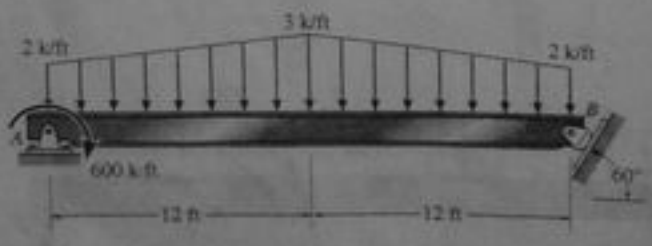
Prob. 2–19

2–21. Determine las reacciones sobre la viga.



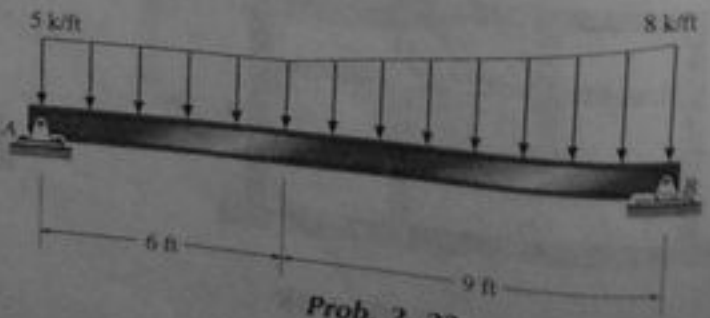
Prob. 2–21

***2–20.** Determine las reacciones de los soportes sobre la viga.



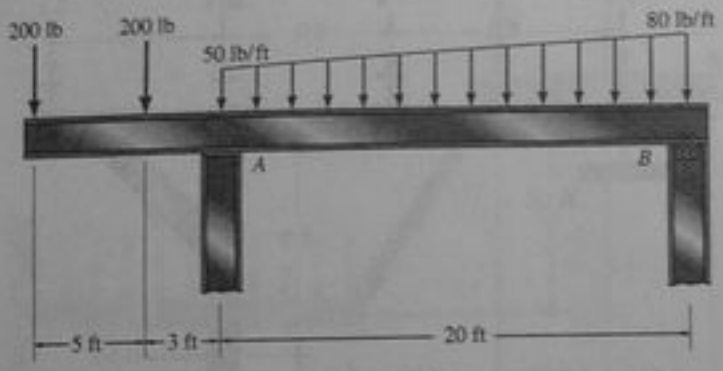
Prob. 2–20

2–22. Determine las reacciones sobre la viga.



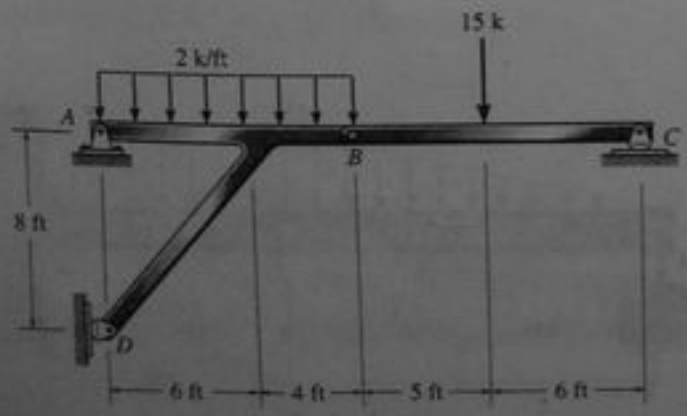
Prob. 2–22

2–23. Determine las reacciones verticales en los soportes A y B. Suponga que A es un rodillo y B un pasador.



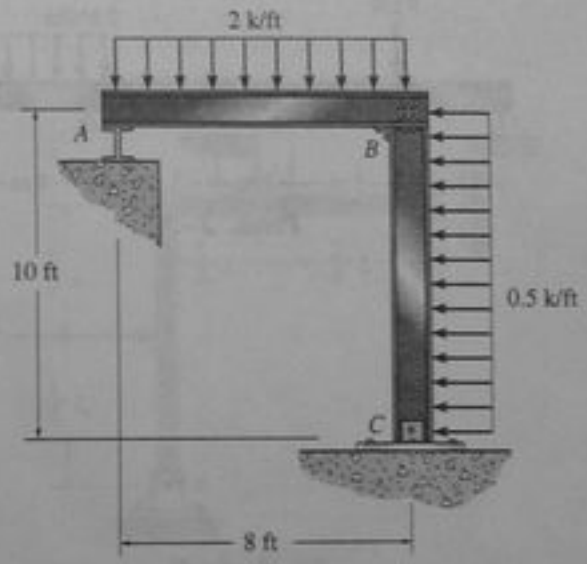
Prob. 2–23

***2–24.** Determine las reacciones en los soportes A, C y D.



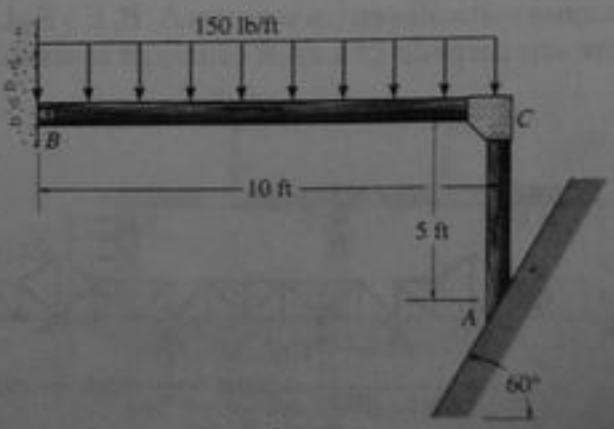
Prob. 2–24

2–25. Determine las reacciones en los soportes A y B. Suponga que el soporte en A es un rodillo, B un nudo rígido y C un pasador.



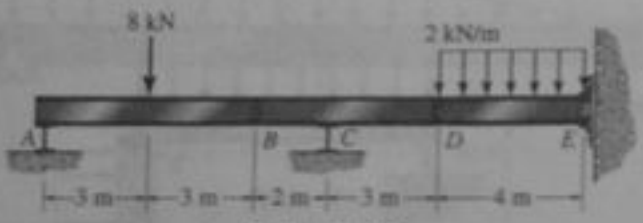
Prob. 2–25

2–26. Determine las reacciones en el soporte liso A y en el soporte de pasador B. La conexión en C es rígida.



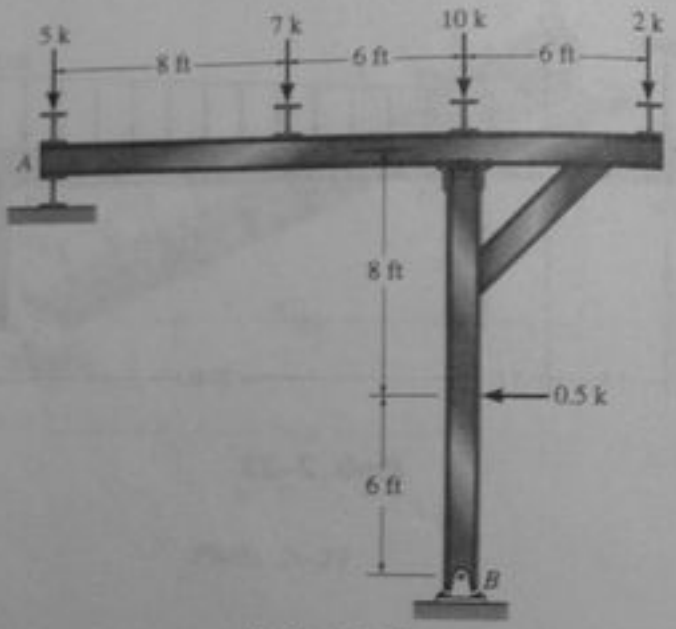
Prob. 2–26

2–27. Determine las reacciones en los soportes *A*, *C* y *E*. Suponga que *A* y *C* son rodillos, *E* es un empotramiento y *B* y *D* son pasadores.



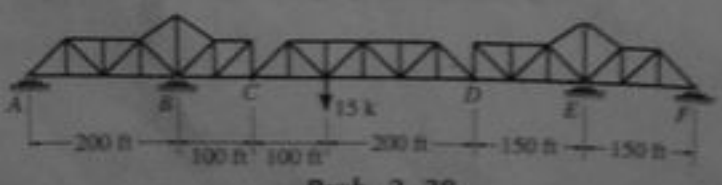
Prob. 2–27

2–29. Determine las reacciones en los soportes *A* y *B* del marco. Suponga que el soporte en *A* es un rodillo.



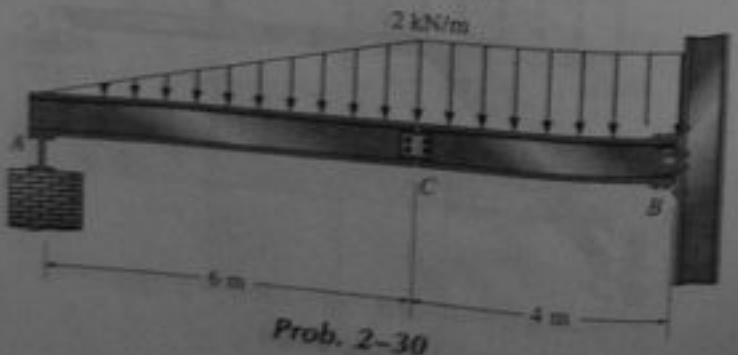
Prob. 2–29

***2–28.** Las características constructivas de un puente de armadura en cantilever se muestran en la figura. Puede verse que la armadura central *CD* está suspendida por los brazos en cantilever o voladizo *ABC* y *DEF*. *C* y *D* son pasadores. Determine las reacciones verticales en los soportes *A*, *B*, *E* y *F* al aplicarse una carga de 15 k en el centro de la armadura.



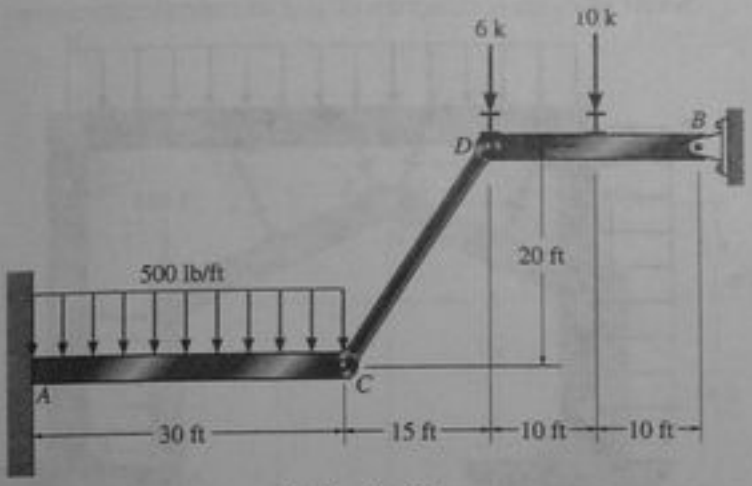
Prob. 2–28

2–30. Determine las reacciones en los soportes *A* y *B* de la viga compuesta. Suponga que *A* es un rodillo, *C* un pasador y *B* un empotramiento.



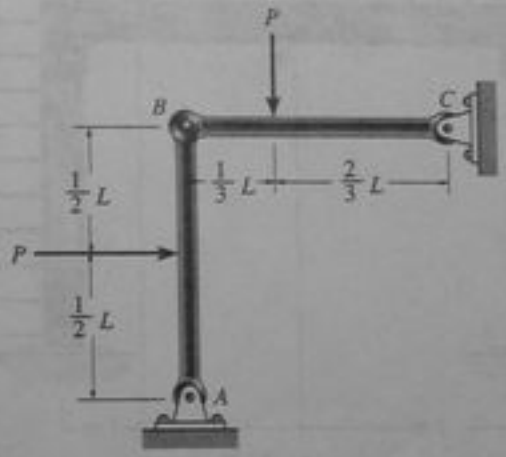
Prob. 2–30

2–31. Determine las reacciones en los soportes A y B.



Prob. 2–31

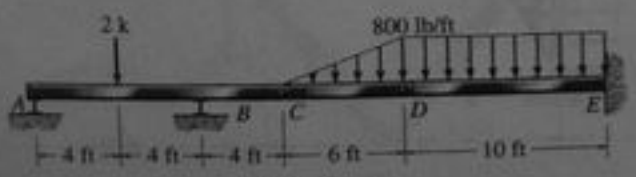
2–33. Determine las reacciones en los soportes A y C en términos de la carga P.



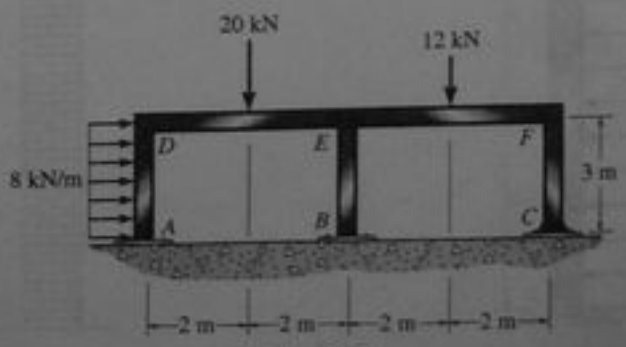
Prob. 2–33

2–34. Determine las componentes horizontales y verticales de las reacciones en los soportes A, B y C. Suponga que el marco está conectado por pasadores en A, B, D, E y F y que en C está empotrado.

***2–32.** Determine las reacciones en A, B y E. Suponga que A y B son rodillos.

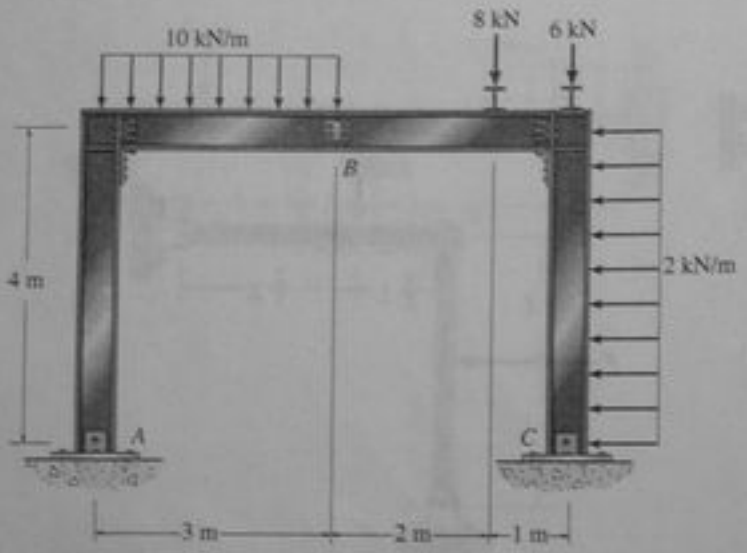


Prob. 2–32



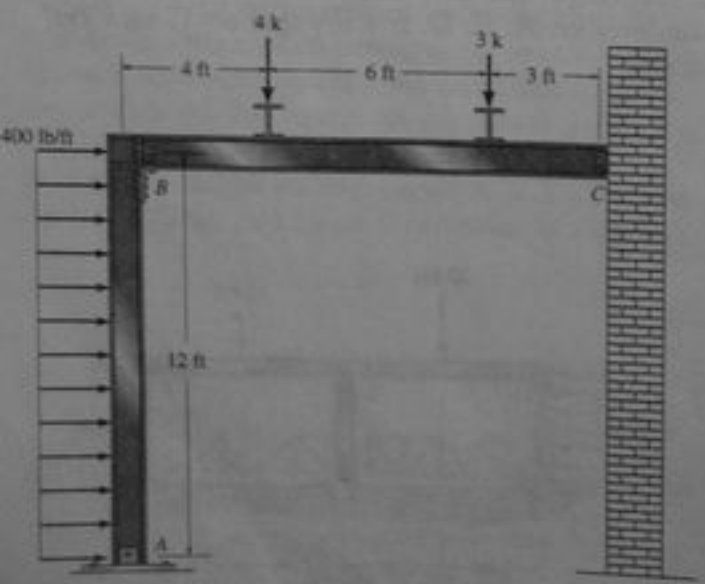
Prob. 2–34

2–35. Determine las reacciones en los soportes A y C. El marco está conectado por pasadores en A, B y C y los dos nudos son rígidos.



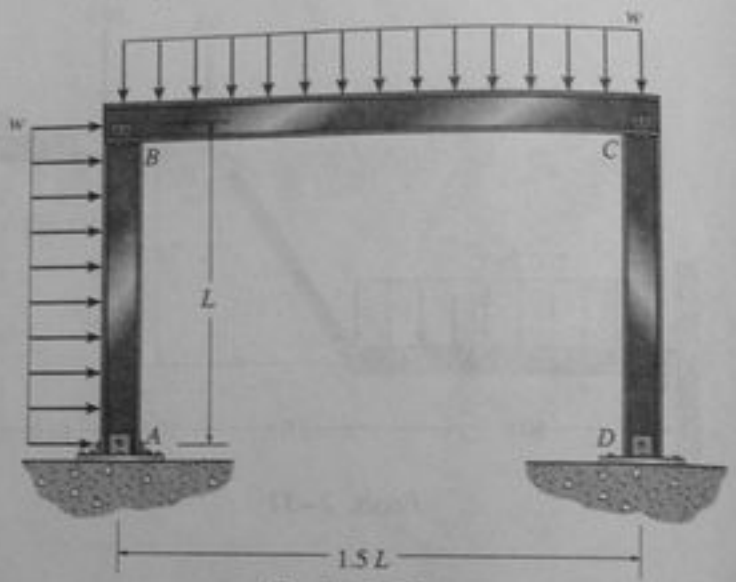
Prob. 2–35

***2–36.** Determine las componentes horizontales y verticales de fuerza en las conexiones A, B y C. Suponga que cada una de esas conexiones es un pasador y que B es un nudo rígido.



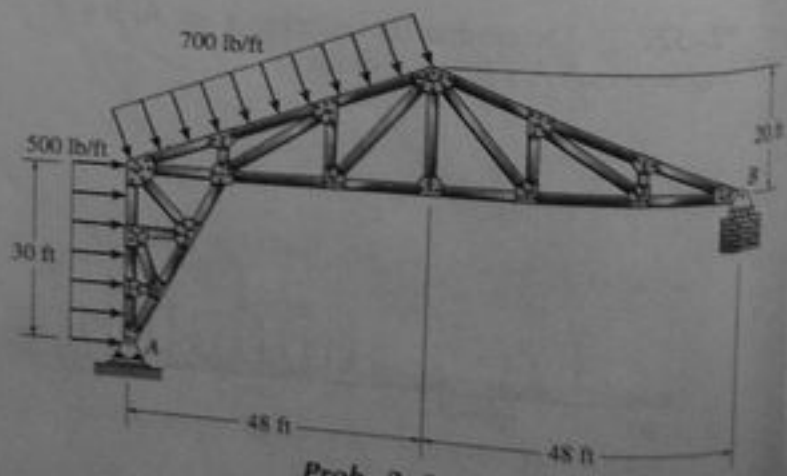
Prob. 2–36

2–37. Determine las reacciones en los soportes A y D. Suponga que A es un empotramiento y que B, C y D son pasadores.



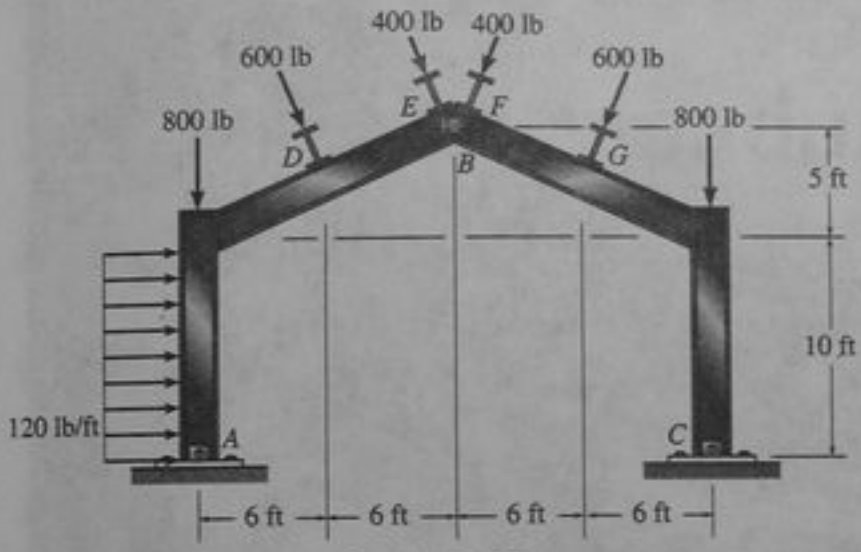
Prob. 2–37

2–38. Determine las reacciones en los soportes A y B de la armadura. La carga distribuida es ocasionada por la presión del viento.



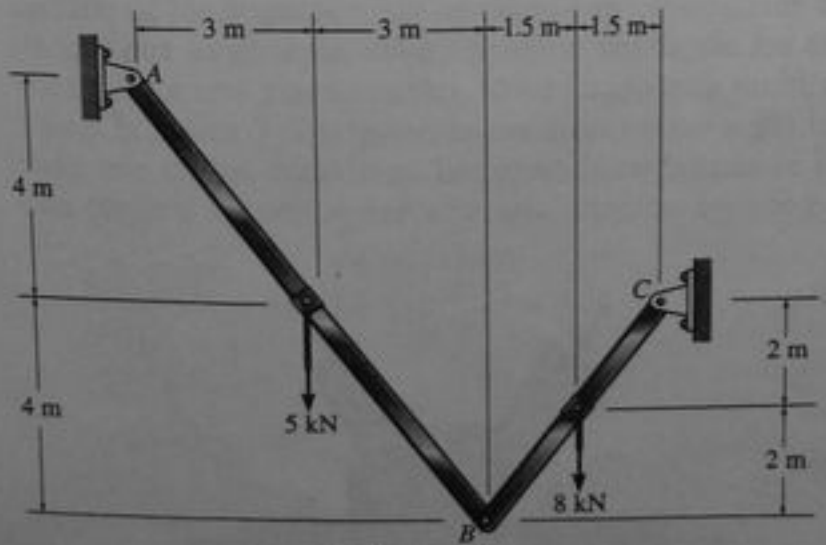
Prob. 2–38

2–39. Determine las reacciones horizontales y verticales en las conexiones A y C del marco a dos aguas. Suponga que A, B y C son pasadores. Las cargas de los largueros, como en D y E, están aplicadas perpendicularmente a la línea central de cada trabe.

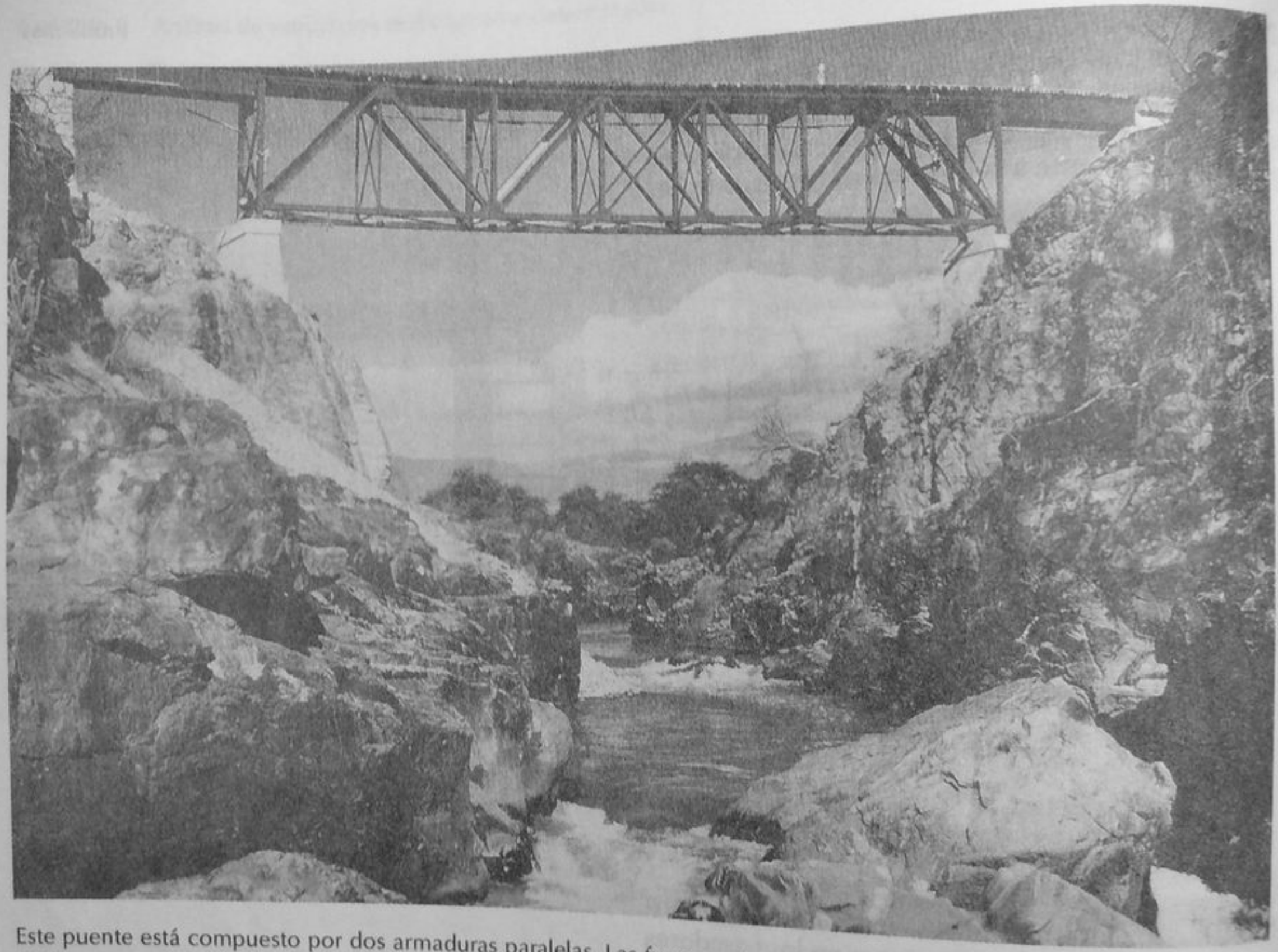


Prob. 2–39

***2–40.** Determine las componentes horizontales y verticales de las reacciones en los pasadores A y C.



Prob. 2–40



Este puente está compuesto por dos armaduras paralelas. Las fuerzas ejercidas sobre sus miembros pueden analizarse fácilmente usando el método de los nudos o bien el método de las secciones. (*Fotografía cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

3

Análisis de armaduras estáticamente determinadas

En este capítulo desarrollaremos los procedimientos para analizar las armaduras estáticamente determinadas, mediante el método de los nudos y el método de las secciones. Sin embargo, veremos primero los conceptos de determinación y estabilidad de una armadura. Luego consideraremos el análisis de tres formas de armaduras planas: simples, compuestas y complejas. Finalmente, al final del capítulo, consideraremos el análisis de armaduras espaciales.

3.1 Tipos comunes de armaduras

Una *armadura* es una estructura compuesta de miembros esbeltos unidos entre sí en sus puntos extremos. Los miembros que suelen utilizarse en la construcción son los puntales de madera, las barras metálicas, los ángulos y los canales. Las conexiones en los nudos se hacen, por lo general, atornillando o soldando los extremos de los miembros a una placa común, llamada *placa de nudo*, como se muestra en la figura 3–1 o pasando un gran perno o pasador a través de cada uno de los miembros. Las armaduras planas se localizan en un solo plano y se usan a menudo para soportar techos y puentes.

Fig. 3–1

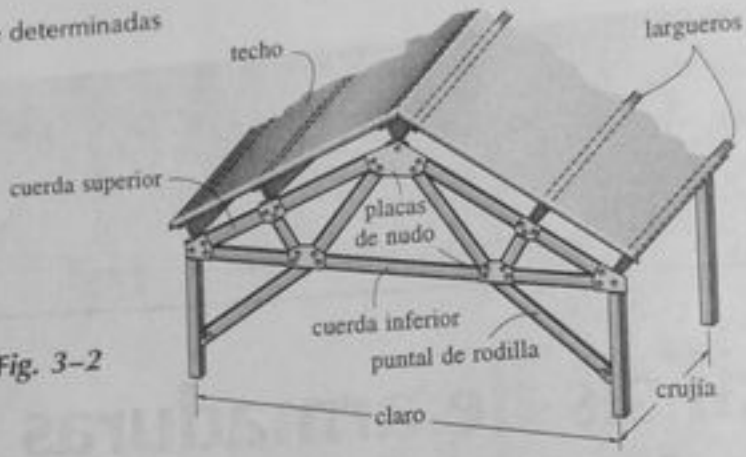
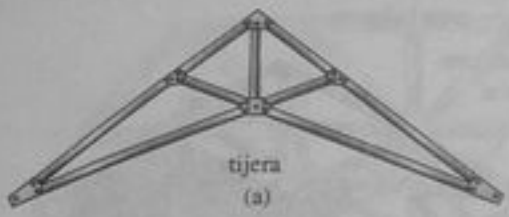


Fig. 3–2

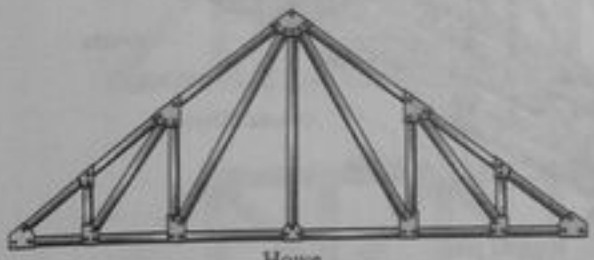
Armaduras de techo

Las armaduras de techo suelen usarse como parte de la estructura de un edificio industrial como la mostrada en la figura 3–2. Aquí, la carga del techo se transmite a la armadura a través de los nudos por medio de una serie de *largueros*. La armadura de techo junto con sus columnas de soporte se llama *marco*. Ordinariamente, las armaduras de techo están soportadas por columnas de madera, acero o concreto reforzado o por muros de mampostería. Para mantener el marco rígido y, por tanto, capaz de resistir fuerzas horizontales de viento, se usan a veces puntales de rodilla en las columnas de soporte. Cuando el claro es grande, suele usarse un rodillo o una mecedora para soportar uno de sus extremos. Este tipo de soporte permite cierta libertad de expansión o contracción por temperatura o aplicación de cargas. El espacio entre marcos adyacentes se llama *crujía*. Las crujías miden aproximadamente 15 ft (4.5 m) para claros de casi 60 ft (18 m) y aproximadamente 20 ft (6 m) para claros de 100 ft (30 m). Las crujías se unen entre sí usando un arriostramiento diagonal para mantener la rigidez de la estructura del edificio.

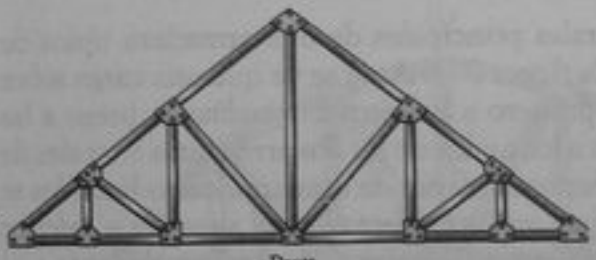
Las formas de las armaduras usadas para soportar techos se seleccionan con base en el claro, pendiente y tipo de material de la cubierta. En la figura 3–3 se muestran algunos de los tipos más comunes. En particular, la armadura de tijera, figura 3–3*a*, puede usarse para claros pequeños que requieren altura libre superior. Las armaduras Howe y Pratt, figuras 3–3*b* y 3–3*c* se usan para techos de claro moderado, de entre 60 ft (18 m) y 100 ft (30 m). Si se requieren claros mayores para soportar el techo, pueden usarse la armadura de abanico o la armadura Fink, figuras 3–3*d* y 3–3*e*. Estas armaduras pueden construirse con la cuerda inferior combada, como se muestra en la figura 3–3*f*. Cuando se piensa colocar un techo plano o casi plano, suele usarse la armadura Warren, figura 3–3*g*. Las armaduras Howe y Pratt pueden también modificarse para recibir techos planos. Las armaduras de diente de sierra, figura 3–3*h*, se usan cuando la separación entre columnas no es objetable y es importante una iluminación uniforme. Una fábrica textil sería un ejemplo. La armadura de cuerda de arco, figura 3–3*i*, se selecciona a veces para garajes y hangares pequeños; la armadura en arco, figura 3–3*j*, aunque relativamente cara, puede usarse para grandes alturas libres y claros largos como casas de campo, gimnasios, etcétera.



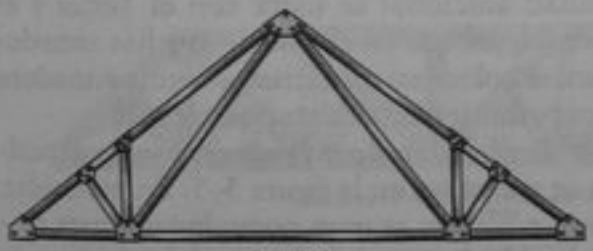
tijera
(a)



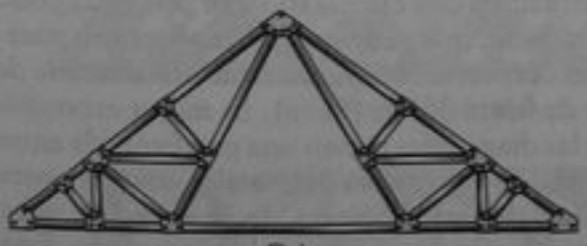
Howe
(b)



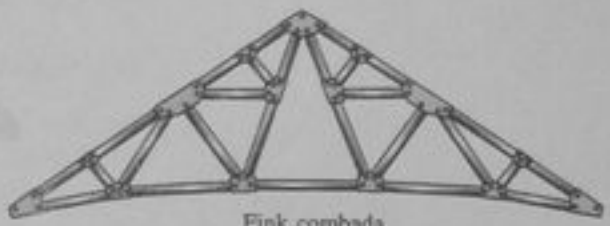
Pratt
(c)



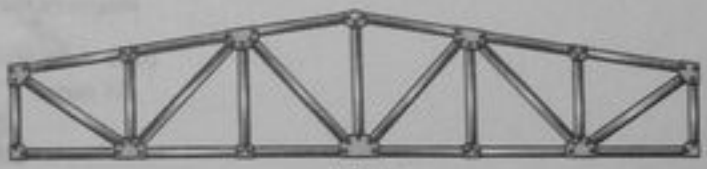
abanico
(d)



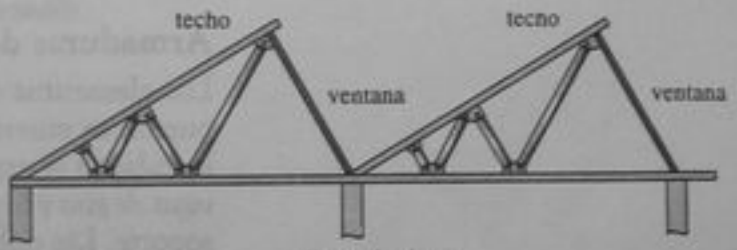
Fink
(e)



Fink combada
(f)



Warren
(g)



diente de sierra
(h)

cuerda de arco
(i)

arco de tres articulaciones
(j)

Fig. 3–3

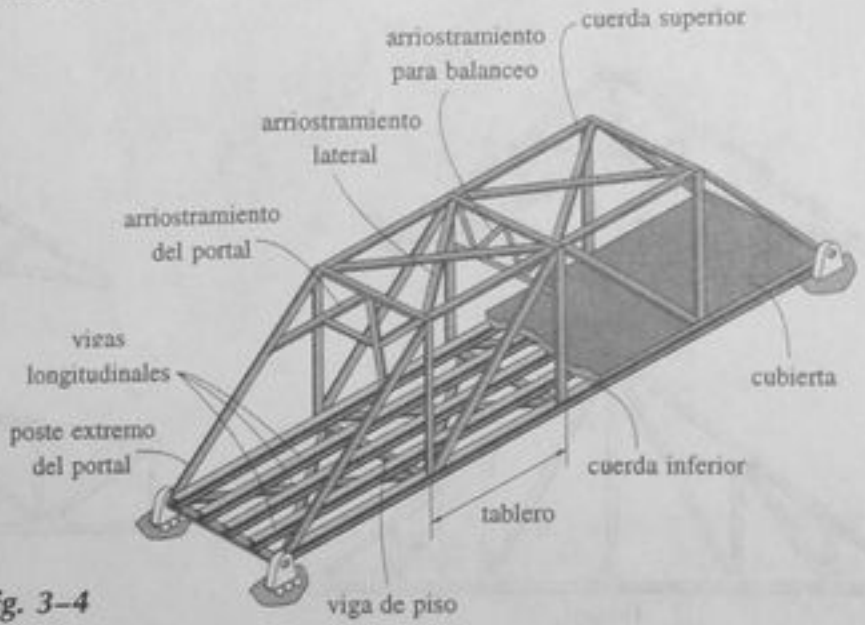


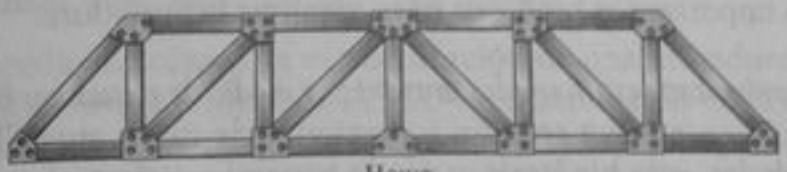
Fig. 3–4

Armaduras de puente

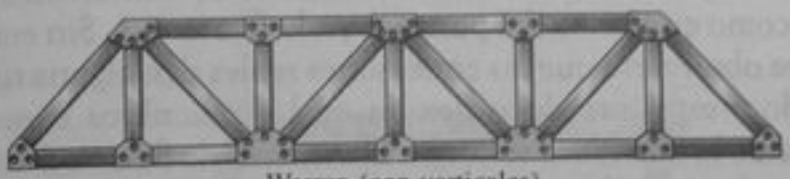
Los elementos estructurales principales de una armadura típica de puente se muestran en la figura 3–4. Aquí se ve que una carga sobre la *cubierta* se transmite primero a las *vigas longitudinales*, luego a las *vigas de piso* y finalmente a los nudos de las dos armaduras laterales de soporte. Las cuerdas superior e inferior de esas armaduras laterales se conectan por medio de un *arriostramiento lateral* superior e inferior que sirve para resistir las fuerzas laterales causadas por el viento y el movimiento lateral causado por los vehículos que transitan sobre el puente. Una estabilidad adicional se logra con el *portal* y el *arriostramiento por balanceo*. Igual que en el caso de muchas armaduras de techo de gran claro, se coloca en un extremo de una armadura de puente un rodillo para permitir cierta dilatación térmica.

Algunas formas típicas de armaduras para puentes usadas actualmente en claros simples se muestran en la figura 3–5. En particular, las armaduras Pratt, Howe y Warren se usan normalmente para claros de entre 180 ft (55 m) y 200 ft (61 m) de longitud. La forma más común es la armadura Warren con verticales, figura 3–5*c*. Para claros más grandes se usa una armadura con cuerda superior poligonal, como la armadura Parker, figura 3–5*d*, que permite algo de ahorro en material. La armadura Warren con verticales puede también fabricarse de esta manera para claros de hasta 300 ft (91 m). La mayor economía de material se obtiene si las diagonales tienen una pendiente de entre 45 y 60° con la horizontal. Si se observa esta regla, entonces para claros mayores que 300 ft (91 m), la altura de la armadura debe incrementarse y en consecuencia los tableros resultarán mayores. Esto conduce a un sistema de cubierta muy pesada y para mantener el peso de la cubierta dentro de límites tolerables, se han desarrollado las armaduras *subdivididas*. Entre estas se cuentan las armaduras Baltimore y las Warren subdivididas, figuras 3–5*e* y 3–5*f*. Finalmente,

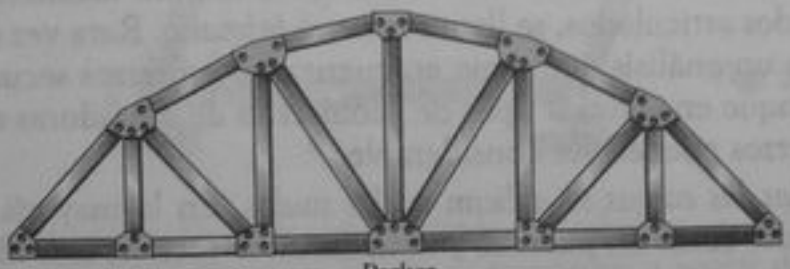
Pratt
(a)



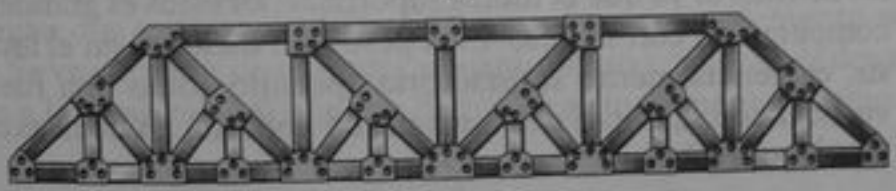
Howe
(b)



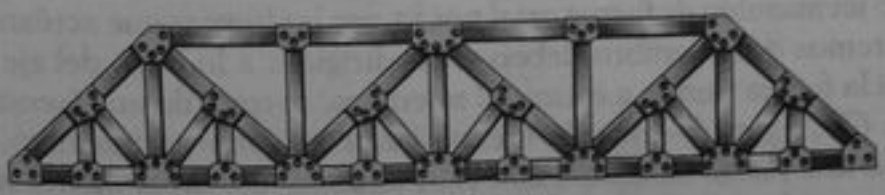
Warren (con verticales)
(c)



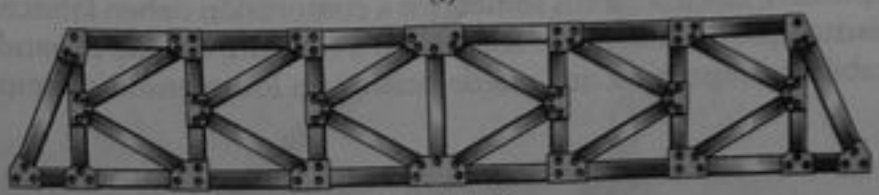
Parker
(d)



Baltimore o Pratt subdividida
(e)



Warren subdividida
(f)



armadura K
(g)

Fig. 3–5

la armadura K mostrada en la figura 3–5g, puede también usarse en vez de una armadura subdividida ya que cumple el mismo propósito.

Hipótesis de diseño

Para diseñar los miembros y conexiones de una armadura, es necesario primero determinar la *fuerza* desarrollada en cada miembro cuando la armadura es sometida a una carga dada. Respecto a esto, se harán dos importantes hipótesis para idealizar la armadura.

1. *Los miembros están unidos entre sí por medio de pasadores lisos.* En los casos en que se usan conexiones de nudo atornilladas o soldadas, esta hipótesis es por lo general satisfactoria, siempre que los ejes de los miembros conectados concurren en un punto, como en el caso del punto A en la figura 3–1. Sin embargo, debe observarse que las conexiones reales dan alguna *rigidez* al nudo y esto introduce flexión en los miembros conectados cuando la armadura se carga. El esfuerzo de flexión desarrollado en los miembros se llama *esfuerzo secundario*, mientras que el esfuerzo en los miembros de la armadura idealizada, con nudos articulados, se llama *esfuerzo primario*. Rara vez se efectúa un análisis que tome en cuenta los esfuerzos secundarios aunque en algunos tipos de geometrías de armaduras esos esfuerzos pueden ser considerables.*
2. *Todas las cargas se aplican en los nudos.* En la mayoría de los casos, como en puentes y armaduras de techos, esta hipótesis es cierta. Frecuentemente se desprecia en el análisis el peso de los miembros ya que la fuerza soportada por éstos es grande en comparación con su peso. Si el peso va a incluirse en el análisis, es generalmente satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical con la mitad de su magnitud aplicada en cada extremo del miembro.

Debido a estas dos hipótesis, *cada miembro de armadura se comporta como un miembro de fuerza axial* por lo que las fuerzas que actúan en los extremos del miembro deben estar dirigidas a lo largo del eje de éste. Si la fuerza tiende a estirar el miembro, se trata de una *fuerza de tensión* (*T*), figura 3–6*a*; si la fuerza tiende a *acortar* el miembro, se trata de una *fuerza de compresión* (*C*), figura 3–6*b*. En el diseño real de una armadura es importante establecer si la fuerza es de tensión o de compresión. Los miembros sometidos a compresión deben fabricarse más robustos que los miembros sometidos a tensión, debido al pandeo o inestabilidad repentina que puede ocurrir en los miembros comprimidos.

Fig. 3–6

* Vea la referencia 2 para detalles sobre el análisis de los esfuerzos secundarios.

3.2 Clasificación de las armaduras coplanares

Antes de comenzar el análisis de fuerzas de una armadura, es importante clasificar la armadura como simple, compuesta o compleja, y luego poder especificar su determinación y estabilidad.

Armadura simple

Para impedir su colapso, la estructuración de una armadura debe ser rígida. Es claro que la armazón *ABCD* de cuatro barras en la figura 3–7 se desplomará a menos que se le agregue una barra diagonal como la

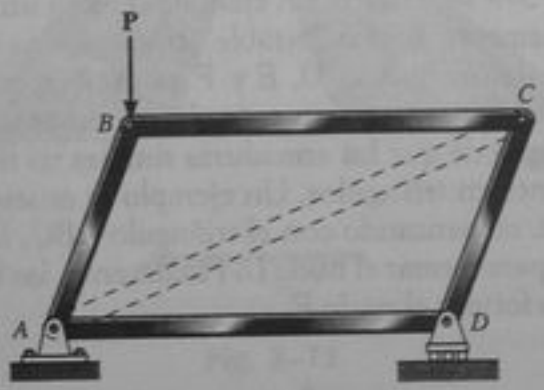


Fig. 3–7

AC. La estructuración más simple rígida o estable es un *triángulo*. En consecuencia, una *armadura simple* se construye a partir de un elemento básico triangular, como el *ABC* de la figura 3–8, al que se le agregan dos miembros (*AD* y *BD*) para formar un elemento adicional. Se ve entonces que al agregar un elemento adicional de dos miembros a la armadura, el número de nudos se incrementa en uno.

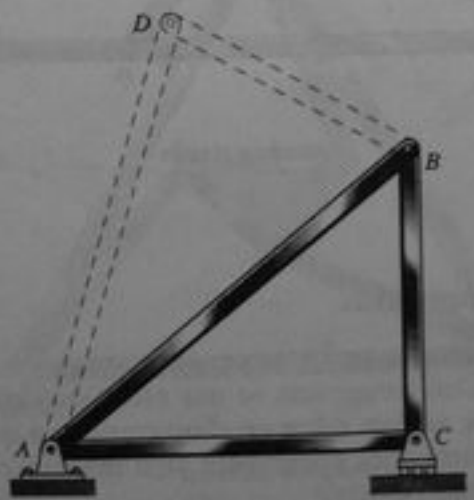


Fig. 3–8

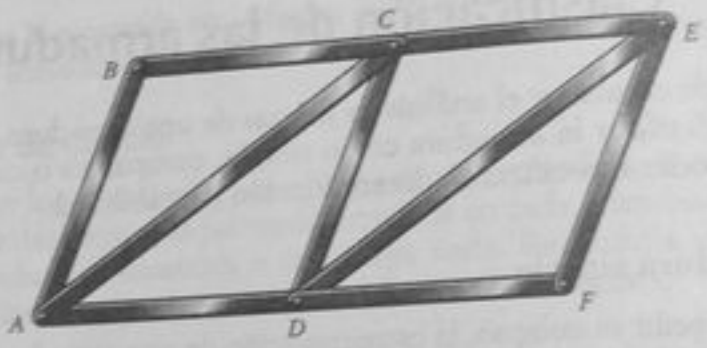


Fig. 3–9 armadura simple

En la figura 3–9 se muestra un ejemplo de una armadura simple, en la que el elemento básico "estable" triangular es *ABC*, y desde donde el resto de los nudos, *D*, *E* y *F* se establecen en secuencia alfabética. Sin embargo, para este método de construcción, es importante darse cuenta de que las armaduras simples *no* tienen que consistir enteramente en triángulos. Un ejemplo se muestra en la figura 3–10, en la que, comenzando con el triángulo *ABC*, las barras *CD* y *AD* se agregan para formar el nudo *D*. Finalmente, las barras *BE* y *DE* se agregan para formar el nudo *E*.

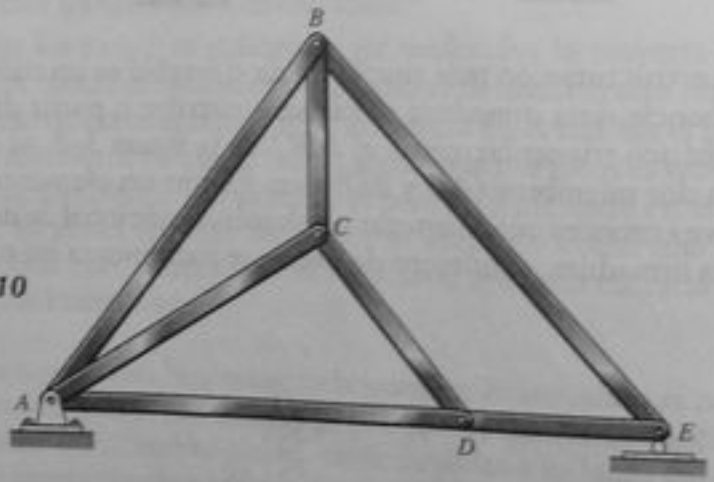


Fig. 3–10

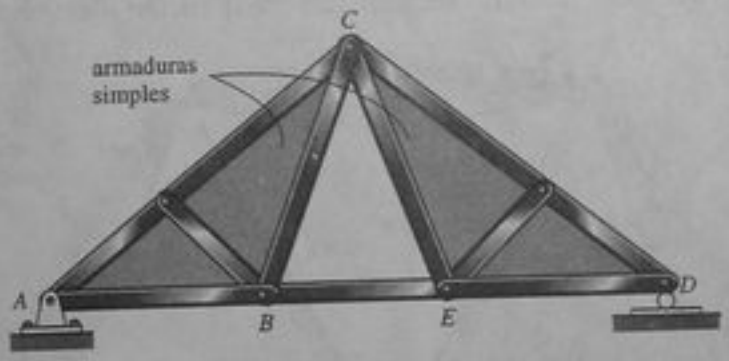
armadura simple

Armaduras compuestas

Una *armadura compuesta* se forma conectando dos o más armaduras simples entre sí. Con frecuencia se usa este tipo de armadura para soportar cargas que actúan sobre un *claro grande*, ya que es más barato construir una armadura compuesta algo más ligera que una sola armadura simple más pesada.

Hay tres maneras de conectar las armaduras simples para formar una armadura compuesta.

Tipo 1: Las armaduras pueden conectarse mediante un nudo común y una barra. Un ejemplo se da en la figura 3–11*a*, donde la armadura sombreada *ABC* está conectada a la armadura sombreada *CDE* de esta manera.

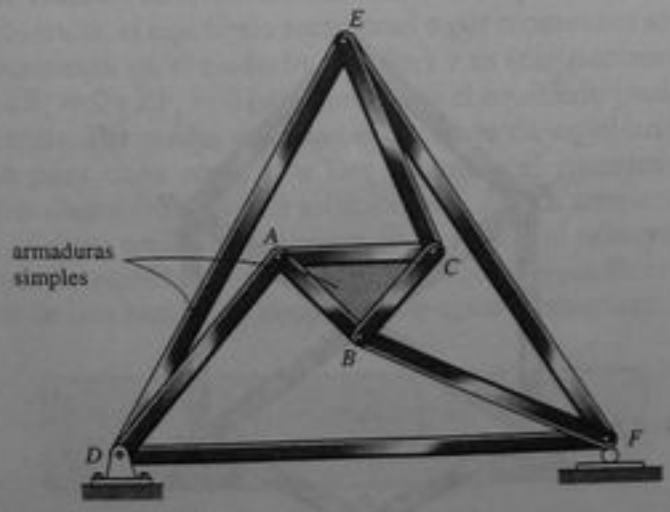


armadura compuesta

(a)

Fig. 3–11

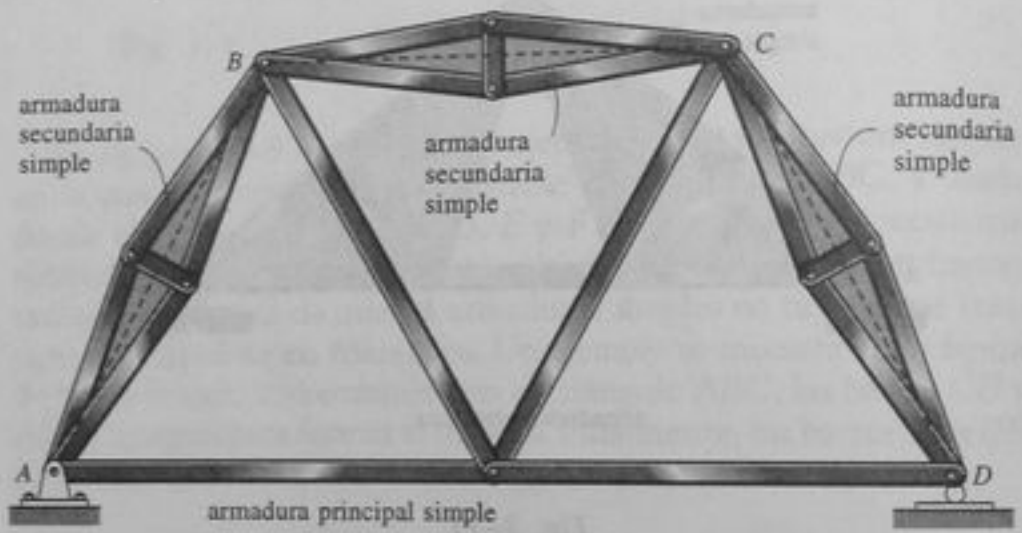
Tipo 2: Las armaduras pueden unirse por medio de tres barras como en el caso de la armadura sombreada *ABC*, conectada a la armadura mayor *DEF*, figura 3–11*b*.



armadura compuesta

(b)

Tipo 3: Las armaduras pueden unirse donde las barras de una armadura simple grande, llamada *armadura principal*, se *sustituyen* por armaduras simples, llamadas *armaduras secundarias*. Un ejemplo se muestra en la figura 3–11c, donde los miembros punteados de la armadura principal *ABCD* se han *reemplazado* por las armaduras sombreadas secundarias. Si esta armadura tuviese cargas de techo, el uso de las armaduras secundarias podría resultar más económico ya que los miembros punteados estarían sometidos a una flexión excesiva, mientras que las armaduras secundarias transferirían mejor la carga.



armadura compuesta

(c)

Armadura compleja

Una *armadura compleja* es aquella que no puede ser clasificada como simple o compuesta. La armadura en la figura 3–12 es un ejemplo de tales armaduras.

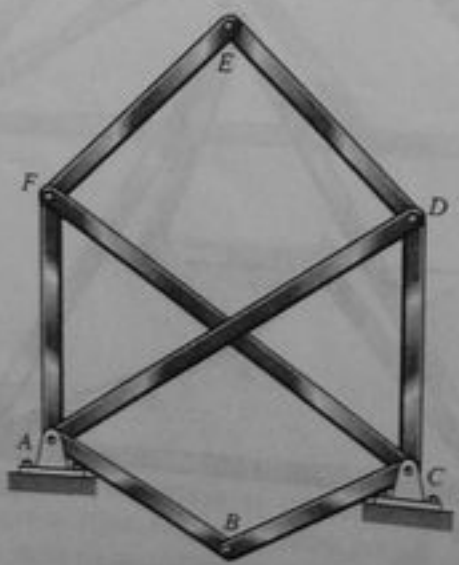
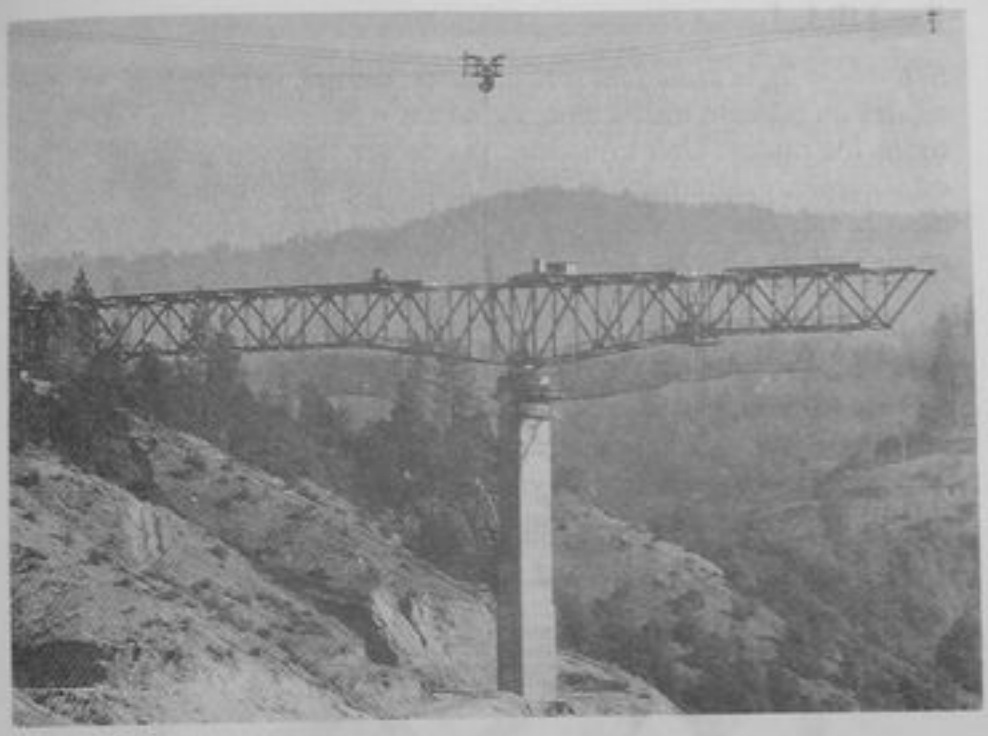


Fig. 3–12

armadura compleja



Los miembros de esta armadura de puente deben diseñarse para soportar la carga esperada en el puente así como la carga por peso muerto impuesta en ella durante su construcción. (*Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

Determinación

En cualquier problema de análisis de armaduras, debe ser claro que el número total de *incógnitas* incluye las fuerzas en b número de barras de la armadura y el número total de r reacciones externas en los soportes. Dado que todos los miembros de la armadura son elementos rectos sometidos a una fuerza axial, localizados en un mismo plano, el sistema de fuerza que actúa en cada nudo es *coplanar y concurrente*. En consecuencia, el equilibrio rotacional o por momentos se satisface automáticamente en el nudo (o pasador) y es sólo necesario que se satisfaga $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para garantizar el equilibrio traslacional o de las fuerzas. Por tanto, sólo dos ecuaciones de equilibrio pueden escribirse para cada nudo y si hay j nudos, el número total de ecuaciones disponibles para la solución será $2j$. Por simple comparación del número total de incógnitas $(b + r)$ con el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles, es posible especificar la determinación de una armadura simple, compuesta o compleja. Tenemos

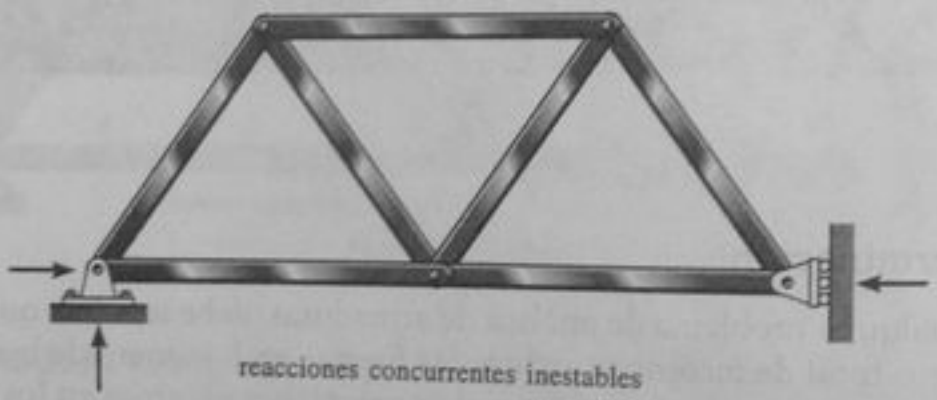
$$\begin{array}{ll} b + r = 3j & \text{estáticamente determinada} \\ b + r > 2j & \text{estáticamente indeterminada} \end{array} \qquad (3\text{–}1)$$

En particular, el *grado de indeterminación* se especifica por la diferencia de los números $(b + r) - 2j$.

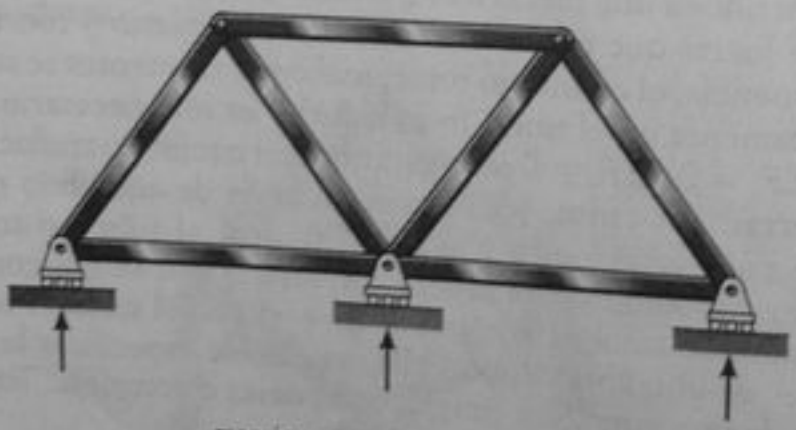
Estabilidad

Si $b + r < 2j$, la armadura será *inestable*, esto es, se colapsará, ya que tendrá un número insuficiente de barras o reacciones para restringir todos los nudos. Una armadura puede ser también inestable si es estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. En este caso, la estabilidad tendrá que determinarse por inspección o por un análisis de las fuerzas.

Estabilidad externa. Como se indicó en la sección 2.4, una *estructura (o armadura) es inestable externamente si sus reacciones son concurrentes o paralelas*. Por ejemplo, las dos armaduras de la figura 3–13 son inestables externamente ya que las reacciones en los soportes tienen líneas de acción que son concurrentes o bien paralelas.



reacciones concurrentes inestables



reacciones paralelas inestables

Fig. 3–13

Estabilidad interna. La estabilidad interna de una armadura puede a menudo revisarse por inspección cuidadosa del arreglo o disposición de sus miembros. Si puede determinarse que cada nudo se mantenga fijo de manera que no pueda moverse como "cuerpo rígido" con respecto a los otros nudos, entonces la armadura será estable. Note que *una armadura simple siempre será internamente estable*, ya que la naturaleza de la construcción requiere comenzar con un elemento triangular básico y agregar "elementos" sucesivos que contengan, cada uno, dos miembros adicionales y un nudo. La armadura en la figura 3–14 ejemplifica esta construcción, donde, a partir del elemento triangular sombreado *ABC*, se han agregado los nudos sucesivos *D*, *E*, *F*, *G* y *H*.

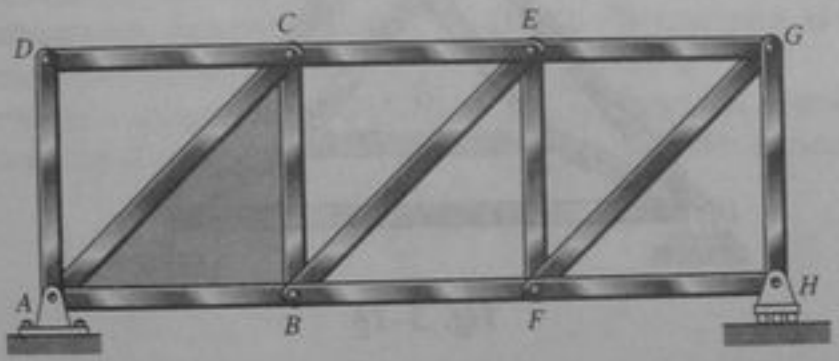


Fig. 3–14

Si una armadura no se construye de modo que mantenga sus nudos en una posición fija, será inestable o tendrá una "forma crítica". Un ejemplo obvio de esto se muestra en la figura 3–15, donde puede verse que como no se proporciona una restricción o fijación entre los nudos C y F o entre B y E, la armadura se caerá al aplicarse una carga.

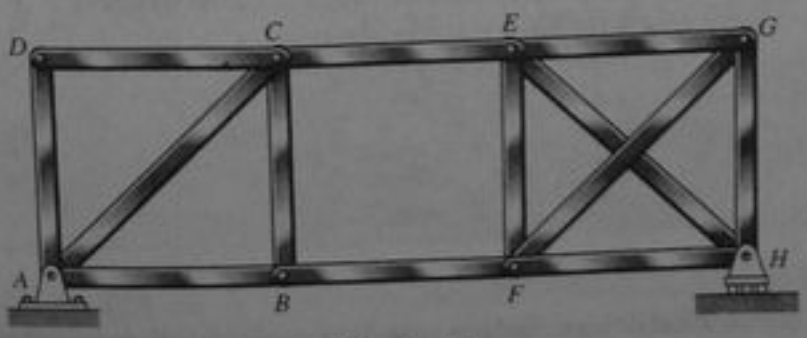


Fig. 3–15

Para determinar la estabilidad interna de una armadura compuesta, es necesario identificar el modo en que las armaduras simples están conectadas. Por ejemplo, la armadura compuesta en la figura 3–16 es inestable ya que la armadura simple interna *ABC* está conectada a la armadura simple externa *DEF* por medio de tres barras *AD*, *BE* y *CF* que son *concurrentes* en el punto *O*. Así, puede aplicarse una carga externa al nudo *A*, *B* o *C* y ocasionar que la armadura *ABC* gire ligeramente.

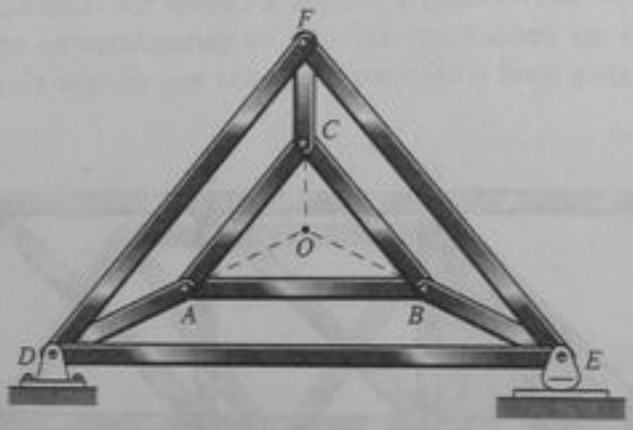


Fig. 3–16

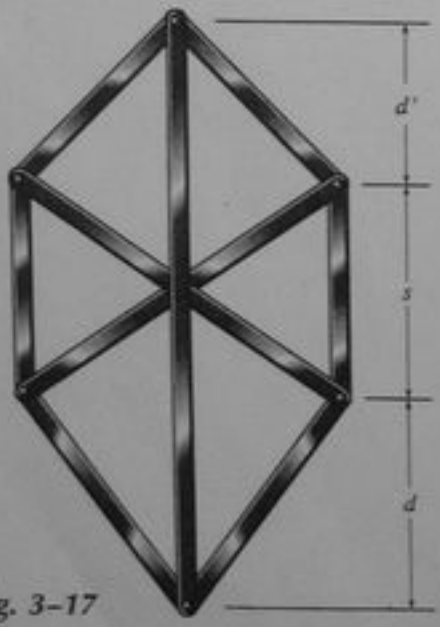


Fig. 3–17

Si una armadura se identifica como compleja, tal vez no sea posible decir por inspección si es estable. Por ejemplo, puede mostrarse por el análisis visto en la sección 3.7 que la armadura compleja en la figura 3–17 es inestable o que tiene una "forma crítica" sólo si la dimensión $d = d'$. Si $d \neq d'$, es estable.*

La inestabilidad de cualquiera forma de armadura, sea simple, compuesta o compleja, puede detectarse usando una computadora para resolver las $2j$ ecuaciones simultáneas escritas para todos los nudos de la armadura. Si se obtienen resultados inconsistentes, la armadura será inestable o tendrá una forma crítica.

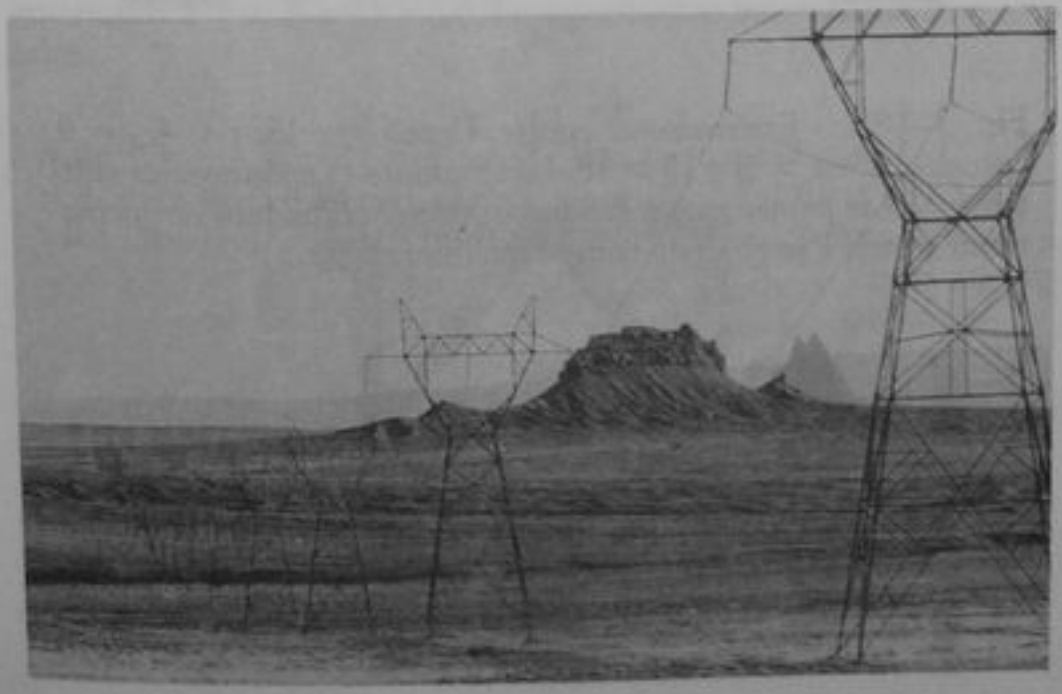
* La inestabilidad de las armaduras complejas puede identificarse también usando la prueba de carga cero. Vea la segunda referencia al final del capítulo.

Si no se efectúa un análisis por computadora, pueden usarse los métodos vistos antes para verificar la estabilidad de la armadura. Para resumir, si la armadura tiene b barras, r reacciones externas y j nudos, entonces si

$b + r < 2j$	inestable	(3–2)
$b + r \geq 2j$	inestable si las reacciones en los soportes de la armadura son concurrentes o paralelas o si algunas de las componentes de la armadura forman un mecanismo colapsable	

Sin embargo, recuerde que *si una armadura es inestable, no importa si es estáticamente determinada o indeterminada*. Obviamente, el uso de una armadura inestable debe evitarse en la práctica.

El ejemplo siguiente ilustra cómo se clasifican las armaduras: estáticamente determinadas o indeterminadas, estables o inestables.



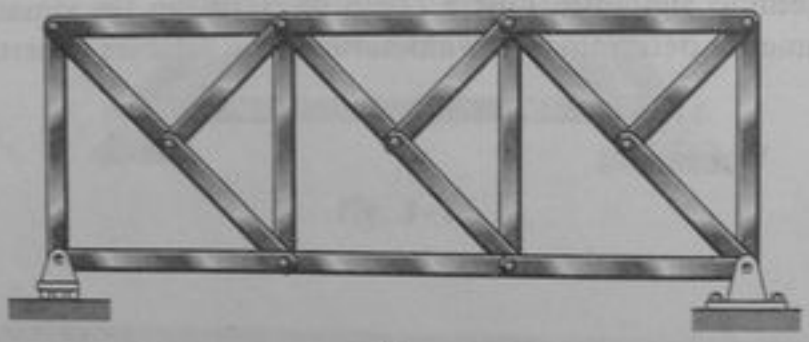
Muchos tipos de torres de transmisión eléctrica se fabrican conectando armaduras planas que pueden analizarse usando los métodos proporcionados en este capítulo. (*Myron Wood/Photo Researchers, Inc.*)

mplo 3–1

Clasifique cada una de las armaduras de la figura 3–18 como estable, inestable, estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. Además, si la armadura es estáticamente determinada y estable, especifique si se trata de una armadura simple, compuesta o compleja.

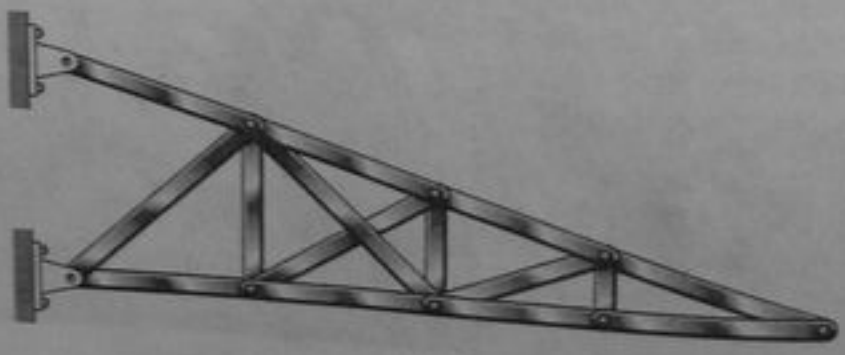
Solución

Fig. 3–18a. *Externamente estable*, ya que las reacciones no son concurrentes ni paralelas. Dado que $b = 19, r = 3, j = 11$, entonces $b + r = 2j$ o $22 = 22$. Por tanto, la armadura es *estáticamente determinada*. Por inspección, la armadura es *internamente estable* y se clasifica como *armadura compuesta* (tipo 1).



(a)

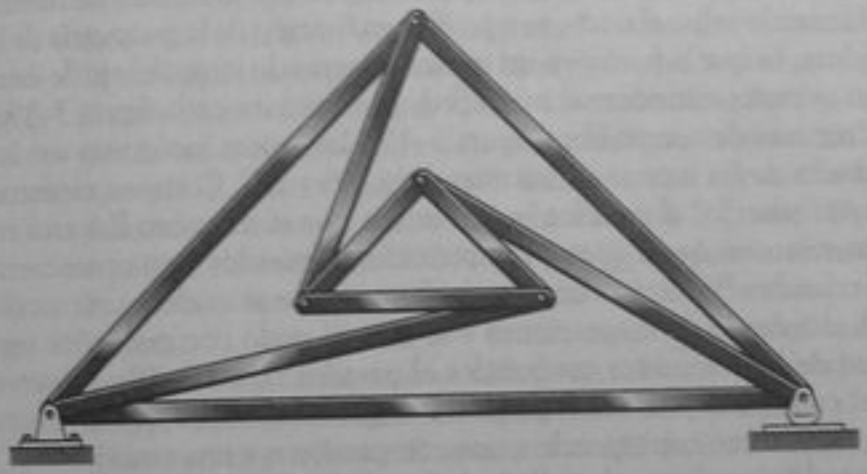
Fig. 3–18b. *Externamente estable*. Como $b = 15, r = 4, j = 9$, entonces $b + r > 2j$ o $19 > 18$. La armadura es *estáticamente indeterminada de primer grado*. Por inspección la armadura es *internamente estable* y se clasifica como armadura *simple*.



(b)

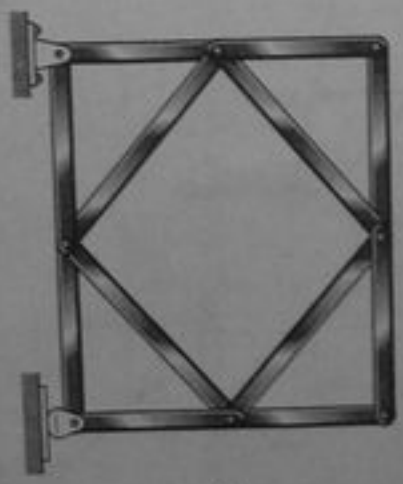
Fig. 3–18

Fig. 3–18c. *Externamente estable.* Como $b = 9$, $r = 3$, $j = 6$, entonces $b + r = 2j$ o $12 = 12$. La armadura es *estáticamente determinada*. Por inspección, la armadura es *internamente estable* y puede clasificarse como *armadura compuesta* (tipo 2).



(c)

Fig. 3–18d. *Externamente estable.* Como $b = 12$, $r = 3$, $j = 8$, entonces $b + r < 2j$ o $15 < 16$. La armadura es *internamente inestable*.



(d)

3.3 El método de los nudos

Si una armadura está en equilibrio, entonces cada uno de sus nudos debe también estar en equilibrio. Por tanto, el método de los nudos consiste en satisfacer las condiciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para las fuerzas ejercidas *sobre el pasador* en cada nudo de la armadura.

Cuando se usa el método de los nudos, es necesario dibujar el diagrama de cuerpo libre del nudo antes de aplicar las ecuaciones de equilibrio. Respecto a esto, recuerde que la *línea de acción* de cada fuerza de miembro, actuando sobre el nudo, se *especifica* en función de la geometría de la armadura, ya que la fuerza en un miembro pasa a lo largo del eje de éste. Como ejemplo, considere el nudo B de la armadura en la figura 3–19*a*. Del diagrama de cuerpo libre, figura 3–19*b*, las únicas incógnitas son las *magnitudes* de las fuerzas en los miembros BA y BC. Como se muestra, $\mathbf{F}_{BA}$ está "jalando" al pasador, lo que indica que el miembro BA está en *tensión*, mientras que $\mathbf{F}_{BC}$ está "empujando" al pasador, y en consecuencia el miembro BC está en *compresión*. Esos efectos se evidencian cuando se usa el método de las secciones y se aísla el nudo con pequeños segmentos de los miembros conectados al pasador, figura 3–19*c*. Observe que el empujar o jalar estos pequeños segmentos indica que el efecto sobre el miembro corresponde a una compresión o a una tensión.

En todos los casos, el análisis de los nudos debe comenzar en un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando más dos fuerzas desconocidas, como en la figura 3–19*b*. De esta manera, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ da dos ecuaciones algebraicas de las

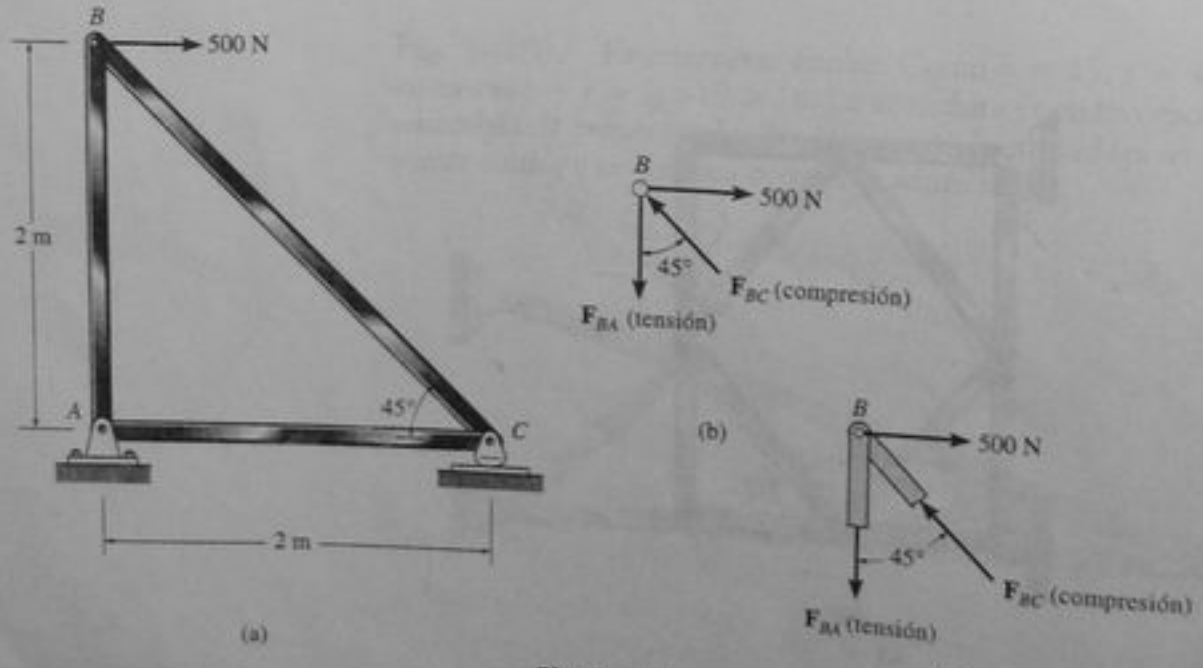
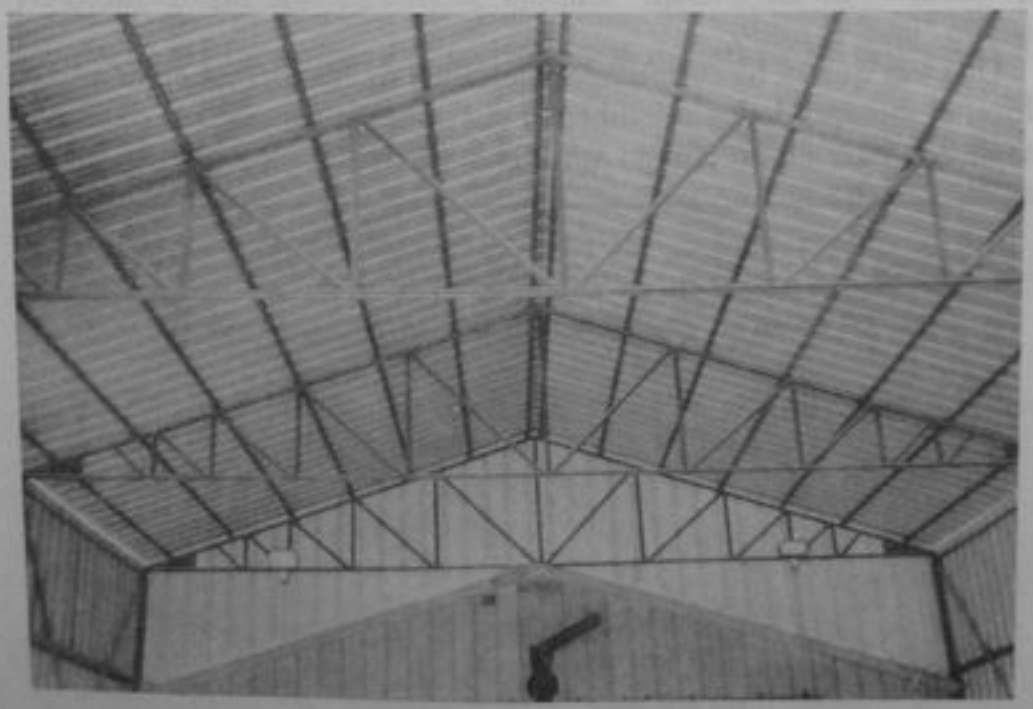


Fig. 3–19

que pueden despejarse las dos incógnitas. Al aplicar estas ecuaciones, el sentido correcto de una fuerza desconocida de miembro puede determinarse usando uno de dos posibles métodos.

1. *Siempre suponga que las fuerzas desconocidas* de un miembro actúan sobre el diagrama de cuerpo libre en tensión, esto es, "jalando" al pasador. Si se hace así, entonces la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio dará *escalares positivos para los miembros en tensión* y *escalares negativos para los miembros en compresión*. Una vez encontrada una fuerza desconocida de un miembro, use su magnitud y sentido correctos (T o C) en los diagramas de cuerpo libre de los nudos subsecuentes.
2. El sentido *correcto* de una fuerza desconocida de un miembro puede en muchos casos determinarse "por inspección". Por ejemplo, $\mathbf{F}_{BC}$ en la figura 3–19*b* debe empujar al pasador (compresión) ya que su componente horizontal, F_{BC} sen 45°, debe equilibrar la fuerza de 500 N ($\Sigma F_x = 0$). De la misma manera, $\mathbf{F}_{BA}$ es una fuerza de tensión ya que equilibra la componente vertical, F_{BC} cos 45° ($\Sigma F_y = 0$). En casos más complicados, el sentido de una fuerza desconocida de un miembro puede *suponerse*; luego, una vez aplicadas las ecuaciones de equilibrio, el sentido supuesto puede verificarse con ayuda de los resultados numéricos. Una respuesta *positiva* indica que el sentido es *correcto*, mientras que una respuesta *negativa* indica que el sentido mostrado en el diagrama de cuerpo libre debe *invertirse*. Este es el método que se usará en el ejemplo que sigue.



Ejemplo de una armadura Pratt usada para soportar el techo de un edificio metálico.

Procedimiento de análisis

El procedimiento siguiente proporciona un método para analizar una armadura mediante el método de los nudos.

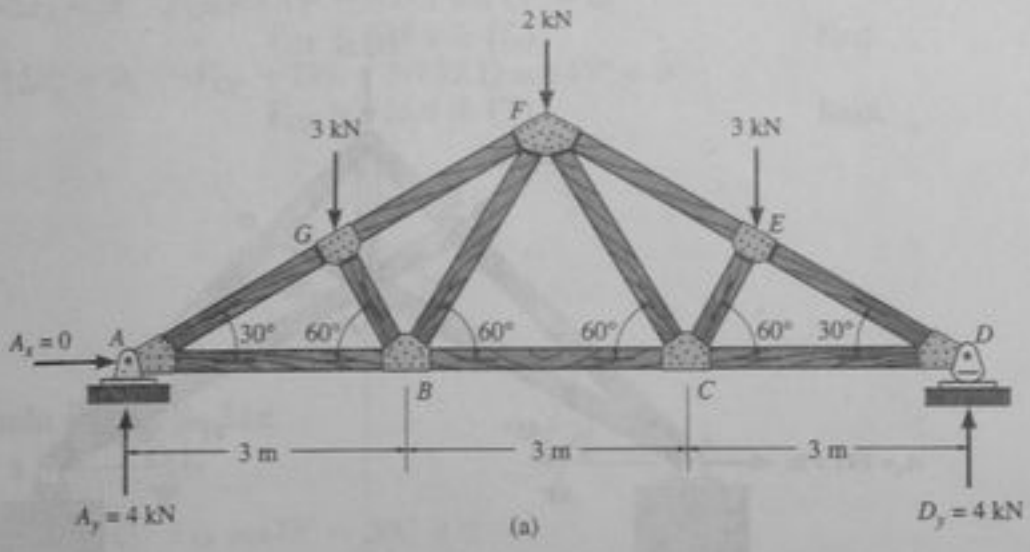
Determine primero las reacciones en los soportes considerando el equilibrio de la armadura entera. Luego dibuje el diagrama de cuerpo libre de un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando más dos fuerzas incógnitas. (Si este nudo está en uno de los soportes, será necesario conocer las reacciones externas en el soporte.) Use uno de los dos métodos descritos antes para establecer el sentido de una fuerza desconocida. Los ejes x y y deben orientarse de manera que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan descomponerse fácilmente en sus componentes x y y; luego aplique las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Debe notarse también que si uno de los ejes está orientado a lo largo de una de las fuerzas desconocidas, la otra fuerza desconocida puede determinarse sumando fuerzas a lo largo del otro eje. Despeje las dos fuerzas desconocidas y verifique sus sentidos correctos.

Continúe analizando cada uno de los otros nudos, eligiendo nuevamente uno que tenga cuando más dos incógnitas y por lo menos una fuerza conocida. Dése cuenta que una vez encontrada una fuerza en un miembro por el análisis del nudo en uno de sus extremos, el resultado puede usarse para analizar las fuerzas que actúan en el nudo en el otro extremo. Debe observarse desde luego una estricta adherencia al principio de la acción y de la reacción. Recuerde que un miembro en *compresión* "empuja" el nudo y que un miembro en *tensión* "jala" el nudo.

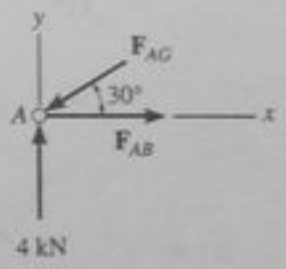
Una vez que se ha terminado el análisis de las fuerzas en la armadura, el tamaño de los miembros y sus conexiones pueden determinarse con base en un código apropiado de diseño.

Ejemplo 3–2

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura de techo mostrada en la figura 3–20*a*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Se dan las reacciones en los soportes.



(a)



(b)

Solución

Bastará con determinar las fuerzas en la mitad de los miembros, ya que la armadura es simétrica tanto respecto a la carga como a la geometría.

Nudo A, Fig. 3–20b. Podemos comenzar el análisis en el nudo *A*. ¿Por qué? El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3–20*b*.

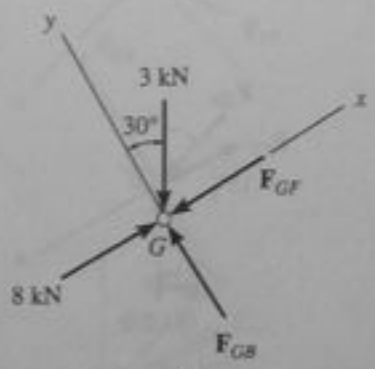
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 4 - F_{AG} \operatorname{sen} 30° = 0 \qquad F_{AG} = 8 \text{ kN (C)}$ ***Resp.***

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad F_{AB} - 8 \cos 30° = 0 \qquad F_{AB} = 6.93 \text{ kN (T)}$ ***Resp.***

Nudo G, Fig. 3–20c. En este caso note cómo la orientación de los ejes x y y evita tener que resolver ecuaciones simultáneas.

$+\nwarrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{GB} - 3 \cos 30° = 0 \qquad F_{GB} = 2.60 \text{ kN (C)}$ ***Resp.***

$+\nearrow \Sigma F_x = 0;\quad 8 - 3 \operatorname{sen} 30° - F_{GF} = 0 \qquad F_{GF} = 6.50 \text{ kN (C)}$ ***Resp.***



(c)

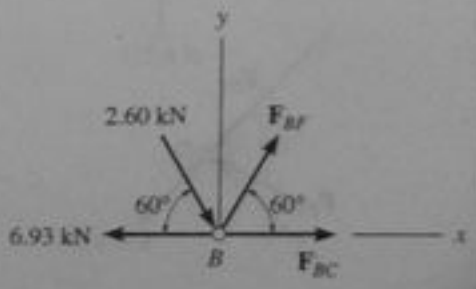
Nudo B, Fig. 3–20d.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{BF} \operatorname{sen} 60° - 2.60 \operatorname{sen} 60° = 0$

$F_{BF} = 2.60 \text{ kN (T)}$ ***Resp.***

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad F_{BC} + 2.60 \cos 60° + 2.60 \cos 60° - 6.93 = 0$

$F_{BC} = 4.33 \text{ kN (T)}$ ***Resp.***

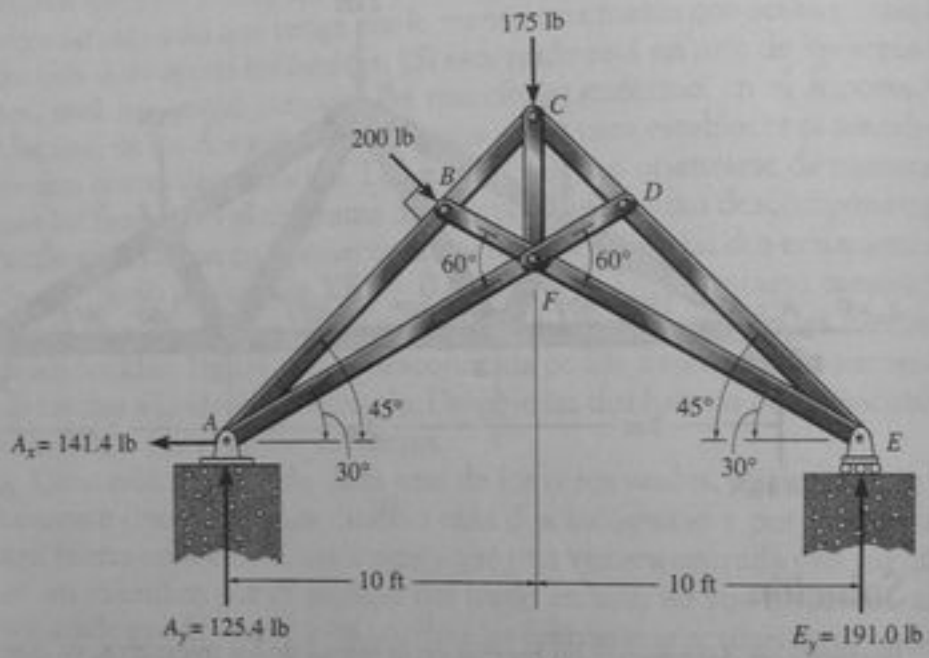


(d)

Fig. 3–20

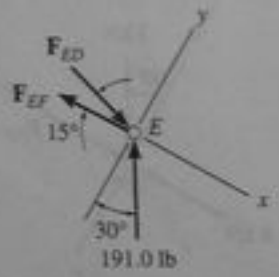
Ejemplo 3–3

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura de tijera mostrada en la figura 3–21*a*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Se dan las reacciones en los soportes.

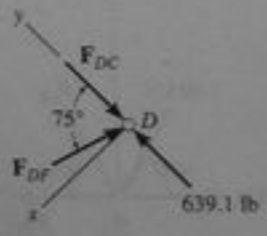


(a)

Fig. 3–21



(b)



(c)

Solución

La armadura se analizará en la secuencia siguiente:

Nudo E, Fig. 3–21b. Note que se evita la solución de ecuaciones simultáneas con la orientación de los ejes *x* y *y*.

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad 191.0 \cos 30° - F_{ED} \operatorname{sen} 15° = 0$$
$$F_{ED} = 639.1 \text{ lb (C)} \qquad \textit{Resp.}$$
$$+\searrow \Sigma F_x = 0; \quad 639.1 \cos 15° - F_{EF} - 191.0 \operatorname{sen} 30° = 0$$
$$F_{EF} = 521.8 \text{ lb (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

Nudo D, Fig. 3–21c

$$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad -F_{DF} \operatorname{sen} 75° = 0 \qquad F_{DF} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$
$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \quad -F_{DC} + 639.1 = 0 \qquad F_{DC} = 639.1 \text{ lb (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

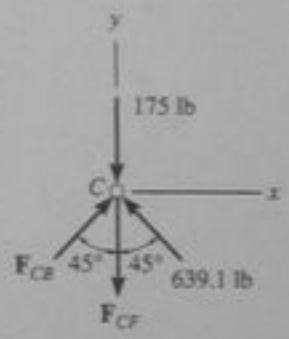
Nudo C, Fig. 3–21*d*

$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad F_{CB}\,\text{sen}\,45° - 639.1\,\text{sen}\,45° = 0$

$F_{CB} = 639.1\ \text{lb (C)}$ *Resp.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad -F_{CF} - 175 + 2(639.1)\cos 45° = 0$

$F_{CF} = 728.8\ \text{lb (T)}$ *Resp.*



(d)

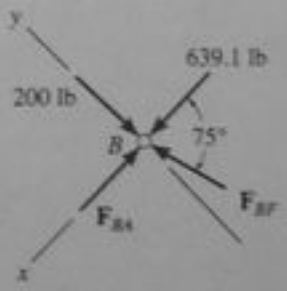
Nudo B, Fig. 3–21*e*

$+\nwarrow\Sigma F_y = 0;\quad F_{BF}\,\text{sen}\,75° - 200 = 0$

$F_{BF} = 207.1\ \text{lb (C)}$ *Resp.*

$+\swarrow\Sigma F_x = 0;\quad 639.1 + 207.1\cos 75° - F_{BA} = 0$

$F_{BA} = 692.7\ \text{lb (C)}$ *Resp.*



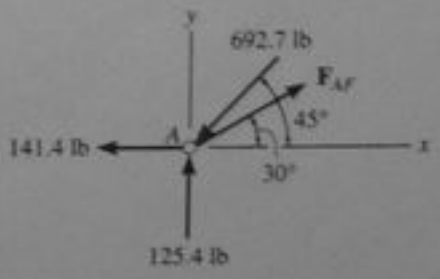
(e)

Nudo A, Fig. 3–21*f*

$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad F_{AF}\cos 30° - 692.7\cos 45° - 141.4 = 0$

$F_{AF} = 728.9\ \text{lb (T)}$ *Resp.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad 125.4 - 692.7\,\text{sen}\,45° + 728.9\,\text{sen}\,30° = 0$ comprobar



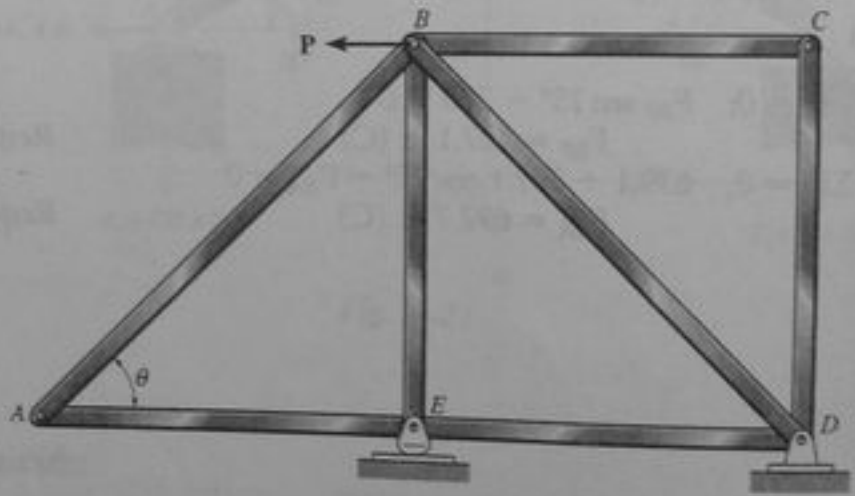
(f)

Una verificación adicional de los cálculos puede hacerse analizando el nudo *F*.

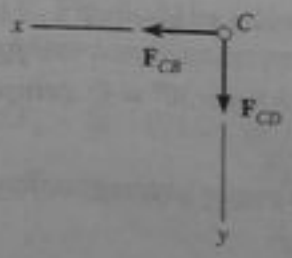
3.4 Miembros de fuerza cero

El análisis de armaduras usando el método de los nudos se simplifica considerablemente si se pueden determinar primero aquellos miembros *que no soportan carga*. Esos *miembros de fuerza cero* pueden ser necesarios para la estabilidad de la armadura durante su construcción o para proporcionar soporte si cambia la carga aplicada.

Los miembros de fuerza cero pueden en general determinarse por inspección de los nudos. Por ejemplo, considere la armadura en la figura 3–22*a*. Los dos miembros en el nudo C están conectados entre sí en ángulo recto y no hay carga externa sobre el nudo. El diagrama de cuerpo libre del nudo C, figura 3–22*b*, indica que la fuerza en cada miembro debe ser cero para mantener el equilibrio. Además, como en el caso del nudo A, figura 3–22*c*, esto debe ser cierto independientemente del ángulo, digamos θ, entre los miembros.



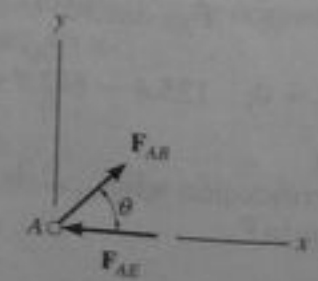
(a)



$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\ F_{CB} = 0$

$+\downarrow \Sigma F_y = 0;\ F_{CD} = 0$

(b)



$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ F_{AB} \operatorname{sen}\theta = 0$

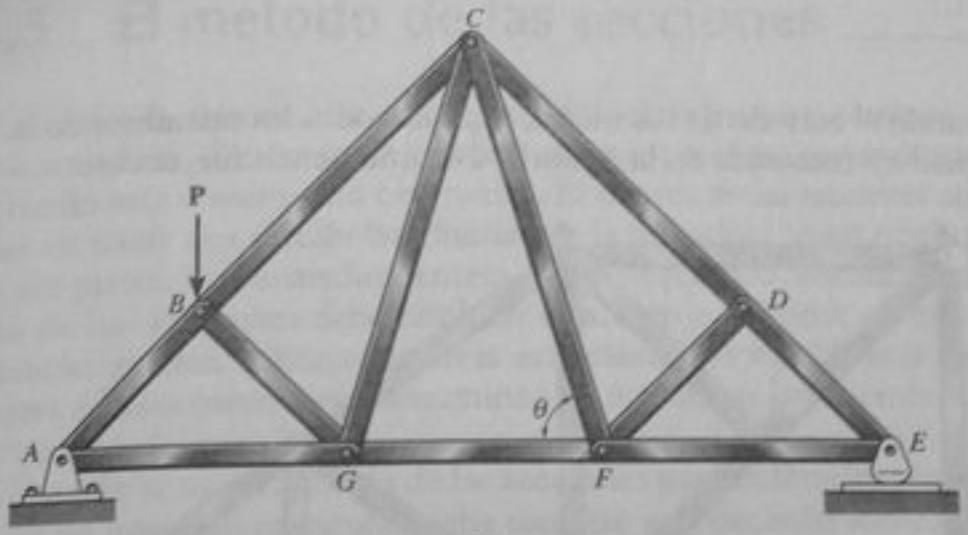
$F_{AB} = 0$ (ya que $\operatorname{sen}\theta \neq 0$)

$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\ -F_{AE} + 0 = 0$

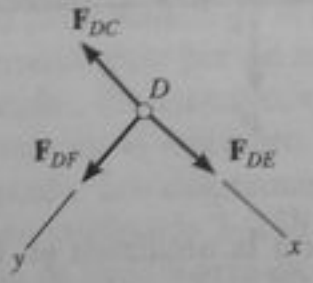
$F_{AE} = 0$

(c)

Fig. 3–22

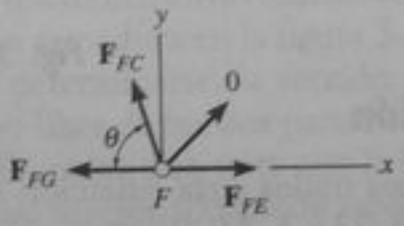


(a)



(b)

$+\swarrow \Sigma F_y = 0;\ F_{DF} = 0$



(c)

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ F_{FC}\operatorname{sen}\theta + 0 = 0$

$F_{FC} = 0$ (ya que $\operatorname{sen}\theta \neq 0$)

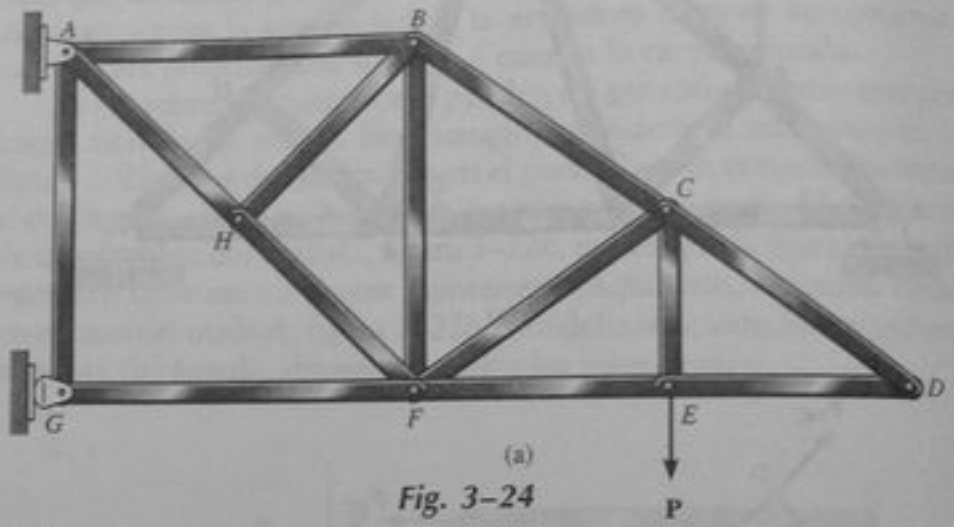
Fig. 3–23

Los miembros de fuerza cero también se presentan en nudos con geometría como la del nudo *D* de la figura 3–23*a*. Aquí, *ninguna carga externa actúa sobre el nudo*, por lo que una suma de fuerzas en la dirección y, figura 3–23*b*, que es perpendicular a los dos miembros colineales, requiere que $F_{DF} = 0$. A partir de este resultado, *FC* es también un miembro de fuerza cero, como lo indica el análisis de fuerzas del nudo *F*, figura 3–23*c*.

En resumen, si sólo dos miembros forman un nudo de armadura y ninguna carga externa o reacción de soporte está aplicada en el nudo, los miembros deben ser de fuerza cero, figura 3–22. Además, si tres miembros forman un nudo de armadura de modo que dos de los miembros son colineales, el tercer miembro será uno de fuerza cero, siempre que ninguna fuerza externa o reacción de soporte esté aplicada al nudo, figura 3–23. Atención particular debe darse a esas condiciones de geometría y carga de nudo, ya que el análisis de una armadura puede simplificarse considerablemente detectando *primero* los miembros de fuerza cero.

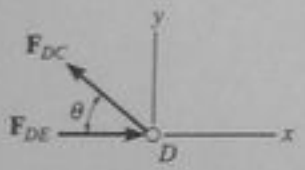
Ejemplo 3–4

Usando el método de los nudos, indique todos los miembros de la armadura mostrada en la figura 3–24*a* que tienen fuerza cero.

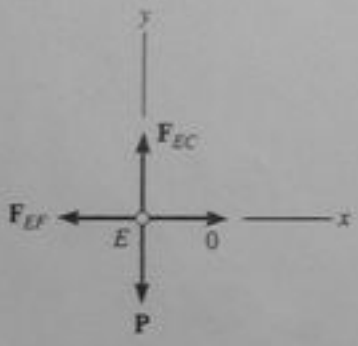


(a)

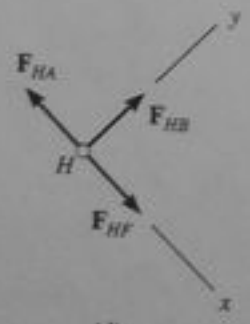
Fig. 3–24



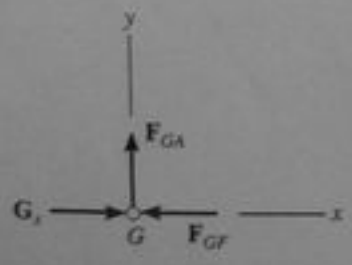
(b)



(c)



(d)



(e)

Solución

Buscamos nudos cuya situación sea similar a la analizada en las figuras 3–22 y 3–23; tenemos

Nudo D, Fig. 3–24b

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad F_{DC}\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad F_{DC} = 0$ *Resp.*

$\pm\rightarrow\Sigma F_x = 0;$ $\quad F_{DE} + 0 = 0 \quad F_{DE} = 0$ *Resp.*

Nudo E, Fig. 3–24c

$\pm\leftarrow\Sigma F_x = 0;$ $\quad F_{EF} = 0$ *Resp.*

(Observe que $F_{EC} = P$ y que al analizar el nudo C se obtendría una fuerza en el miembro CF.)

Nudo H, Fig. 3–24d

$+\nearrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad F_{HB} = 0$ *Resp.*

Nudo G, Fig. 3–24e. El soporte de mecedora en G sólo puede ejercer una componente *x* de fuerza sobre el nudo, esto es, G_x. Por lo tanto,

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad F_{GA} = 0$ *Resp.*

3.5 El método de las secciones

Si sólo deben encontrarse unas cuantas fuerzas en los miembros de una armadura, el método de las secciones proporciona generalmente el medio más directo para obtenerlas. El *método de las secciones* consiste en pasar una *sección imaginaria* por la armadura, cortándola así en dos partes. Si la armadura entera está en equilibrio, entonces cada una de las dos partes debe también estará en equilibrio; en consecuencia, pueden aplicarse las tres ecuaciones de equilibrio a cualquiera de esas partes para determinar las fuerzas en los miembros en la "sección del corte".

Cuando se usa el método de las secciones para determinar la fuerza en un miembro particular, debe tomarse una decisión sobre cómo "cortar" o seccionar la armadura. Como sólo pueden aplicarse *tres* ecuaciones independientes de equilibrio ($\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_O = 0$) a la parte aislada de la armadura, trate de escoger una sección que, en general, pase por no más de *tres* miembros cuyas fuerzas sean desconocidas. Por ejemplo, considere la armadura en la figura 3–25*a*. Si la fuerza en el miembro GC va a determinarse, la sección *aa* será apropiada. Los diagramas de cuerpo libre de las dos partes se muestran en las figuras 3–25*b* y 3–25c. En particular, note que la línea de acción de cada fuerza en un miembro seccionado queda especificada por la *geometría* de la armadura, ya que la fuerza en un miembro pasa a lo largo del eje del miembro. Además, las fuerzas de miembro que actúan sobre una parte de la armadura son iguales pero opuestas a las que actúan sobre la otra parte (Tercera Ley de Newton). Como se muestra, los miembros supuestos en *tensión* (BC y GC) están sometidos a un "jalón", mientras que los miembros en *compresión* están sometidos a un "empuje".

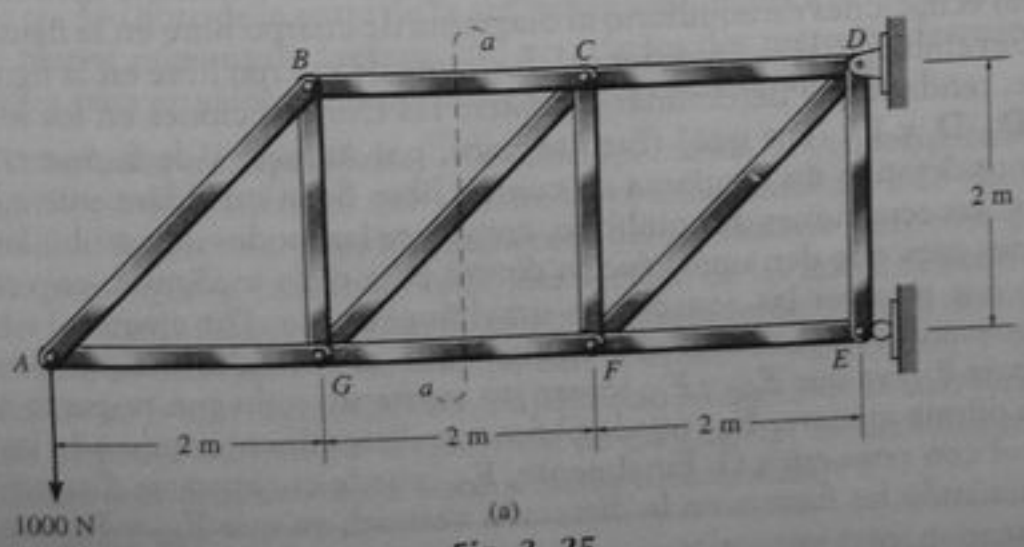
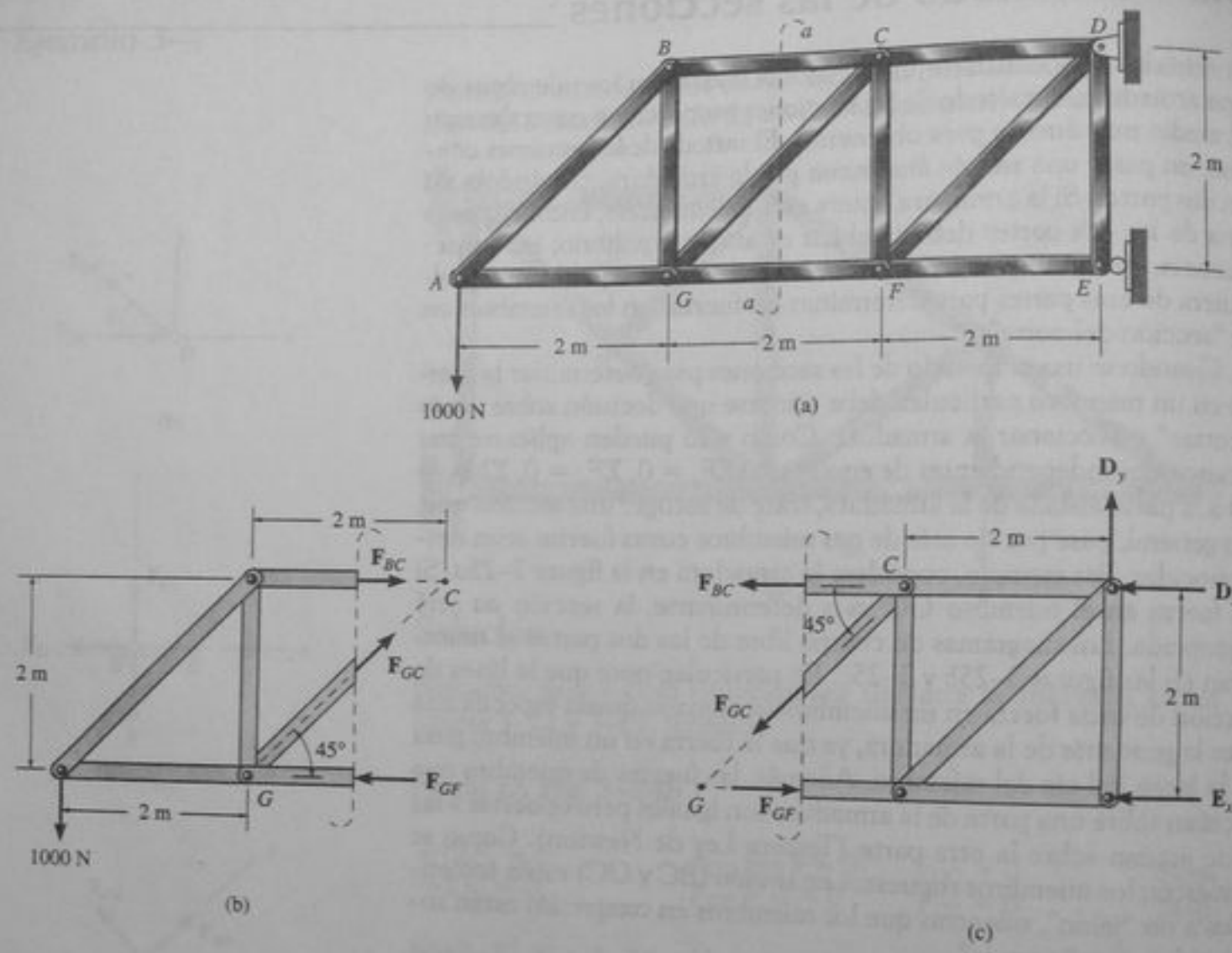


Fig. 3–25



Las tres fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_{BC}$, $\mathbf{F}_{GC}$ y $\mathbf{F}_{GF}$ pueden obtenerse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre en la figura 3–25*b*. Sin embargo, si se considera el diagrama de cuerpo libre en la figura 3–25c, tendrán que determinarse *primero* las tres reacciones en los soportes, $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ y $\mathbf{E}_x$. ¿Por qué? (Esto se hace, por supuesto, de la manera usual, considerando un diagrama de cuerpo libre de la *armadura entera.*) Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, considere los modos de escribir las ecuaciones para que den una *solución directa* para cada incógnita, en vez de tener que resolver las ecuaciones simultáneamente. Por ejemplo, sumando momentos respecto a C en la figura 3–25*b*, se obtendrá una solución directa para $\mathbf{F}_{GF}$ ya que $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{GC}$ crean un momento nulo con respecto a C. De la misma manera, $\mathbf{F}_{BC}$ puede obtenerse directamente sumando los momentos con respecto a G. Finalmente, $\mathbf{F}_{GC}$ puede encontrarse directamente sumando las fuerzas en la dirección vertical, ya que $\mathbf{F}_{GF}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ no tienen componentes verticales.

Igual que en el método de los nudos, hay dos maneras de determinar el sentido correcto de una fuerza desconocida en un miembro.

1. *Siempre suponga* que las fuerzas desconocidas en un miembro en la sección cortada son de *tensión*, es decir, que "jalan" el miembro. Haciéndolo así, la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio dará *escalares positivos para los miembros en tensión* y *escalares negativos para los miembros en compresión*.
2. El sentido correcto de una fuerza desconocida de miembro puede en muchos casos determinarse "por inspección". Por ejemplo, $\mathbf{F}_{BC}$ es una fuerza de tensión, como se representa en la figura 3–25*b*, ya que el equilibrio por momento respecto a G requiere que $\mathbf{F}_{BC}$ genere un momento opuesto al de la fuerza de 1000 N. Además, $\mathbf{F}_{GC}$ es de tensión porque su componente vertical debe equilibrar la fuerza de 1000 N actuando hacia abajo. En casos más complicados, el sentido de una fuerza desconocida de miembro puede *suponerse*. Si la solución da un escalar *negativo*, esto indica que el sentido de la fuerza es *opuesto* al mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre. Este es el método que usaremos en los ejemplos que siguen.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio para aplicar el método de las secciones para determinar las fuerzas en los miembros de una armadura.

Diagrama de cuerpo libre. Tome una decisión sobre cómo "cortar" o seccionar la armadura a través de los miembros cuyas fuerzas deben determinarse. Antes de aislar la sección apropiada, puede ser necesario determinar las reacciones *externas* de la armadura, de manera que las tres ecuaciones de equilibrio se usen *sólo* para encontrar las fuerzas en los miembros de la sección cortada. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la parte de la armadura seccionada a la que afecten el menor número de fuerzas. Use uno de los dos métodos descritos antes para establecer el sentido de una fuerza desconocida.

Ecuaciones de equilibrio. Trate de aplicar las tres ecuaciones de equilibrio de manera tal que se evite la solución simultánea de ecuaciones. Respecto a esto, los momentos deben sumarse alrededor de un punto que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas; de esta manera, la tercera fuerza desconocida se determina directamente con la ecuación de momentos. Si dos de las fuerzas desconocidas son *paralelas*, pueden sumarse las fuerzas *perpendicularmente* a la dirección de esas fuerzas incógnitas para determinar *directamente* la tercera fuerza desconocida.

Los siguientes ejemplos ilustran estos conceptos numéricamente.

Ejemplo 3–5

Determine la fuerza en los miembros *CF* y *GC* de la armadura de techo mostrada en la figura 3–26*a*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Se dan las reacciones ya calculadas en los soportes.

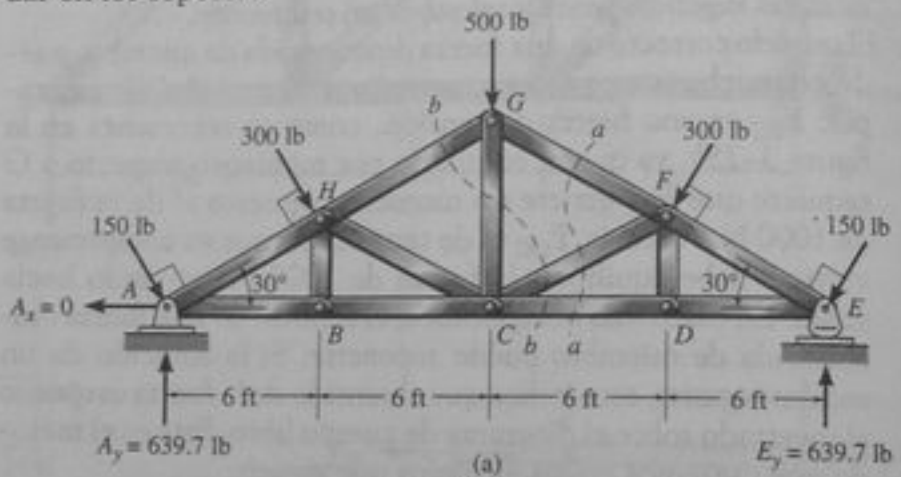
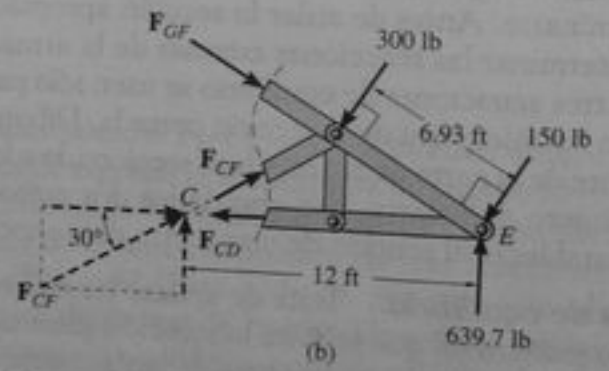


Fig. 3–26

Solución

Miembro CF

Diagrama de cuerpo libre. La fuerza en el miembro *CF* puede obtenerse considerando la sección *aa* de la figura 3–26*a*. El diagrama de cuerpo libre de la parte derecha de esta sección se muestra en la figura 3–26*b*.



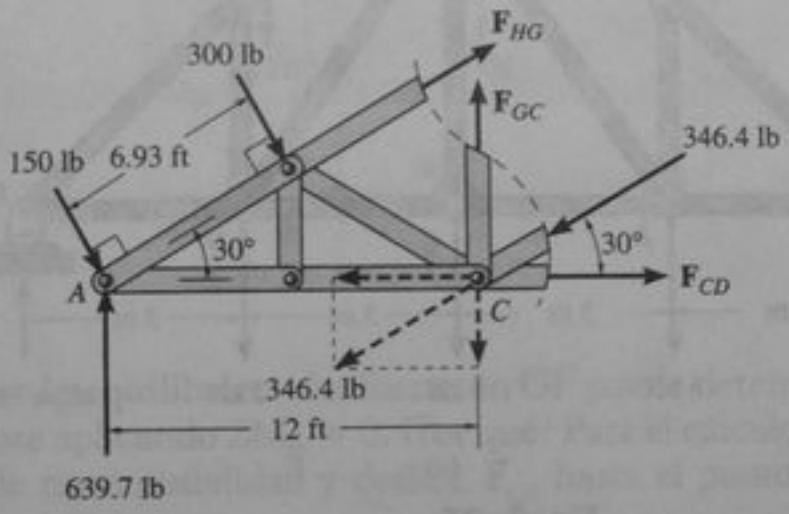
Ecuaciones de equilibrio. Una solución directa para $\mathbf{F}_{CF}$ puede obtenerse aplicando $\Sigma M_E = 0$. ¿Por qué? Por simplicidad, $\mathbf{F}_{CF}$ se desliza al punto C (principio de transmisibilidad), figura 3–26*b*. Así,

$$\curvearrowleft + \Sigma M_E = 0; \qquad F_{CF} \operatorname{sen} 30°(12) - 300(6.93) = 0$$

$$F_{CF} = 346.4 \text{ lb (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

Miembro GC

Diagrama de cuerpo libre. La fuerza en GC puede obtenerse usando la sección *bb* de la figura 3–26*a*. Esta sección corta cuatro miembros; sin embargo, la fuerza en CF ya se ha calculado. El diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda se muestra en la figura 3–26c.



(c)

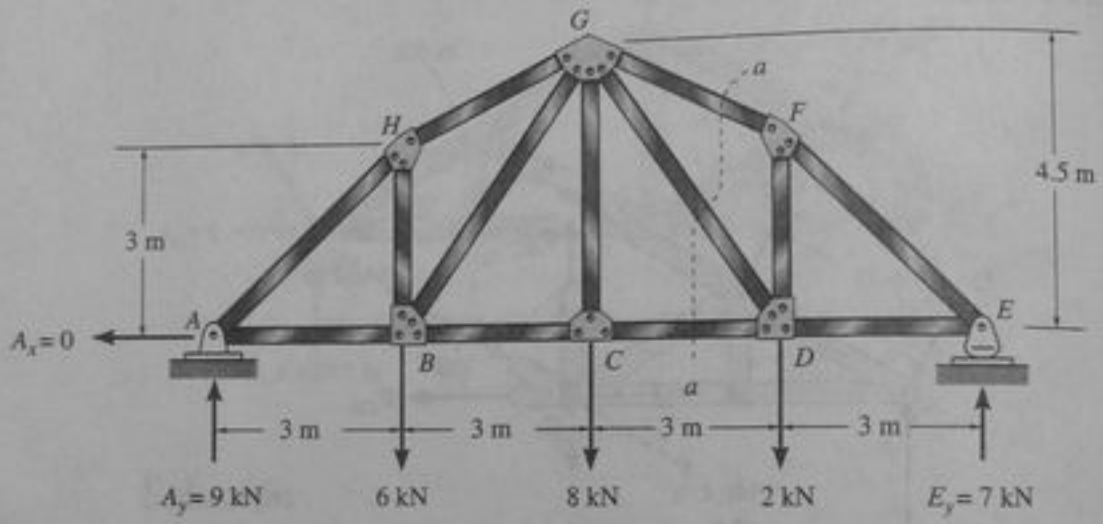
Ecuaciones de equilibrio. Sumamos los momentos con respecto al punto A para eliminar las incógnitas F_{HG} y F_{CD}. De nuevo, deslizamos F_{CF} (346.4 lb) hasta el punto C y obtenemos

$$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad 300(6.93) - F_{GC}(12) + 346.4 \operatorname{sen} 30°(12) = 0$$

$$F_{GC} = 346.4 \text{ lb (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 3–6

Determine la fuerza en los miembros *GF* y *GD* de la armadura mostrada en la figura 3–27*a*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Las reacciones en los soportes están ya calculadas.

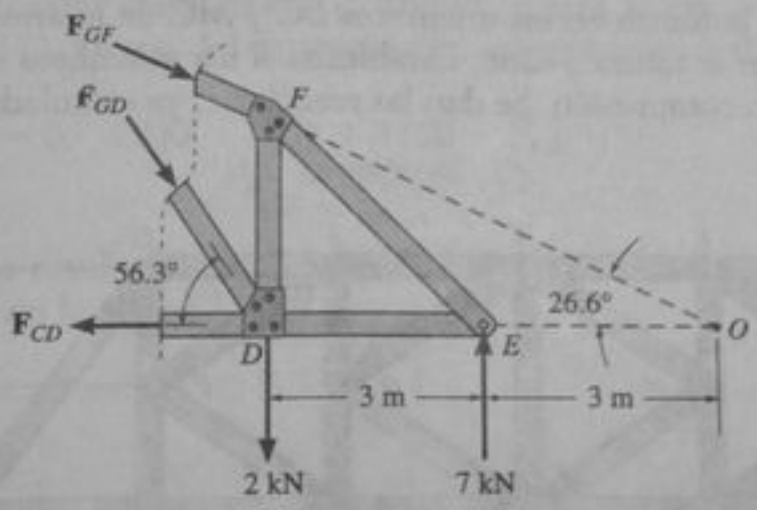


(a)

Fig. 3–27

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Consideraremos la sección *aa* de la figura 3–27*a*. ¿Por qué? El diagrama de cuerpo libre a la derecha de esta sección se muestra en la figura 3–27*b*. La distancia *EO* puede determinarse por triángulos semejantes o advirtiendo que el miembro *GF* cae verticalmente 4.5 – 3 = 1.5 m en 3 m, figura 3–27*a*. Por tanto, para caer 4.5 m desde *G*, la distancia de *C* a *O* debe ser de 9 m. Además, los ángulos que $\mathbf{F}_{GD}$ y $\mathbf{F}_{GF}$ forman con la horizontal son $\tan^{-1}(4.5/3) = 56.3°$ y $\tan^{-1}(4.5/9) = 26.6°$, respectivamente.



(b)

Ecuaciones de equilibrio. La fuerza en *GF* puede determinarse directamente aplicando $\Sigma M_D = 0$. ¿Por qué? Para el cálculo, use el principio de transmisibilidad y deslice $\mathbf{F}_{GF}$ hasta el punto O. Se tiene entonces,

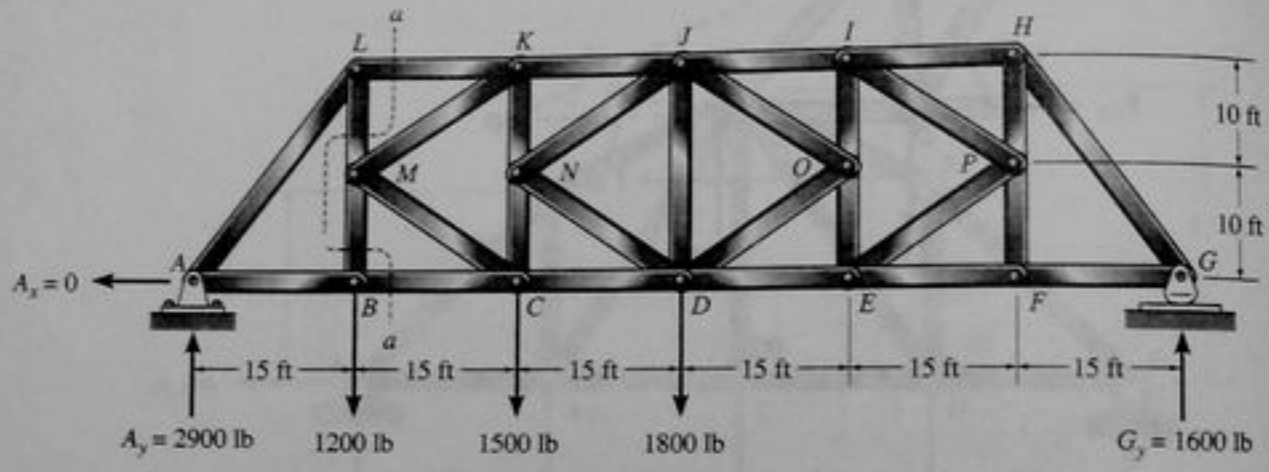
$$\curvearrowleft + \Sigma M_D = 0; \qquad F_{GF} \operatorname{sen} 26.6°(6) - 7(3) = 0$$
$$F_{GF} = 7.83 \text{ kN (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

La fuerza en *GD* se determina directamente aplicando $\Sigma M_O = 0$. Por simplicidad use el principio de transmisibilidad y deslice $\mathbf{F}_{GD}$ hasta *D*. Por tanto,

$$\curvearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad 7(3) - 2(6) - F_{GD} \operatorname{sen} 56.3°(6) = 0$$
$$F_{GD} = 1.80 \text{ kN (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 3–7

Determine la fuerza en los miembros BC y MC de la armadura K mostrada en la figura 3–28*a*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Se dan las reacciones ya calculadas en los soportes.

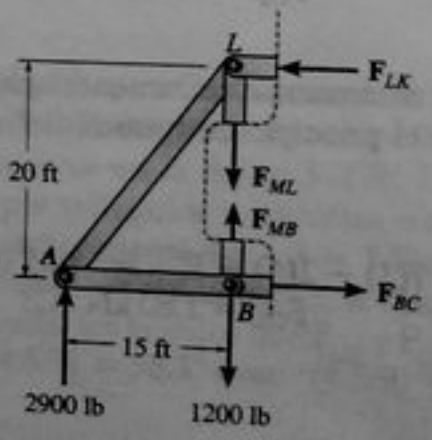


(a)

Fig. 3–28

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Aunque la sección *aa* mostrada en la figura 3–28*a* corta cuatro miembros, es posible encontrar la fuerza en el miembro BC usando esta sección. El diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la armadura se muestra en la figura 3–28*b*.



(b)

Ecuaciones de equilibrio. Si sumamos los momentos respecto al punto L se eliminan *tres* de las incógnitas, esto es,

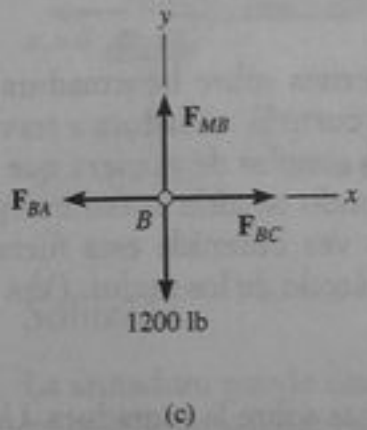
$$\curvearrowleft + \Sigma M_L = 0; \qquad 2900(15) - F_{BC}(20) = 0$$

$$F_{BC} = 2175 \text{ lb (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

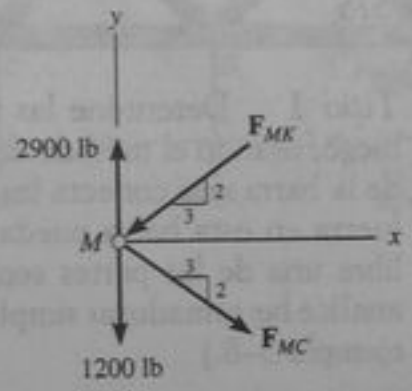
Diagramas de cuerpo libre. La fuerza en MC puede obtenerse indirectamente obteniendo primero la fuerza en MB por el equilibrio de fuerzas verticales en el nudo B, figura 3–28c, o sea, $F_{MB} = 1200$ lb (T). Luego, del diagrama de cuerpo libre en la figura 3–28b,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2900 - 1200 + 1200 - F_{ML} = 0$$
$$F_{ML} = 2900 \text{ lb (T)}$$

Con esos resultados, el diagrama de cuerpo libre del nudo M se muestra en la figura 3–28*d*.



(c)



(d)

Ecuaciones de equilibrio.

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)F_{MC} - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)F_{MK} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2900 - 1200 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)F_{MC} - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)F_{MK} = 0$$

$$F_{MK} = 1532 \text{ lb (C)} \qquad F_{MC} = 1532 \text{ lb (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

Algunas veces, como en este ejemplo, la aplicación conjunta del método de las secciones y del método de los nudos conduce a la solución más directa del problema.

También es posible encontrar la fuerza en MC usando el resultado para F_{BC}. Para esto, pase una sección vertical por *LK*, *MK*, *MC* y *BC*, figura 3–28*a*. Aísle la porción izquierda y aplique $\Sigma M_K = 0$.

3.6 Armaduras compuestas

En la sección 3.2 se estableció que las armaduras compuestas se forman conectando dos o más armaduras simples entre sí por medio de barras o a través de nudos. Ocasionalmente, la mejor manera de analizar este tipo de armaduras es aplicando el método de los nudos junto con el método de las secciones. A menudo es conveniente reconocer primero el tipo de construcción de acuerdo con la sección 3.2 y luego efectuar el análisis usando el siguiente procedimiento.

Procedimiento de análisis

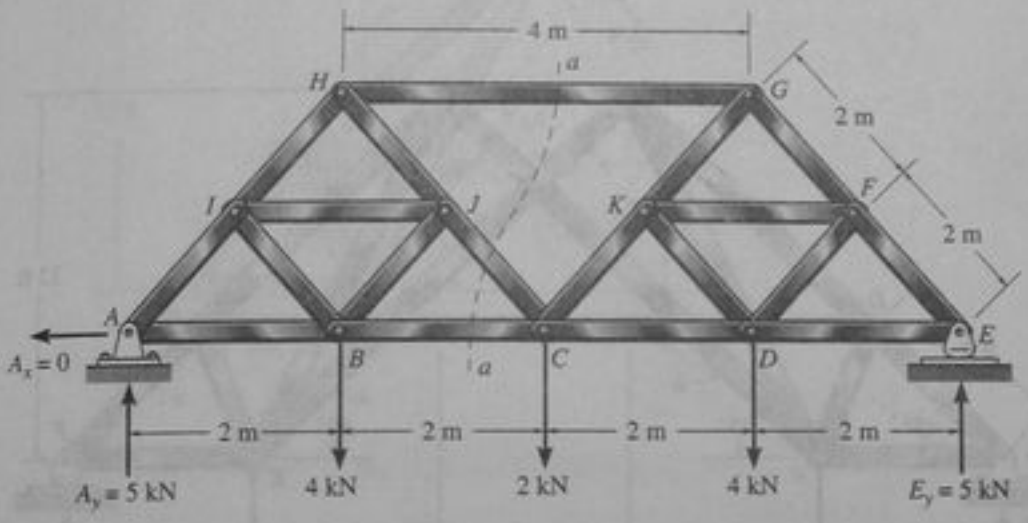
Tipo 1 Determine las reacciones externas sobre la armadura y luego, usando el método de las secciones, corte la armadura a través de la barra que conecta las dos armaduras simples de manera que la fuerza en esta barra pueda obtenerse cuando se aísle como cuerpo libre una de las partes seccionadas. Una vez obtenida esta fuerza, analice las armaduras simples usando el método de los nudos. (Vea el ejemplo 3–8.)

Tipo 2 Determine las reacciones externas sobre la armadura. Use el método de las secciones y corte cada una de las tres barras que conectan las dos armaduras simples entre sí. Del diagrama de cuerpo libre de una de las partes seccionadas, determine cada una de las fuerzas en las tres barras. Analice luego cada armadura simple usando el método de los nudos. (Vea el ejemplo 3–9.)

Tipo 3 Aunque muchas armaduras de este tipo pueden analizarse usando el método de las secciones combinado con el método de los nudos, usaremos más bien un método más general. Retire las armaduras secundarias y reemplácelas por miembros punteados para construir la armadura principal. Las cargas que las armaduras secundarias ejercen sobre la armadura principal se colocan también sobre la armadura principal, en los nudos en que las armaduras secundarias se conectan a la armadura principal. Determine las fuerzas en los miembros punteados de la armadura principal usando el método de los nudos o el método de las secciones. Esas fuerzas se aplican luego a los nudos de las armaduras secundarias y entonces, usando el método de los nudos, pueden obtenerse las fuerzas en las barras de las armaduras secundarias. (Vea el ejemplo 3–10.)

Ejemplo 3–8

Indique cómo analizar la armadura compuesta mostrada en la figura 3–29*a*. Se dan las reacciones en los soportes.



(a)

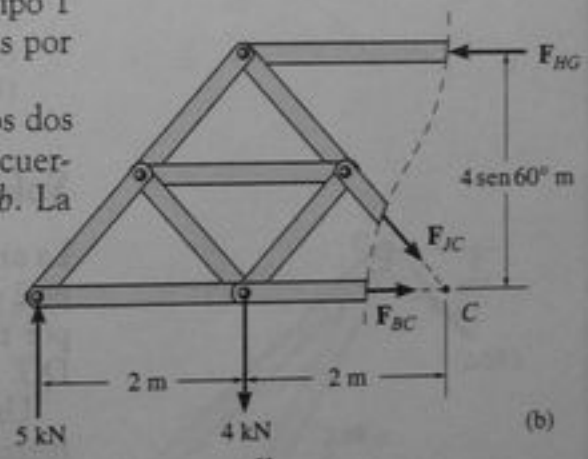
Fig. 3–29

Solución

La armadura puede clasificarse como armadura compuesta tipo 1 ya que las armaduras simples *ACH* y *CEG* están conectadas por un pasador en C y por la barra *HG*.

La sección *aa* de la figura 3–29*a* corta la barra *HG* y otros dos miembros que tienen fuerzas desconocidas. Un diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda se muestra en la figura 3–29*b*. La fuerza en *HG* se determina como sigue:

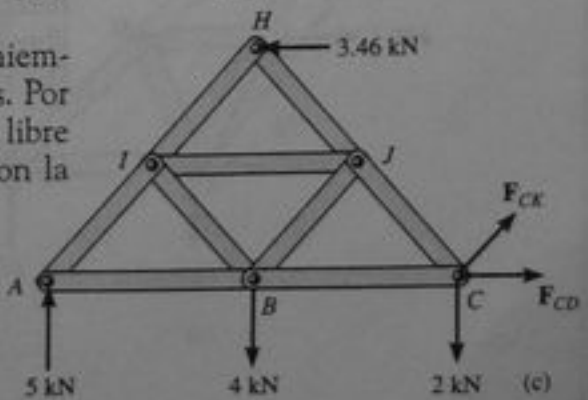
$$\curvearrowright +\Sigma M_C = 0; \qquad 5(4) - 4(2) - F_{HG}(4 \operatorname{sen} 60°) = 0$$
$$F_{HG} = 3.46 \text{ kN (C)}$$



(b)

Podemos ahora proceder a determinar la fuerza en cada miembro de las armaduras simples usando el método de los nudos. Por ejemplo, en la figura 3–29*c* se muestra el diagrama de cuerpo libre de *ACH*. Los nudos de esta armadura pueden analizarse con la siguiente secuencia:

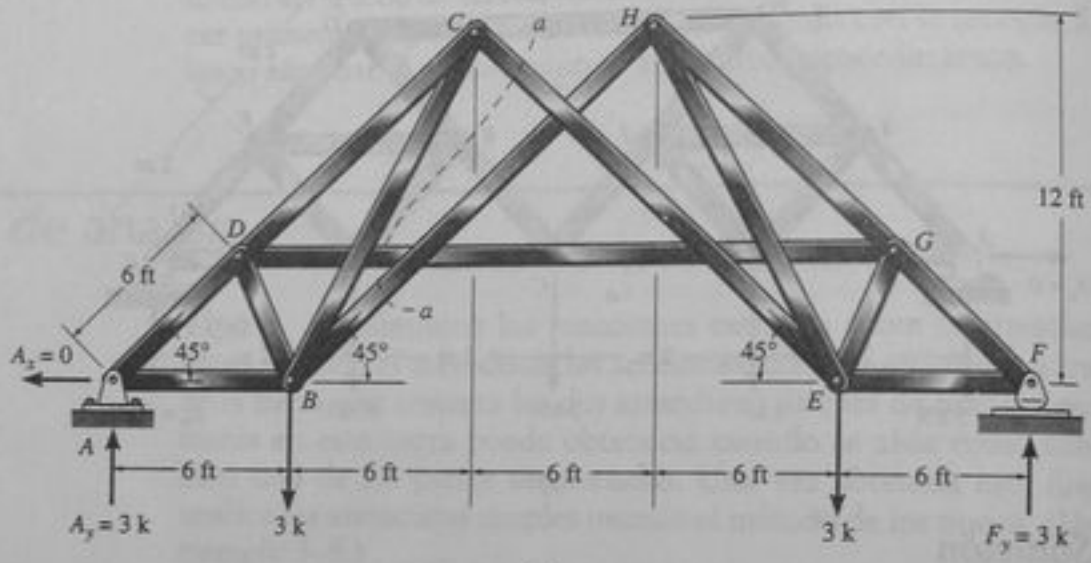
Nudo A: Determine la fuerza en *AB* y *AI*.
Nudo H: Determine la fuerza en *HI* y *HJ*.
Nudo I: Determine la fuerza en *IJ* e *IB*.
Nudo B: Determine la fuerza en *BC* y *BJ*.
Nudo J: Determine la fuerza en *JC*.



(c)

Ejemplo 3–9

Indique cómo analizar la armadura compuesta mostrada en la figura 3–30*a*. Se dan las reacciones en los soportes.



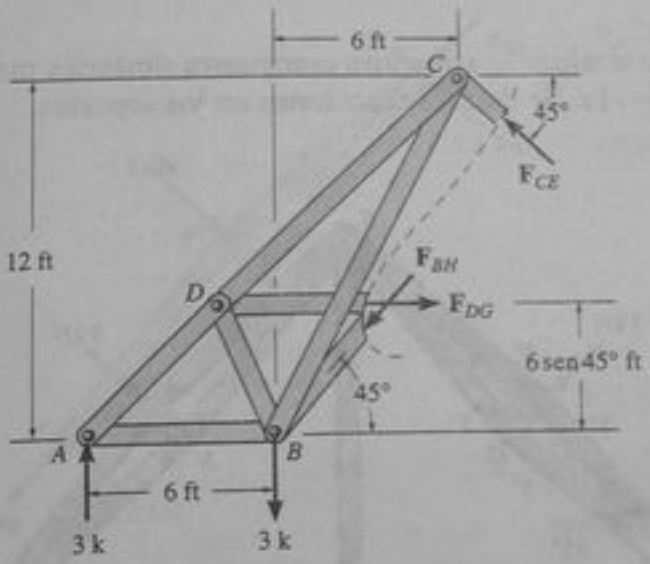
(a)

Fig. 3–30

Solución

La armadura puede clasificarse como una armadura compuesta tipo 2 ya que las armaduras simples *ABCD* y *FEHG* están conectadas por tres barras ni paralelas ni concurrentes; éstas son *CE*, *BH* y *DG*.

Usando la sección *aa* de la figura 3–30*a*, podemos determinar la fuerza en cada una de estas barras conectoras. El diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de esta sección se muestra en la figura 3–30*b*. Por tanto,



(b)

$$\curvearrowleft +\Sigma M_B = 0; \quad 3(6) + F_{DG}(6 \operatorname{sen} 45°) - F_{CE} \cos 45°(12) - F_{CE} \operatorname{sen} 45°(6) = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3 - 3 - F_{BH} \operatorname{sen} 45° + F_{CE} \operatorname{sen} 45° = 0 \qquad (2)$$

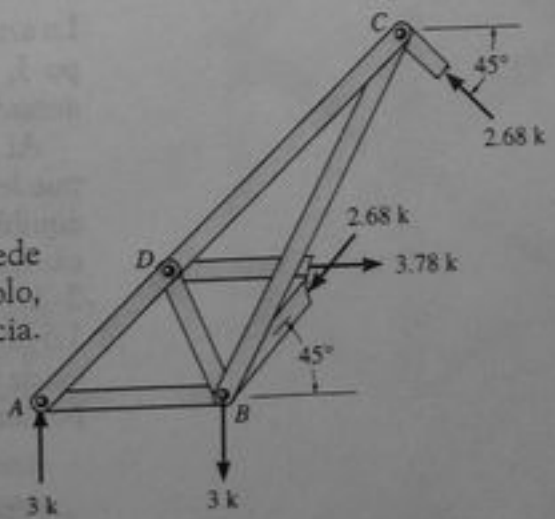
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad -F_{BH} \cos 45° + F_{DG} - F_{CE} \cos 45° = 0 \qquad (3)$$

De la ecuación (2), $F_{BH} = F_{CE}$; resolviendo ahora simultáneamente las ecuaciones (1) y (3) obtenemos

$$F_{BH} = F_{CE} = 2.68 \text{ k (C)} \qquad F_{DG} = 3.78 \text{ k (T)}$$

El análisis de cada una de las armaduras simples conectadas puede ahora llevarse a cabo usando el método de los nudos. Por ejemplo, en la figura 3–30*b*, esto puede hacerse con la siguiente secuencia.

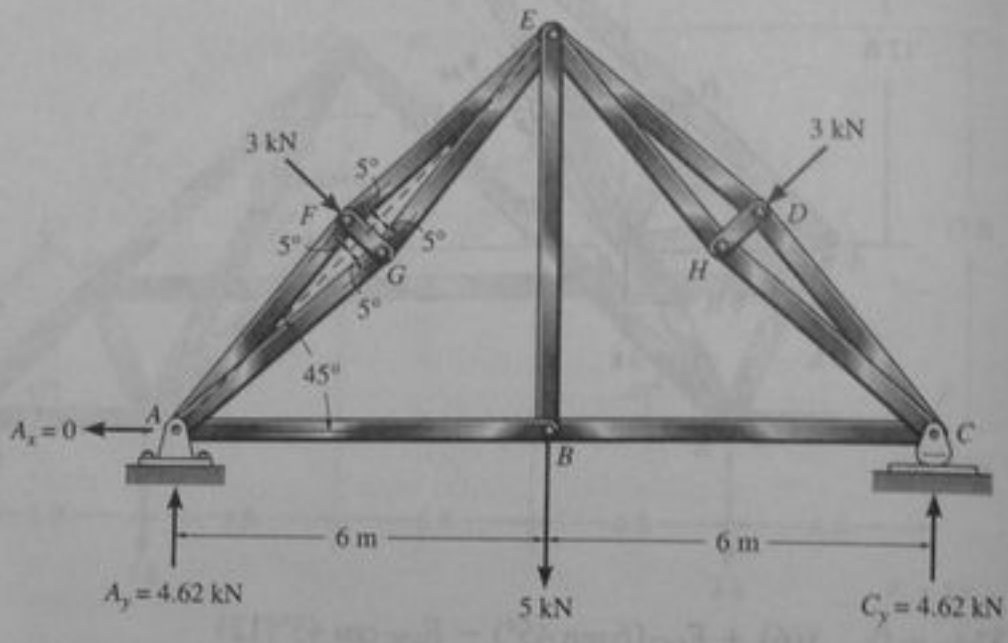
Nudo A: Determine la fuerza en AB y AD.
Nudo D: Determine la fuerza en DC y DB.
Nudo C: Determine la fuerza en CB.



(c)

Ejemplo 3–10

Indique cómo analizar la armadura compuesta simétrica mostrada en la figura 3–31*a*. Se dan las reacciones en los soportes.



(a)

Fig. 3–31

Solución

La armadura puede clasificarse como una armadura compuesta tipo 3, donde las armaduras secundarias son *AGEF* y *CHED* y la armadura principal es *ABCE*.

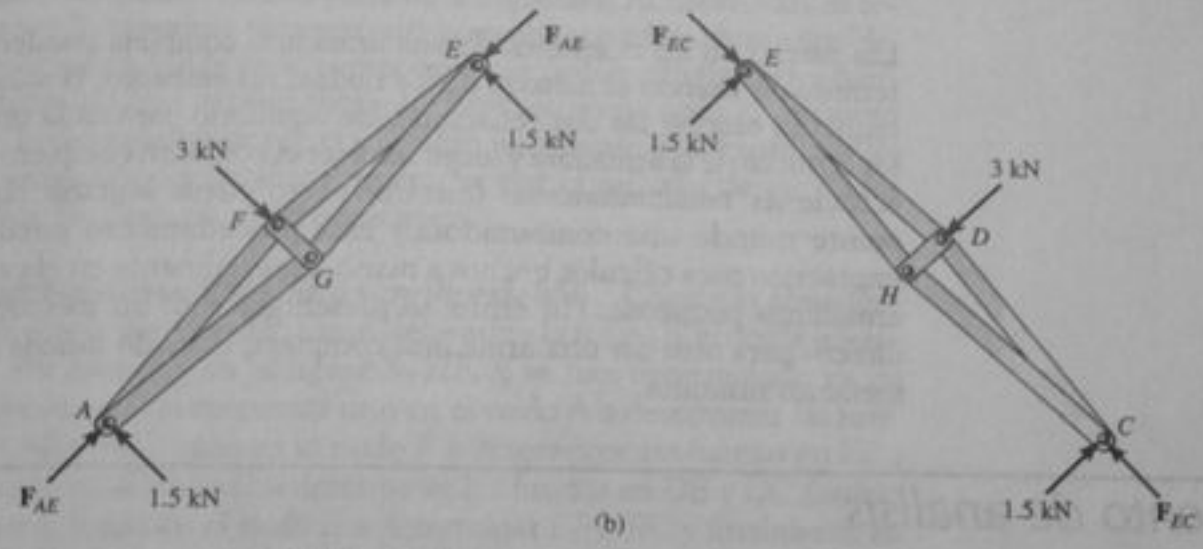
Al aislar cada una de las armaduras secundarias, figura 3–31*b*, pueden determinarse por simetría o aplicando las ecuaciones de equilibrio a cada armadura, una de las dos reacciones, específicamente la de 1.5 kN, en los pasadores *A* y *E* y *E* y *C*. En la figura 3–31*c* se muestra la armadura principal con las cargas aplicadas de 1.5 kN. La fuerza en cada miembro puede encontrarse con el método de los nudos. Por ejemplo, para el nudo *A*, el diagrama de cuerpo libre es como se muestra en la figura 3–31*d*. Tenemos entonces

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad 4.62 - 1.5 \operatorname{sen} 45° - F_{AE} \operatorname{sen} 45° = 0$

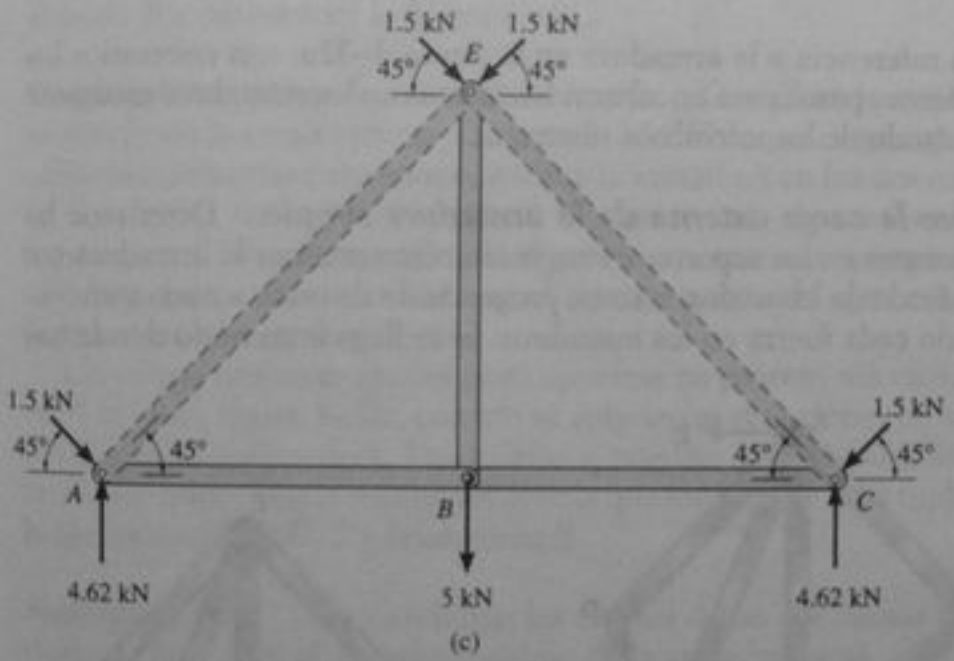
$F_{AE} = 5.03$ kN (C)

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $\quad 1.5 \cos 45° - 5.03 \cos 45° + F_{AB} = 0$

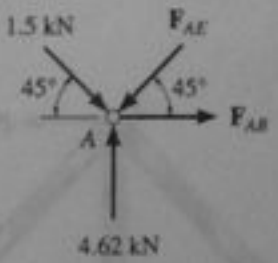
$F_{AB} = 2.50$ kN (T)



(b)



(c)



(d)

Ya encontrada $F_{AE} = 5.03$ kN (C), podemos ahora aplicar numéricamente esta carga a la armadura secundaria *AGEF* en la figura 3–31*b* y luego proceder a analizar las fuerzas en los miembros de esta armadura con el método de los nudos.

Note que la armadura en la figura 3–31*a* puede también analizarse usando el método de las secciones. Por ejemplo, pase una sección vertical por *FE*, *EG* y *AB*; determine entonces la fuerza en cada uno de esos miembros. Proceda a determinar la fuerza en cada uno de los otros miembros usando el método de los nudos.

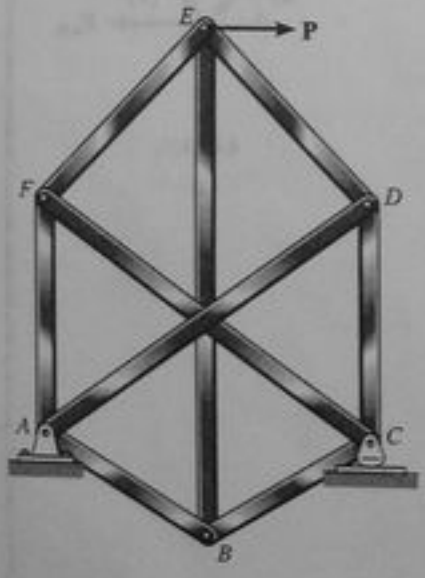
3.7 Armaduras complejas

Las fuerzas en los miembros de una armadura compleja pueden determinarse usando el método de los nudos; sin embargo, la solución requerirá escribir las dos ecuaciones de equilibrio para cada uno de los $2j$ nudos de la armadura y luego resolver el conjunto completo de $2j$ ecuaciones *simultáneamente*. (Sin duda esto puede lograrse rápidamente usando una computadora.) Este procedimiento puede ser impráctico para cálculos hechos a mano, especialmente en el caso de armaduras pequeñas. Por tanto, se presentará aquí un método más directo para analizar una armadura compleja, llamado *método de los miembros sustitutos*.

Procedimiento de análisis

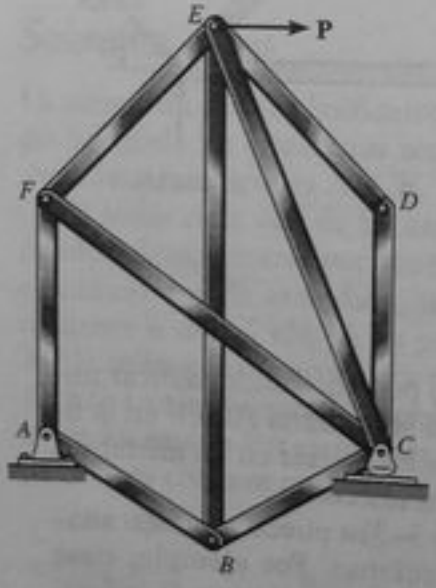
Con referencia a la armadura en la figura 3–32*a*, son necesarios los siguientes pasos para encontrar las fuerzas en los miembros mediante el método de los miembros sustitutos.

Retire la carga externa de la armadura simple. Determine las reacciones en los soportes e imagínese cómo analizar la armadura por el método de los nudos, esto es, progresando de nudo a nudo y encontrando cada fuerza en los miembros. Si se llega a un nudo donde hay



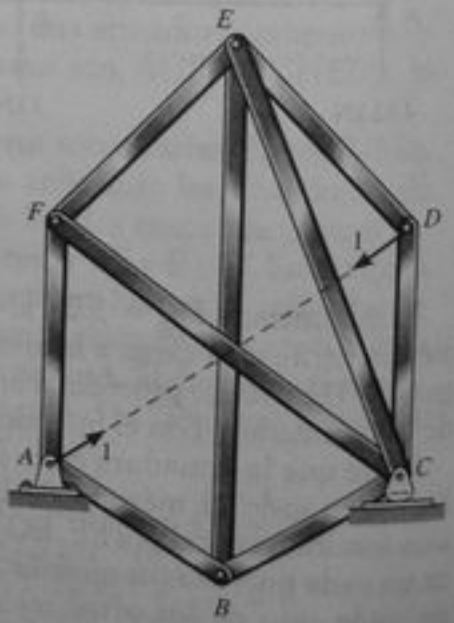
(a)

Fig. 3–32



fuerzas S_j

(b)



fuerzas s_i

(c)

tres incógnitas, retire uno de los miembros del nudo y reemplácelo por un miembro imaginario en otra parte de la armadura. Al hacerlo así, se reconstruye la armadura para convertirla en una armadura simple estable.

En la figura 3–32*a* puede apreciarse que cada nudo tiene tres fuerzas *incógnitas* que actúan sobre él. Retiramos entonces el miembro *AD* y lo reemplazamos por el miembro imaginario *EC*, figura 3–32*b*. Esta armadura puede ahora analizarse por el método de los nudos para los dos tipos de carga que siguen.

Reducción a una armadura simple estable. Cargue la armadura simple con la carga real *P*, luego determine la fuerza S_i' en cada miembro *i*. Por ejemplo, en la figura 3–32*b*, si se han determinado ya las reacciones, podría comenzar uno en el nudo *A* a determinar las fuerzas en *AB* y *AF*, luego en el nudo *F* a determinar las fuerzas en *FE* y *FC*, luego en el nudo *D* a determinar las fuerzas en *DE* y *DC* (ambas son cero), luego en el nudo *E* a determinar *EB* y *EC* y finalmente en el nudo *B* a determinar la fuerza en *BC*.

Carga externa sobre la armadura simple. Considere la armadura simple sin la carga externa *P*, figura 3–32*c*. Coloque cargas iguales colineales unitarias pero opuestas sobre la armadura en los dos nudos de donde fue retirado el miembro. Si esas fuerzas desarrollan una fuerza s_i en el *i*-ésimo miembro de la armadura, entonces por proporción una fuerza *x* desconocida en el miembro retirado ejercerá una fuerza xs_i en el miembro *i*-ésimo.

Las cargas unitarias iguales pero opuestas *no generan reacciones* ni en *A* ni en *C*, figura 3–32*c*, cuando se aplican las ecuaciones de equilibrio a toda la armadura. Las fuerzas s_i pueden determinarse analizando los nudos con la misma secuencia que antes, esto es el nudo *A*, luego los nudos *F*, *D*, *E* y finalmente *B*.

Superposición. Si se combinan los efectos de las dos cargas anteriores, la fuerza en el miembro *i*-ésimo de la armadura será

$$S_i = S_i' + xs_i \tag{1}$$

En particular, para el miembro sustituido *EC* en la figura 3–32*b*, $S_{EC} = S_{EC}' + xs_{EC}$. Como el miembro *EC* no existe realmente en la armadura original, escogemos para *x* un valor tal que dé una *fuerza cero* en *EC*. Por tanto,

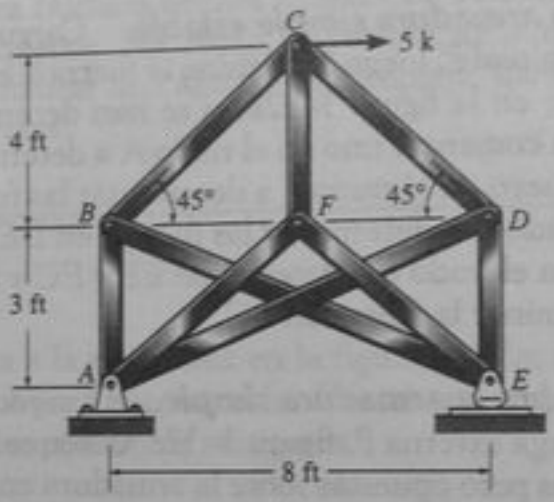
$$S_{EC}' + xs_{EC} = 0 \tag{2}$$

o $x = -S_{EC}'/s_{EC}$. Una vez determinado el valor de *x*, la fuerza en los otros miembros *i*-ésimos de la armadura compleja pueden determinarse a partir de la ecuación (1).

El siguiente ejemplo muestra este procedimiento numéricamente.

Ejemplo 3–11

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura compleja mostrada en la figura 3–33*a*. Suponga que los nudos *B*, *F* y *D* están sobre la misma línea horizontal. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.

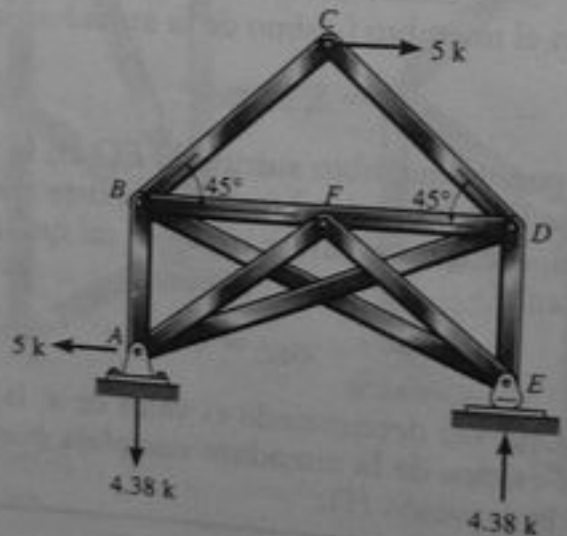


(a)

Fig. 3–33

Solución

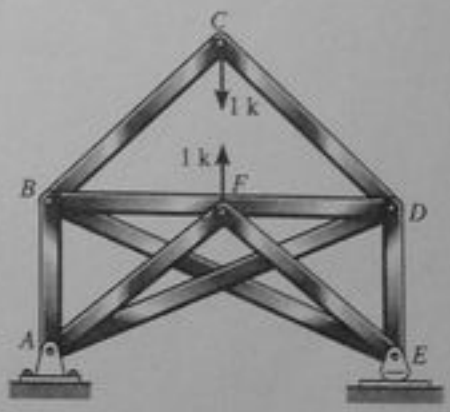
Reducción a una armadura simple estable. Por inspección, cada nudo tiene tres fuerzas de miembro desconocidas. Un análisis de nudo puede hacerse a mano si, por ejemplo, se retira el miembro *CF* y se sustituye por el miembro *DB*, figura 3–33*b*. La armadura resultante es estable y no fallará.



(b)

Carga externa sobre la armadura simple. Como se ve en la figura 3–33*b*, las reacciones en los soportes ya han sido calculadas. Usando el método de los nudos, podemos analizar primero el nudo *C* para determinar las fuerzas en los miembros *CB* y *CD*; luego el nudo *F*, donde se ve que *FA* y *FE* son miembros de fuerza cero; luego el nudo *E* para determinar las fuerzas en los miembros *EB* y *ED*; luego el nudo *D* para determinar las fuerzas en *DA* y *DB*; finalmente, el nudo *B* para determinar la fuerza en *BA*. Considerando la tensión como positiva y compresión como negativa, tales fuerzas S'_i se muestran en la columna 2 de la tabla 1.

Eliminación de la carga externa de la armadura simple. La carga unitaria que actúa sobre la armadura se muestra en la figura 3–33*c*. Esas fuerzas iguales pero opuestas no generan reacciones externas sobre la armadura. El análisis por nudos sigue la misma secuencia que antes, es decir, se analizan los nudos *C*, *F*, *E*, *D* y *B*. Los resultados del análisis de fuerzas s_i están registrados en la columna 3 de la tabla 1.



(c)

Superposición. Se requiere que

$$S_{DB} = S'_{DB} + xs_{DB} = 0$$

Al sustituir los valores de S'_{DB} y s_{DB}, donde S'_{DB} es negativa por estar en compresión, obtenemos

$$(-2.50) + x(1.167) = 0 \qquad x = 2.142$$

Los valores de xs_i están registrados en la columna 4 de la tabla 1 y las fuerzas reales finales $S_i = S'_i + xs_i$ se dan en la columna 5.

Tabla 1

Miembro	S'_i	s_i	xs_i	S_i
CB	3.54	−0.707	−1.51	2.02(T)
CD	−3.54	−0.707	−1.51	5.05(C)
FA	0	0.833	1.78	1.78(T)
FE	0	0.833	1.78	1.78(T)
EB	0	−0.712	−1.53	1.53(C)
ED	−4.38	−0.250	−0.536	4.91(C)
DA	5.34	−0.712	−1.52	3.81(T)
DB	−2.50	1.167	2.50	0
BA	2.50	−0.250	−0.535	1.96(T)

3.8 Armaduras espaciales

Una armadura espacial consiste en miembros conectados entre sí en sus extremos para formar una estructura tridimensional estable. En la sección 3.2 se mostró que la forma más simple de una armadura bidimensional estable consta de miembros arreglados en forma de triángulo. A partir de este elemento triangular básico construimos una armadura plana simple agregando dos miembros a la vez para formar elementos adicionales. De manera similar, el elemento más simple de una armadura espacial estable es un *tetraedro*, que se forma al conectar seis miembros entre sí con cuatro nudos como se muestra en la figura 3–34. Cualquier miembro adicional agregado a este elemento básico sería redundante para soportar la fuerza **P**. Una armadura espacial simple puede construirse a partir de este elemento tetraédrico básico agregando tres miembros adicionales y otro nudo para formar tetraedros multiconectados.

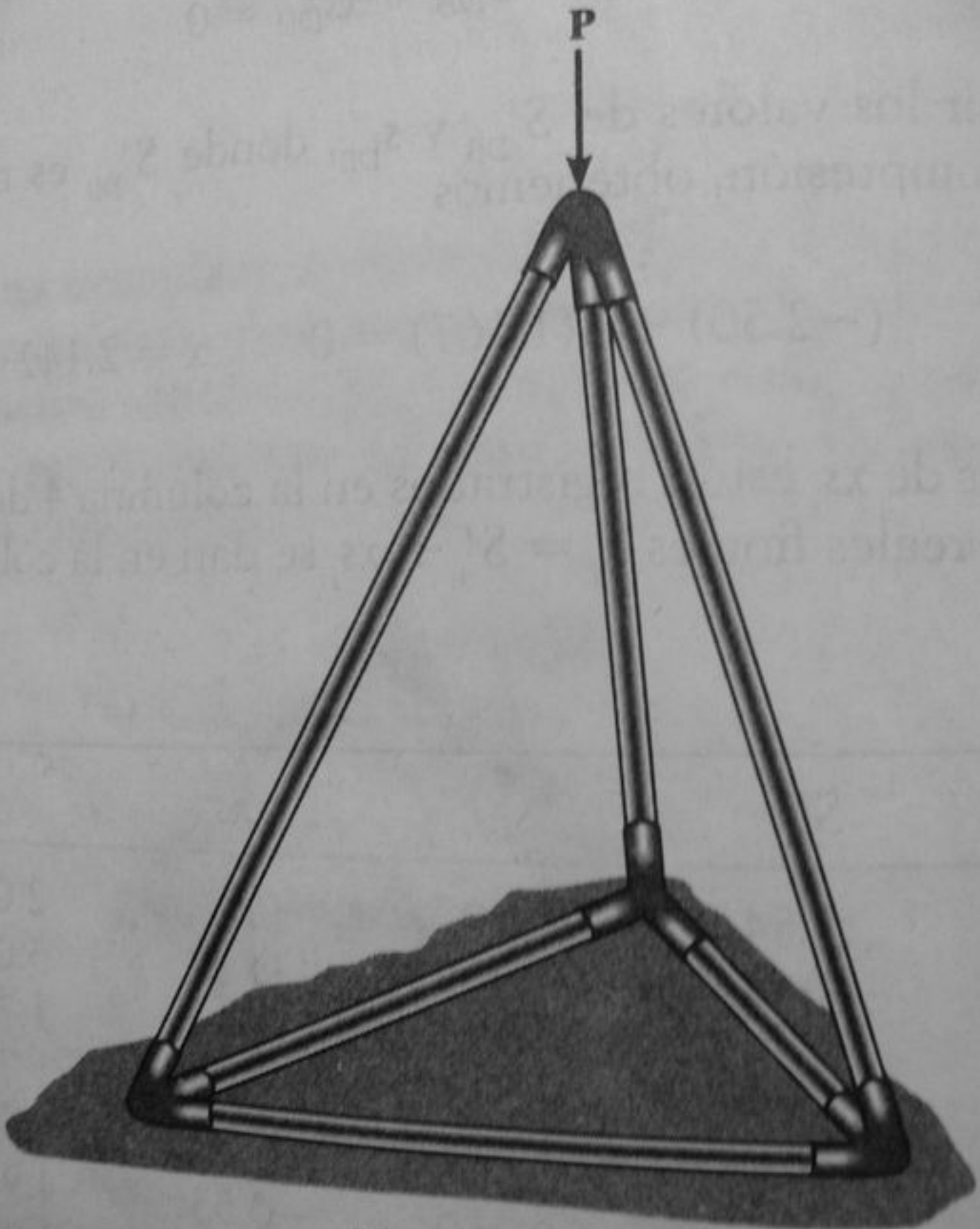


Fig. 3–34

Determinación y estabilidad

En tres dimensiones se tienen tres ecuaciones de equilibrio disponibles para cada nudo ($\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$), por lo que para una armadura espacial con j nudos, se tendrán $3j$ ecuaciones disponibles. Si la armadura tiene b barras y r reacciones, entonces como en el caso de armaduras planas (ecuación 3–1) podemos escribir

$b + r < 3j$	armadura inestable
$b + r = 3j$	estáticamente determinada, revise la estabilidad
$b + r > 3j$	estáticamente indeterminada, revise la estabilidad

(3–3)

La *estabilidad externa* de la armadura espacial requiere que las líneas de acción de las reacciones no intersequen un eje común, ni que sean paralelas entre sí. La *estabilidad interna* puede a veces verificarse por inspección cuidadosa del arreglo de los miembros. Si cada nudo se mantiene fijo por sus soportes o miembros conectados a él, de manera que no pueda moverse con respecto a otros nudos, la armadura puede clasificarse como internamente estable. También, si efectuamos un análisis de fuerzas de la armadura y obtenemos resultados inconsistentes, entonces la configuración de la armadura será inestable o tendrá una "forma crítica".

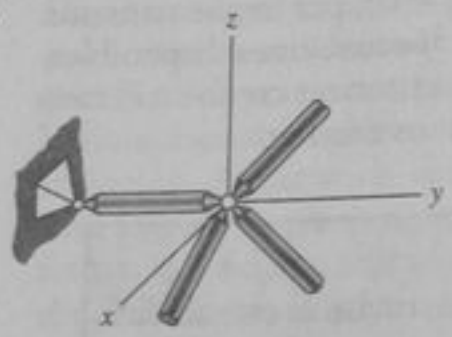
Hipótesis de diseño

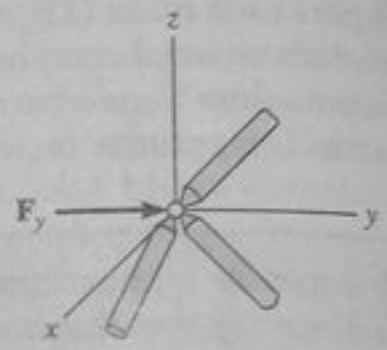
Los miembros de una armadura espacial pueden tratarse como elementos sujetos a una fuerza axial, siempre que la carga externa se aplique en sus nudos y que éstos consistan en conexiones de rótula esférica. Esta hipótesis se justifica siempre que los miembros de una conexión se intersecan en un punto y el peso de los miembros puede despreciarse. En los casos en que el peso de un miembro deba incluirse en el análisis, es generalmente satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical, con la mitad de su magnitud aplicada en cada extremo del miembro.

Para el análisis de las fuerzas, los soportes de una armadura espacial se modelan generalmente como un eslabón corto, un nudo de rodillo plano, un nudo de rodillo guiado o un nudo de rótula esférica. Cada uno de esos soportes y sus componentes de fuerza reactiva se muestran en la tabla 3–1.

Tabla 3–1

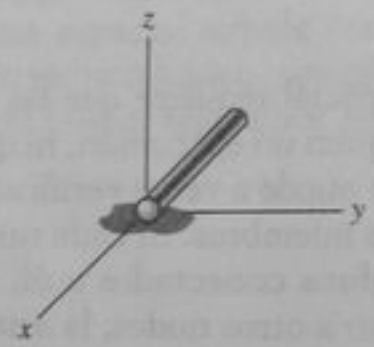
(1)

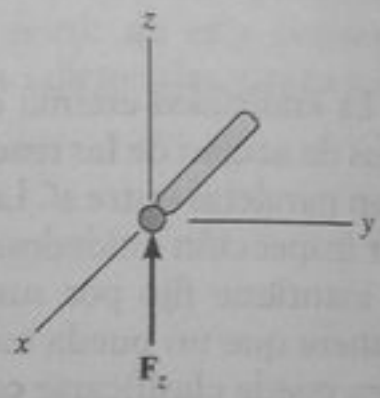




eslabón corto

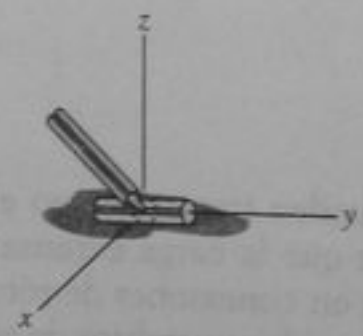
(2)

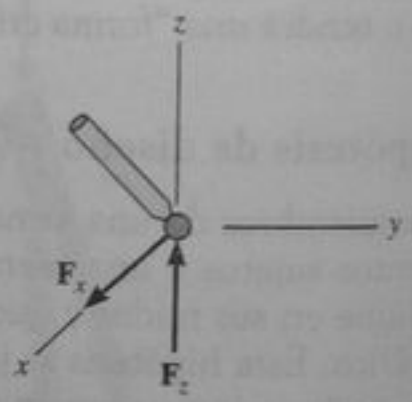




rodillo

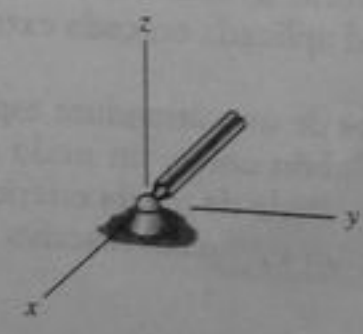
(3)

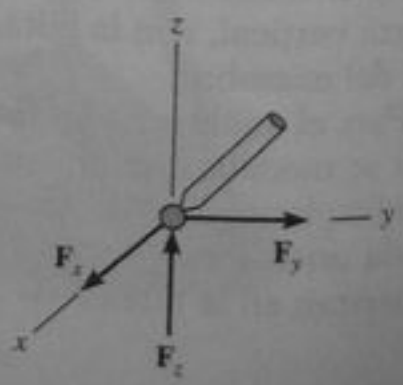




rodillo ranurado restringido
en un cilindro

(4)





rótula esférica

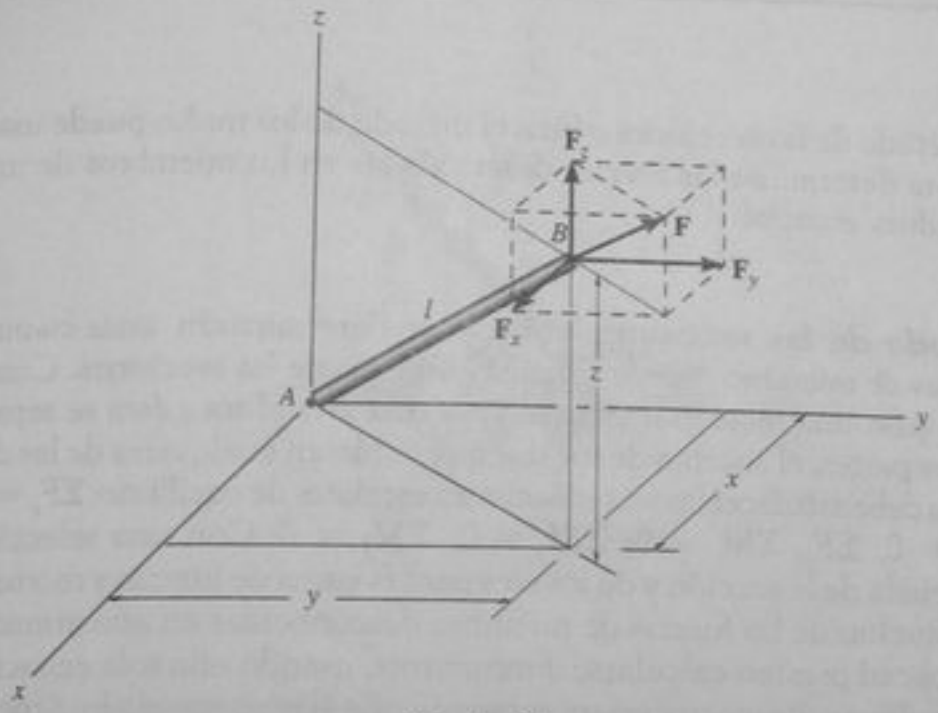


Fig. 3–35

Componentes en x, y y z de una fuerza

Como el análisis de una armadura espacial es tridimensional, será necesario a menudo resolver la fuerza F de un miembro en componentes que actúen a lo largo de los ejes x, y y z. Esto siempre puede hacerse porque la fuerza actúa en la misma dirección que el miembro de la armadura. Por ejemplo, en la figura 3–35, el miembro AB tiene una longitud l y proyecciones *conocidas* x, y, z a lo largo de los ejes coordenados. Esas proyecciones pueden relacionarse con la longitud del miembro por la ecuación

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3–4}$$

La fuerza $\mathbf{F}$ actúa a lo largo del eje del miembro por lo que las componentes de $\mathbf{F}$ pueden determinarse por *proporción* como sigue:

$$F_x = F\left(\frac{x}{l}\right) \qquad F_y = F\left(\frac{y}{l}\right) \qquad F_z = F\left(\frac{z}{l}\right) \tag{3–5}$$

Note que esto requiere que

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{3–6}$$

El uso de esas ecuaciones se ilustrará en el ejemplo 3–12.

Procedimiento de análisis

El método de las secciones o bien el método de los nudos puede usarse para determinar las fuerzas desarrolladas en los miembros de una armadura espacial.

Método de las secciones Si sólo se determinarán *unas cuantas* fuerzas de miembro, puede usarse el método de las secciones. Cuando se pasa una sección imaginaria por una armadura y ésta se separa en dos partes, el sistema de fuerzas que actúa en cualquiera de las dos partes debe satisfacer las seis ecuaciones escalares de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, ΣF_z, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$. Con una selección apropiada de la sección y de los ejes para la suma de fuerzas y momentos, muchas de las fuerzas de miembro desconocidas en una armadura espacial pueden calcularse *directamente*, usando una sola ecuación de equilibrio. Respecto a esto, recuerde que el *momento* de una fuerza alrededor de un eje es igual a *cero* si la *fuerza es paralela al eje o si su línea de acción pasa por un punto sobre el eje.*

Métodos de los nudos Generalmente, si las fuerzas en *todos* los miembros de la armadura deben ser determinadas, el método de los nudos es más adecuado para el análisis. Al usar el método de los nudos, es necesario resolver las tres ecuaciones escalares de equilibrio $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$ en cada nudo. Como es relativamente fácil dibujar los diagramas de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio en cada nudo, el método de los nudos es muy consistente en su aplicación.

Miembros de fuerza cero En algunos casos el análisis del nudo de una armadura puede simplificarse si se pueden detectar los miembros de fuerza cero al reconocer dos casos comunes de geometría de nudo.

Caso 1 Si todos excepto uno de los miembros conectados a un nudo se encuentran en el mismo plano y si ninguna carga externa actúa sobre el nudo, entonces el miembro que no está en el plano de los otros miembros debe estar sometido a fuerza cero. La prueba de este enunciado se muestra en la figura 3–36, donde los miembros A, B y C están en el plano x–y. Como la componente z de $\mathbf{F}_D$ debe ser cero para satisfacer $\Sigma F_z = 0$, el miembro D debe ser uno de fuerza cero. Por el mismo razonamiento, el miembro D llevará una carga que puede determinarse con $\Sigma F_z = 0$ si una fuerza externa actúa sobre el nudo y tiene una componente actuando a lo largo del eje z.

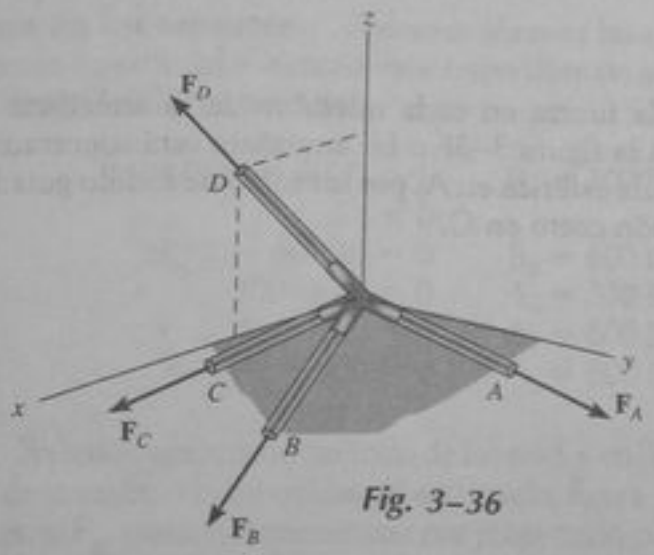


Fig. 3–36

Caso 2 Si se ha determinado que, excepto dos, todos los miembros conectados a un nudo son de fuerza cero, entonces los dos miembros restantes deben también ser de fuerza cero, siempre que ellos no se encuentren sobre la misma recta. Esta situación se ilustra en la figura 3–37, donde se sabe que A y C son miembros de fuerza cero. Como F_D es colineal con el eje y, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ o $\Sigma F_z = 0$ requiere que la componente x o z de F_B sea cero. En consecuencia, $F_B = 0$. Siendo este el caso, $F_D = 0$ ya que $\Sigma F_y = 0$.

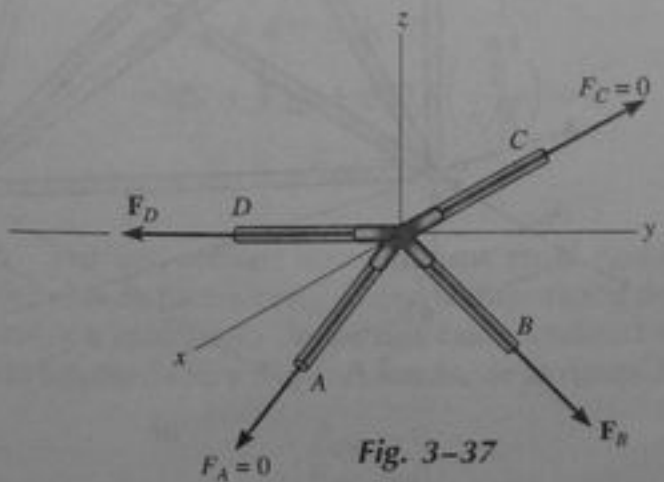
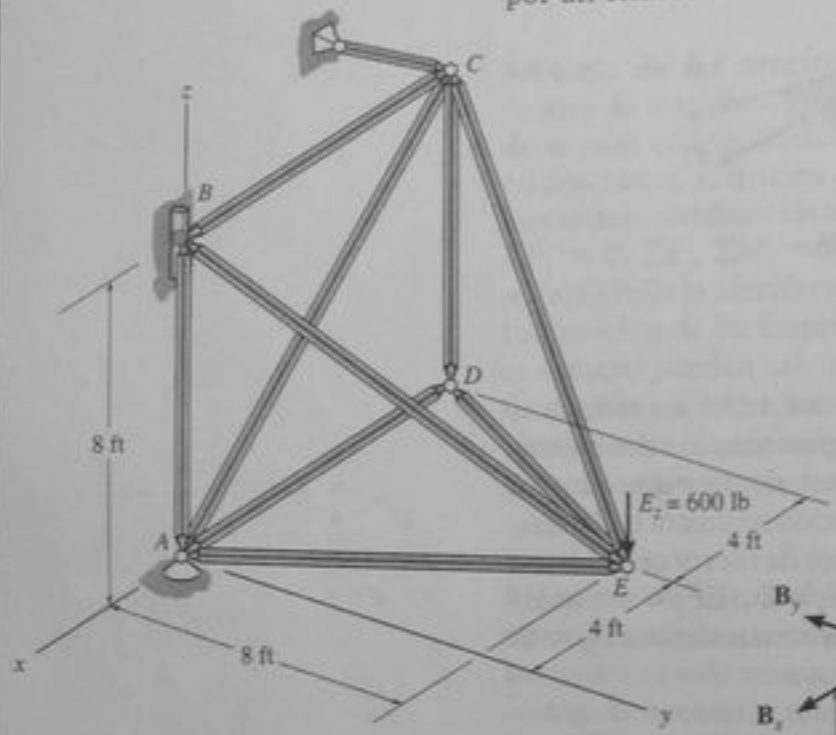


Fig. 3–37

Atención particular debe darse a los dos casos anteriores de geometría y carga de nudo ya que el análisis de una armadura espacial puede simplificarse considerablemente si se detectan primero los miembros de fuerza cero.

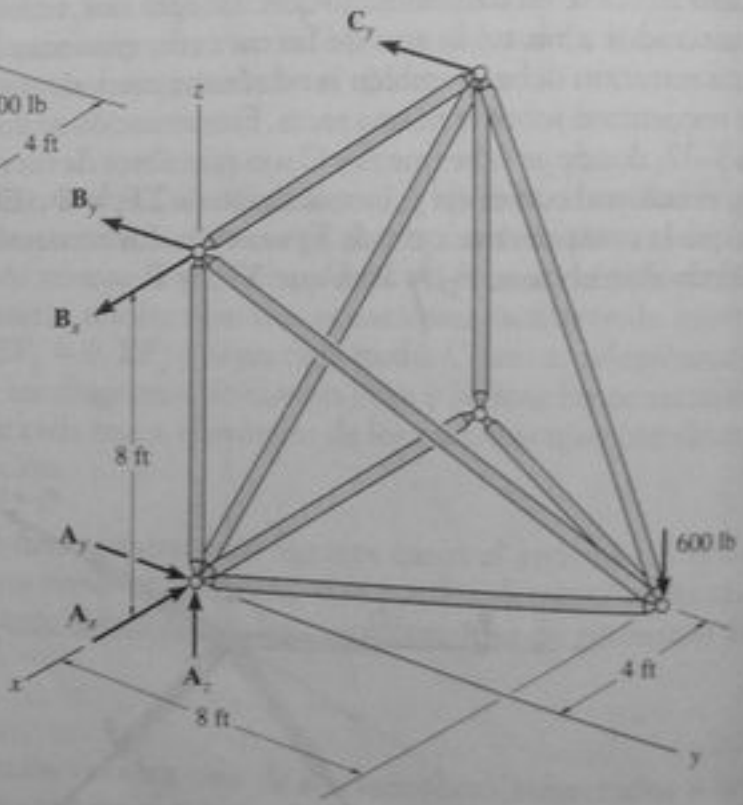
Ejemplo 3–12

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial mostrada en la figura 3–38*a*. La armadura está soportada por un nudo de rótula esférica en A, por un nudo de rodillo guiado en B y por un eslabón corto en C.



(a)

Fig. 3–38



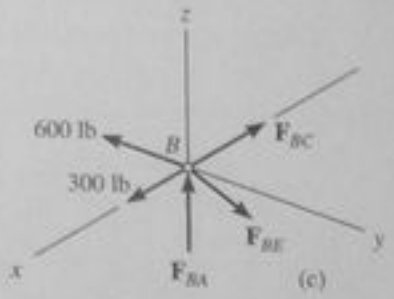
(b)

Solución

Determinación y estabilidad. El problema está estáticamente determinado, ya que $b + r = 3j$ o $9 + 6 = 3(5)$, figura 3–38*b*. Además, la armadura es estable ya que todas las reacciones no pasan por un eje común ni son todas paralelas entre sí.

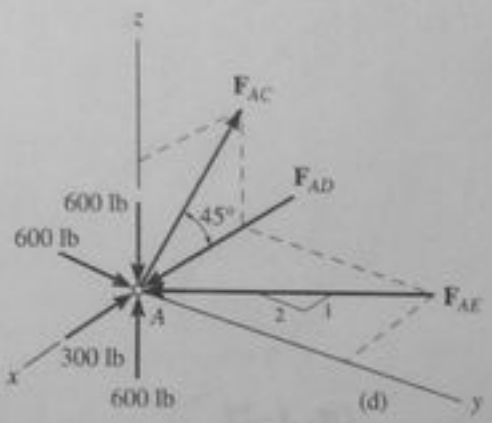
Reacciones en los soportes. Podemos obtener las reacciones en los soportes a partir del diagrama de cuerpo libre de la armadura entera, figura 3–38*b*, como sigue:

$$\Sigma M_y = 0; \quad -600(4) + B_x(8) = 0 \quad B_x = 300 \text{ lb}$$
$$\Sigma M_z = 0; \quad C_y = 0$$
$$\Sigma M_x = 0; \quad B_y(8) - 600(8) = 0 \quad B_y = 600 \text{ lb}$$
$$\Sigma F_x = 0; \quad 300 - A_x = 0 \quad A_x = 300 \text{ lb}$$
$$\Sigma F_y = 0; \quad A_y - 600 = 0 \quad A_y = 600 \text{ lb}$$
$$\Sigma F_z = 0; \quad A_z - 600 = 0 \quad A_z = 600 \text{ lb}$$



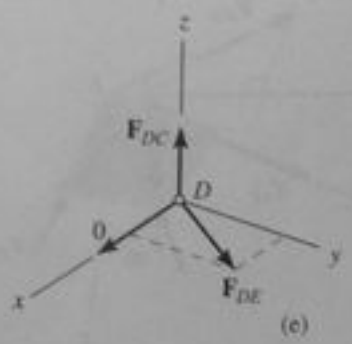
Nudo B. Podemos empezar el método de los nudos en *B* ya que hay tres fuerzas de miembro desconocidas en este nudo, figura 3–38*c*. Las componentes de $\mathbf{F}_{BE}$ pueden determinarse por proporción con la longitud del miembro *BE*, como se indica por las ecuaciones 3–5. Tenemos

$$\Sigma F_y = 0; \quad -600 + F_{BE}\left(\tfrac{8}{12}\right) = 0 \quad F_{BE} = 900 \text{ lb (T)} \quad \textit{Resp.}$$
$$\Sigma F_x = 0; \quad 300 - F_{BC} - 900\left(\tfrac{4}{12}\right) = 0 \quad F_{BC} = 0 \quad \textit{Resp.}$$
$$\Sigma F_z = 0; \quad F_{BA} - 900\left(\tfrac{8}{12}\right) = 0 \quad F_{BA} = 600 \text{ lb (C)} \quad \textit{Resp.}$$



Nudo A. Usando el resultado $F_{BA} = 600$ lb (C), en la figura 3–38*d* se muestra el diagrama de cuerpo libre del nudo *A*. Tenemos

$$\Sigma F_z = 0; \quad 600 - 600 + F_{AC} \operatorname{sen} 45° = 0$$
$$F_{AC} = 0 \quad \textit{Resp.}$$
$$\Sigma F_y = 0; \quad -F_{AE}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 600 = 0$$
$$F_{AE} = 670.8 \text{ lb (C)} \quad \textit{Resp.}$$
$$\Sigma F_x = 0; \quad -300 + F_{AD} + 670.8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$
$$F_{AD} = 0 \quad \textit{Resp.}$$

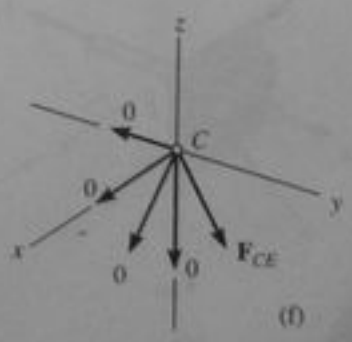


Nudo D. Por inspección, los miembros en el nudo *D*, figura 3–38*a*, son todos de fuerza cero, ya que la disposición de los miembros es similar a cualquiera de los dos casos analizados con referencia a las figuras 3–36 y 3–37. Además, de la figura 3–38*e*,

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{DE} = 0 \quad \textit{Resp.}$$
$$\Sigma F_z = 0; \quad F_{DC} = 0 \quad \textit{Resp.}$$

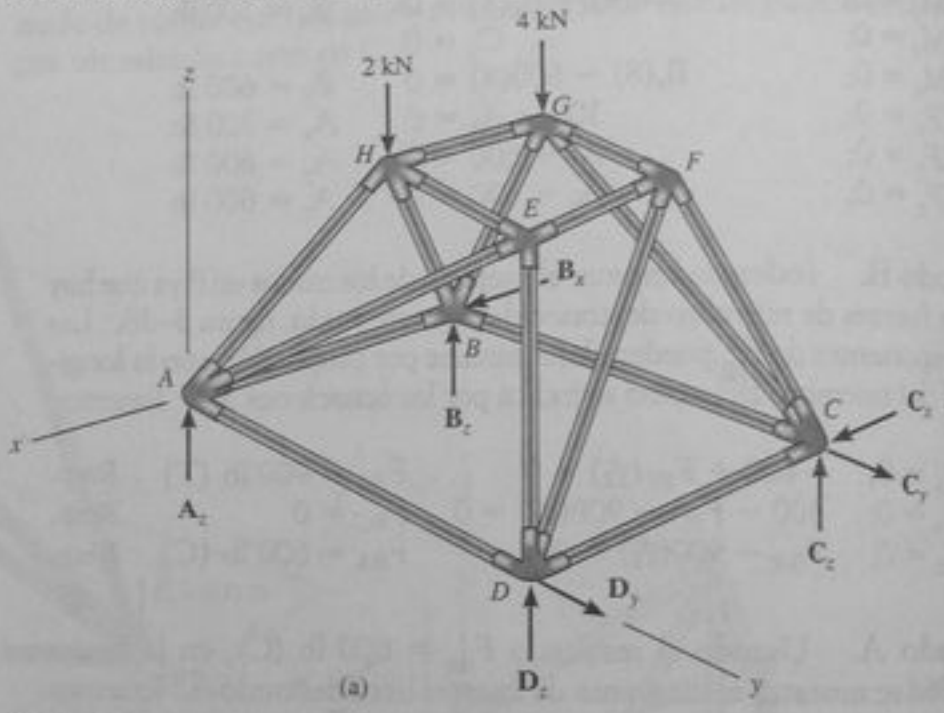
Nudo C. Por observación del diagrama de cuerpo libre, figura 3–38*f*,

$$F_{CE} = 0 \quad \textit{Resp.}$$



Ejemplo 3–13

Determine los miembros de fuerza cero de la armadura mostrada en la figura 3–39*a*. Se muestran las componentes de reacción sobre la armadura ejercidas por los soportes.



(a)

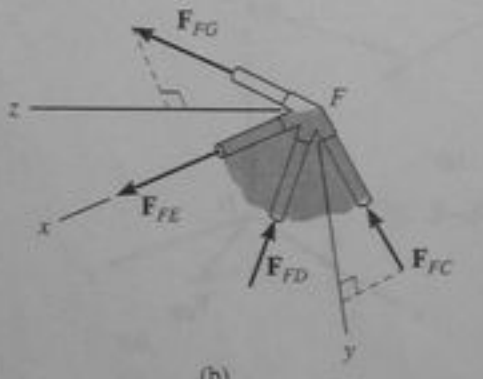
Fig. 3–39

Solución

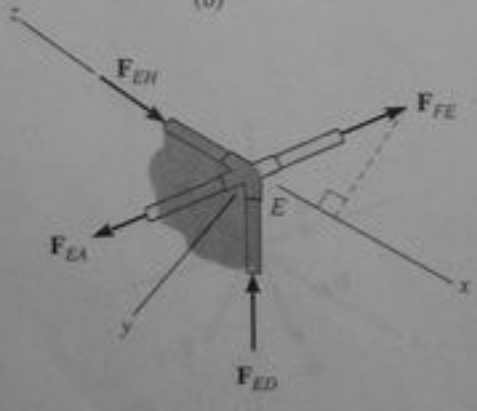
El diagrama de cuerpo libre, figura 3–39*a*, indica que se tienen ocho reacciones desconocidas para cuya determinación hay sólo seis ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, las reacciones pueden determinarse, ya que $b + r = 3j$ o $16 + 8 = 3(8)$.

Para localizar los miembros de fuerza cero debemos comparar las condiciones de geometría de los nudos y carga con las de las figuras 3–36 y 3–37. Respecto a esto, considere el nudo *F*, figura 3–39*b*. Como los miembros *FC*, *FD* y *FE* están en el plano *x*–*y* y *FG* no, *FG* es un miembro de fuerza cero. ($\Sigma F_z = 0$ debe cumplirse.) De la misma manera, en el nudo *E*, figura 3–39*c*, *FE es un miembro de fuerza cero*, ya que no se encuentra en el plano *y*-*z*. ($\Sigma F_x = 0$ debe cumplirse.) Volviendo al nudo *F*, figura 3–39*b*, puede verse que $F_{FD} = F_{FC} = 0$, ya que $F_{FE} = F_{FG} = 0$, y que no hay fuerzas externas actuando en el nudo.

El análisis numérico de las fuerzas en los nudos puede proceder analizando primero el nudo G ($F_{GF} = 0$) para determinar las fuerzas en *GH*, *GB* y *GC*. Luego se analiza el nudo *H* para determinar las fuerzas en *HE*, *HB* y *HA*; luego, el nudo *E* para determinar las fuerzas en *EA* y *ED*; luego, el nudo *A* para determinar las fuerzas en *AB*, *AD* y A_z; luego, el nudo *B* para determinar la fuerza en *BC* y en B_x y B_z; luego, el nudo *D* para determinar la fuerza en *DC* y en D_y y D_z; finalmente, el nudo *C* para determinar C_x, C_y y C_z.



(b)

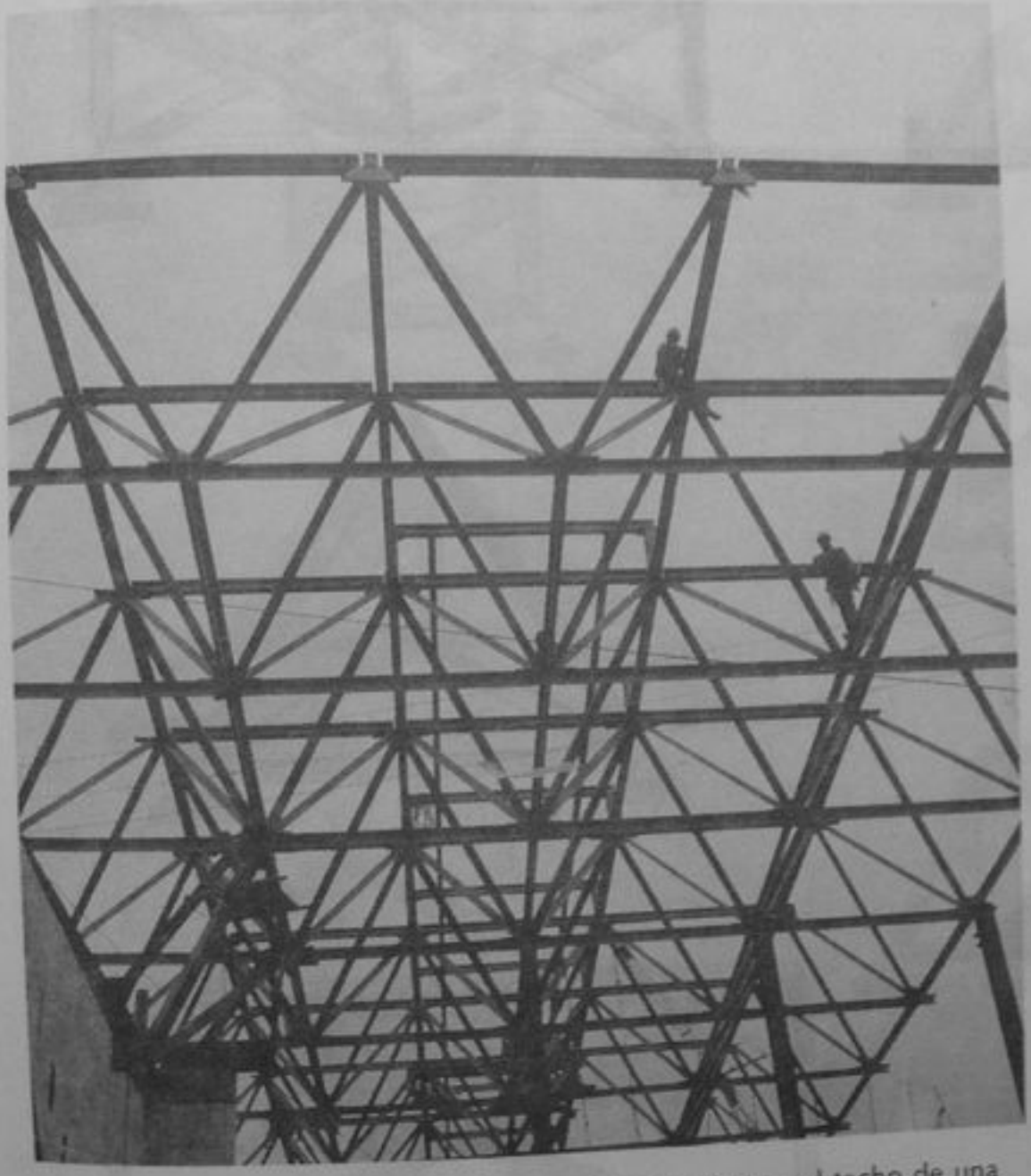


(c)

BIBLIOGRAFÍA

Henneberg, L., *Statik der Starren Systeme*. Darmstadt, 1886.

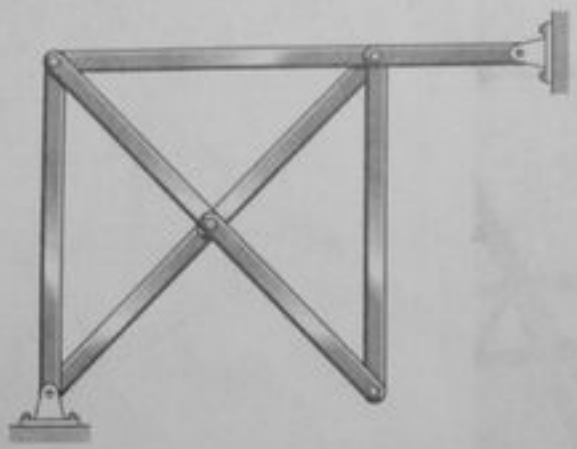
Timoshenko, S., and D. H. Young, *Theory of Structures*. McGraw-Hill Company, Inc., New York, 1965.



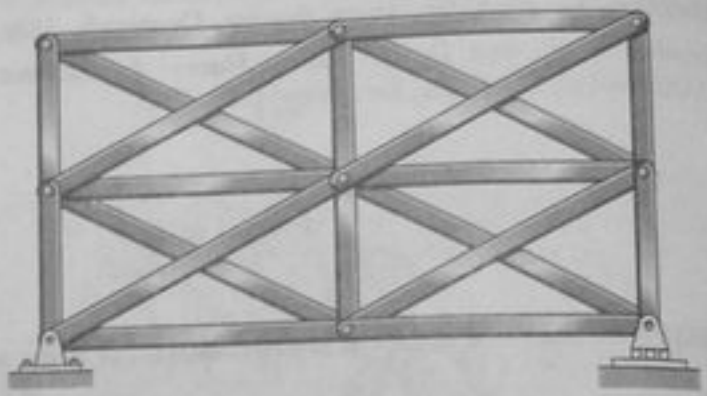
Este sistema de armaduras espaciales se usa para soportar el techo de una instalación deportiva. (*Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

PROBLEMAS

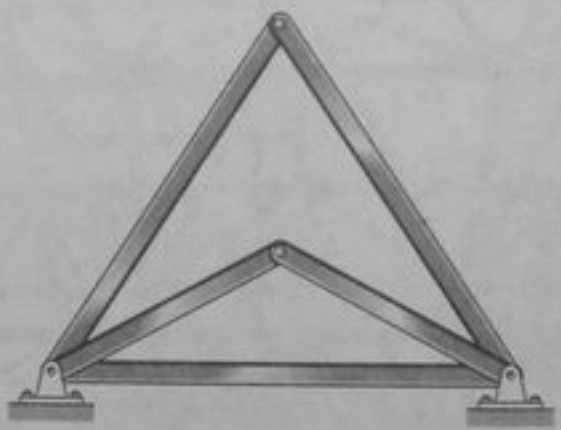
3–1. Clasifique cada una de las siguientes armaduras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable.



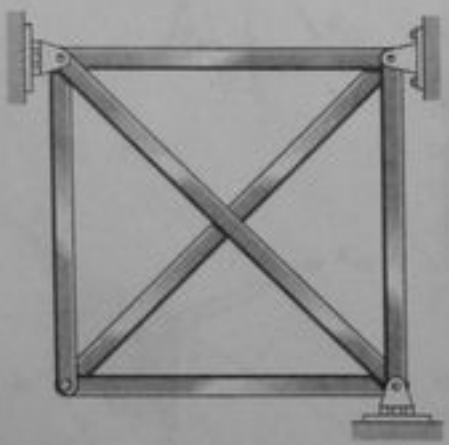
(a)



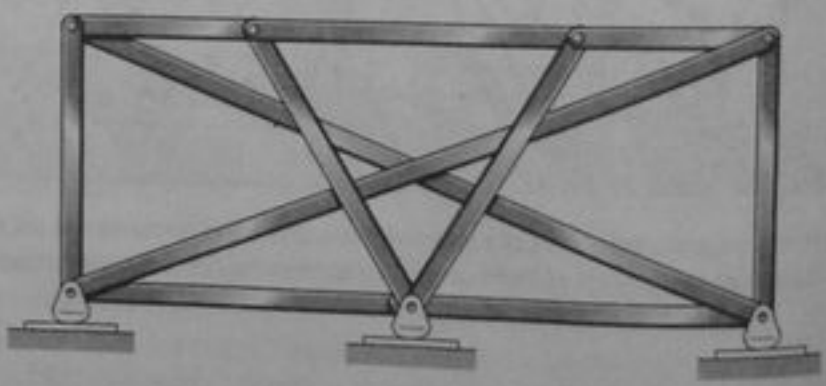
(c)



(d)



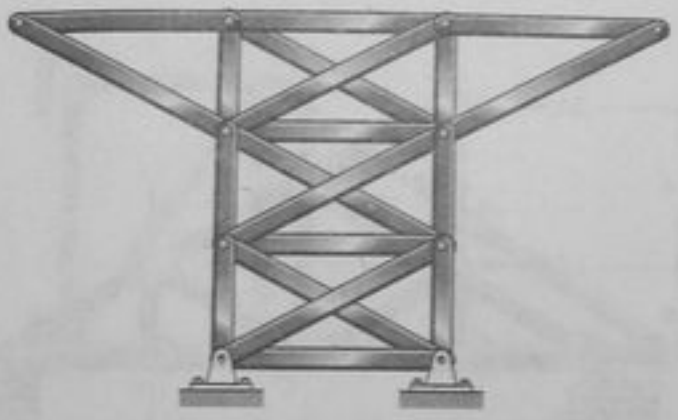
(b)



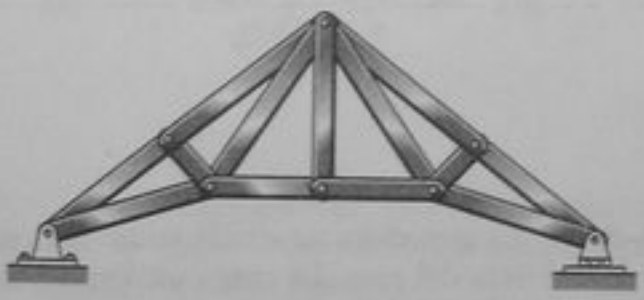
(e)

Prob. 3–1

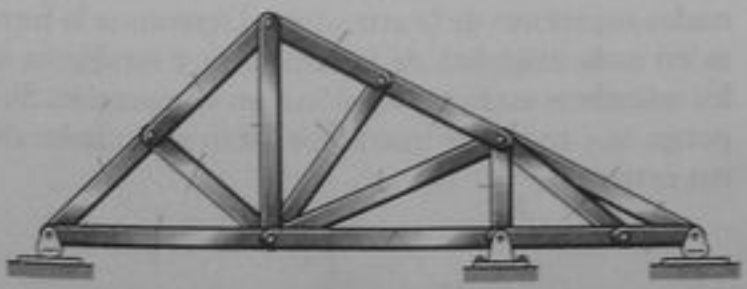
3–2. Clasifique cada una de las siguientes armaduras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable.



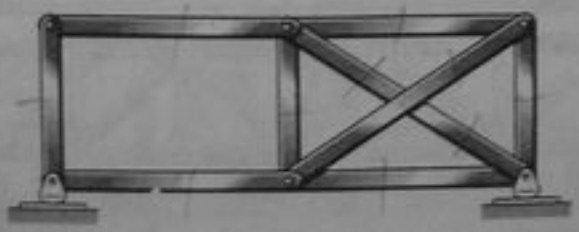
(a)



(b)



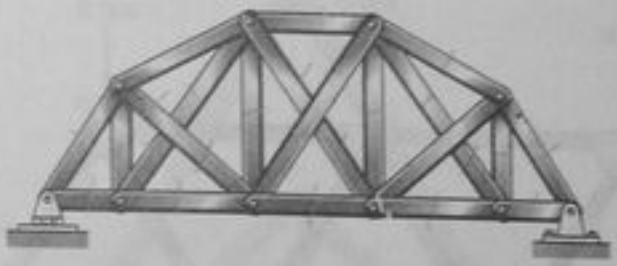
(c)



(d)

Prob. 3–2

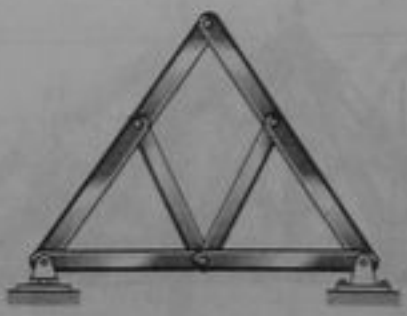
3–3. Clasifique cada una de las siguientes armaduras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable.



(a)

(b)

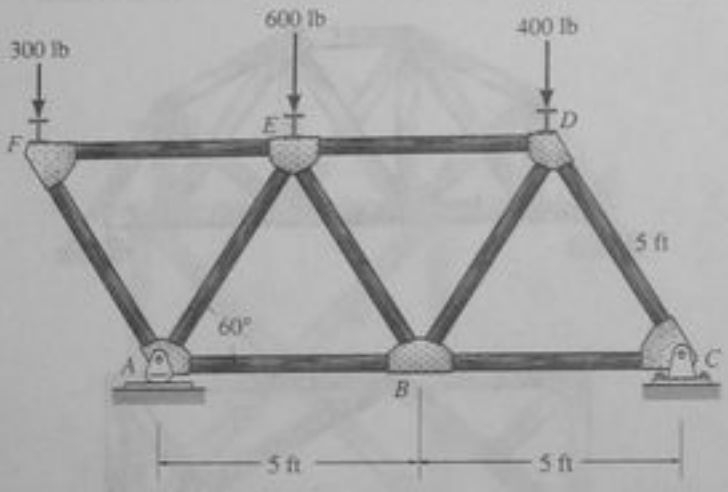
(c)



(d)

Prob. 3–3

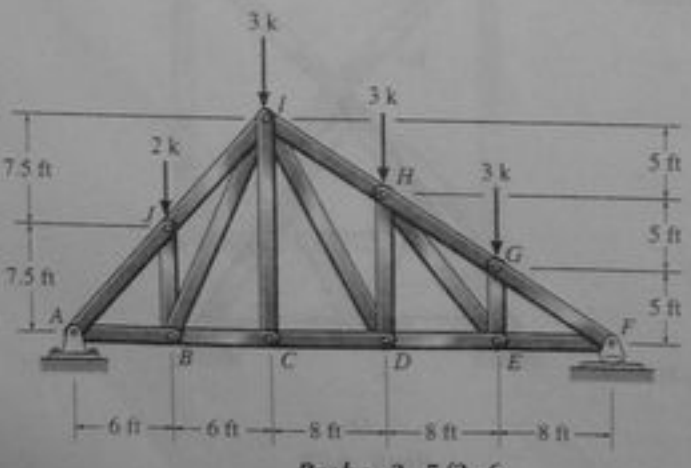
*3–4. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. Todos los ángulos interiores son de 60°. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



Prob. 3–4

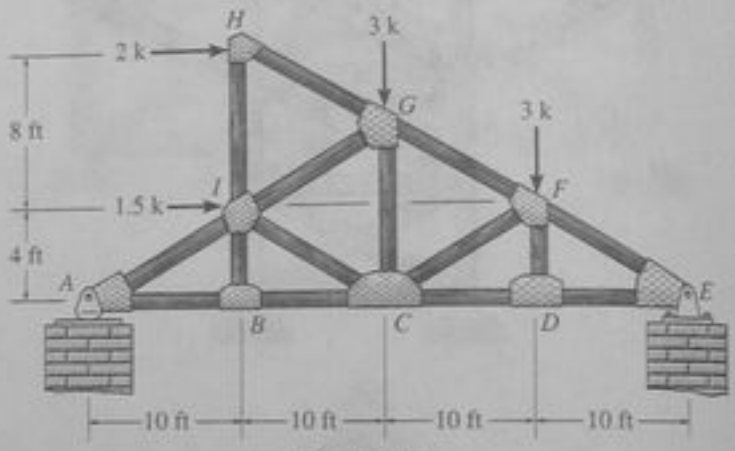
3–5. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura de techo. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.

3–6. Resuelva el problema 3–5 suponiendo que no hay carga externa sobre los nudos *J*, *H* y G, o sea que sólo se tiene la carga vertical de 3 k sobre el nudo *I*.



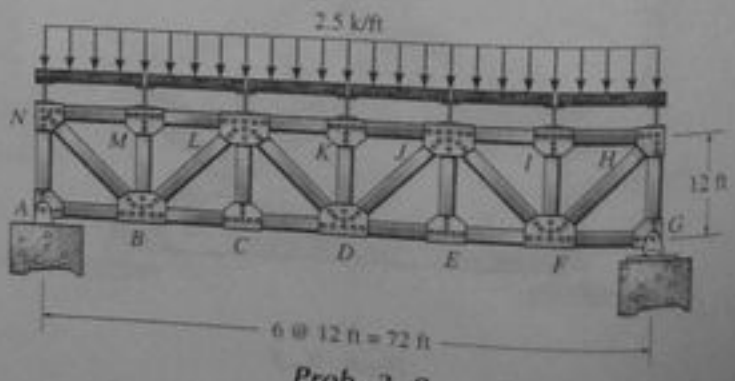
Probs. 3–5/3–6

3–7. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. Indique si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



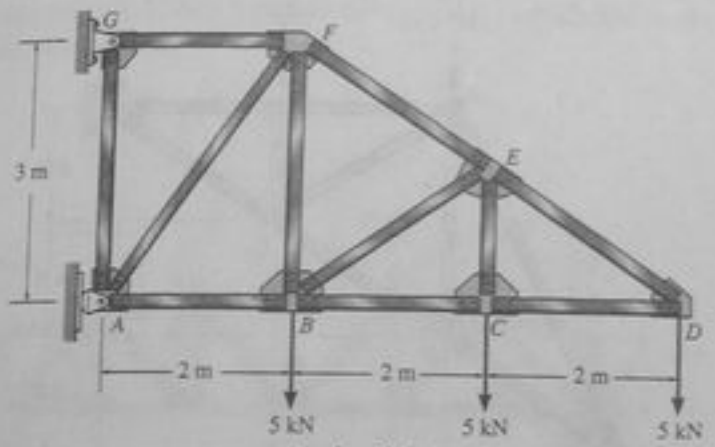
Prob. 3–7

*3–8. La armadura mostrada se usa para soportar la cubierta del piso. La carga uniforme sobre la cubierta es de 2.5 k/ft. Esta carga se transmite de la cubierta a las vigas del piso, que descansan sobre los nudos superiores de la armadura. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



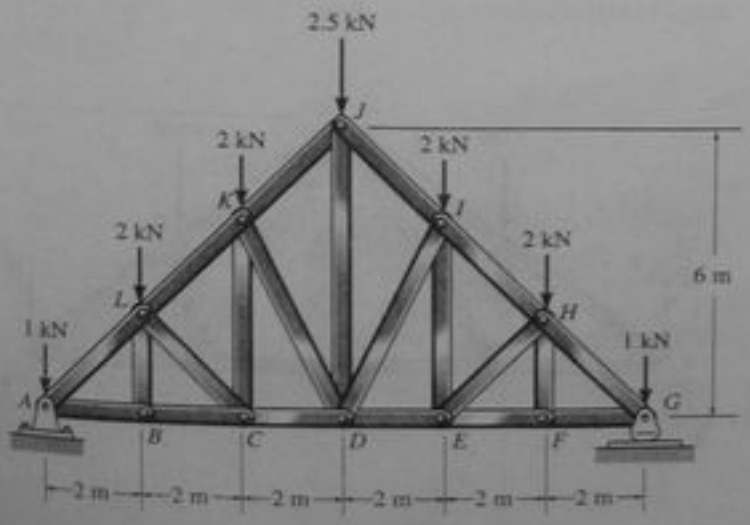
Prob. 3–8

3–9. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



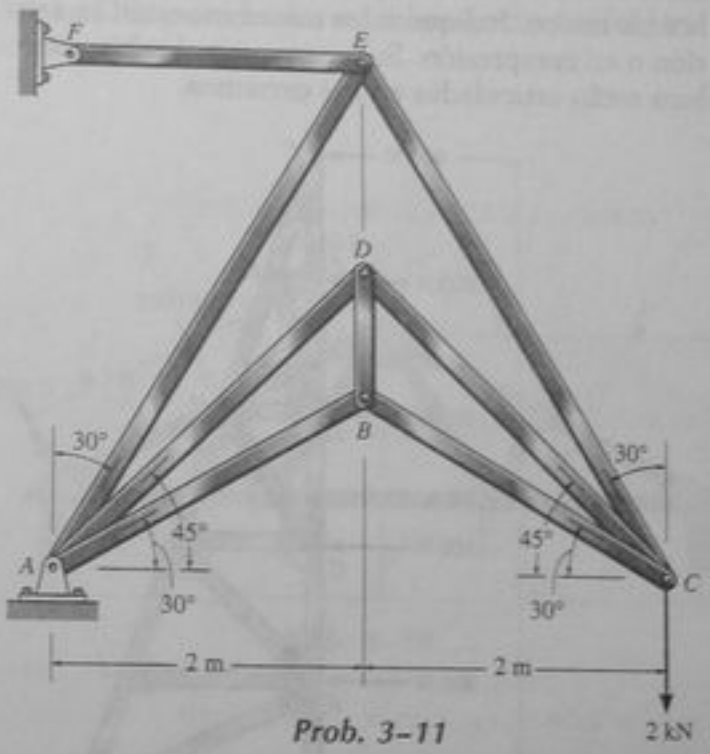
Prob. 3–9

3–10. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura de techo. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



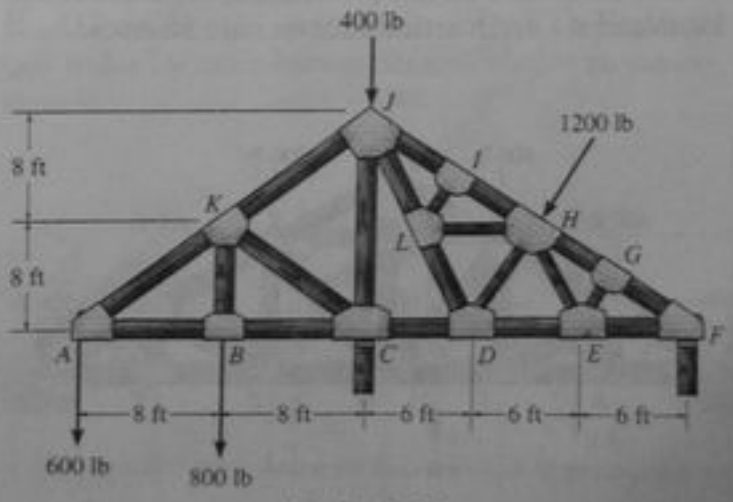
Prob. 3–10

3–11. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



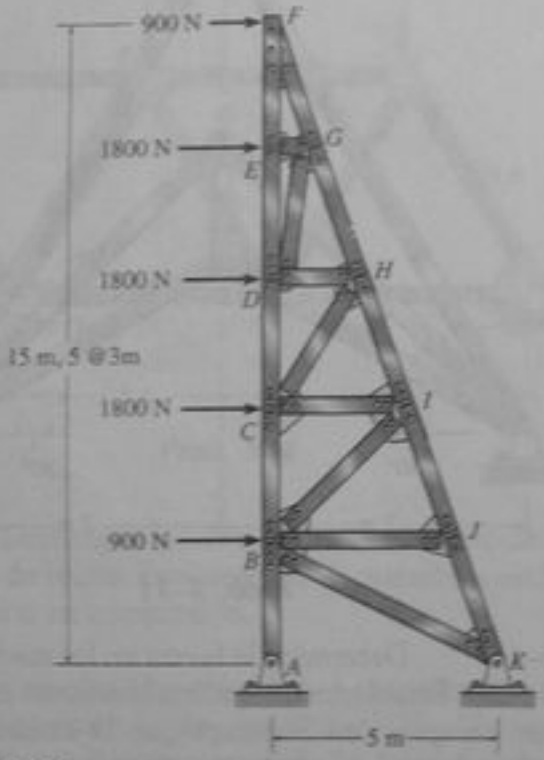
Prob. 3–11

***3–12.** Determine la fuerza en los miembros *KJ*, *JC* y *CD*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que la armadura está articulada en *F*, que tiene un soporte de rodillos en *C* y que los miembros están articulados en sus extremos.



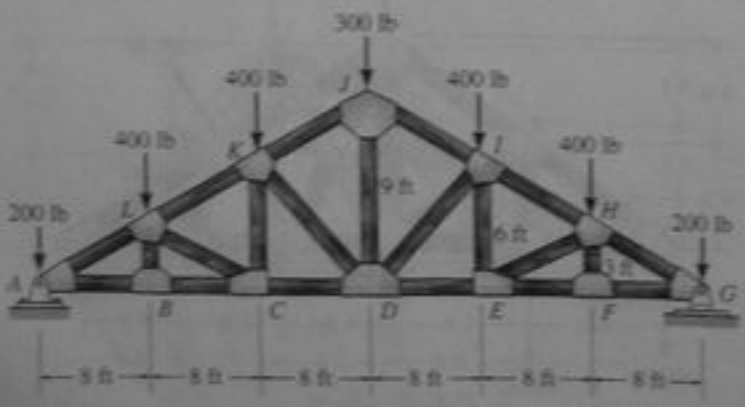
Prob. 3–12

3–13. Determine la fuerza en los miembros *CB*, *BI* e *IJ* de la armadura usada para soportar un letrero exterior. La presión de diseño del viento que actúa sobre la cara del letrero genera la carga mostrada sobre los nudos. Indique si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



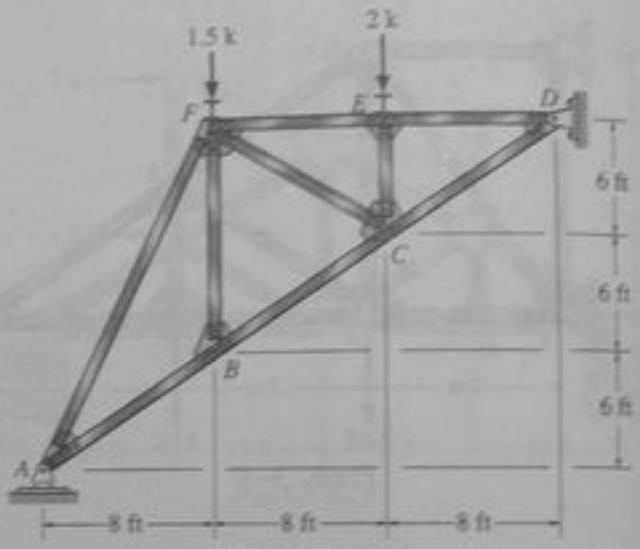
Prob. 3–13

3–14. Determine la fuerza en los miembros *JI*, *DI* y *DE* de la armadura *Pratt*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



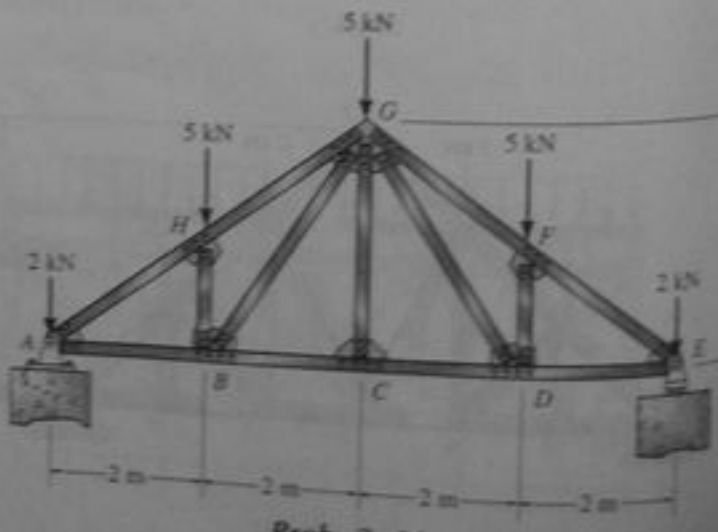
Prob. 3–14

3–15. Determine la fuerza en los miembros *FC*, *BC* y *FE*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



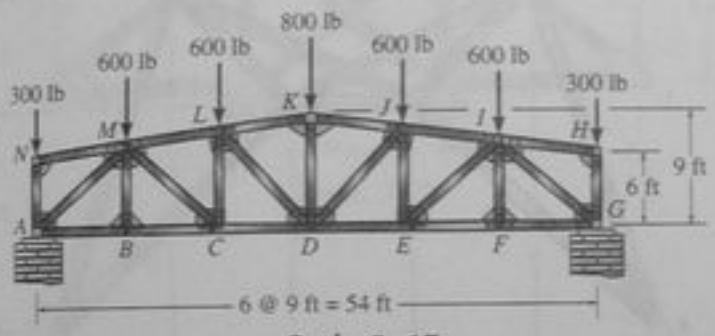
Prob. 3–15

***3–16.** La armadura *Howe* está sometida a las cargas mostradas. Determine las fuerzas en los miembros *GF*, *CD* y *GC*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



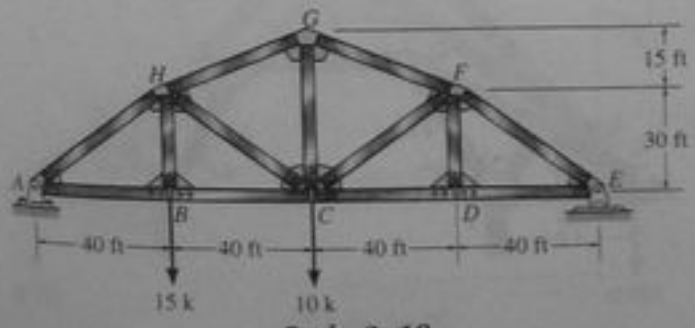
Prob. 3–16

3–17. La armadura *Warren* se usa para soportar el techo de un edificio industrial. La armadura está simplemente apoyada sobre muros de mampostería en *A* y *G* de manera que sólo se tienen reacciones verticales en esos apoyos. Determine la fuerza en los miembros *LD*, *CD* y *KD*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



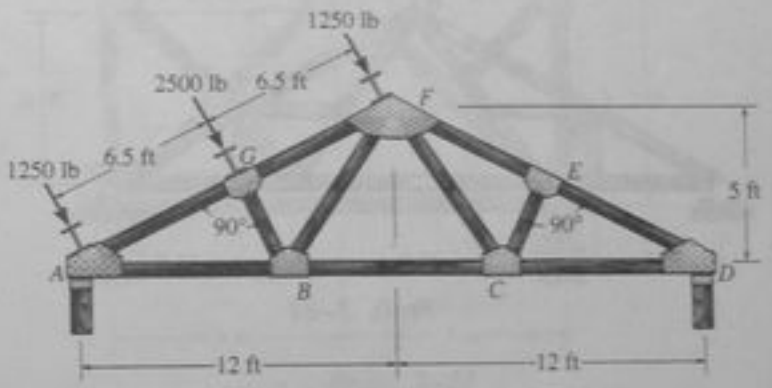
Prob. 3–17

3–18. Determine la fuerza en los miembros *GF*, *FC* y *CD* de la armadura de puente. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



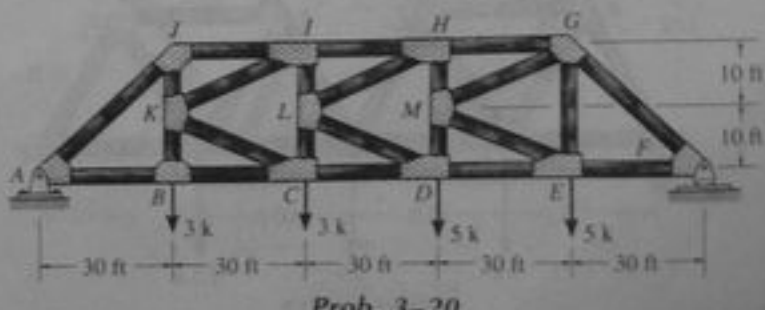
Prob. 3–18

3–19. Determine la fuerza en los miembros *GF*, *GB* y *BC* de la armadura. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que la armadura está articulada en *A*, soportada con rodillos en *D* y que todos los miembros están articulados en sus extremos.



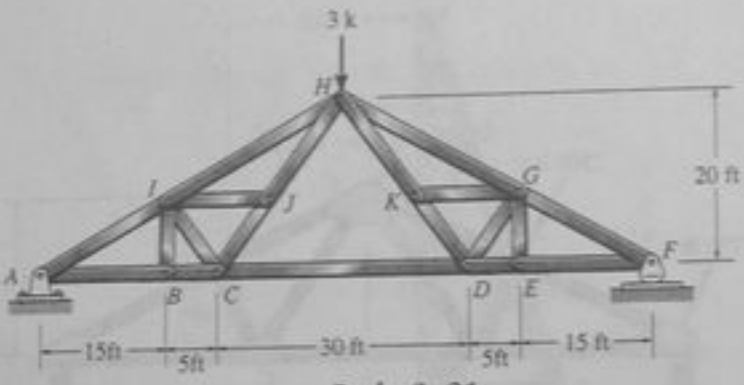
Prob. 3–19

***3–20.** Determine la fuerza en los miembros *IH*, *CD* y *LH* de la armadura K. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* Seccione la armadura a través de los miembros *IH*, *IL*, *LC* y *CD* para determinar *IH* y *CD*. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



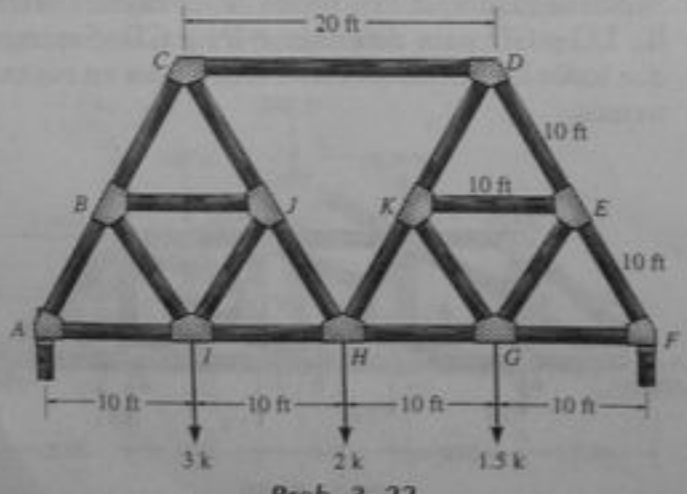
Prob. 3–20

3–21. Especifique el tipo de armadura compuesta y determine la fuerza en los miembros *JH*, *IH* y *CD*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



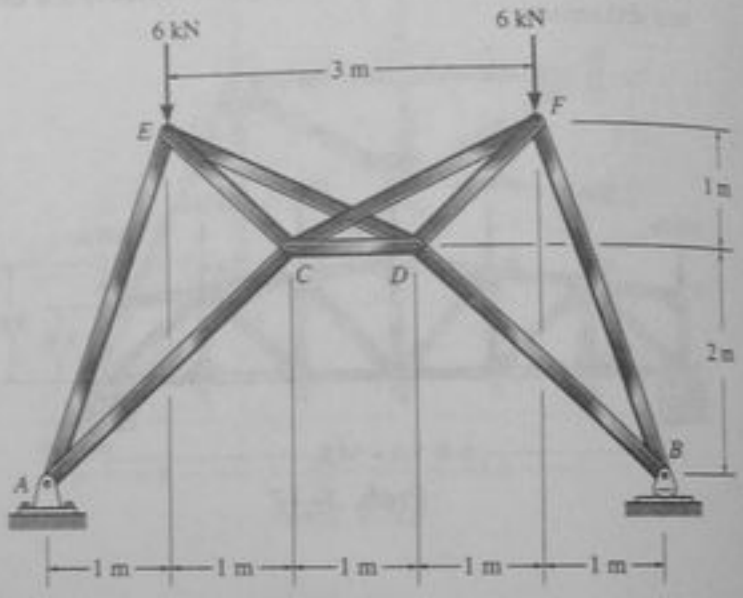
Prob. 3–21

3–22. Especifique el tipo de armadura compuesta y determine la fuerza en los miembros *JH*, *BJ* y *BI*. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. El ángulo interno entre dos miembros cualesquiera es de 60°. La armadura está articulada en A y apoyada sobre rodillos en F. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



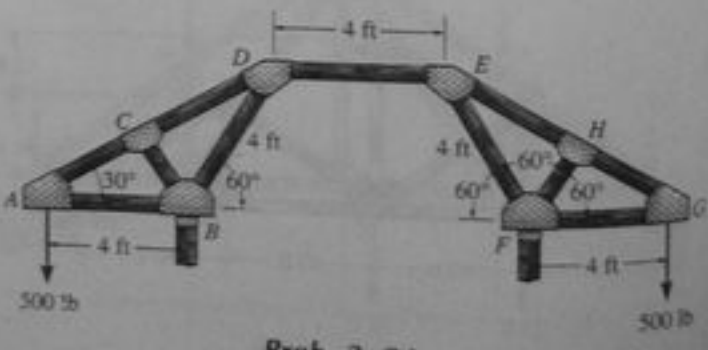
Prob. 3–22

3–23. Especifique el tipo de armadura compuesta. Las armaduras *ACE* y *BDF* están conectadas por las tres barras *CF*, *ED* y *CD*. Determine la fuerza en cada miembro y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



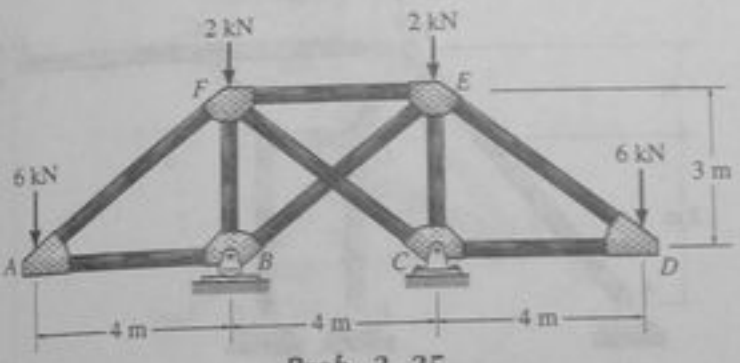
Prob. 3–23

***3–24.** Determine la fuerza en cada miembro. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que los soportes están en *B* y *F* y que todos los miembros están articulados en sus extremos.



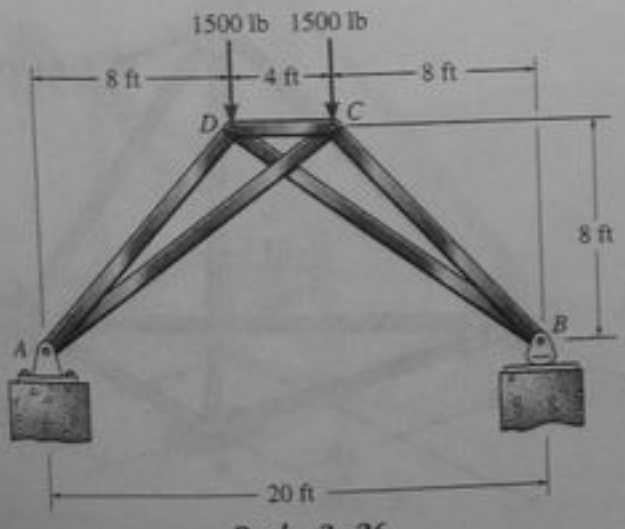
Prob. 3–24

3–25. Especifique el tipo de armadura compuesta y determine la fuerza en cada miembro. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



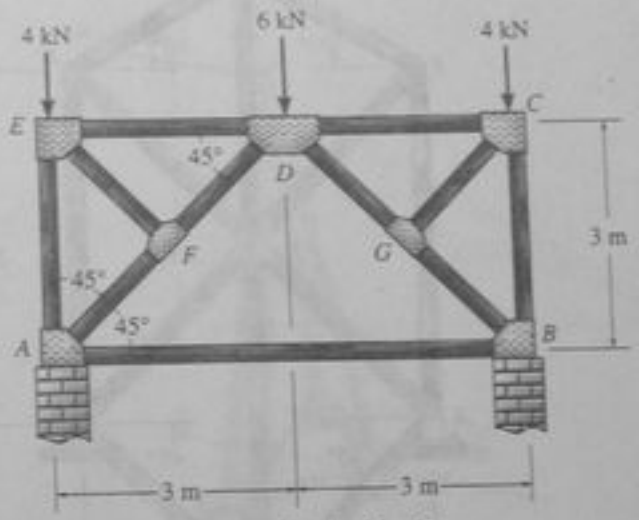
Prob. 3–25

3–26. Determine la fuerza en cada miembro. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



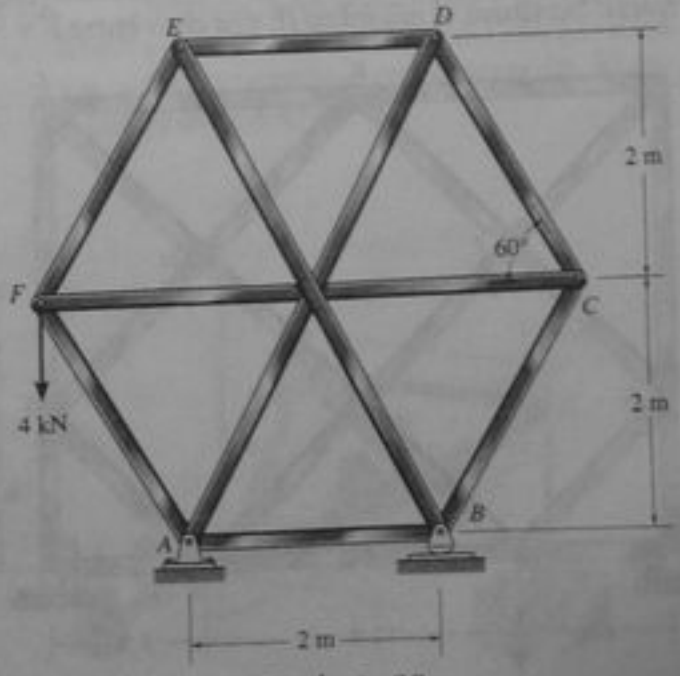
Prob. 3–26

3–27. Especifique el tipo de armadura compuesta y determine la fuerza en cada miembro. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos.



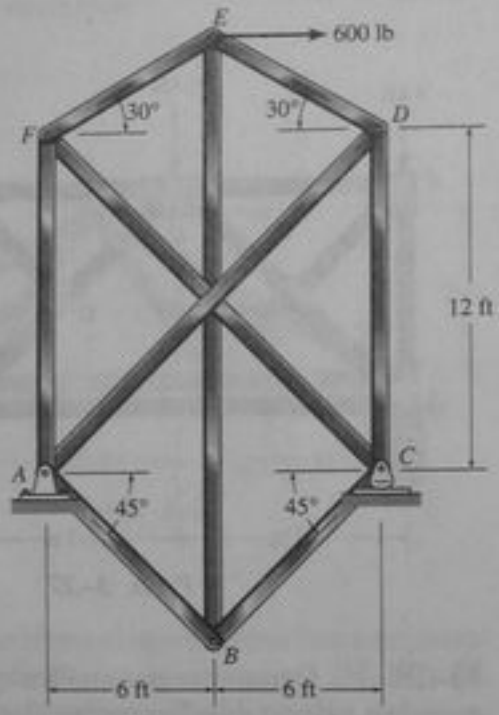
Prob. 3–27

***3–28.** Demuestre por análisis que la armadura compleja es inestable. *Sugerencia:* Sustituya el miembro *EB* por otro entre *D* y B.



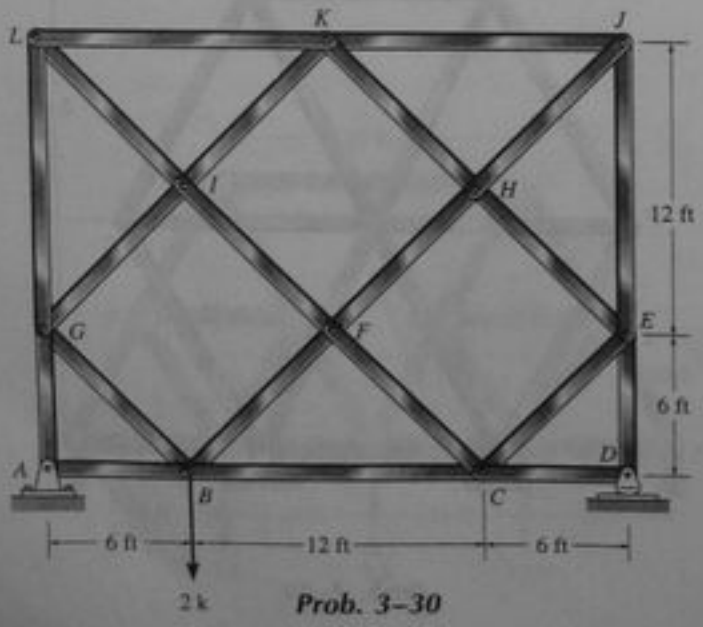
Prob. 3–28

3–29. Determine las fuerzas en todos los miembros de la armadura compleja. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia*: Sustituya el miembro *AD* por otro entre *E* y *C*.



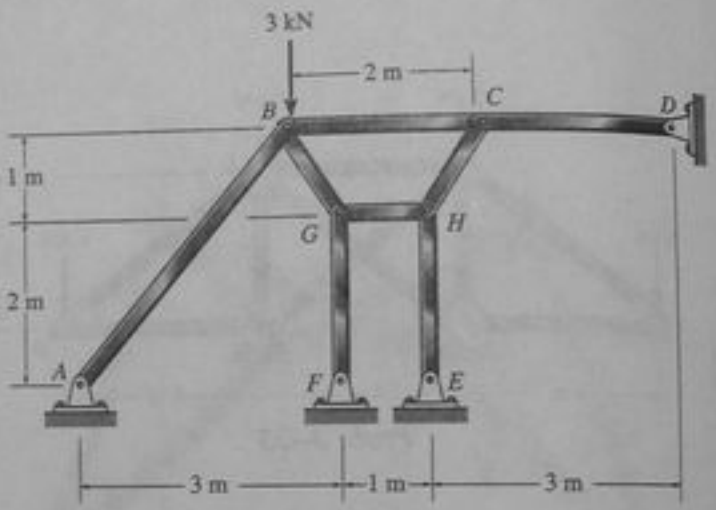
Prob. 3–29

3–30. Determine las fuerzas en todos los miembros de la armadura celosía (compleja). Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia*: Sustituya el miembro *JE* por otro entre *K* y *F*.



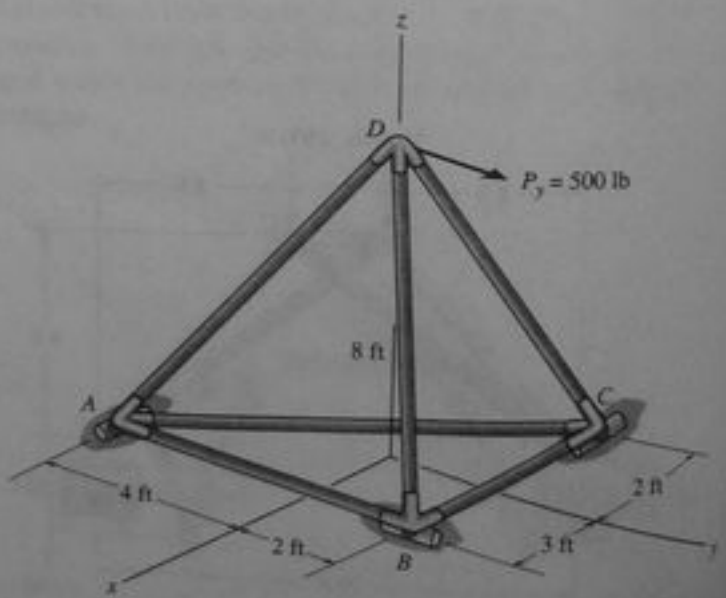
Prob. 3–30

3–31. Determine las fuerzas en todos los miembros de la armadura compleja. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia*: Sustituya el miembro *AB* por otro entre *C* y *E*.



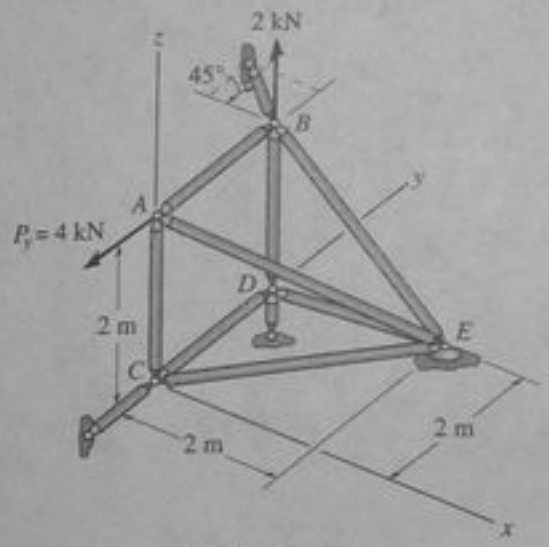
Prob. 3–31

***3–32.** Determine las reacciones y la fuerza en cada miembro de la armadura espacial. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.



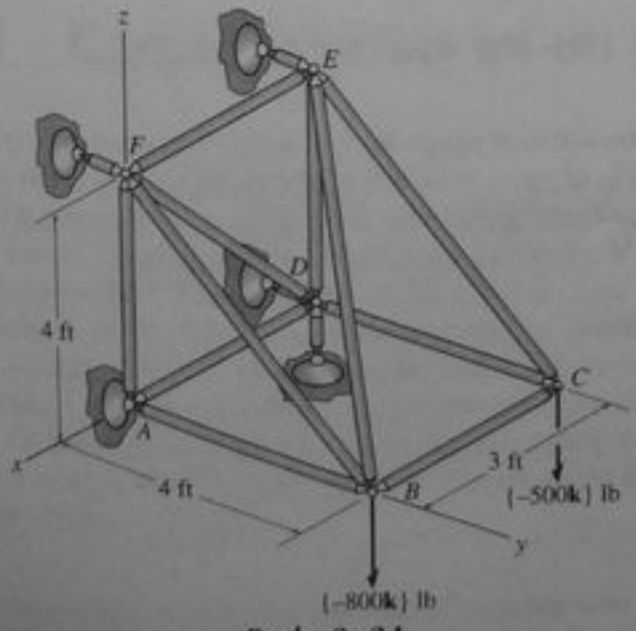
Prob. 3–32

3–33. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.



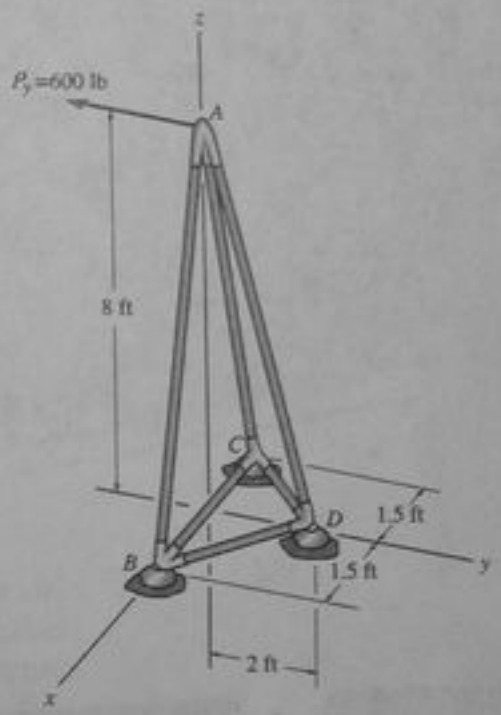
Prob. 3–33

3–34. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.



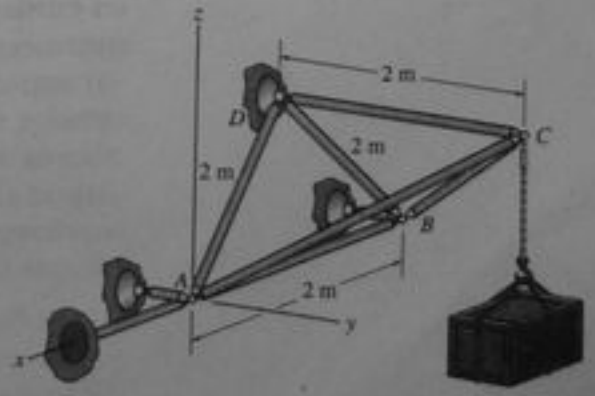
Prob. 3–34

3–35. Determine la fuerza en los miembros *AB*, *AD* y *AC* de la armadura espacial. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.

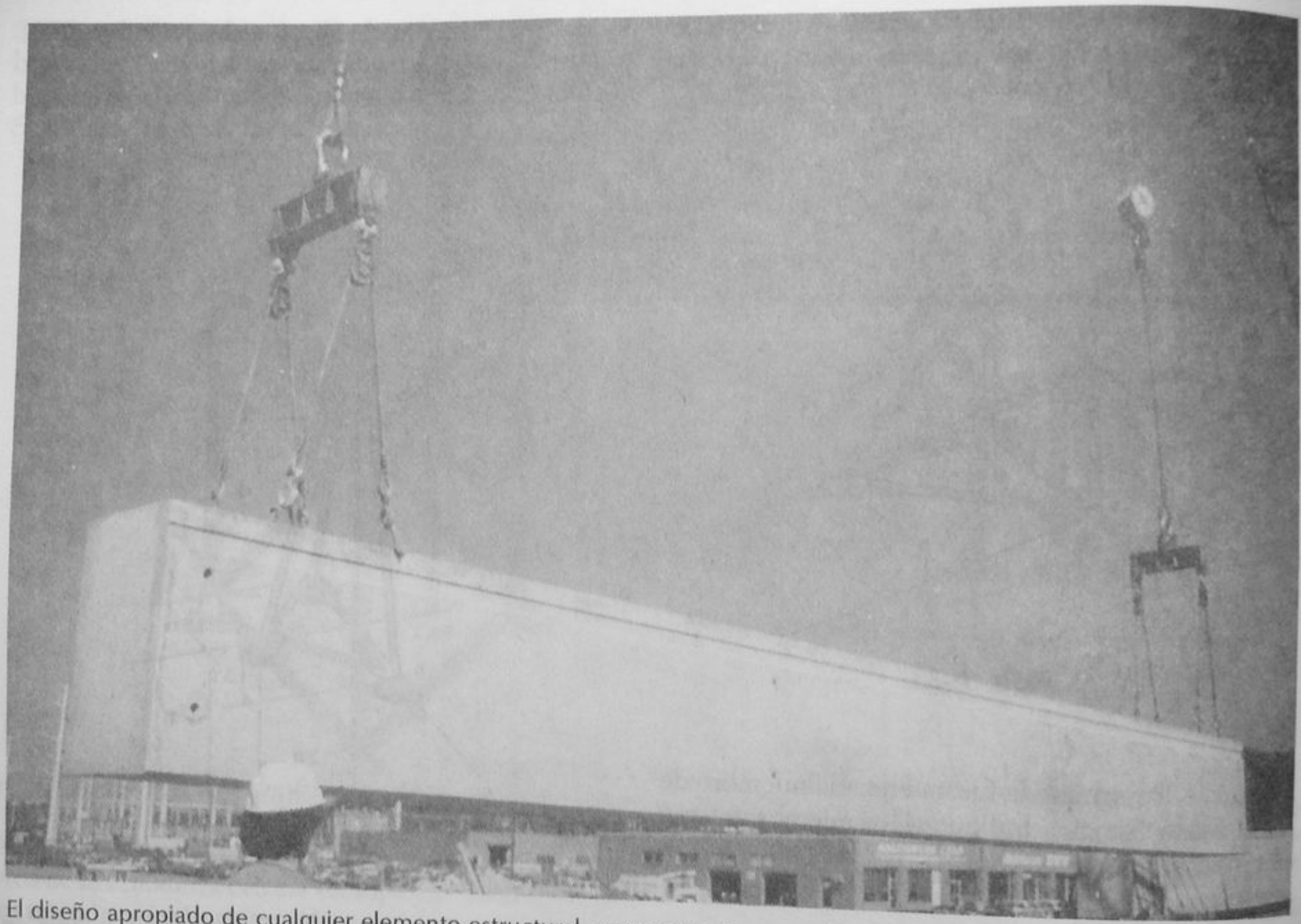


Prob. 3–35

***3–36.** Determine las reacciones y la fuerza en cada miembro de la armadura espacial. Indique si los miembros están en tensión o en compresión. El cajón tiene un peso de 5 kN.



Prob. 3–36



El diseño apropiado de cualquier elemento estructural, como esta viga, requiere la determinación de las cargas internas que actúan en toda su longitud. *(Fotografía por cortesía de la Portland Cement Association.)*

4

Cargas internas desarrolladas en miembros estructurales

Antes de poder dimensionar un miembro estructural, es necesario determinar la fuerza y el momento que actúan en él. En este capítulo desarrollaremos los métodos para encontrar esas cargas en puntos específicos a lo largo del eje de un miembro y mostraremos gráficamente la variación de ellas usando los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. Veremos aplicaciones en vigas y en marcos.

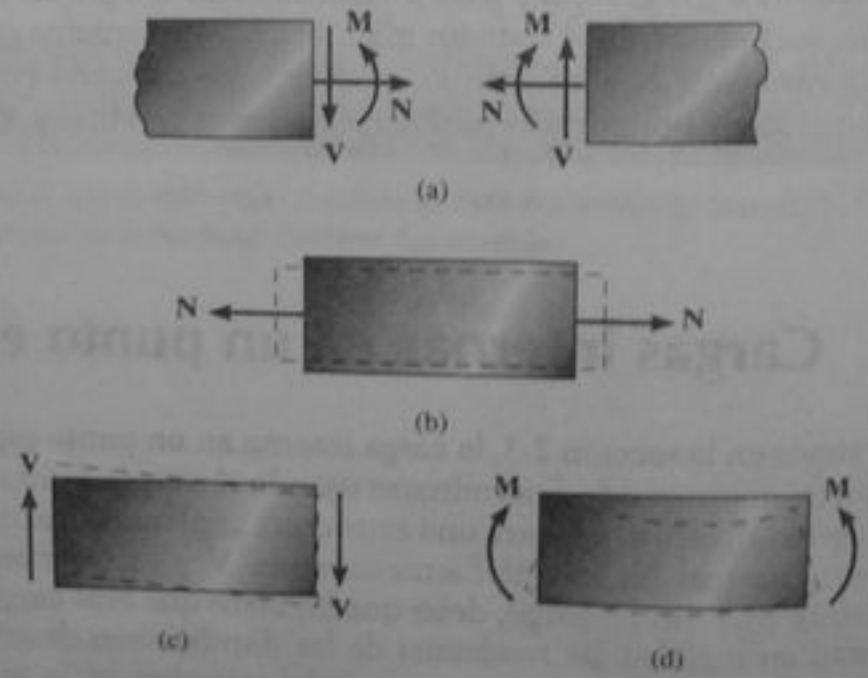
4.1 Cargas internas en un punto específico

Como vimos en la sección 2.3, la carga interna en un punto específico de un miembro puede determinarse usando el *método de las secciones*. En general, esta carga para una estructura coplanar consistirá en una fuerza normal **N**, en una fuerza cortante **V** y en un momento flexionante **M**.* Sin embargo, debe quedar claro que esas cargas representan en realidad las *resultantes* de las *distribuciones de esfuerzo* que actúan sobre la sección transversal del miembro en la sección cortada. Una vez conocidas las fuerzas internas resultantes, la magnitud de los esfuerzos puede determinarse siempre que se especifique una supuesta distribución de los esfuerzos sobre el área de la sección transversal.

* Los marcos tridimensionales también pueden estar sometidos a *momento torsionante*, el cual tiende a torcer el miembro alrededor de su eje longitudinal.

Convención de signos

Antes de presentar un método para encontrar la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos, tenemos que establecer una convención de signos para definir sus valores "positivo" y "negativo".* Aunque la selección es arbitraria, la convención de signos que se adoptará aquí ha sido ampliamente aceptada en la práctica de la ingeniería estructural y se ilustra en la figura 4–1*a*. Sobre la *cara izquierda* del miembro cortado, la fuerza normal N actúa hacia la derecha, la fuerza cortante V actúa hacia abajo y el momento M actúa en sentido contrario a las manecillas del reloj. De acuerdo con la tercera ley de Newton, una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante, iguales pero opuestos, actúan sobre la cara derecha del miembro en la sección. Tal vez una manera fácil de recordar esta convención de signos es aislar un pequeño segmento del miembro y notar que *una fuerza normal positiva tiende a alargar el segmento*, figura 4–1*b*; *una fuerza cortante positiva tiende a girar el segmento en sentido de las manecillas del reloj*, figura 4–1*c*; y *un momento flexionante positivo tiende a flexionar el segmento con una concavidad hacia arriba*, figura 4–1*d*.



convención de signo positivo

Fig. 4–1

* Esto será conveniente después en las secciones 4.2 y 4.3, donde expresaremos V y M como funciones de x y luego *graficaremos* esas funciones. Adoptar una convención de signos es similar a asignar direcciones coordenadas x positivas hacia la derecha y y positivas hacia arriba al trazar una función $y = f(x)$.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio para aplicar el método de las secciones a fin de determinar la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en una posición específica de un miembro estructural.

Reacciones en los soportes Antes de "cortar" o seccionar un miembro, puede ser necesario determinar las reacciones en los soportes de éste, de manera que las ecuaciones de equilibrio se usen sólo para encontrar las cargas internas cuando se secciona el miembro. Si el miembro es parte de una estructura conectada por pasadores, las reacciones en éstos pueden determinarse usando los métodos de la sección 2.5.

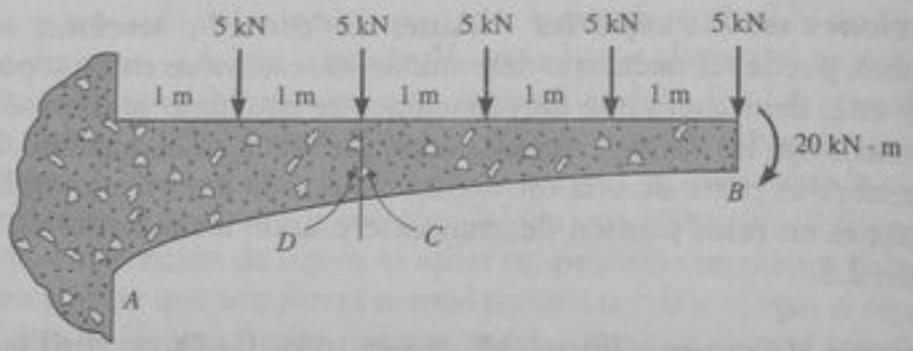
Diagrama de cuerpo libre Mantenga todas las cargas distribuidas, momentos concentrados y fuerzas que actúan sobre el miembro en sus *posiciones exactas*, luego pase una sección imaginaria por el miembro, perpendicular a su eje en el punto en que la carga interna debe determinarse. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos cortados a cada lado de la sección e indique en la sección las resultantes desconocidas **N**, **V** y **M** que actúan en sus direcciones *positivas* (figura 4–1).

Ecuaciones de equilibrio Aplique las tres ecuaciones de equilibrio para obtener las incógnitas **N**, **V** y **M**. En la mayoría de los casos, los momentos deben sumarse en la sección respecto a ejes que pasan por el *centroide* del área de la sección transversal del miembro, para eliminar las incógnitas **N** y **V** y obtener entonces una solución directa para **M**. Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da una cantidad con signo negativo, el sentido supuesto para la cantidad es opuesto al mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

Los siguientes ejemplos ilustran este procedimiento numéricamente.

Ejemplo 4–1

Determine la fuerza cortante y el momento flexionante internos que actúan en la viga en voladizo mostrada en la figura 4–2*a*, primero en una sección por el punto *C* y luego en otra sección por el punto *D*.

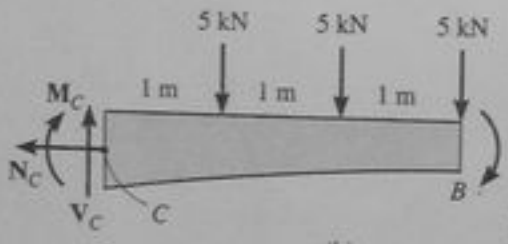


(a)

Fig. 4–2

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Si consideramos un diagrama de cuerpo libre del segmento a la derecha de la sección, las reacciones en el soporte *A* no tienen que calcularse. Esos diagramas para los segmentos *CB* y *DB* se muestran en las figuras 4–2*b* y 4–2*c*. Note que las cargas internas actúan en sus direcciones positivas.



(b)

Ecuaciones de equilibrio

Segmento *CB*, figura 4–2*b*:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C - 5 - 5 - 5 = 0$

$V_C = 15 \text{ kN}$ *Resp.*

$\curvearrowright + \Sigma M_C = 0; \quad M_C + 5(1) + 5(2) + 5(3) + 20 = 0$

$M_C = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Resp.*

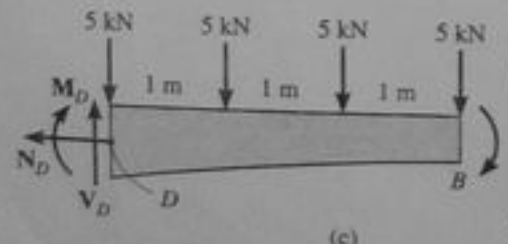
Segmento *DB*, figura 4–2*c*:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_D - 5 - 5 - 5 - 5 = 0$

$V_D = 20 \text{ kN}$ *Resp.*

$\curvearrowright + \Sigma M_D = 0; \quad M_D + 5(1) + 5(2) + 5(3) + 20 = 0$

$M_D = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Resp.*

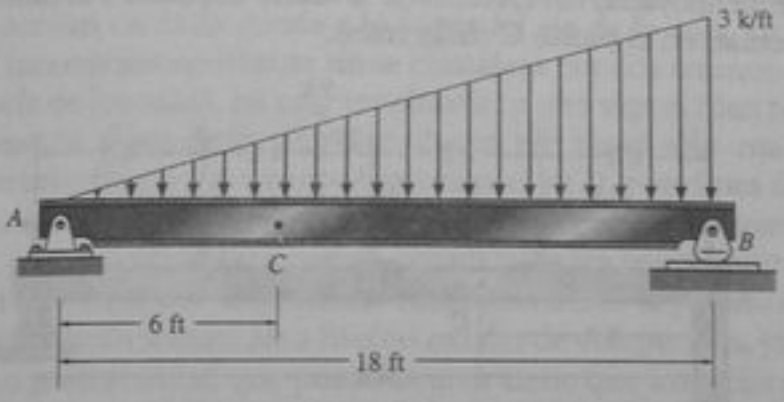


(c)

La fuerza cortante es aquí diferente a cada lado de la fuerza concentrada. Por lo tanto, la fuerza cortante debe definirse en cualquiera de esos puntos adyacentes, *nunca* en un punto directamente abajo de la fuerza concentrada.

Ejemplo 4–2

Determine la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en una sección por el punto C en la viga mostrada en la figura 4–3*a*.

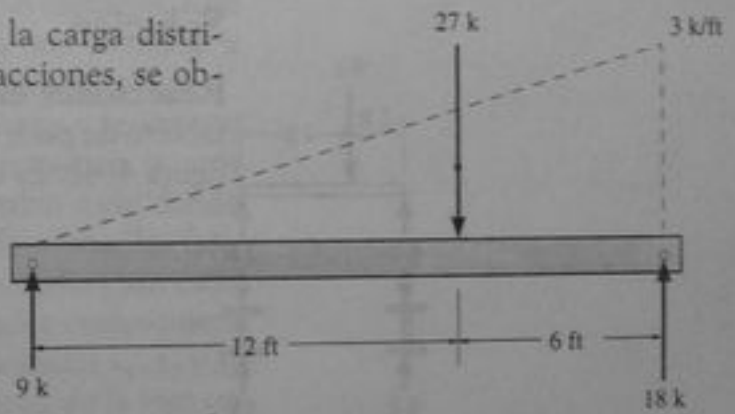


(a)

Fig. 4–3

Solución

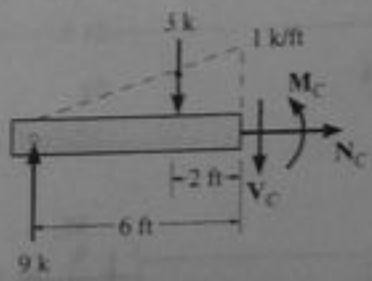
Reacciones en los soportes. Reemplazando la carga distribuida por su fuerza resultante y calculando las reacciones, se obtienen los resultados mostrados en la figura 4–3*b*.



(b)

Diagrama de cuerpo libre. Consideraremos el segmento AC ya que conduce a la solución más simple, figura 4–3*c*. La intensidad de la carga distribuida en C se calcula por proporción, esto es,

$$w_C = (6\text{ ft}/18\text{ ft})(3\text{ k/ft}) = 1\text{ k/ft}$$



(c)

Ecuaciones de equilibrio

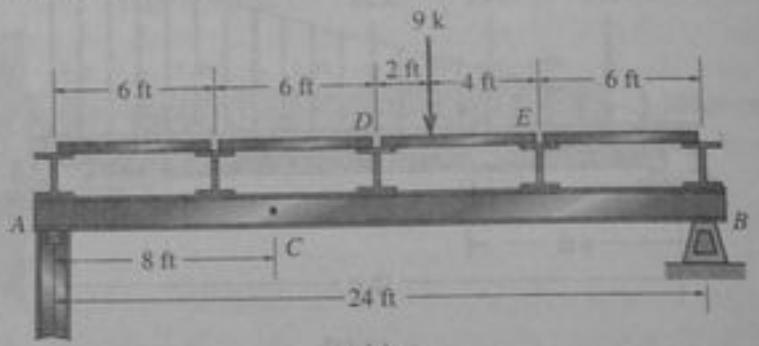
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 9 - 3 - V_C = 0 \qquad V_C = 6\text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad 9(6) - 3(2) - M_C = 0 \qquad M_C = 48\text{ k}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

Este problema ilustra la importancia de *mantener* la carga distribuida sobre la viga hasta *después* de seccionar a ésta. Si la viga en la figura 4–3*b* se seccionase en C, el efecto de la carga distribuida sobre el segmento AC no se manifestaría y el resultado $V_C = 9$ k y $M_C = 54$ k · ft sería erróneo.

Ejemplo 4–3

La fuerza de 9 k en la figura 4–4*a* está soportada por el tablero de piso *DE*, que a su vez está simplemente soportado en sus extremos por vigas de piso. Esas vigas transmiten sus cargas a la trabe simplemente apoyada *AB*. Determine la fuerza cortante y el momento que actúan en el punto C de la trabe.

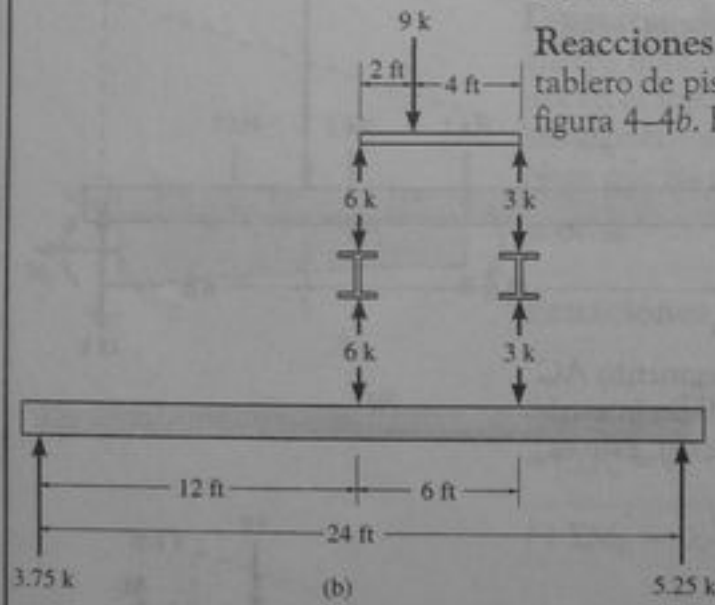


(a)

Fig. 4–4

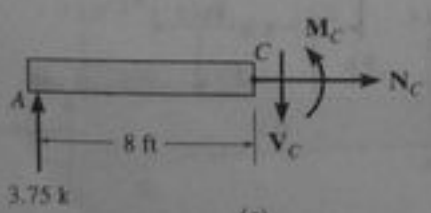
Solución

Reacciones en los soportes. La condición de equilibrio del tablero de piso, de las vigas de piso y de la trabe se muestran en la figura 4–4*b*. Es aconsejable revisar esos resultados.



(b)

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del segmento AC de la trabe será el que usemos ya que es el que conduce a la solución más simple, figura 4–4*c*. Note que *no hay cargas* sobre las vigas de piso soportadas por AC.



(c)

Ecuaciones de equilibrio

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad 3.75 - V_C = 0$ $\quad V_C = 3.75\ \text{k}$ *Resp.*

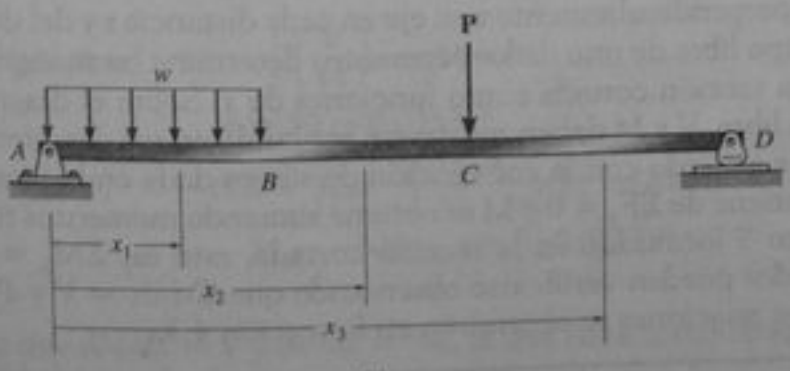
$\curvearrowleft + \Sigma M_C = 0;$ $\quad 3.75(8) - M_C = 0$ $\quad M_C = 30.0\ \text{k} \cdot \text{ft}$ *Resp.*

4.2 Funciones de fuerza cortante y momento flexionante

Las *vigas* son miembros estructurales diseñados para soportar cargas laterales, esto es, cargas aplicadas perpendicularmente a sus ejes. El diseño de tales miembros requiere un conocimiento detallado de las *variaciones* de la fuerza cortante interna V y del momento flexionante M que actúan en cada punto a lo largo del eje de la viga. La fuerza normal interna generalmente no se considera por dos razones: (1) en la mayoría de los casos, las cargas aplicadas a una viga actúan perpendicularmente al eje de la viga y producen por tanto sólo una fuerza cortante interna y un momento flexionante; y (2), para fines de diseño la resistencia de la viga a la fuerza cortante y particularmente a la flexión, es más importante que su capacidad para resistir fuerza normal. Sin embargo, una importante excepción a esto se presenta cuando las vigas están sometidas a fuerzas axiales de compresión, ya que el pandeo o inestabilidad que puede ocurrir tiene que investigarse.

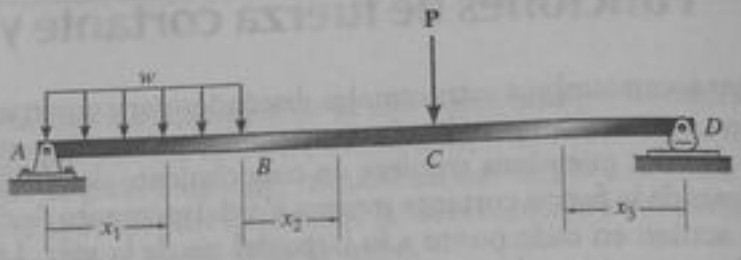
Las variaciones de V y M, como función de la posición x de un punto arbitrario a lo largo del eje de la viga, pueden obtenerse usando el método de las secciones analizado en la sección 4.1. Sin embargo, aquí es necesario localizar la sección imaginaria o corte a una distancia x arbitraria desde un extremo de la viga y no en un punto específico.

En general, las funciones internas de fuerza cortante y momento serán discontinuas, o sus pendientes serán discontinuas, en puntos en que el tipo o magnitud de la carga distribuida cambia o ahí donde fuerzas o momentos concentrados se aplican. Debido a esto, las funciones de fuerza cortante y momento deben determinarse para cada región de la viga localizada entre dos discontinuidades cualesquiera de carga. Por ejemplo, tendrán que usarse las coordenadas x_1, x_2 y x_3 para describir la variación de V y M en toda la longitud de la viga en la figura 4–5*a*. Esas coordenadas serán válidas sólo dentro de la región de A a B para x_1, de B a C para x_2 y de C a D para x_3. Aunque cada una de esas coordenadas tiene el mismo origen, como es el caso aquí, no necesariamente tiene que ser siempre así.



(a)

Fig. 4–5



(b)

De hecho, puede ser más fácil plantear las funciones de fuerza cortante y momento usando las coordenadas x_1, x_2 y x_3 con orígenes en A, B y D, como se muestra en la figura 4–5*b*. Aquí x_1 y x_2 son positivas hacia la derecha y x_3 es positiva hacia la izquierda.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para determinar las variaciones de la fuerza cortante y del momento flexionante en una viga en función de la posición x.

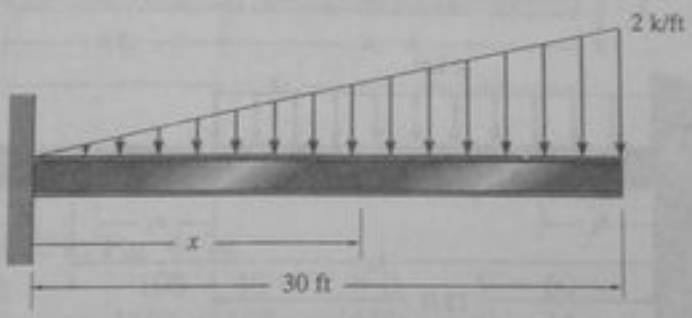
Reacciones en los soportes Determine las reacciones de los soportes sobre la viga y resuelva todas las fuerzas externas en componentes que actúen paralela y perpendicularmente al eje de la viga.

Funciones fuerza cortante y momento flexionante Especifique coordenadas x separadas y orígenes asociados que se extiendan hacia las regiones de la viga entre fuerzas y/o momentos concentrados o donde se tenga una discontinuidad de la carga distribuida. Seccione la viga perpendicularmente a su eje en cada distancia x y del diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos determine las incógnitas V y M en la sección cortada como funciones de x. Sobre el diagrama de cuerpo libre, V y M deben mostrarse actuando en sus *direcciones positivas*, de acuerdo con la convención de signos dada en la figura 4–1. V se obtiene de $\Sigma F_y = 0$ y M se obtiene sumando momentos respecto al punto S localizado en la sección cortada, esto es, $\Sigma M_S = 0$. Los resultados pueden verificarse observando que $dM/dx = V$ y $dV/dx = w$. Estas relaciones se obtendrán en la sección 4.3.

Los siguientes ejemplos ilustran este procedimiento numéricamente.

Ejemplo 4–4

Determine la fuerza cortante y el momento en la viga de la figura 4–6*a* como funciones de *x*.

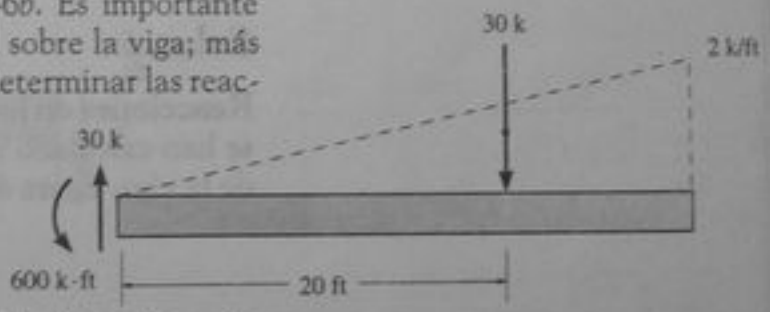


(a)

Fig. 4–6

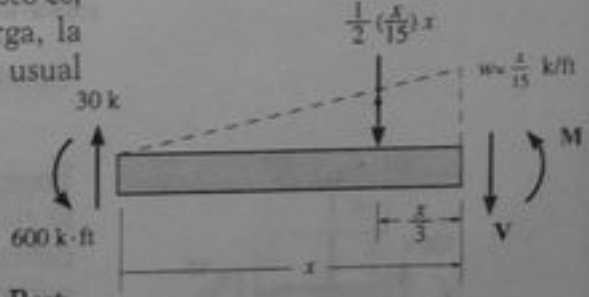
Solución

Reacciones en los soportes. La carga distribuida se reemplaza por su fuerza resultante de 30 k, figura 4–6*b*. Es importante recordar que esta resultante no es la carga real sobre la viga; más bien proporciona una manera conveniente de determinar las reacciones en los soportes, como se muestra.



(b)

Funciones de fuerza cortante y momento flexionante. En la figura 4–6*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga de longitud *x*. Note que la intensidad de la carga triangular en la sección se encuentra por triángulos semejantes; esto es, $w/x = 2/30$ o $w = x/15$. Conocida la intensidad de la carga, la resultante de la carga distribuida se encuentra de la manera usual como se muestra en la figura. Así, entonces,



(c)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 30 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{15}\right)x - V = 0$$

$$V = 30 - 0.0333x^2 \qquad \textit{Resp.}$$

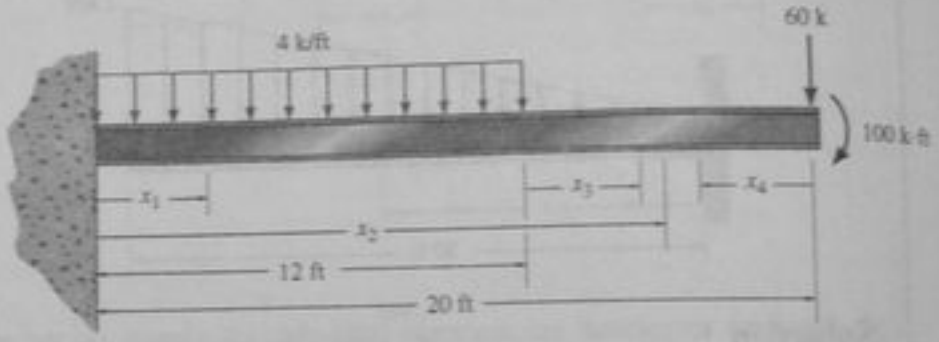
$$\curvearrowleft +\Sigma M_S = 0; \qquad -600 + 30x - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{15}\right)x\right]\frac{x}{3} - M = 0$$

$$M = -600 + 30x - 0.0111x^3 \qquad \textit{Resp.}$$

Note que $dM/dx = V$ y $dV/dx = -w$, lo que sirve como comprobación de los resultados.

Ejemplo 4–5

Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga de la figura 4–7*a*, en función de x_1, x_2, x_3 y x_4.

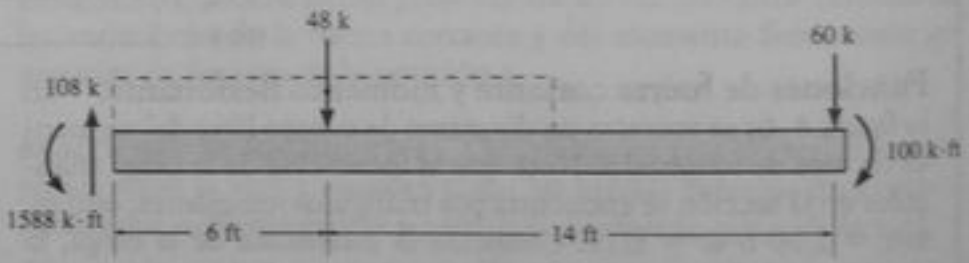


(a)

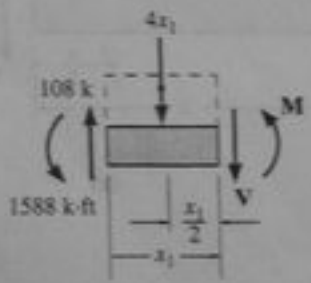
Fig. 4–7

Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones en el empotramiento se han calculado y se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 4–7*b*.



(b)



(c)

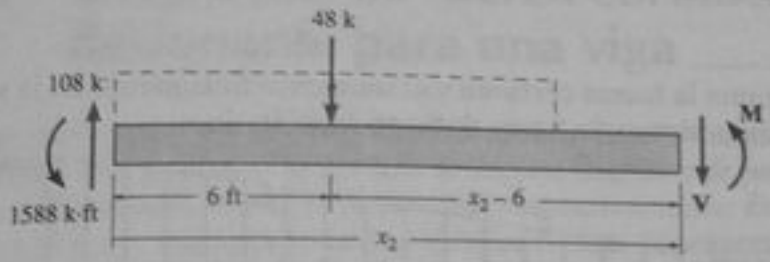
Funciones de fuerza cortante y momento flexionante. Como se tiene una discontinuidad de la carga distribuida en $x = 12$ ft, deben considerarse dos regiones de x para describir las funciones cortante y momento para la viga entera. Respecto a esto, x_1 es apropiada para los 12 ft izquierdos y x_2, x_3 o x_4 pueden usarse para el segmento restante.

$0 \le x_1 \le 12$ ft, Fig. 4–7*c*.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 108 - 4x_1 - V = 0, \quad V = 108 - 4x_1 \quad \textit{Resp.}$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_S = 0; \quad -1588 + 108x_1 - 4x_1\left(\frac{x_1}{2}\right) - M = 0$$

$$M = -1588 + 108x_1 - 2x_1^2 \quad \textit{Resp.}$$



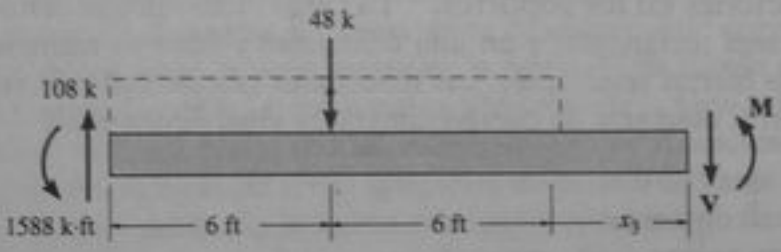
(d)

$12 \text{ ft} \le x_2 \le 20 \text{ ft}$, Fig. 4–7*d*.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 108 - 48 - V = 0, \quad V = 60$ *Resp.*

$\zeta + \Sigma M_S = 0; \quad -1588 + 108x_2 - 48(x_2 - 6) - M = 0$

$M = 60x_2 - 1300$ *Resp.*



(e)

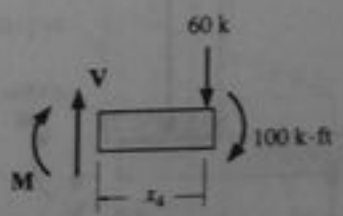
$0 \le x_3 \le 8$ ft, figura 4–7*e*. Demuestre que

$$V = 60 \quad \textit{Resp.}$$

$$M = -1588 + 108(12 + x_3) - 48(6 + x_3)$$

$$M = 60x_3 - 580 \quad \textit{Resp.}$$

$0 \le x_4 \le 8$ ft. Observe las direcciones positivas correctas para **V** y **M** en la figura 4–7*f*. Demuestre que



(f)

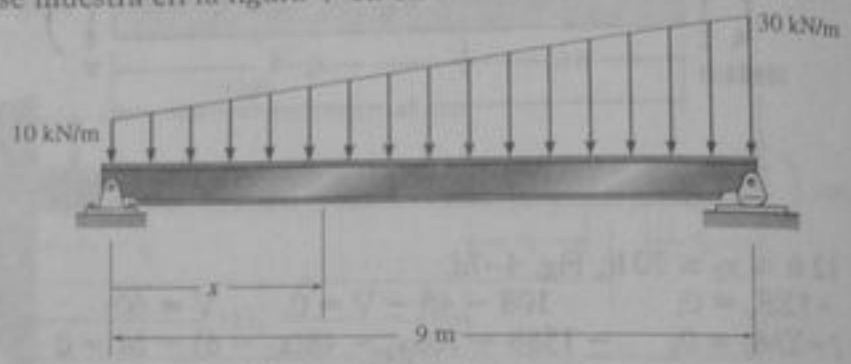
$$V = 60 \quad \textit{Resp.}$$

$$M = -60x_4 - 100 \quad \textit{Resp.}$$

Los resultados anteriores pueden verificarse parcialmente observando que cuando $x_2 = 15$ ft, $x_3 = 3$ ft o $x_4 = 5$ ft, entonces, $V = 60$ y $M = -400$. Note también que $dM/dx = V$ y $dV/dx = -w$ en todos los casos.

Ejemplo 4–6

Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga que se muestra en la figura 4–8*a* en función de *x*.

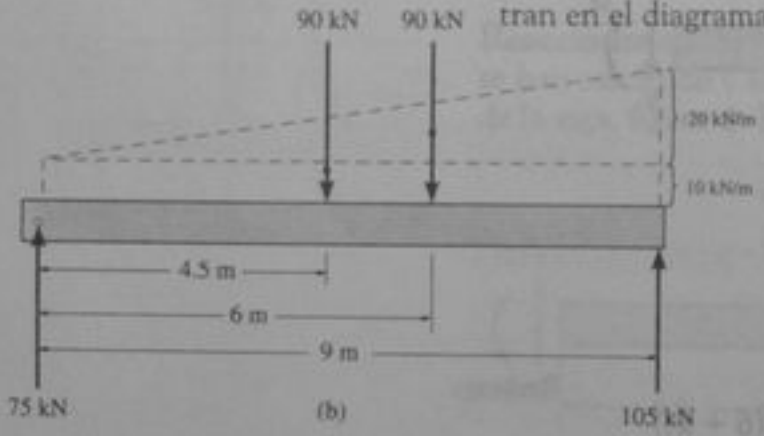


(a)

Fig. 4–8

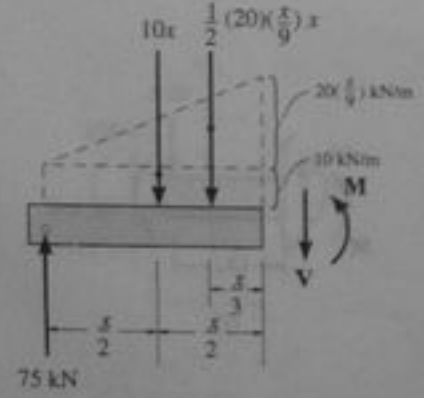
Solución

Reacciones en los soportes. La carga distribuida se divide en una carga rectangular y en una triangular y éstas se reemplazan por sus fuerzas resultantes. Las reacciones ya calculadas se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 4–8*b*.



(b)

Funciones de fuerza cortante y momento flexionante. En la figura 4–8*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. Igual que arriba, la carga trapezoidal se reemplaza por distribuciones rectangulares y triangulares. Note que la intensidad de la carga triangular en el corte se encuentra por proporción. Se calculan la fuerza resultante de cada carga distribuida y su posición. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, obtenemos



(c)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 75 - 10x - \left[\frac{1}{2}(20)\left(\frac{x}{9}\right)x\right] - V = 0$$

$$V = 75 - 10x - 1.11x^2 \qquad \textit{Resp.}$$

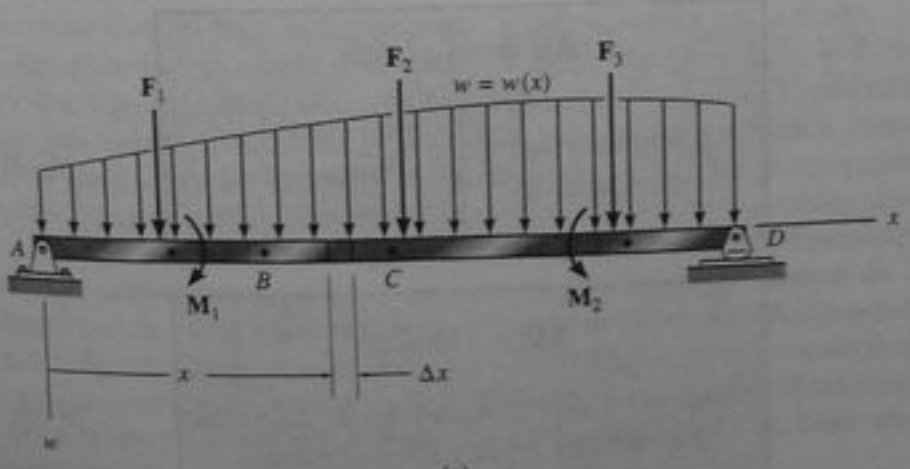
$$\curvearrowright +\Sigma M_S = 0; \quad 75x - (10x)\left(\frac{x}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}(20)\left(\frac{x}{9}\right)x\right]\frac{x}{3} - M = 0$$

$$M = 75x - 5x^2 - 0.370x^3 \qquad \textit{Resp.}$$

4.3 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga

Si las variaciones de V y M como funciones de x obtenidas en la sección 4.2 se grafican, las gráficas se llaman *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flexionante*, respectivamente. En los casos en que una viga está sometida a varias fuerzas concentradas, pares de fuerzas y cargas distribuidas, la graficación de V y M versus x puede resultar bastante tediosa, ya que deben graficarse varias funciones. En esta sección se verá un método más simple para construir esos diagramas, el cual se basa en las relaciones diferenciales que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante.

Para obtener esas relaciones consideremos la viga AD de la figura 4–9*a*, sometida a una carga distribuida arbitraria $w = w(x)$ y a una serie de fuerzas y momentos concentrados. En el siguiente análisis, *la carga distribuida se considerará positiva cuando actúe hacia abajo*, como se muestra. El diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de la viga de longitud Δx se muestra en la figura 4–9*b*. Como este segmento se ha escogido en un punto x a lo largo de la viga que *no* está sometido ni a una fuerza ni a un momento concentrados, los resultados que se obtengan no serán aplicables en puntos de carga concentrada. Se supondrá que la fuerza cortante y el momento flexionante internos mostrados en el diagrama de cuerpo libre actúan en la *dirección positiva* de acuerdo con la convención de signos preestablecida, figura 4–1. Note que tanto la fuerza cortante como el momento flexionante que actúan sobre la cara derecha, deben incrementarse una pequeña cantidad finita para mantener el segmento en equilibrio. La carga distribuida se ha reemplazado por una fuerza concentrada $w(x)\Delta x$ que actúa a una distancia fraccional $\epsilon(\Delta x)$ del extremo derecho, donde $0 < \epsilon < 1$. [Por ejemplo, si $w(x)$ es uniforme o cons-



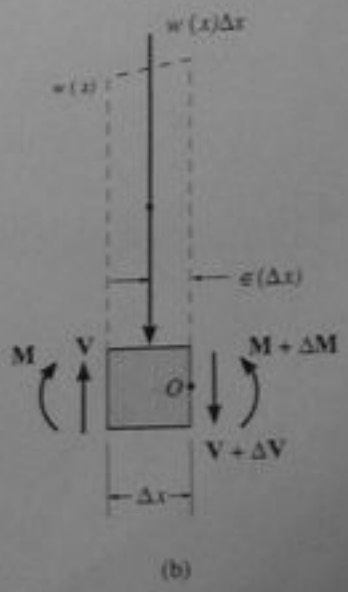
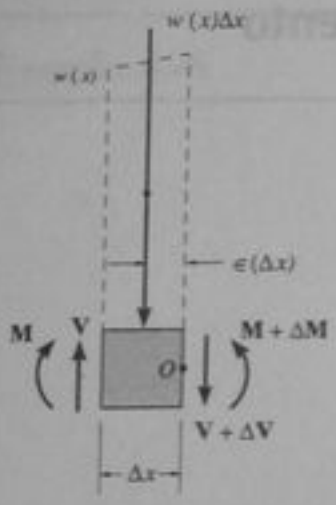


Fig. 4–9



(b)

tante, entonces $w(x)\Delta x$ actuará en $\frac{1}{2}\Delta x$, por lo que $\epsilon = \frac{1}{2}$.] Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V - w(x)\,\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$
$$\Delta V = -w(x)\,\Delta x$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0; \qquad -V\,\Delta x - M + w(x)\,\Delta x \epsilon(\Delta x) + (M + \Delta M) = 0$$
$$\Delta M = V\,\Delta x - w(x)\,\epsilon(\Delta x)^2$$

Dividiendo entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene de las expresiones anteriores,

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Pendiente del diagrama}\\ \text{de fuerza cortante}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}-\text{Intensidad de la}\\ \text{carga distribuida}\end{matrix}\right. \tag{4–1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Pendiente del diagrama}\\ \text{de momento}\end{matrix}\right\} = \{\text{Fuerza cortante} \tag{4–2}$$

Como se indica, la ecuación 4–1 establece que la pendiente del diagrama de fuerza cortante en un punto (dV/dx) es igual a la intensidad (negativa) de la carga distribuida w(x) en el punto. De la misma manera, la ecuación 4–2 establece que la pendiente del diagrama de momento flexionante (dM/dx) es igual a la intensidad de la fuerza cortante en el punto.

Las ecuaciones 4–1 y 4–2 pueden "integrarse" de un punto a otro entre fuerzas o pares concentrados (como de *B* a *C* en la figura 4–9*a*), en cuyo caso

$$\Delta V = -\int w(x)\,dx$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Cambio en la}\\ \text{fuerza cortante}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}-\text{Área bajo el}\\ \text{diagrama de carga}\\ \text{distribuida}\end{matrix}\right. \tag{4–3}$$

y

$$\Delta M = \int V(x)\,dx$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Cambio en el}\\ \text{momento}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Área bajo el diagrama}\\ \text{de fuerza cortante}\end{matrix}\right. \tag{4–4}$$

Como se indica, la ecuación 4–3 establece que el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera sobre una viga es igual al área (negativa) bajo el diagrama de la carga distribuida comprendida entre los puntos. De la misma manera, la ecuación 4–4 establece que el cambio en el momento flexionante entre los dos puntos es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante comprendida entre los puntos. Si las áreas bajo los diagramas de carga y fuerza cortante son fáciles de calcular, las ecuaciones 4–3 y 4–4 proporcionan un método para determinar los valores numéricos de la fuerza cortante y del momento flexionante en varios puntos a lo largo de una viga.

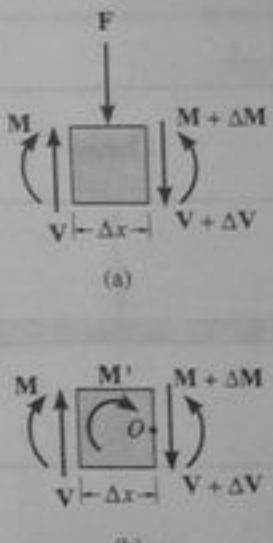


Fig. 4–10

De la derivación anterior debe recordarse que las ecuaciones 4–1 y 4–3 no pueden usarse en puntos donde actúa una fuerza concentrada, ya que esas ecuaciones no toman en cuenta el cambio repentino de la fuerza cortante en esos puntos. De modo similar, debido a una discontinuidad en el momento flexionante, las ecuaciones 4–2 y 4–4 no pueden usarse en puntos donde está aplicado un par concentrado. Para tomar en cuenta estos dos casos, debemos considerar los diagramas de cuerpo libre de elementos diferenciales de la viga en la figura 4–9*a*, que estén localizados en donde actúe una fuerza concentrada y un par concentrado, respectivamente. Ejemplos de esos elementos se muestran en las figuras 4–10*a* y 4–10*b*, respectivamente. En la figura 4–10*a* se ve que el equilibrio de fuerzas requiere que el cambio en fuerza cortante sea

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \Delta V = -F \tag{4–5}$$

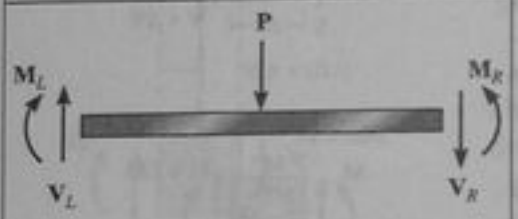
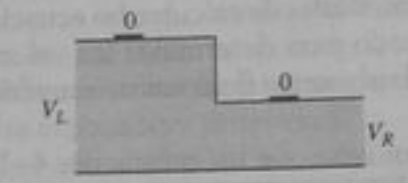
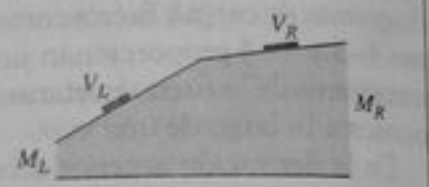
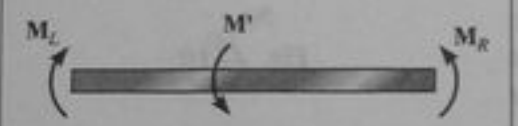
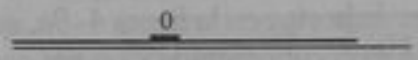
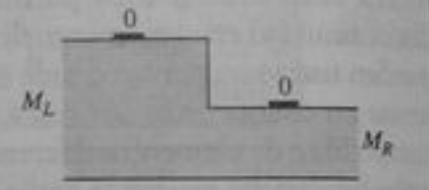
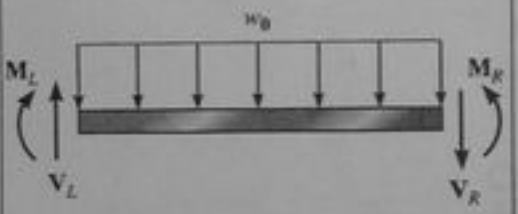
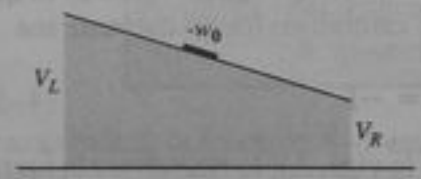
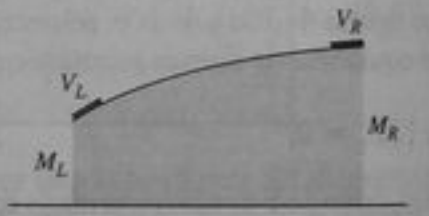
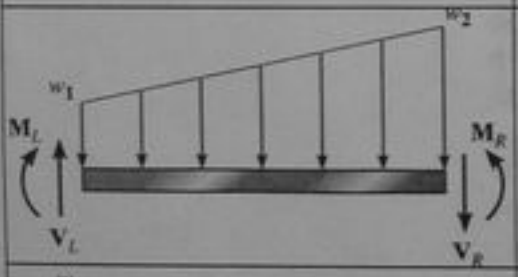
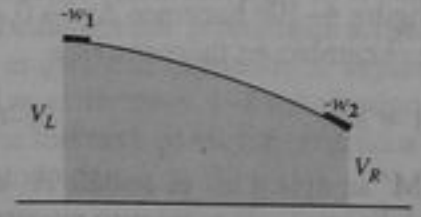
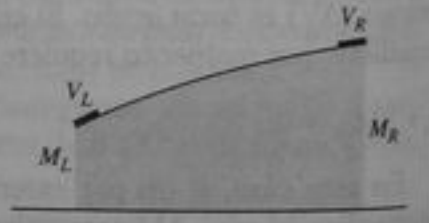
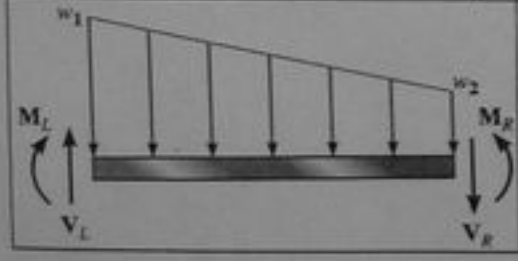
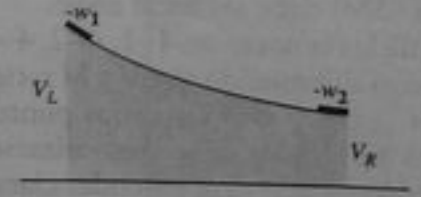
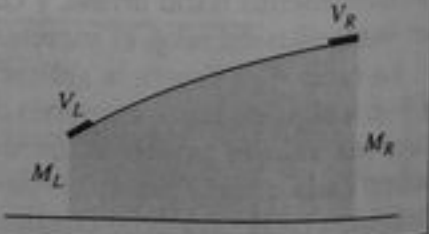
Así, cuando **F** actúa *hacia abajo* sobre la viga, ΔV es negativo y la fuerza cortante "brinca" *hacia abajo*. Igualmente, si **F** actúa *hacia arriba*, el brinco (ΔV) es *hacia arriba*. Si en la figura 4–10*b* hacemos $\Delta x \to 0$, el equilibrio por momento requiere que el cambio en momento sea

$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0; \qquad \Delta M = M' \tag{4–6}$$

En este caso, si un par externo **M′** se aplica en el *sentido de las manecillas del reloj*, ΔM es positivo y el diagrama de momento muestra un incremento *hacia arriba*, y cuando **M** actúa en *sentido contrario a las manecillas del reloj*, el incremento (ΔM) debe ser *hacia abajo*.

La tabla 4–1 ilustra la aplicación de las ecuaciones 4–1, 4–2, 4–5 y 4–6 a algunos casos comunes de carga suponiendo que V y M retienen sus valores positivos. Se indica la pendiente en varios puntos sobre cada curva. Ninguno de estos resultados debe memorizarse; más bien cada uno debe estudiarse con cuidado para entender claramente cómo los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante pueden construirse con base en la variación de la pendiente de los diagramas de carga y fuerza cortante, respectivamente. Valdría la pena que el lector comprobara si ha entendido estos conceptos cubriendo las columnas de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la tabla y tratase de reconstruir esos diagramas con base en el conocimiento de la carga.

Tabla 4 –1

Carga	Diagrama de fuerza cortante, $\frac{dV}{dx} = -w$	Diagrama de momento flexionante, $\frac{dM}{dx} = V$
		
		
		
		
		

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga usando las ecuaciones 4–1 a la 4–6.

Reacciones en los soportes Determine las reacciones en los soportes y resuelva las fuerzas que actúan sobre la viga en componentes paralelas y perpendiculares al eje de la viga.

Diagrama de fuerza cortante Establezca los ejes V y x y trace los valores de la fuerza cortante en los dos extremos de la viga. Como $dV/dx = -w$, la *pendiente* del *diagrama de fuerza cortante* en cualquier punto es igual a la intensidad (negativa) de la *carga distribuida* en el punto. (Note que w es positiva cuando actúa hacia abajo.) Si va a determinarse un valor numérico de la fuerza cortante en el punto, puede encontrarse este valor usando el método de las secciones como se vio en la sección 4.1 o usando la ecuación 4–3 que establece que el *cambio en la fuerza cortante* es igual al *área (negativa) bajo el diagrama de carga distribuida*. Como $w(x)$ se *integra* para obtener V, si $w(x)$ es una curva de grado n, entonces $V(x)$ será una curva de grado $n + 1$. Por ejemplo, si $w(x)$ es uniforme, $V(x)$ será lineal.

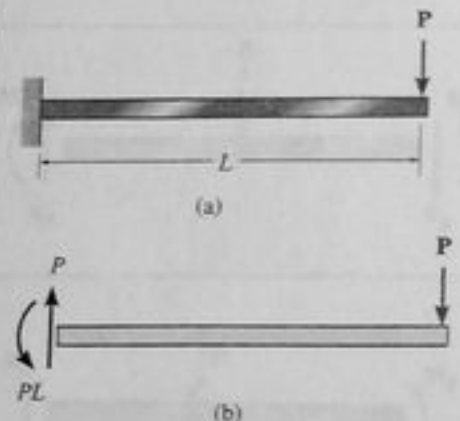
Diagrama de momento flexionante Establezca los ejes M y x y trace los valores del momento en los extremos de la viga. Como $dM/dx = V$, la pendiente del diagrama de momento flexionante en cualquier punto es igual a la intensidad de la fuerza cortante en el punto. En particular, note que en el punto en que la fuerza cortante es cero, $dM/dx = 0$ y, por tanto, éste puede ser un punto de momento máximo o mínimo.

Si el valor numérico del momento va a determinarse en un punto, puede encontrarse este valor usando el método de las secciones, como se vio en la sección 4.1 o usando la ecuación 4–4 que establece que el *cambio en el momento* es igual al *área bajo el diagrama de fuerza cortante*. Como $V(x)$ se *integra* para obtener M, si $V(x)$ es una curva de grado n, entonces $M(x)$ será una curva de grado $n + 1$. Por ejemplo, si $V(x)$ es lineal, $M(x)$ será parabólica.

Los siguientes ejemplos ilustran este procedimiento.

Ejemplo 4–7

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga de la figura 4–11*a*.



Solución

Reacciones en el soporte, figura 4–11*b*. Las reacciones calculadas se muestran en un diagrama de cuerpo libre de la viga.

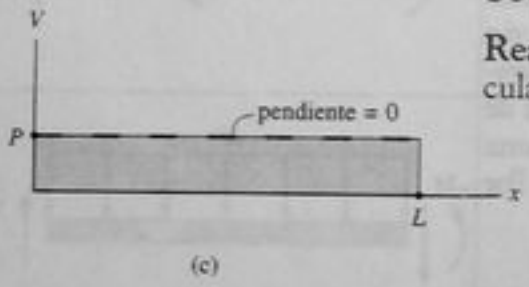


Diagrama de fuerza cortante, figura 4–11*c*. Usando la convención de signos preestablecida, figura 4–1, primero se trazan las fuerzas cortantes en los extremos de la viga, esto es, $x = 0, V = +P$; $x = L, V = +P$. Como $w = 0$ para $0 < x < L$, la pendiente del diagrama de fuerza cortante es cero ($dV/dx = -w = 0$), por lo que una línea recta horizontal conecta los puntos trazados.

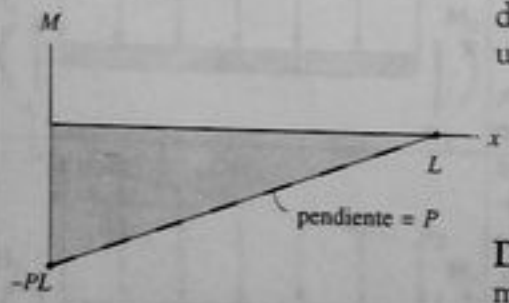
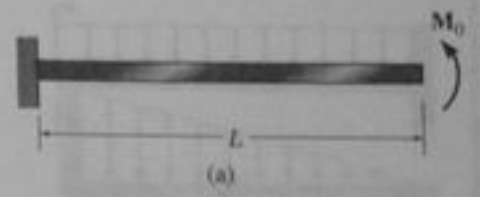


Fig. 4–11

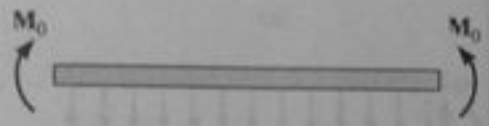
Diagrama de momento flexionante, figura 4–11*d*. Nuevamente, usando la convención de signos preestablecida, figura 4–1, se trazan primero los momentos en los extremos de la viga, esto es, $x = 0, M = -PL; x = L, M = 0$. El diagrama de fuerza cortante es constante, $V = +P$, para $0 < x < L$, por lo que la pendiente del diagrama de momentos será también constante (positiva) ($dM/dx = V = +P$). Por consiguiente, los puntos trazados se conectan por una línea recta de pendiente positiva como se muestra en la figura.

Ejemplo 4–8

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga de la figura 4–12*a*.



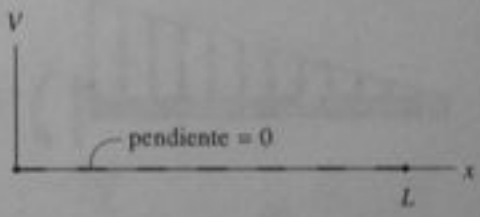
(a)



(b)

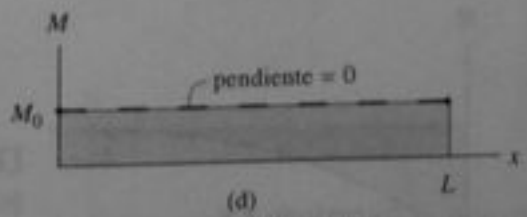
Solución

Reacciones en el soporte, figura 4–12*b*. La reacción en el empotramiento se ha calculado y se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la viga.



(c)

Diagrama de fuerza cortante, figura 4–12*c*. Se trazan primero las fuerzas cortantes en los puntos extremos $x = 0$ y $x = L$. Como no existe carga distribuida sobre la viga para $0 < x < L$, la pendiente $dV/dx = 0$. Por lo tanto, la línea que conecta los puntos extremos indica que la fuerza cortante es igual a cero en toda la viga.

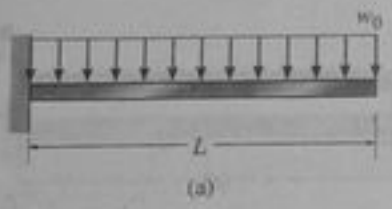


(d)

Fig. 4–12

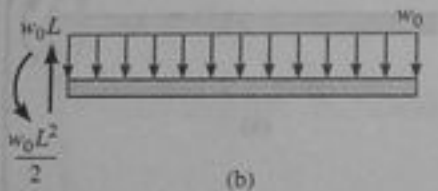
Diagrama de momento flexionante, figura 4–12*d*. Se traza primero el momento M_0 en los puntos extremos de la viga $x = 0$ y $x = L$. La pendiente $dM/dx = 0$ para el diagrama de momento, ya que la fuerza cortante es cero para $0 < x < L$. Por tanto, el diagrama de momento es rectangular.

Ejemplo 4–9



(a)

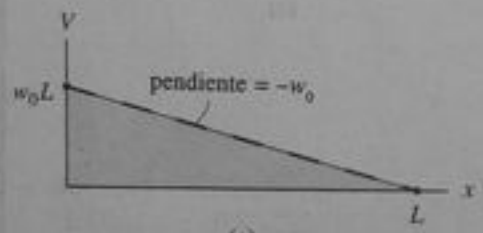
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga de la figura 4–13*a*.



(b)

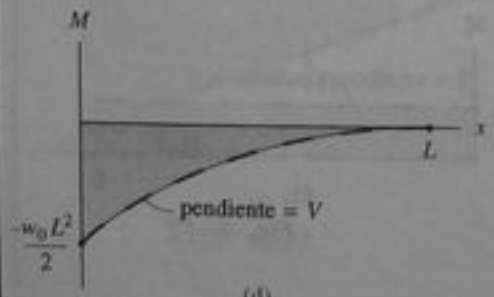
Solución

Reacciones en el soporte, figura 4–13*b*. Las reacciones en el empotramiento ya se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga.



(c)

Diagrama de fuerza cortante, figura 4–13*c*. Se traza primero la fuerza cortante en los puntos extremos $x = 0$ y $x = L$. Aquí, $dV/dx = -w_0$, por lo que una *línea recta de pendiente negativa* conecta los puntos extremos.



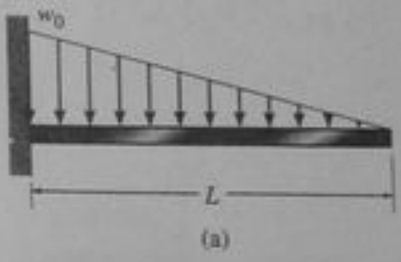
(d)

Fig. 4–13

Diagrama de momento flexionante, figura 4–13*d*. Se traza primero el momento en los puntos extremos de la viga, $x = 0$ y $x = L$. Valores sucesivos del cortante sobre el diagrama de fuerza cortante, indican que la pendiente $dM/dx = V$ es siempre positiva pero *linealmente decreciente* de $dM/dx = w_0L$ en $x = 0$ a $dM/dx = 0$ en $x = L$. Así, pues, una parábola con estas características conecta los puntos extremos.

Ejemplo 4–10

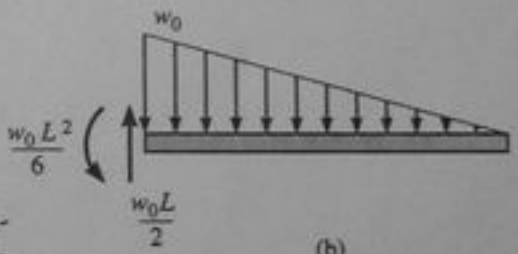
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga de la figura 4–14*a*.



(a)

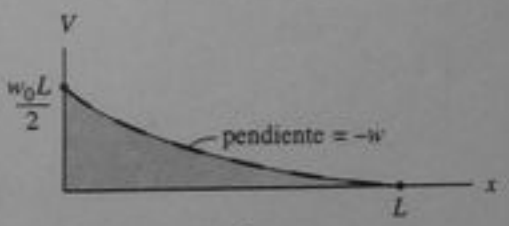
Solución

Reacciones en el soporte, figura 4–14*b*. Las reacciones en el empotramiento ya se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga.



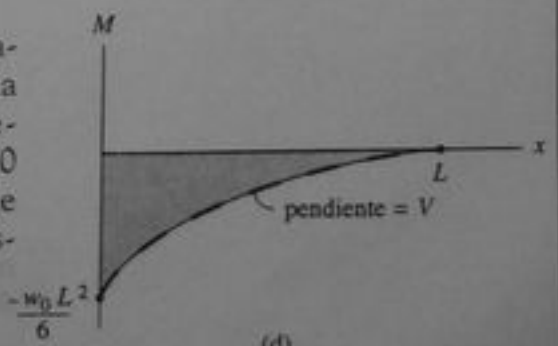
(b)

Diagrama de fuerza cortante, figura 4–14*c*. Se traza primero la fuerza cortante en los puntos extremos $x = 0$ y $x = L$ de la viga. Del diagrama de carga, la pendiente $dV/dx = -w$ decrece negativamente de $dV/dx = -w_0$ en $x = 0$ a $dV/dx = 0$ en $x = L$. Una parábola con estas características conecta entonces los puntos extremos del diagrama de fuerza cortante.



(c)

Diagrama de momento flexionante, figura 4–14*d*. Se traza primero el momento en los puntos extremos $x = 0$ y $x = L$ de la viga. Del diagrama de fuerza cortante, la pendiente (positiva) decrece parabólicamente de $dM/dx = +w_0 L/2$ en $x = 0$ a $dM/dx = 0$ en $x = L$. La curva que conecta los puntos extremos trazados que tiene esta característica es una función cúbica de x, como se muestra en la figura.

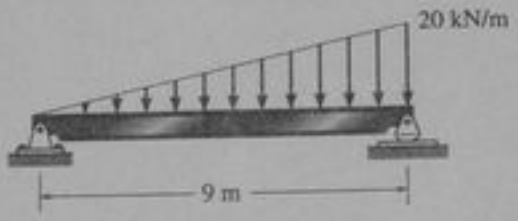


(d)

Fig. 4–14

Ejemplo 4–11

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en la figura 4–15*a*.

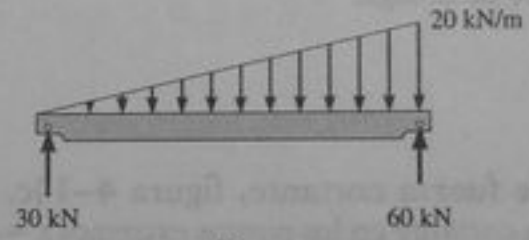


(a)

Fig. 4–15

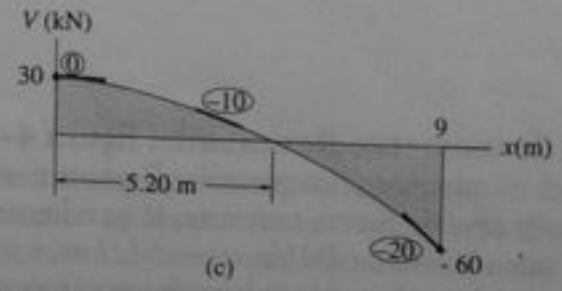
Solución

Reacciones en los soportes, figura. 4–15 *b*. Las reacciones ya se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga.



(b)

Diagrama de fuerza cortante, figura 4–15c. Se trazan primero los puntos extremos $x = 0$, $V = +30$ y $x = 9$, $V = -60$. Debido al tipo de carga, la pendiente del diagrama de fuerza cortante varía entre $dV/dx = 0$ en $x = 0$ y $dV/dx = -20$ en $x = 9$. Para $0 \leq x \leq 9$, la pendiente crece negativamente ya que la carga distribuida está creciendo ($dV/dx = -w$).

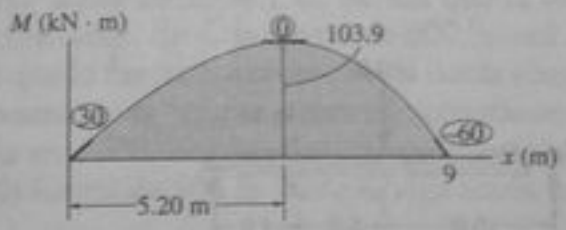


(c)

El punto de fuerza cortante nula puede encontrarse usando el método de secciones en un segmento de viga de longitud x, figura 4–15e. Requerimos $V = 0$, por lo que

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 30 - \frac{1}{2}\left[20\left(\frac{x}{9}\right)\right]x = 0 \qquad x = 5.20 \text{ m}$$

Diagrama de momento flexionante, figura 4–15*d*. Se trazan primero los puntos extremos $x = 0, M = 0$ y $x = 9, M = 0$. De acuerdo con el diagrama de fuerza cortante, la pendiente del diagrama de momento es $dM/dx = +30$ en $x = 0$ y $dM/dx = 0$ en $x = 5.20$ m. Para $0 \leq x < 5.20$, la pendiente está decreciendo positivamente ya que la fuerza cortante está decreciendo positivamente. De la misma manera, para $5.20 < x \leq 9$, la pendiente crece negativamente.

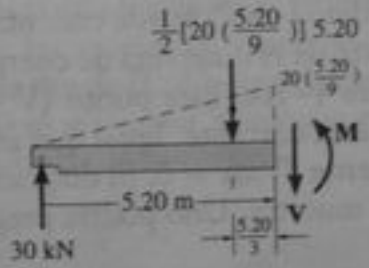


(d)

El valor máximo del momento se presenta en $x = 5.20$ m, ya que $dM/dx = V = 0$ en ese punto. Del diagrama de cuerpo libre en la figura 4–15*e* tenemos

$$\curvearrowleft +\Sigma M_S = 0; \quad 30(5.20) - \frac{1}{2}\left[20\left(\frac{5.20}{9}\right)\right](5.20)\left(\frac{5.20}{3}\right) - M = 0$$

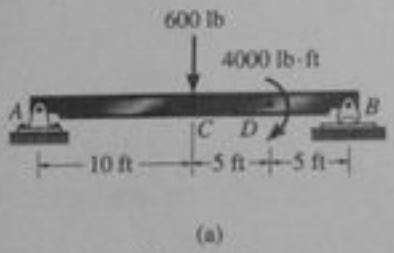
$$M = 103.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(e)

Ejemplo 4–12

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 4–16*a*.

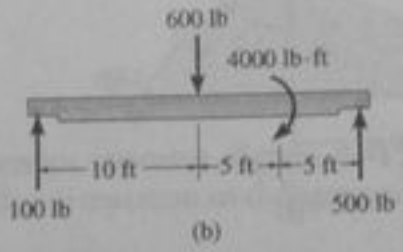


(a)

Fig. 4–16

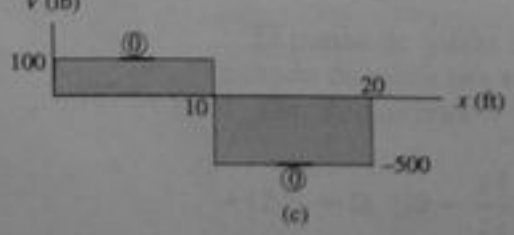
Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones ya calculadas se indican en el diagrama de cuerpo libre, figura 4–16*b*.

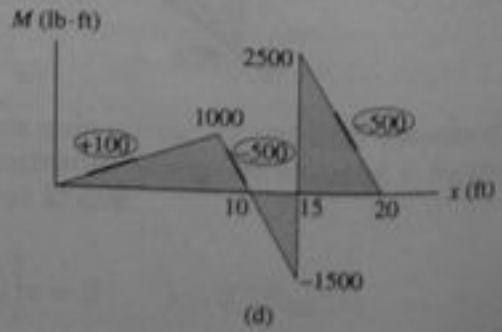


(b)

Diagrama de fuerza cortante. Se trazan primero los valores de la fuerza cortante en los puntos extremos A y B. De acuerdo con la convención de signos, figura 4–1, $V_A = +100$ y $V_B = -500$, figura 4–16c. En un punto intermedio entre A y C, la pendiente del diagrama de fuerza cortante es cero, ya que $dV/dx = -w = 0$. Por tanto, la fuerza cortante retiene su valor de +100 dentro de esta región. En C la fuerza cortante es *discontinua* ya que hay una *fuerza concentrada* de 600 en ese punto. El valor de la fuerza cortante justo a la derecha de C (–500) puede encontrarse seccionando la viga en este punto. Esto da el diagrama de cuerpo libre mostrado en equilibrio en la figura 4–16e. Este punto ($V = -500$) se traza sobre el diagrama de fuerza cortante. Igual que antes, $w = 0$ de C a B, por lo que la pendiente $dV/dx = 0$. El diagrama cierra al valor de –500 en B, como se muestra. Uno podría preguntarse por qué



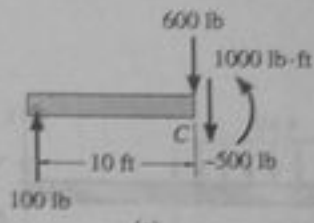
(c)



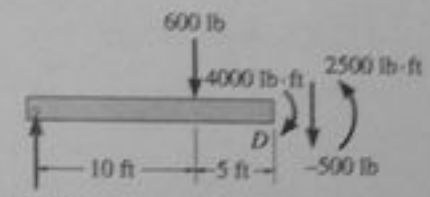
(d)

no se tiene un salto o discontinuidad de la fuerza cortante en D, el punto en que está aplicado el momento concentrado de 4000 lb · ft, figura 4–16*a*. No es tal el caso, como lo indican las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4–16*f*.

Observe también el lector que el diagrama de fuerza cortante puede construirse rápidamente "siguiendo la carga" sobre el diagrama de cuerpo libre, figura 4–16*b*. Respecto a esto, comenzando en A, la fuerza de 100 lb actúa hacia arriba, por lo que $V_A = +100$ lb. Ninguna carga actúa entre A y C, de ahí que la fuerza cortante permanece constante. En C la fuerza de 600 lb está dirigida hacia abajo, por lo que la fuerza cortante brinca hacia abajo 600, de 100 a –500. Nuevamente la fuerza cortante es constante (ninguna carga) y termina en –500, en el punto B, que cierra el diagrama en cero ya que la fuerza de 500 lb sobre la viga actúa hacia arriba.



(e)

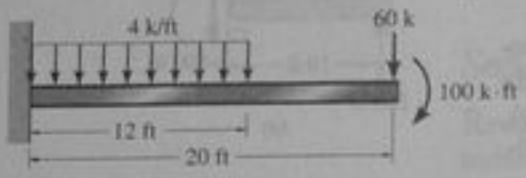


(f)

Diagrama de momento flexionante. El momento en cada extremo de la viga es cero, por tanto, estos puntos se trazan primero, figura 4–16*d*. La pendiente del diagrama de momento de A a C es constante ya que $dM/dx = V = +100$. El valor del momento en C puede determinarse con el método de las secciones, figura 4–16*e*, o calculando el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre A y C, esto es, $\Delta M_{AC} = M_C - M_A = (100\text{ lb})(10\text{ ft}) = 1000$. Como $M_A = 0$, entonces $M_C = 0 + 1000\text{ lb} \cdot \text{ft} = 1000$. De C a Δ, la pendiente es $dM/dx = V = -500$, figura 4–16*c*. El área bajo el diagrama de fuerza cortante entre los puntos C y D es $\Delta M_{CD} = M_D - M_C = (-500\text{ lb})(5\text{ ft}) = -2500$. Entonces, $M_D = 1000 - 2500 = -1500$. Un salto ocurre en el punto D debido al momento concentrado de 4000. El método de las secciones, figura 4–16*f*, da un valor de +2500 justo a la derecha de D. A partir de este punto, la pendiente de $dM/dx = -500$ se mantiene hasta que el diagrama cierra en cero en B, figura 4–16*d*.

Ejemplo 4–13

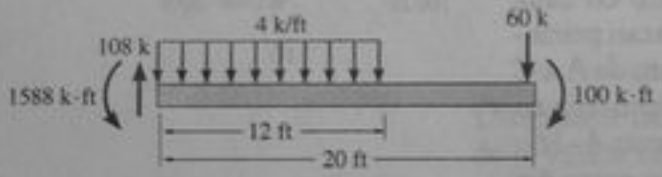
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga que se muestra en la figura 4–17*a*.



(a)

Solución

Reacciones en el soporte, figura 4–17*b*. Las reacciones en el empotramiento ya se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga.

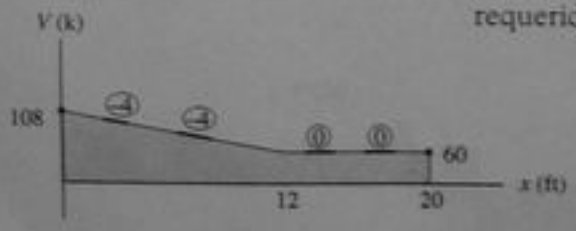


(b)

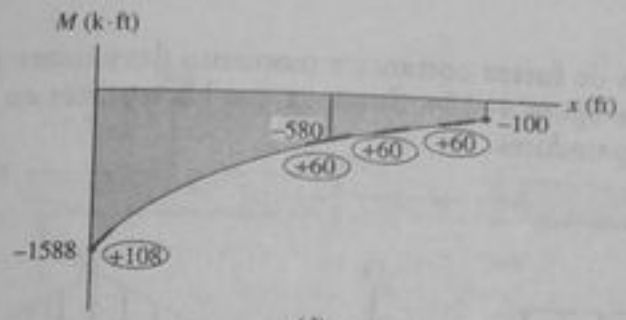
Diagrama de fuerza cortante, figura 4–17*c*. Se trazan primero las fuerzas cortantes en los extremos de la viga, esto es, $x = 0$, $V = +108$; $x = 20$, $V = +60$.

La pendiente del diagrama de fuerza cortante es $dV/dx = -w = -4$ para $0 \le x \le 12$, como se indica en la figura. La magnitud de la fuerza cortante en $x = 12$ es $+60$. Esto puede determinarse encontrando primero el área bajo el diagrama de carga entre $x = 0$ y $x = 12$, esto es, $\Delta V = -\int w\, dx = (-4)(12) = -48$; así entonces, $V|_{x=12} = V|_{x=0} + (-48) = 108 - 48 = 60$. Podemos obtener también este valor usando el método de secciones, figura 4–17*e*, donde por equilibrio, $V = +60$.

Como la carga entre $12 \le x \le 20$ es $w = 0$, entonces $dV/dx = 0$, como se indica. Esto trae el valor de la fuerza cortante al valor requerido de $V = 60$ en $x = 20$.



(c)



(d)

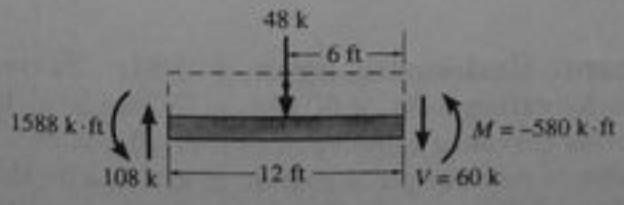
Diagrama de momento flexionante, figura 4–17*d*. Se trazan primero los momentos en los extremos de la viga, esto es, en $x = 0$, $M = -1588$ y en $x = 20$, $M = -100$.

Los valores numéricos de la fuerza cortante cambian de +108 a +60 para $0 \le x \le 12$. Cada valor de la fuerza cortante da la pendiente del diagrama de momento, ya que $dM/dx = V$. Como se indica, en $x = 0$, $dM/dx = +108$ y en $x = 12$, $dM/dx = +60$. Para $0 \le x \le 12$, los valores específicos del diagrama de la fuerza cortante son positivos pero linealmente decrecientes. Por tanto, el diagrama de momento es parabólico con pendiente linealmente decreciente.

La magnitud del momento en $x = 12$ es –580. Esto puede obtenerse del área bajo el diagrama de fuerza cortante, esto es, $\Delta M = \int V\,dx = 60(12) + \frac{1}{2}(108 - 60)(12) = +1008$, por lo que $M\big|_{x=12} = M\big|_{x=0} + 1008 = -1588 + 1008 = -580$. El más "básico" método de las secciones puede también usarse; donde el equilibrio en $x = 12$ es necesario que $M = -580$, figura 4–17*e*.

El diagrama de momento tiene una pendiente constante en $12 \le x \le 20$ ya que $dM/dx = V = +60$. Esto trae el valor a $M = -100$ en $x = 20$, tal como se requiere.

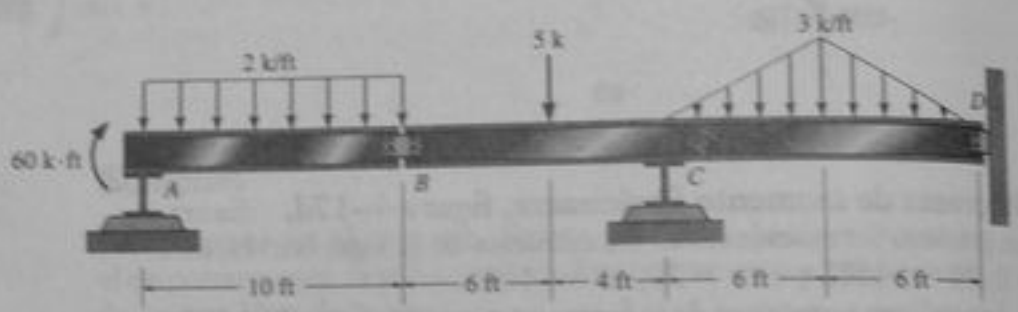
Debe notarse que esos diagramas pueden también construirse trazando las funciones obtenidas en el ejemplo 4–5, aunque esto sería una solución más tediosa.



(e)

Ejemplo 4–14

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga compuesta de la figura 4–18*a*. Suponga que los soportes en *A* y *C* son rodillos y *B* y *D* pasadores.



(a)

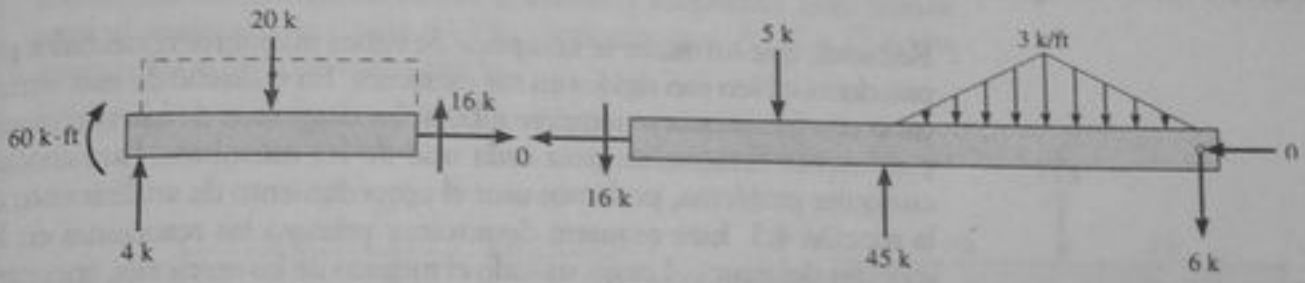
Fig. 4–18

Solución

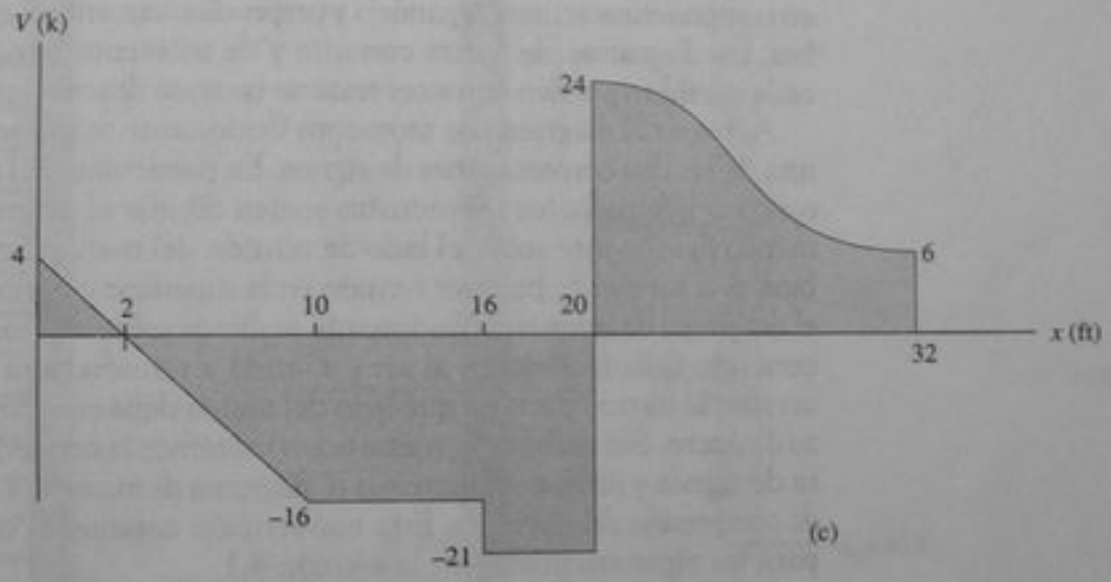
Reacciones en los soportes, figura 4–18b. Una vez desconectada la viga del pasador en *B*, las reacciones en el soporte pueden calcularse como se muestra en la figura 4–18b.

Diagrama de fuerza cortante, figura 4–18c. Igual que antes, comenzamos trazando las fuerzas cortantes en *A* y *D*. Usamos la ecuación $dV/dx = -w$ y las curvas resultantes se muestran en la figura. Trate de establecer los valores máximos usando las áreas apropiadas bajo el diagrama de carga (curva w) para encontrar el cambio en la fuerza cortante. El valor cero para la fuerza en $x = 2$ ft puede calcularse por triángulos semejantes o por medio de la estática como se hizo en la figura 4–15*e* del ejemplo 4–11.

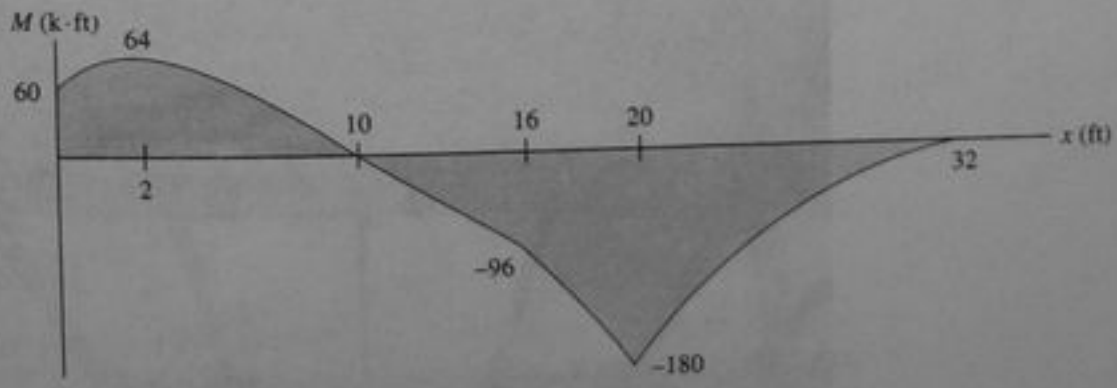
Diagrama de momento flexionante, figura 4–18d. Se trazan primero los momentos en los extremos $M_A = 60$ y $M_D = 0$. Estudie el diagrama y note cómo las diversas curvas se establecen usando $dM/dx = V$. Verifique que los valores numéricos para los picos usando la estática o calculando las áreas apropiadas bajo el diagrama de fuerza cortante para encontrar el cambio en el momento.


20 k
5 k
3 k/ft
60 k-ft
16 k
0
0
16 k
4 k
45 k
6 k

(b)


V (k)
24
4
6
2
10
16
20
x (ft)
32
-16
-21

(c)


M (k-ft)
64
60
10
16
20
x (ft)
2
32
-96
-180

(d)

4.4 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para un marco

Recuerde que un *marco* se compone de varios miembros conectados por pasadores o bien son rígidos en sus extremos. En el diseño de esas estructuras con frecuencia se requiere dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada uno de los miembros. Para analizar cualquier problema, podemos usar el procedimiento de análisis visto en la sección 4.3. Este requiere determinar primero las reacciones en los soportes del marco. Luego, usando el método de las secciones, encontramos la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en los extremos de cada miembro. Si todas las cargas se resuelven en componentes actuando paralela y perpendicularmente al eje del miembro, los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para cada miembro pueden entonces trazarse como se describió previamente.

Al trazar el diagrama de momento flexionante se usa en la práctica una de las dos convenciones de signos. En particular, si el marco es de *concreto reforzado*, los proyectistas suelen dibujar el diagrama de momento flexionante sobre el lado de tensión del marco. En otras palabras, si el momento produce tensión en la superficie exterior del marco, el diagrama de momento flexionante se dibuja sobre este lado. Como el concreto falla fácilmente al ser sometido a tensión, será posible con un simple vistazo decir en qué lado del marco debe colocarse el refuerzo de acero. Sin embargo, en este texto usaremos la convención opuesta de signos y *siempre dibujaremos el diagrama de momentos sobre el lado de compresión del miembro*. Esta convención concuerda con la usada para las vigas analizadas en la sección 4.1.

Los siguientes ejemplos ilustran este procedimiento numéricamente.

La trabe simplemente apoyada del marco de este edificio se diseñó dibujando primero sus diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Ejemplo 4–15

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el marco de la figura 4–19*a*. Suponga que *A*, *C* y *D* están articulados y *B* es un nudo rígido.

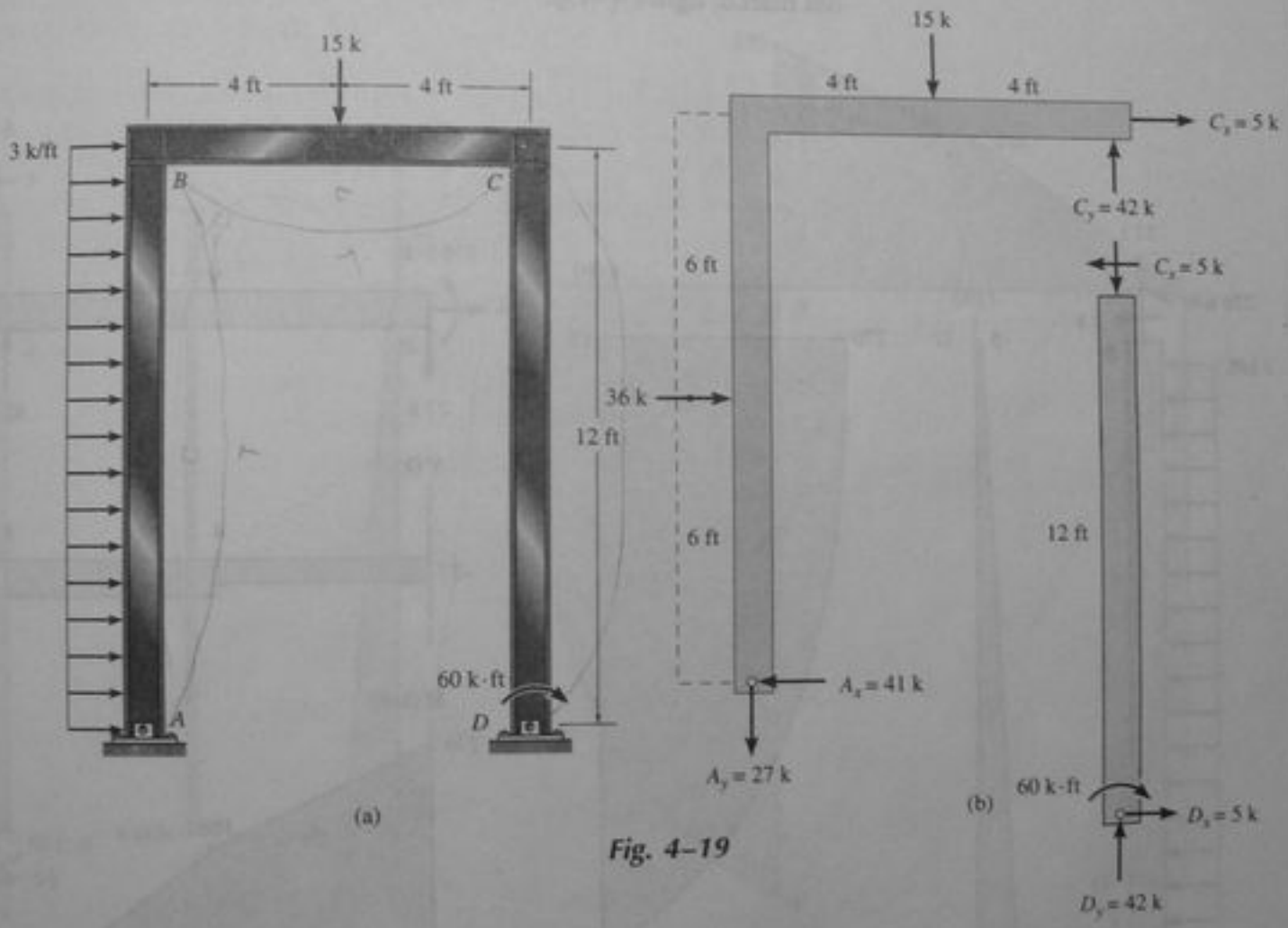


Fig. 4–19

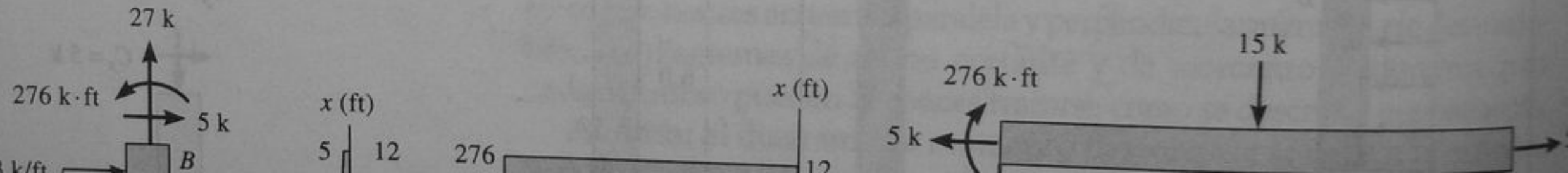
Solución

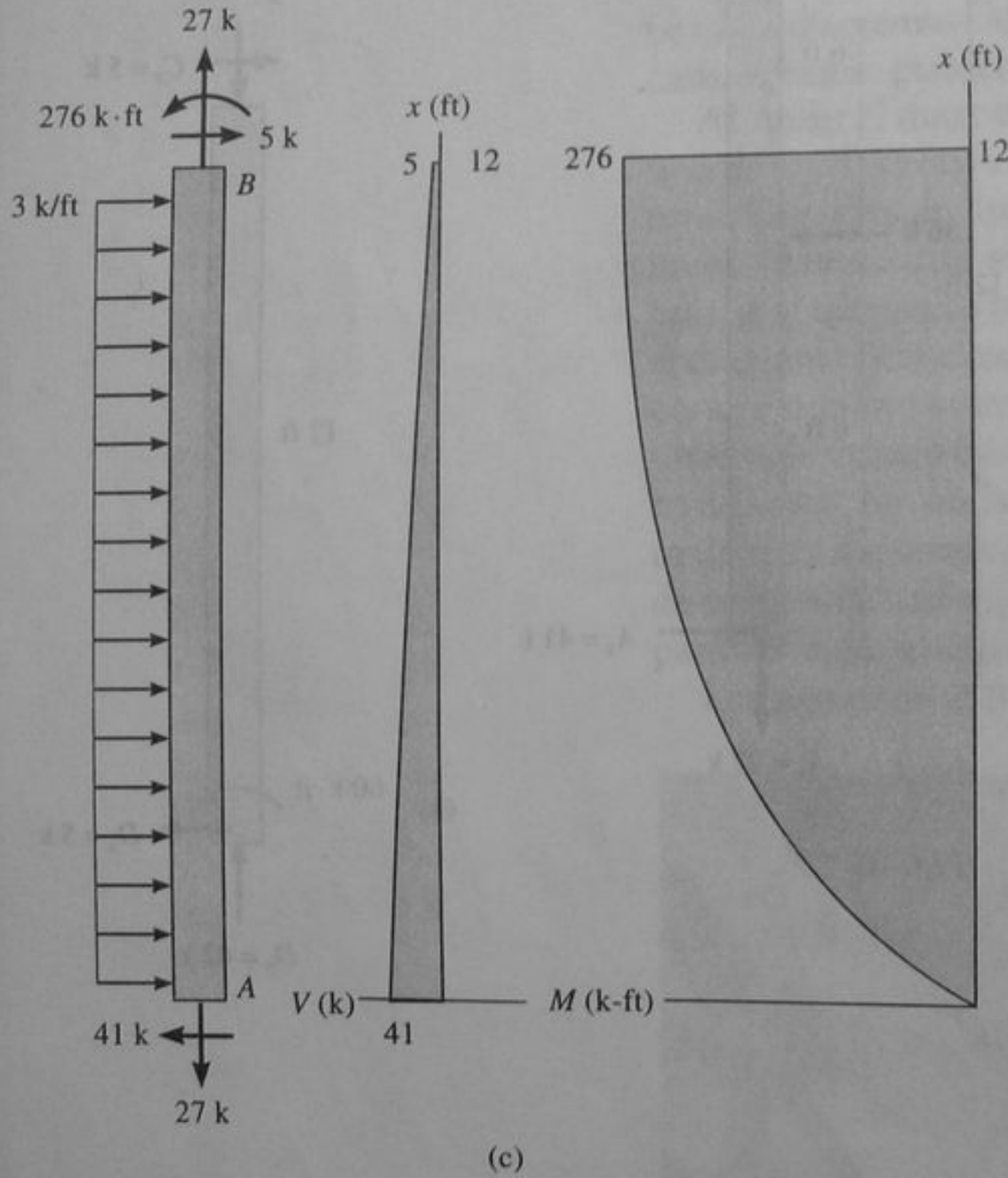
Reacciones en los soportes. El marco se separa en dos partes, *ABC* y *DC* y las seis reacciones en los pasadores se calculan usando las ecuaciones de equilibrio, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la línea central del marco, figura 4–19*b*. Usando esas reacciones, se secciona a continuación el marco en *B* y la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante internos se calculan usando el diagrama de cuerpo libre en la figura 4–19*c* o 4–19*d*.

(continúa)

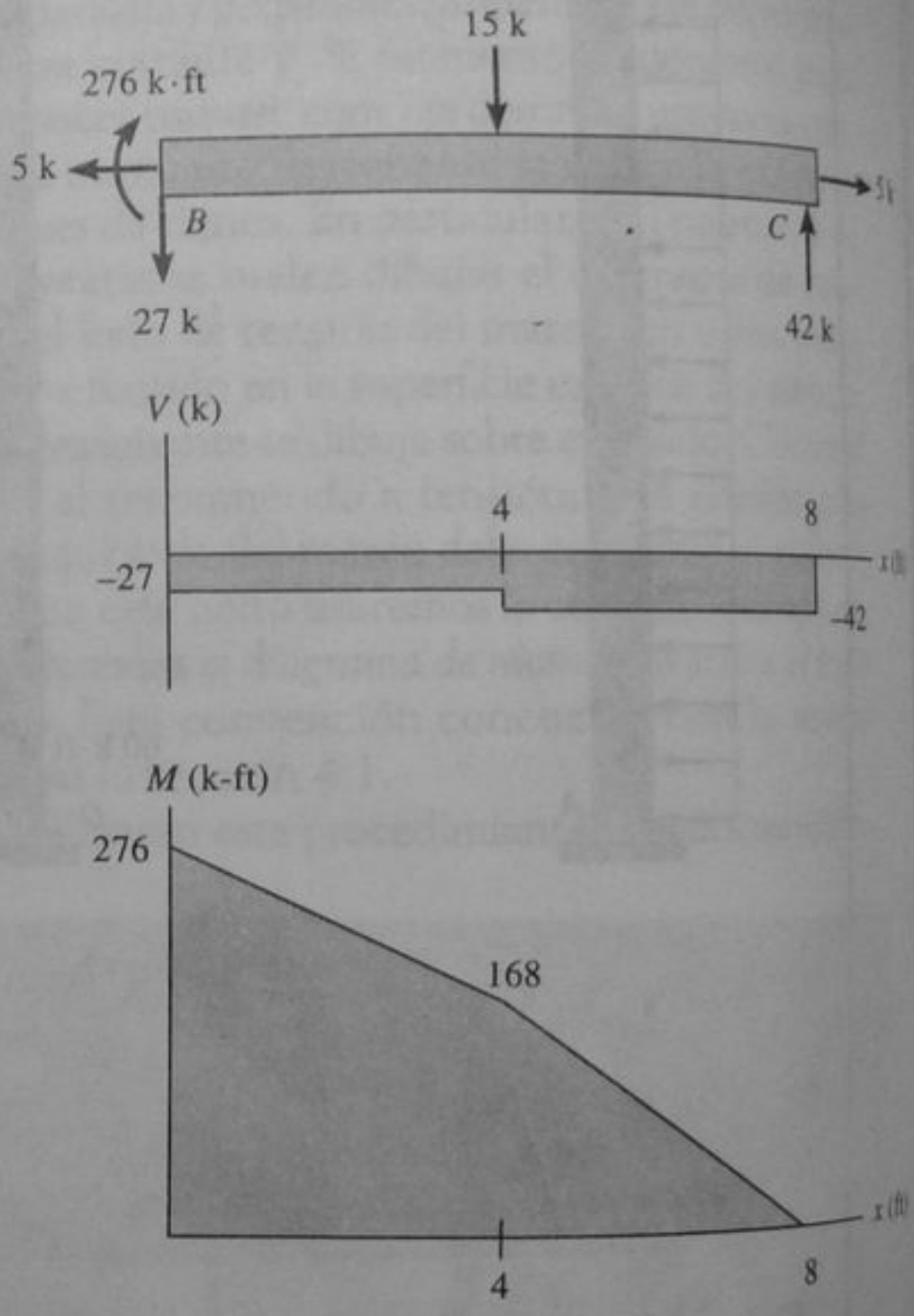
Ejemplo 4–15 (continuación)

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. En las figuras 4–19*c* a la 4–19*e* están dibujados estos diagramas para cada uno de los tres miembros. Combinando los resultados, el diagrama de momento se ha dibujado sobre el diagrama de la línea del marco, figura 4–19*f*.

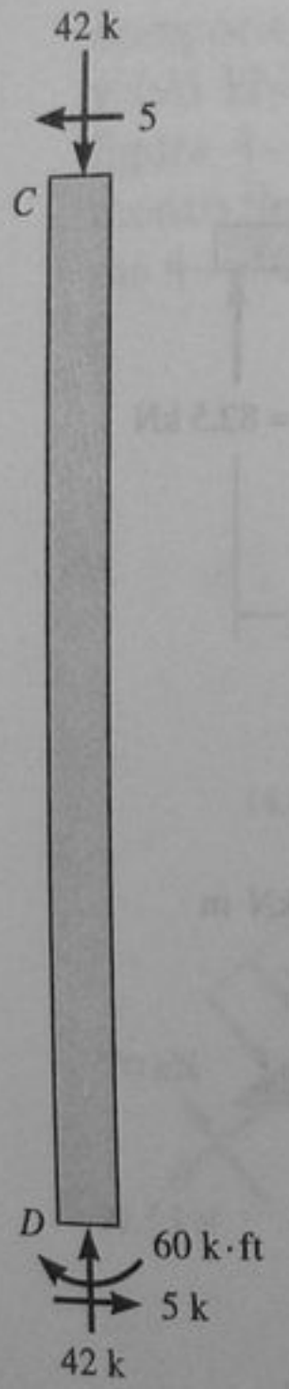



27 k
276 k·ft
5 k
B
3 k/ft
A
41 k
27 k
x (ft)
5
12
V (k)
41
x (ft)
276
12
M (k-ft)

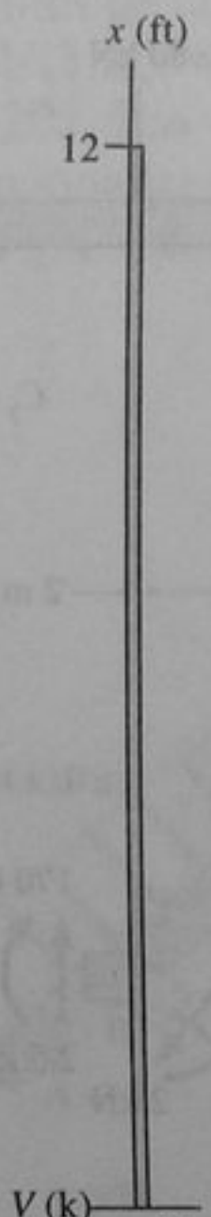
(c)

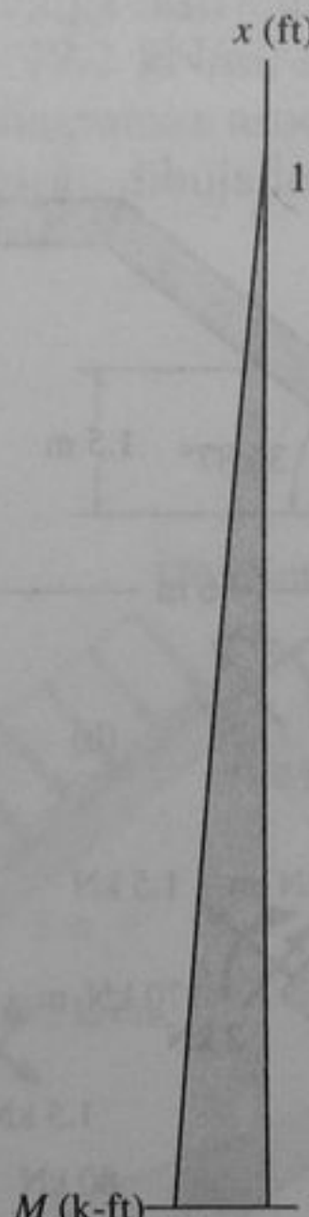

15 k
276 k·ft
5 k
B
C
27 k
42 k
V (k)
4
8
−27
−42
M (k-ft)
276
168
4
8

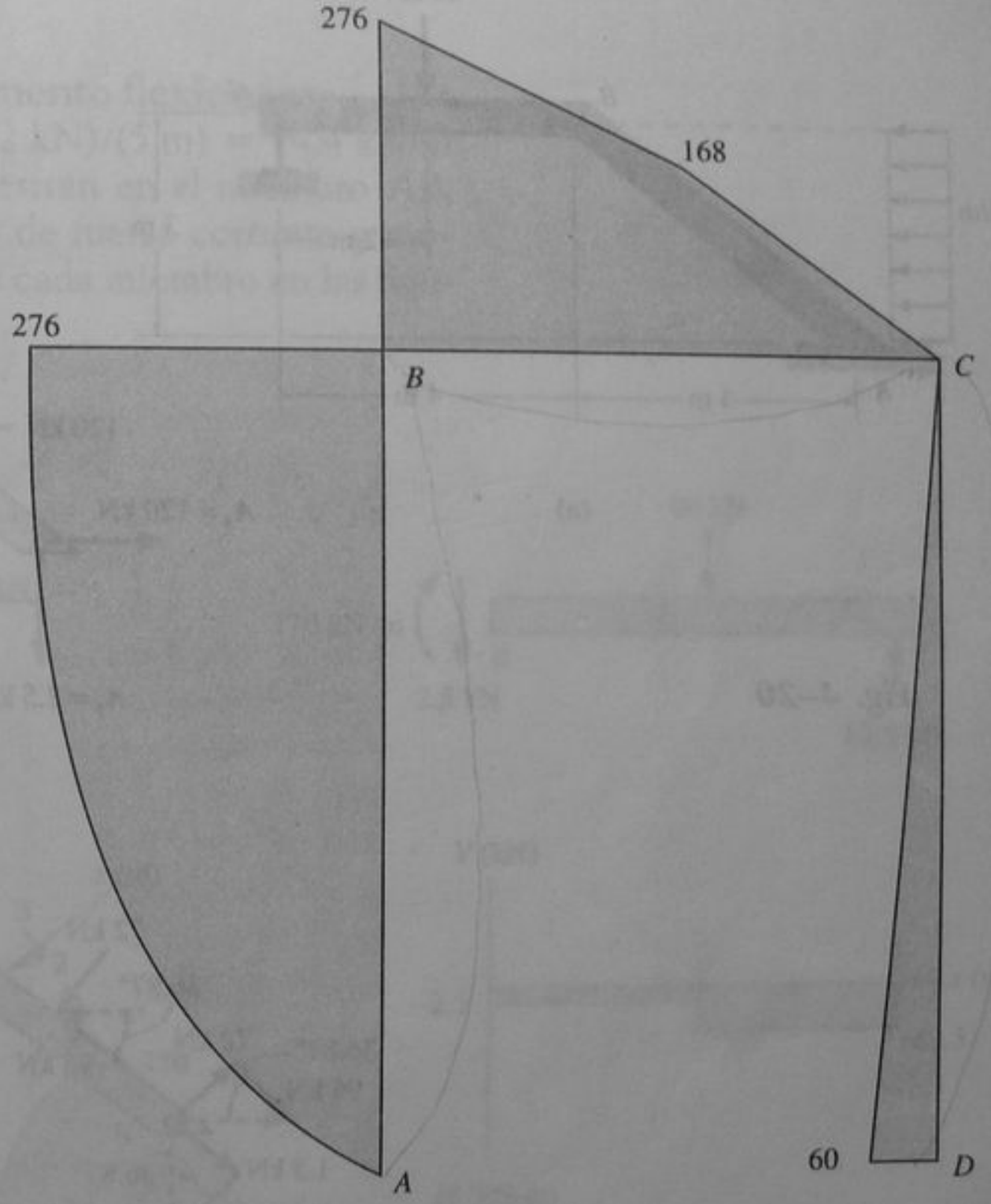
(d)


42 k
5
C
D
60 k·ft
5 k
42 k

(e)


x (ft)
12
V (k)
–5


x (ft)
12
M (k-ft)
60


276
168
276
B
C
A

(f)

60
D

Ejemplo 4–16

Dibuje el diagrama de momento para el marco mostrado en la figura 4–20*a*. Suponga que *A* es un pasador, *C* un rodillo y *B* un nudo rígido.

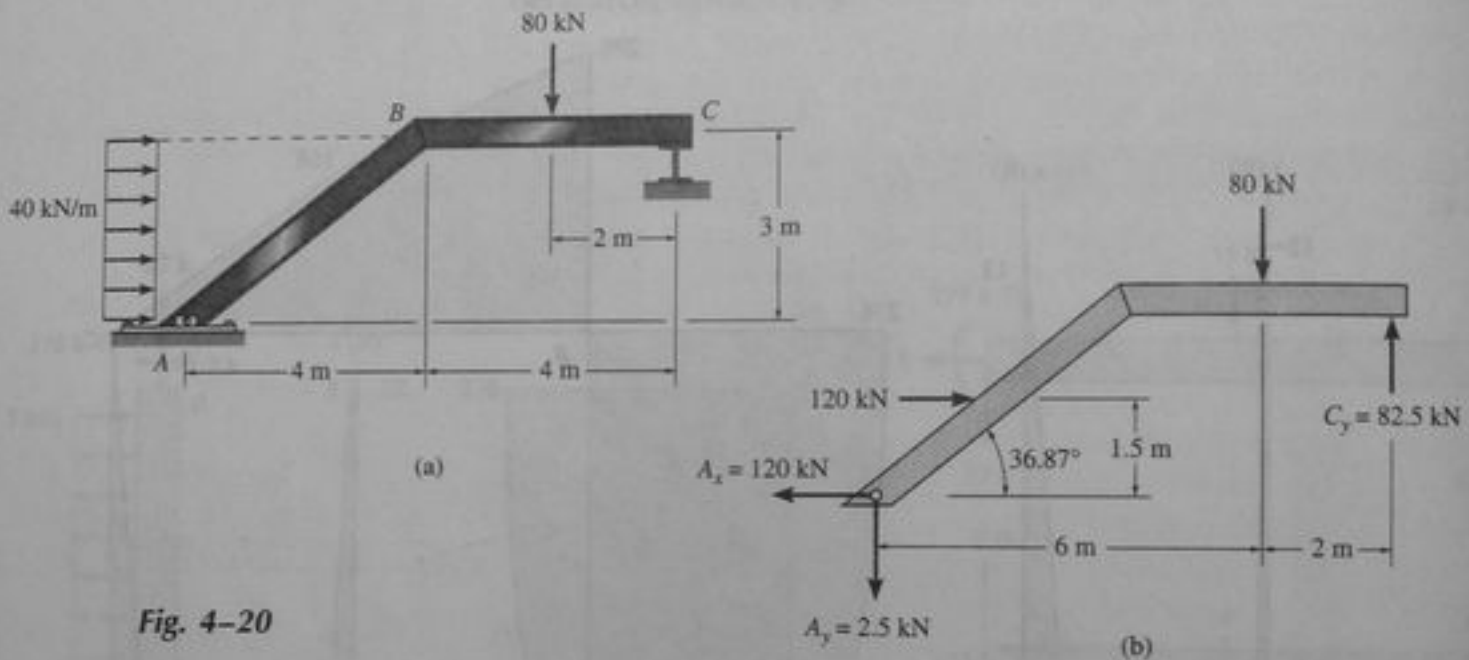
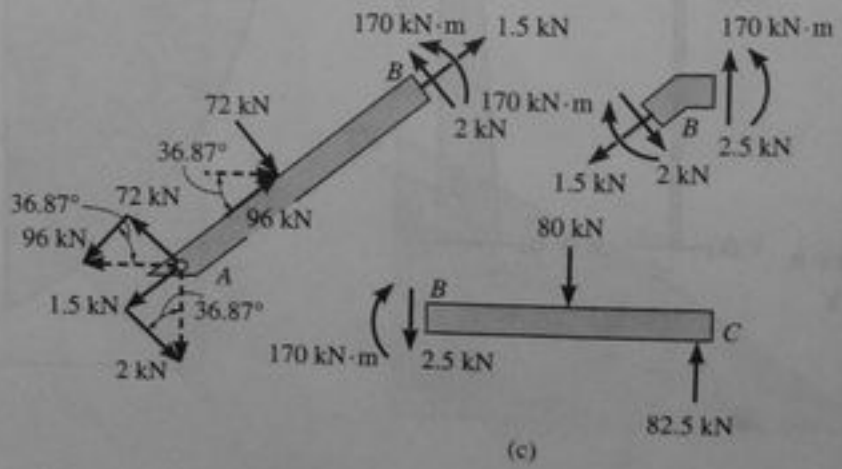


Fig. 4–20

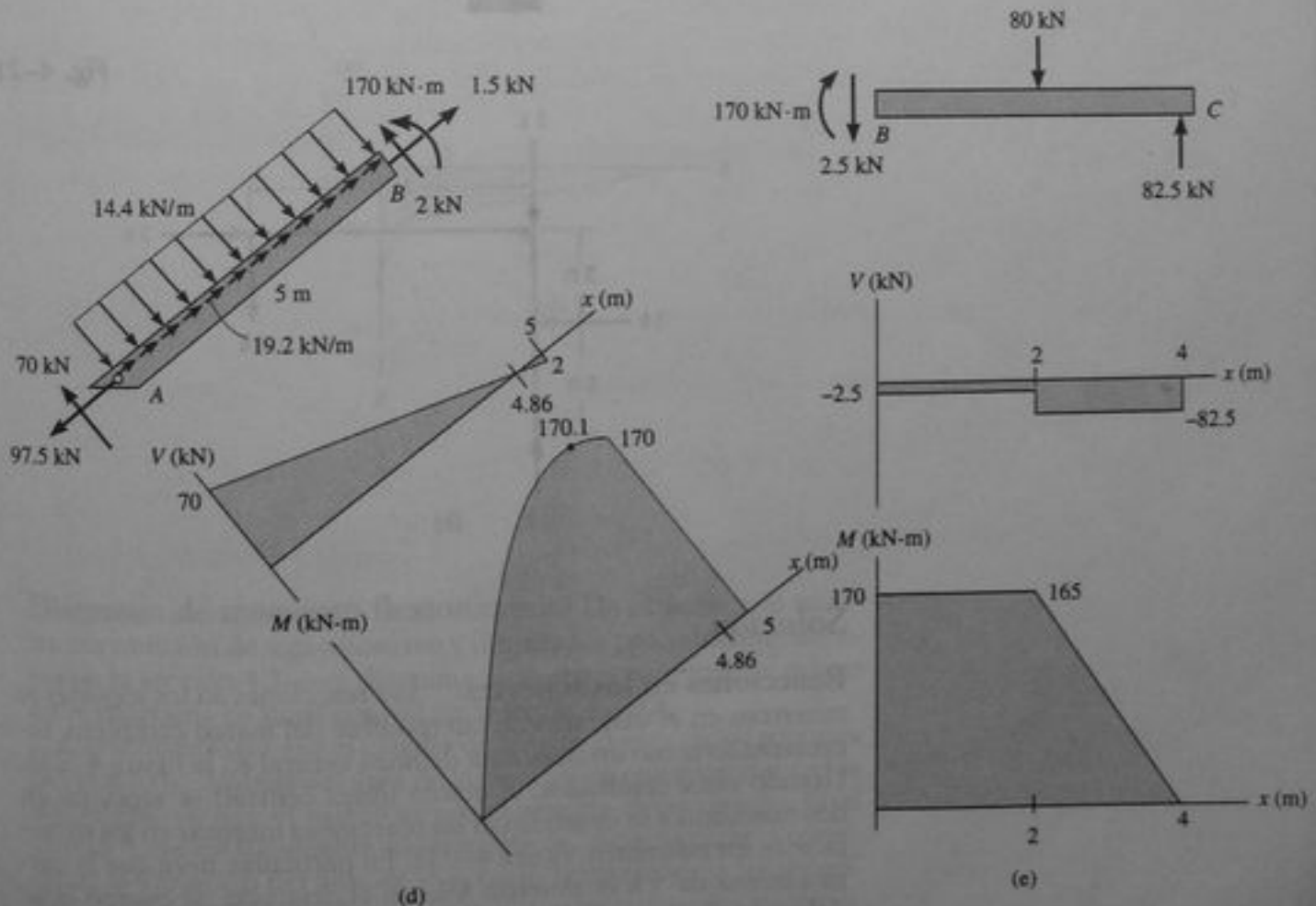


Solución

Reacciones en los soportes. En la figura 4–20*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre del marco completo. La carga distribuida, que representa carga de viento, se ha reemplazado aquí por su resultante y se han calculado las reacciones. El marco se secciona luego en el punto rígido *B* y se determinan las cargas internas en este punto, figura 4–20*c*. En el miembro *BC*, sólo existe una fuerza

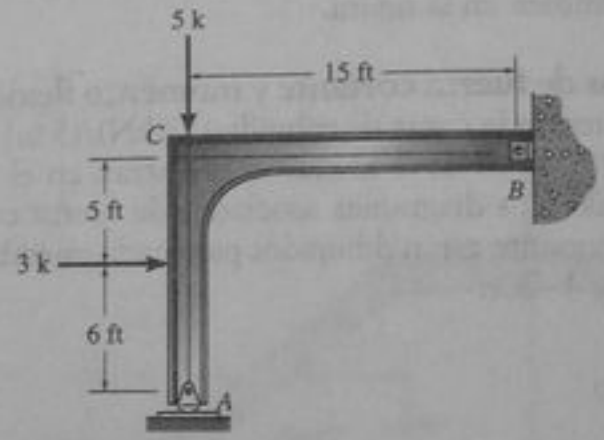
cortante de 2.5 kN y un momento de 170 kN · m a la derecha de B. Las cargas a la izquierda de *B* se obtienen del miembro *AB*. Las reacciones en *A* y la resultante de la carga distribuida se han descompuesto aquí en componentes paralelas y perpendiculares al miembro. La fuerza cortante de 2 kN, la fuerza normal de 1.5 kN y el momento de 170 kN · m se han calculado usando esas componentes. El equilibrio se satisface en el nudo *B* (verificación) que se muestra también en la figura.

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Las componentes de la carga distribuida (72 kN)/(5 m) = 14.4 kN/m y (96 kN)/(5 m) = 19.2 kN/m, se muestran en el miembro *AB*, figura 4–20*d*. Los diagramas asociados de fuerza cortante y momento flexionante están dibujados para cada miembro en las figuras 4–20*d* y 4–20*e*.



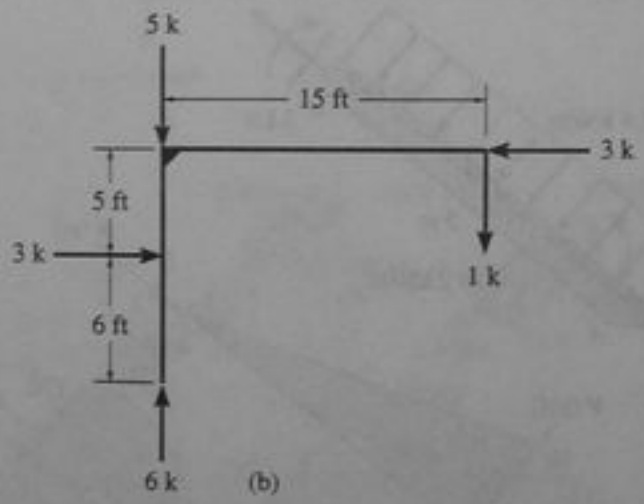
Ejemplo 4–17

Dibuje el diagrama de momento para el marco acartelado (peralte variable) mostrado en la figura 4–21*a*. Suponga que el soporte en *B* es un pasador.



(a)

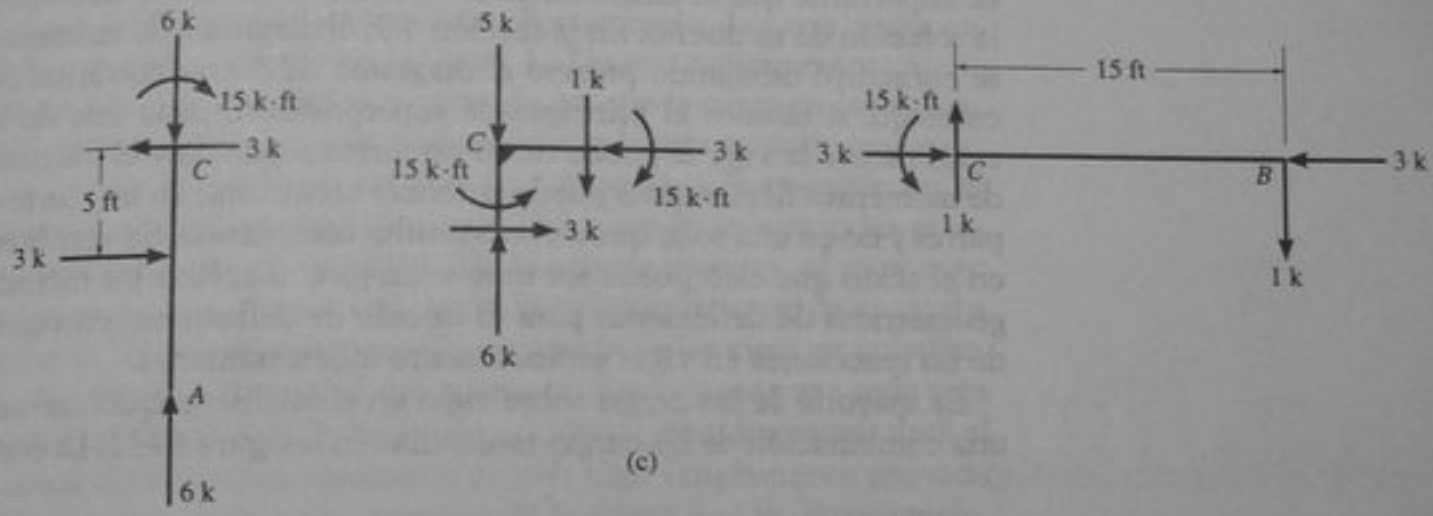
Fig. 4–21



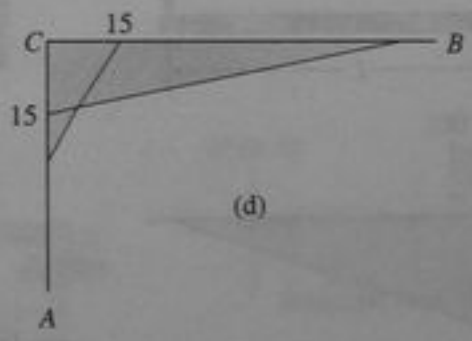
(b)

Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones en los soportes se muestran en el diagrama de cuerpo libre del marco completo, representado como un diagrama de línea central en la figura 4–21*b*. Usando estos resultados, el marco (línea central) se secciona en dos miembros y se determinan las reacciones internas en los extremos de los miembros, figura 4–21c. En particular, note que la carga externa de 5 k se muestra sólo en el diagrama de cuerpo libre del nudo C.



(c)



(d)

Diagrama de momento flexionante. De acuerdo con nuestra convención de signo positivo y usando los procedimientos vistos en la sección 4.3, este diagrama se muestra para todo el marco en el diagrama de línea central en la figura 4–21*d*.

Debe observarse que el cálculo de las reacciones en los soportes del marco *no depende* del área de las secciones transversales de los miembros, ya que el marco es estáticamente determinado. Si el marco fuese estáticamente indeterminado, sería necesario considerar la variación del área de la sección transversal de los miembros para poder obtener las reacciones. Los métodos para proceder así se verán en capítulos posteriores.

4.5 Diagramas de momento construidos con el método de superposición

Como las vigas se usan principalmente para resistir esfuerzos de flexión, es importante que el diagrama de momentos flexionantes acompañe la solución de su diseño. En la sección 4.3, el diagrama de momentos se construyó dibujando *primero* el diagrama de fuerza cortante. Sin embargo, si usamos el principio de superposición, cada una de las cargas sobre la viga se puede tratar en forma separada y el diagrama de momentos flexionantes puede entonces construirse en una serie de partes y no en una sola, que a veces resulta complicada. Se verá luego en el texto que esto puede ser muy ventajoso al aplicar los métodos geométricos de deflexiones para el cálculo de deflexiones en vigas y de las reacciones en vigas estáticamente indeterminadas.

La mayoría de las cargas sobre vigas en el análisis estructural será una combinación de las cargas mostradas en la figura 4–22. La cons-

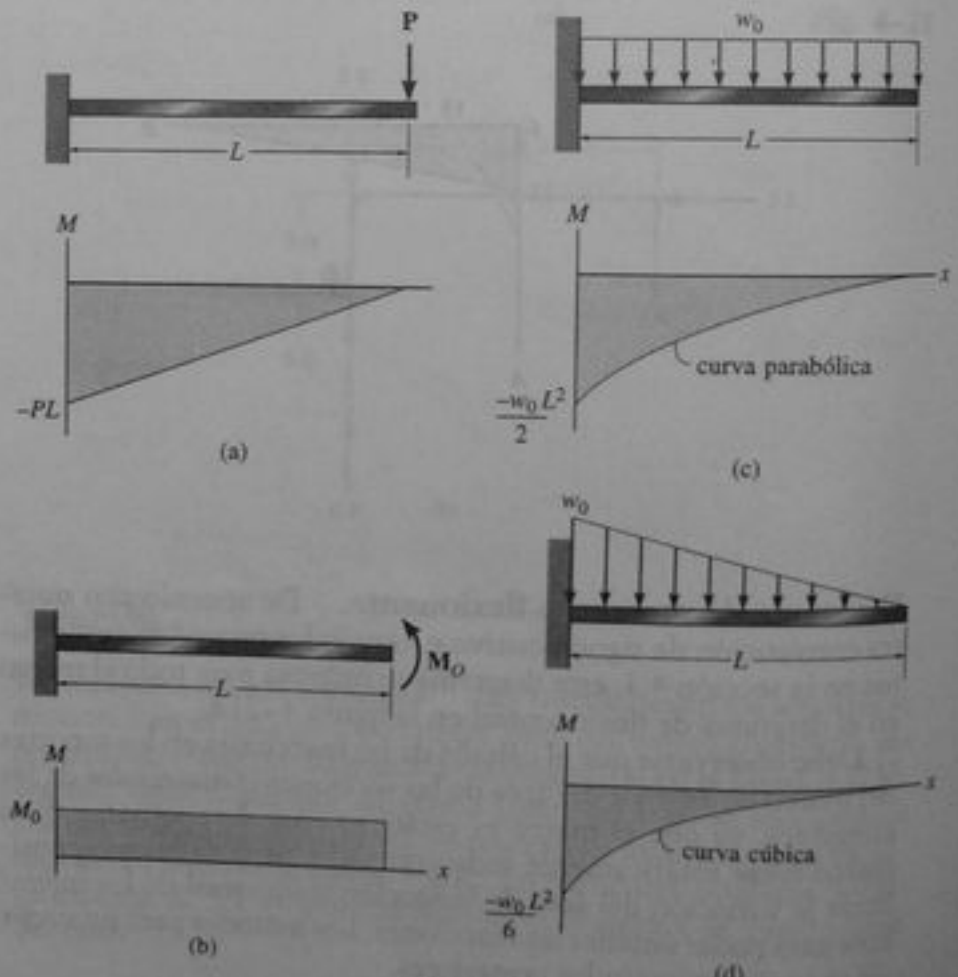


Fig. 4–22

trucción de los diagramas de momento asociados se analizó en los ejemplos 4–7 al 4–10. Con el fin de entender cómo usar el método de superposición para construir el diagrama de momentos para una viga, considere la viga simplemente apoyada de la figura 4–23*a*. En lugar de considerar *todas las cargas* sobre la viga *simultáneamente* al construir el diagrama de momentos, podemos considerar un sistema de *cargas estáticamente equivalentes*. Por ejemplo, las tres vigas en voladizo que se muestran en la figura 4–23*a* son estáticamente equivalentes a la viga simplemente apoyada, ya que la carga en cada punto de la viga simplemente apoyada es igual a la *superposición* o adición de las cargas en las vigas en voladizo. Note que la reacción en el extremo A resulta ser justamente de 15 k cuando se suman las reacciones en las vigas en voladizo. De la misma manera, el momento interno en cualquier punto en la viga simplemente apoyada es igual a la suma de los momentos en cualquier punto de las vigas en voladizo. Así, si se dibuja el diagrama del momento flexionante para cada viga en voladizo, figura 4–23*b*, la superposición de esos diagramas dará el diagrama de momento resultante para la viga simplemente apoyada que se muestra en la parte superior de la figura 4–23*b*. Por ejemplo, de cada uno de los diagramas separados de momento, el momento en el extremo A es $M_A = -200 - 300 + 500 = 0$, como se verifica en el diagrama superior de momentos en la figura 4–23*b*. En algunos casos

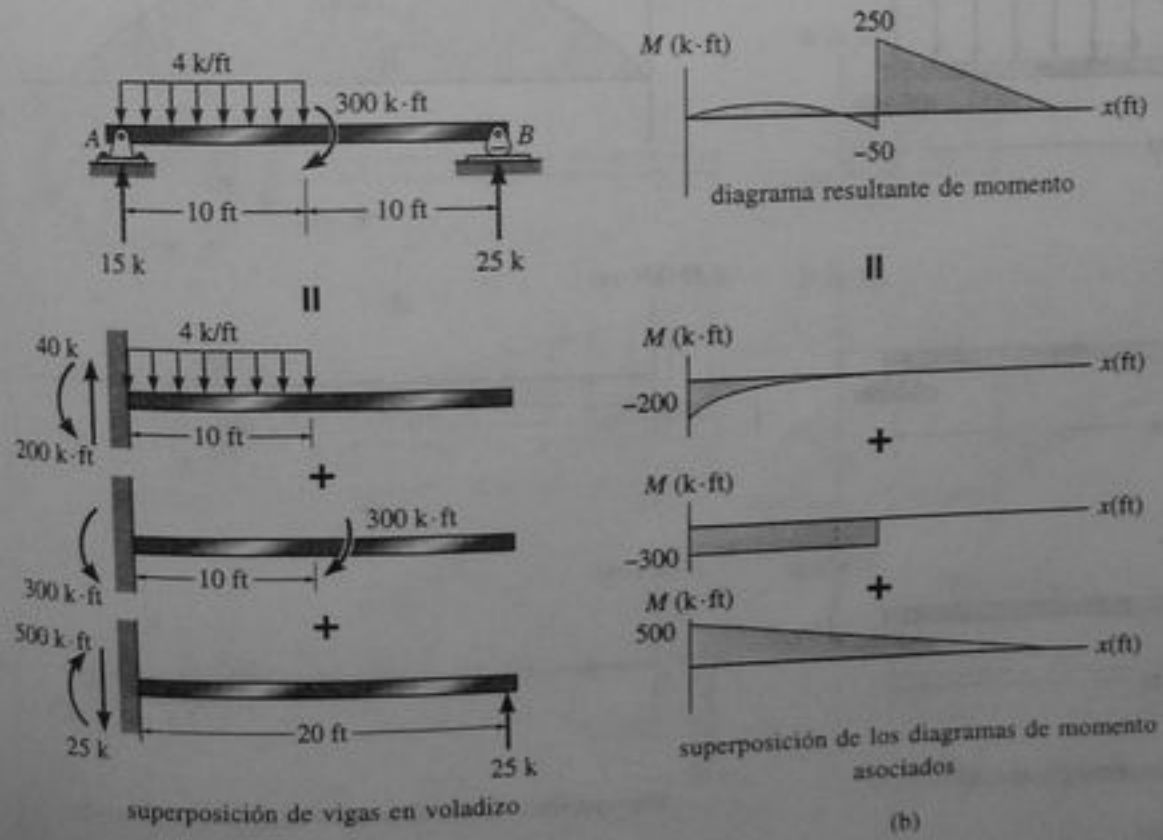


Fig. 4–23

es *más fácil* construir y usar una serie separada de diagramas de momentos estáticamente equivalentes para una viga *en vez* de construir el diagrama, más complicado, de momentos "resultante" para la viga.

De manera similar, podemos también simplificar la construcción del diagrama de momentos "resultante" para una viga usando una superposición de vigas "simplemente apoyadas". Por ejemplo, la carga sobre la viga que se muestra en la parte superior de la figura 4–24*a* es equivalente a las cargas de las vigas mostradas abajo. En consecuencia, los diagramas separados de momento para cada una de esas tres vigas pueden usarse *en vez* de dibujar el diagrama de momentos resultante mostrado en la figura 4–24*b*.

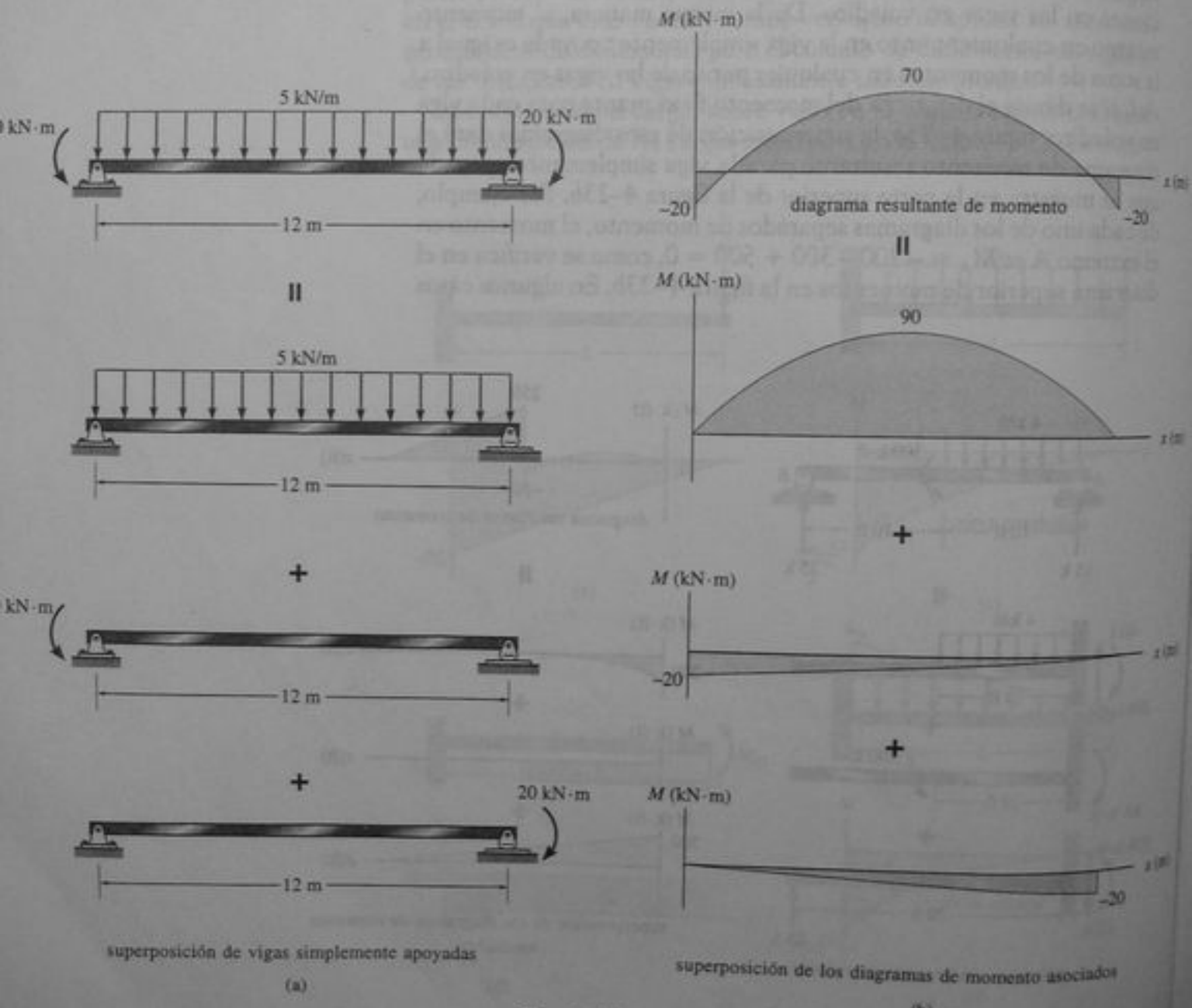


Fig. 4–24

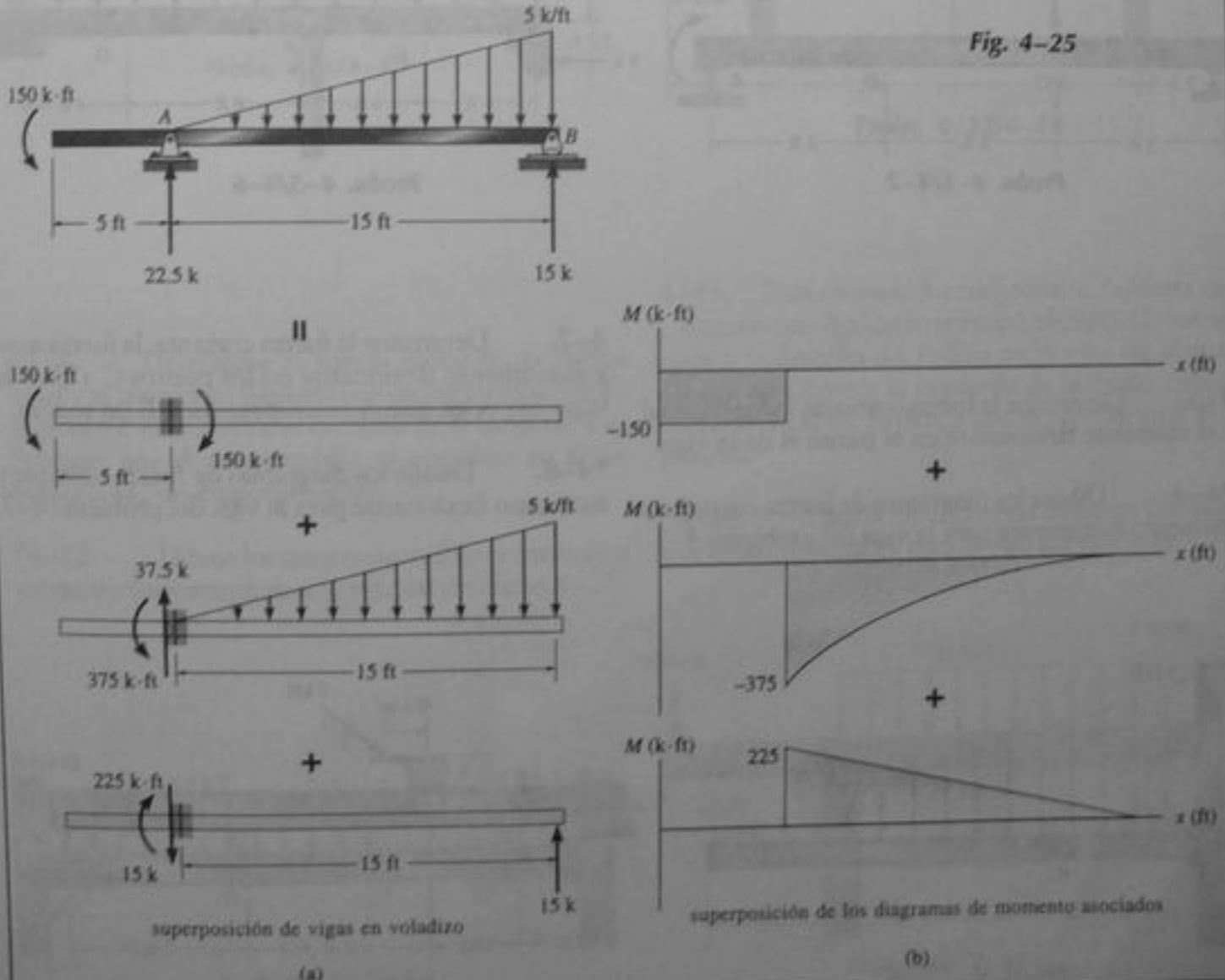
Ejemplo 4–18

Dibuje los diagramas de momento para la viga que se muestra en la figura 4–25*a*, usando el método de superposición. Considere la viga en voladizo desde el soporte en *A*. Las reacciones de la viga están dadas en la figura 4–25*a*.

Solución

Las vigas en voladizo superpuestas se muestran en la figura 4–25*a* junto con sus diagramas asociados de momento, figura 4–25*b*. (Como ayuda para su construcción, vea la figura 4–22.) Aunque *no se pide aquí*, la suma de esos diagramas dará el diagrama resultante de momento para la viga. Como práctica, trate de dibujar este diagrama y verifique los resultados.

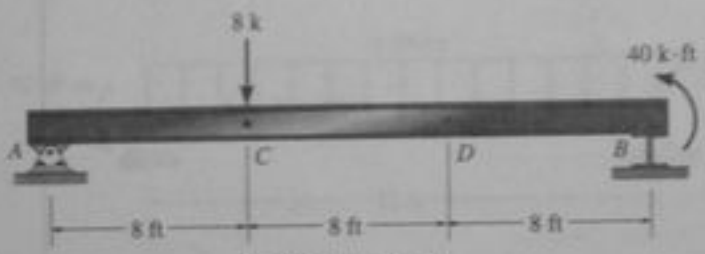
Fig. 4–25



PROBLEMAS

4–1. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en los puntos *C* y *D* de la viga. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo. El punto *C* está localizado justo a la derecha de la carga de 8 k.

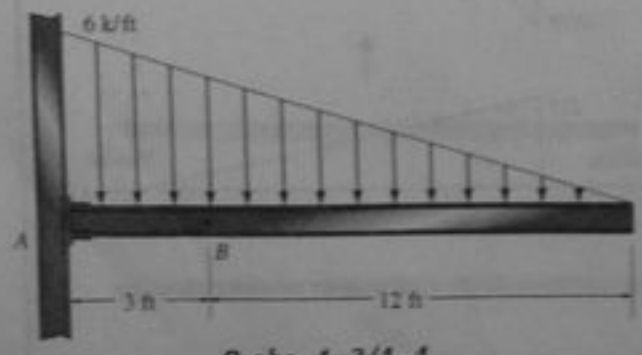
4–2. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–1.



Probs. 4–1/4–2

4–3. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en el punto *B* de la viga.

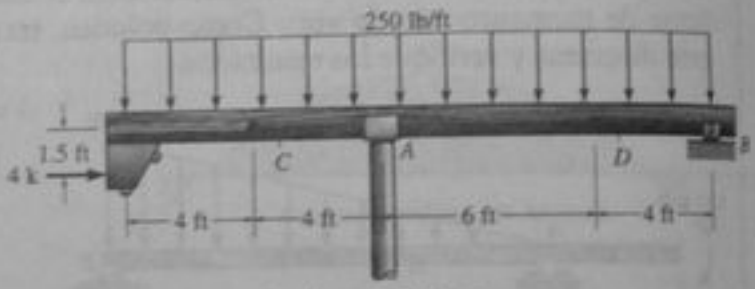
***4–4.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–3.



Probs. 4–3/4–4

4–5. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en los puntos *C* y *D* de la viga. Suponga que el soporte en *A* es un rodillo y que *B* está articulado.

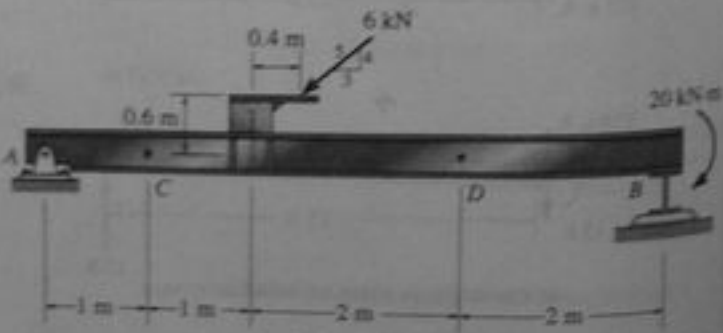
4–6. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–5.



Probs. 4–5/4–6

4–7. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en los puntos *C* y *D* de la viga. Suponga que *A* es un pasador y *B* un rodillo.

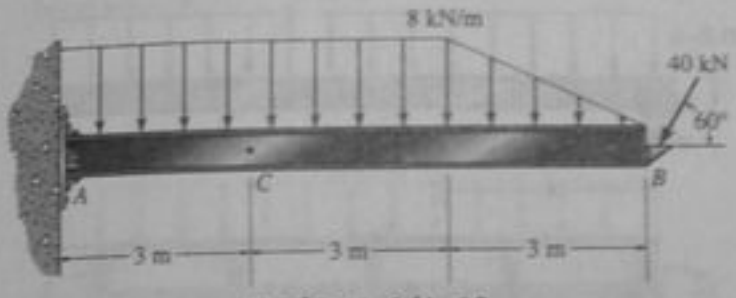
***4–8.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–7.



Probs. 4–7/4–8

4–9. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en el punto C.

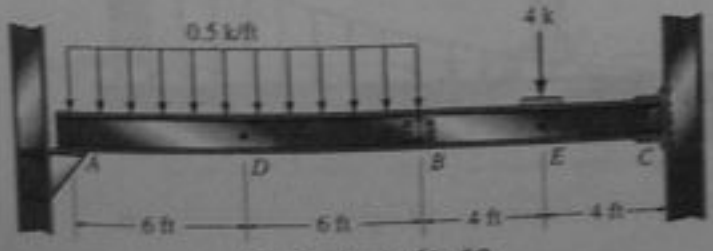
4–10. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en el problema 4–9.



Probs. 4–9/4–10

4–11. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en los puntos *D* y *E*. El punto *E* está justo a la derecha de la carga de 4 k. Suponga que *A* es un rodillo, el empalme en *B* un pasador y C un empotramiento.

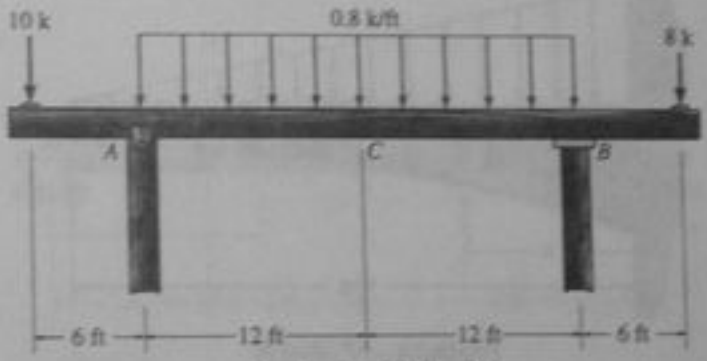
***4–12.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–11.



Probs. 4–11/4–12

4–13. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en el punto C. Suponga que el soporte en *A* es un pasador y *B* un rodillo.

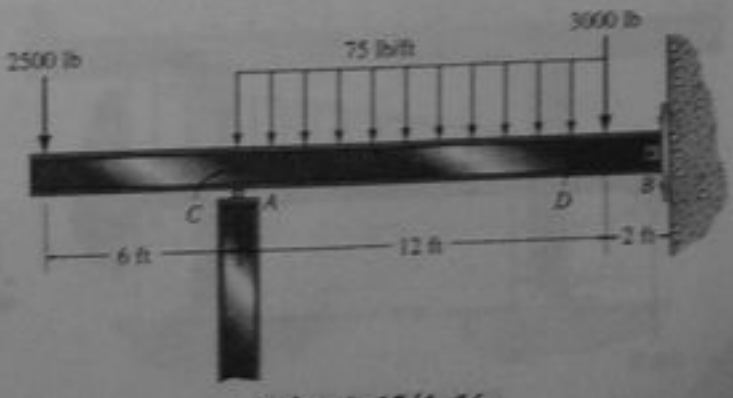
4–14. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–13.



Probs. 4–13/4–14

4–15. Determine la fuerza cortante, la fuerza axial y el momento flexionante en (a) el punto C, que está justo a la derecha del rodillo en *A* y en (b) el punto *D*, que está justo a la izquierda de la fuerza concentrada de 3000 lb. Suponga que el soporte en *B* es un pasador.

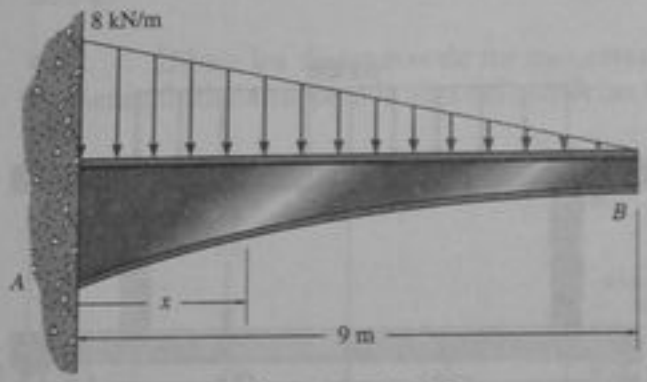
***4–16.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–15.



Probs. 4–15/4–16

4–17. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga ahusada en función de x.

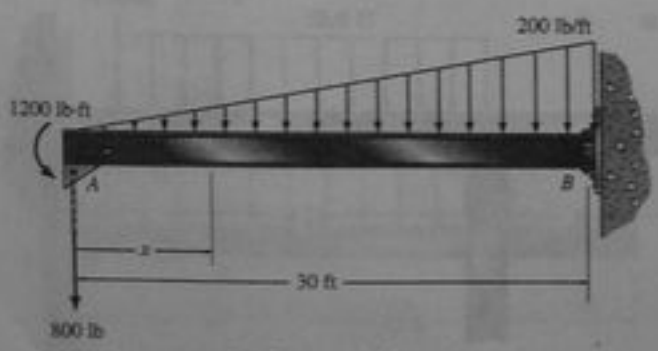
4–18. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–17.



Probs. 4–17/4–18

4–19. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en función de x.

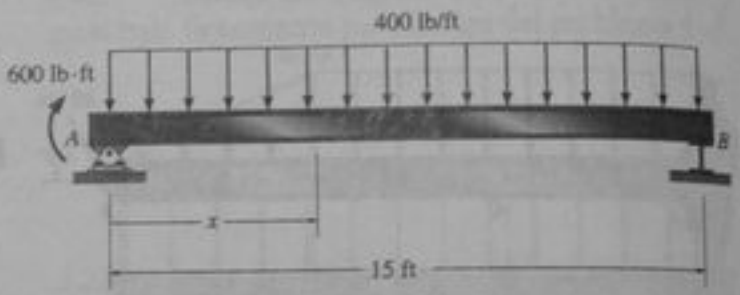
***4–20.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–19.



Probs. 4–19/4–20

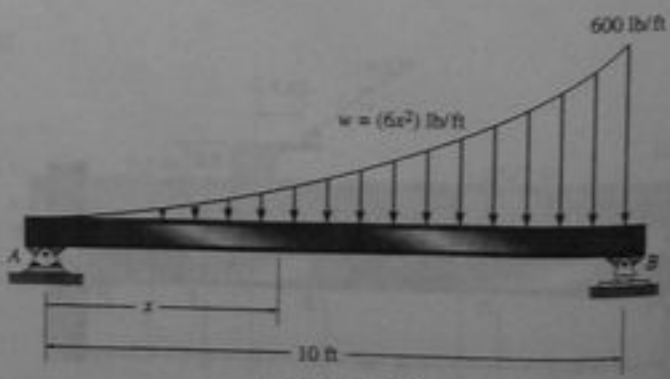
4–21. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en función de x. Suponga que el soporte en B es un rodillo.

4–22. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–21.



Probs. 4–21/4–22

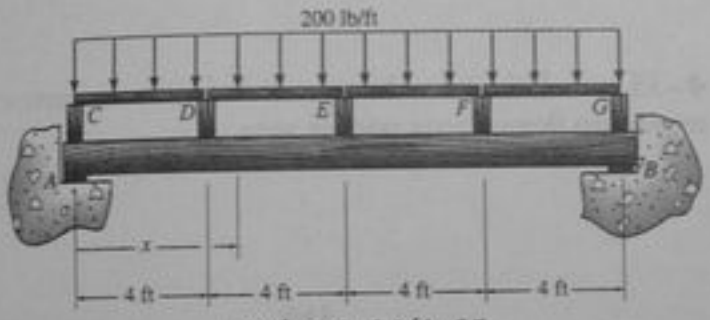
4–23. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en función de x.



Prob. 4–23

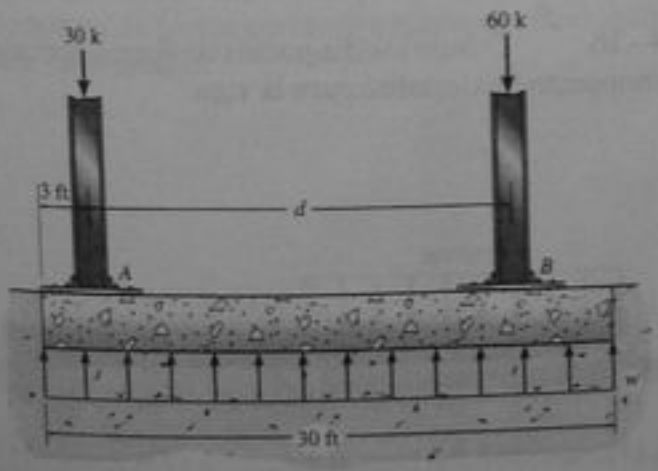
*4–24. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la trabe de piso en función de x, donde 4 ft $< x <$ 8 ft. Suponga que el soporte en A es un rodillo y B un pasador. Los tablones del piso están simplemente apoyados sobre los largueros en C, D, E, F y G.

4–25. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la trabe de piso del problema 4–24.



Probs. 4–24/4–25

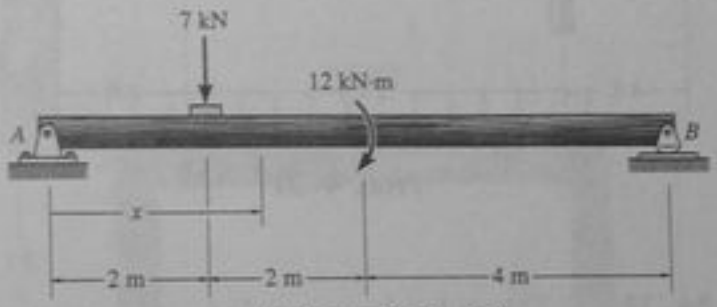
4–26. La trabe de concreto soporta las dos cargas de columnas. Si la presión del suelo bajo la trabe se supone uniforme, determine su intensidad w y la posición d de la columna en B. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la trabe.



Prob. 4–26

4–27. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en función de x, donde 2 m $< x <$ 4 m.

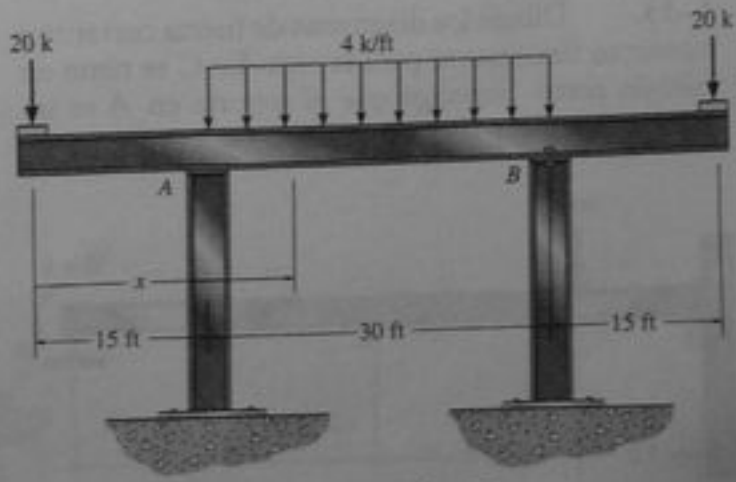
*4–28. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga del problema 4–27.



Probs. 4–27/4–28

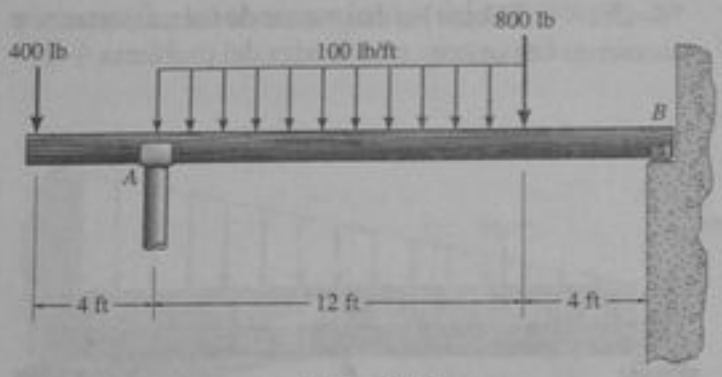
4–29. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en función de x, donde 15 ft $< x <$ 45 ft. Suponga que el soporte en A es un rodillo y B es un pasador.

4–30. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en el problema 4–29.



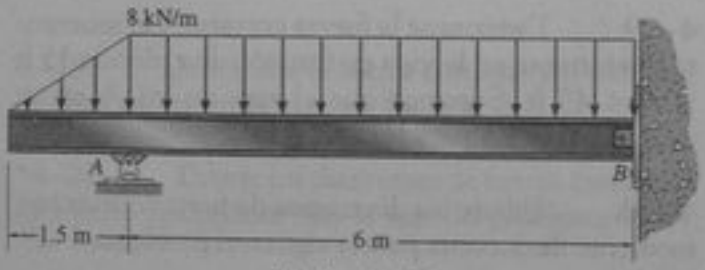
Probs. 4–29/4–30

4–31. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. Suponga que el soporte en A es un rodillo y B es un pasador.



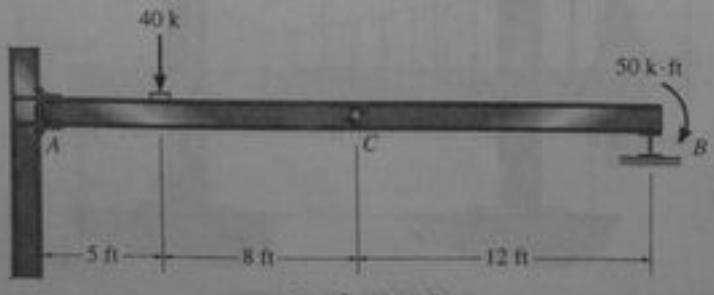
Prob. 4–31

***4–32.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. Suponga que el soporte en B es un pasador.



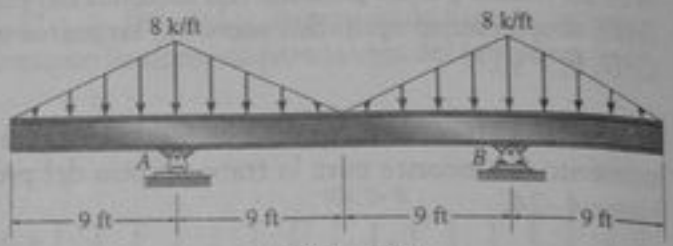
Prob. 4–32

4–33. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. En C se tiene un eslabón corto. Suponga que el soporte en A es un empotramiento y B es un rodillo.



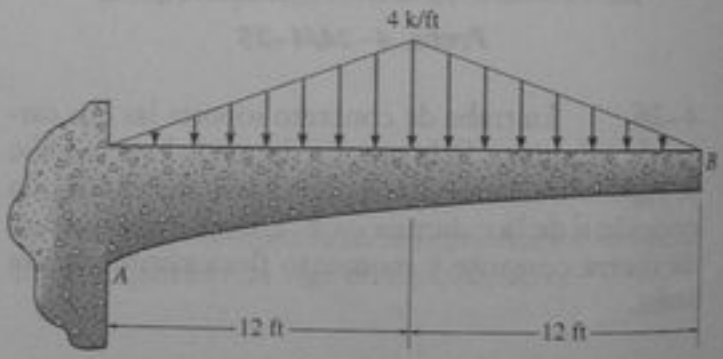
Prob. 4–33

4–34. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



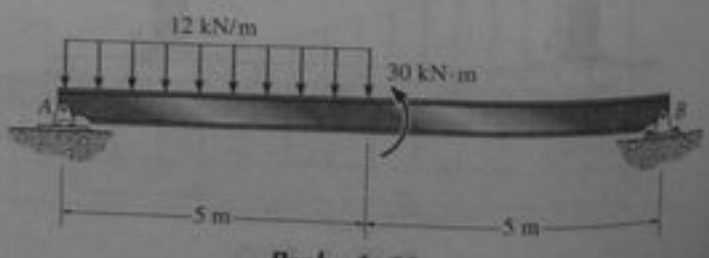
Prob. 4–34

4–35. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



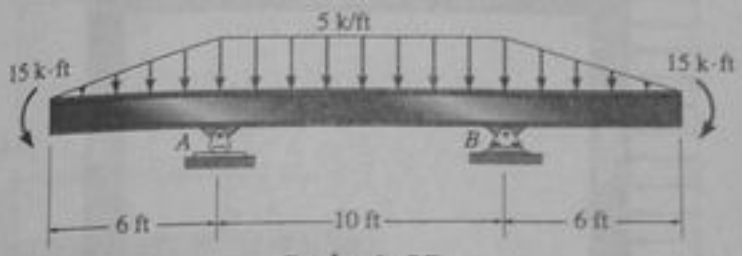
Prob. 4–35

***4–36.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



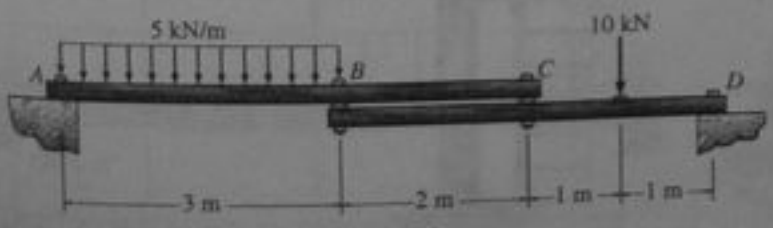
Prob. 4–36

4–37. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



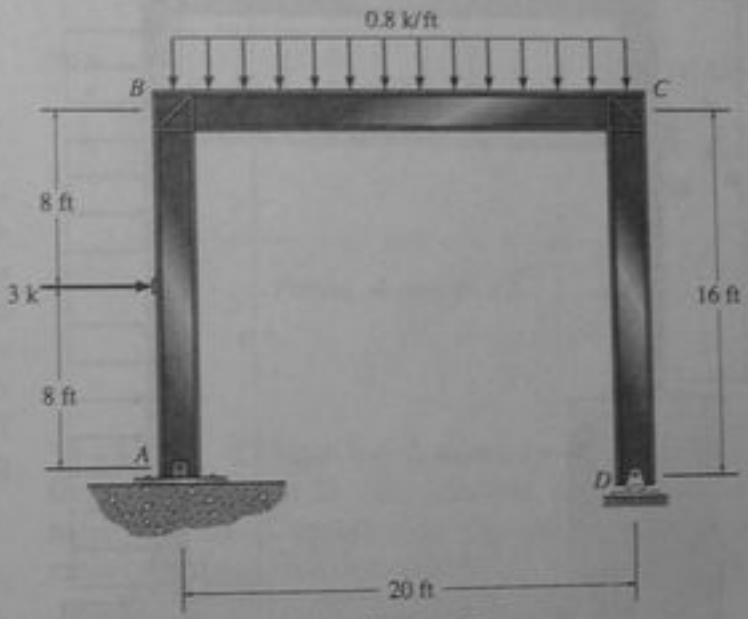
Prob. 4–37

4–38. Los tablones *ABC* y *BCD* están unidos por pernos como se muestra. Si los pernos ejercen sólo reacciones verticales sobre los tablones, determine las reacciones en los soportes y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada tablón.



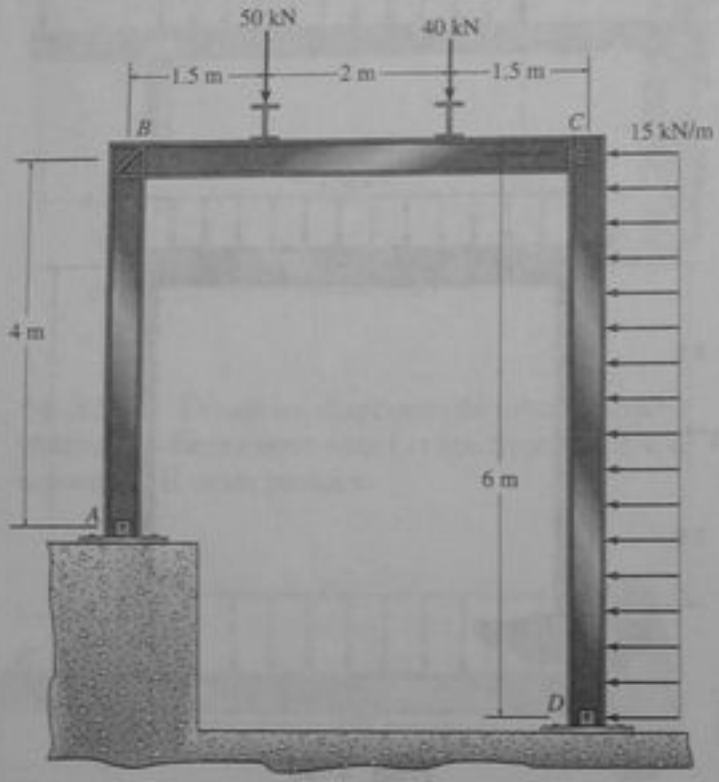
Prob. 4–38

4–39. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para *cada uno* de los tres miembros del marco. Suponga que el soporte en A es un pasador.



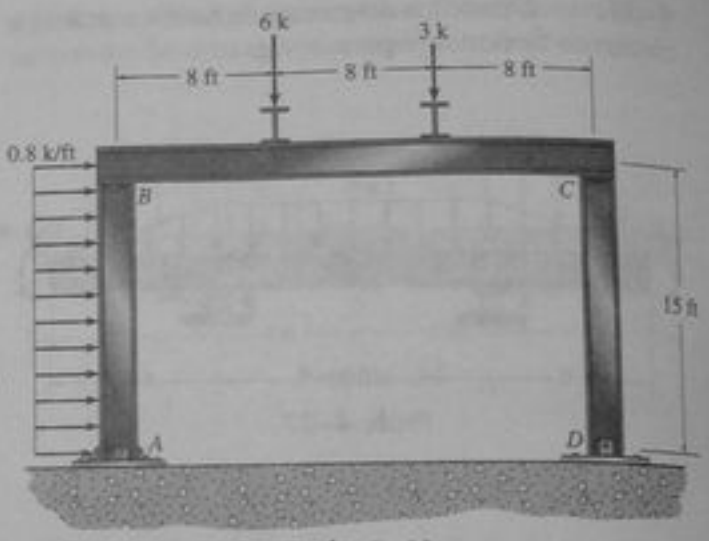
Prob. 4–39

***4–40.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada uno de los tres miembros del marco. Suponga que el marco está conectado por pasadores en A, C y D y que en B se tiene un nudo rígido.



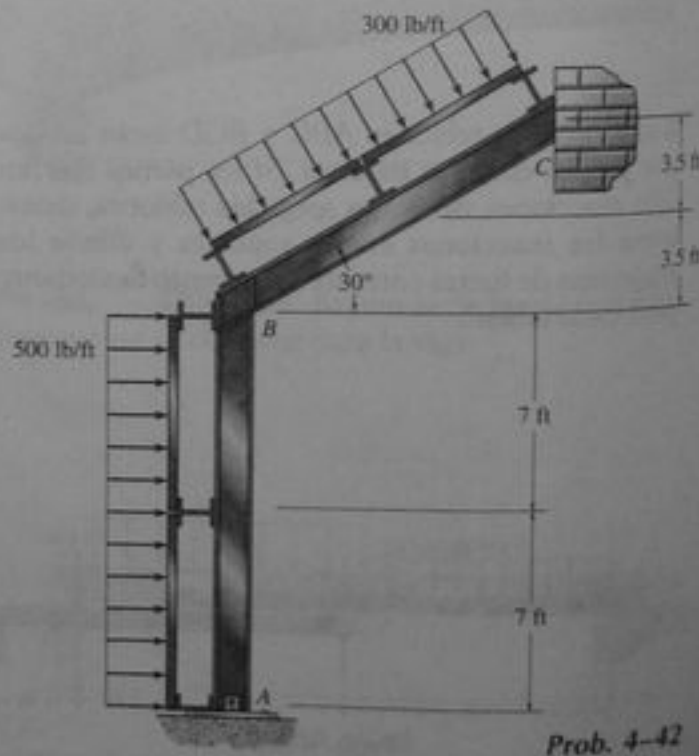
Prob. 4–40

4–41. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada uno de los tres miembros del marco. Suponga que el marco está conectado por pasadores en B, C y D y que A es un empotramiento.



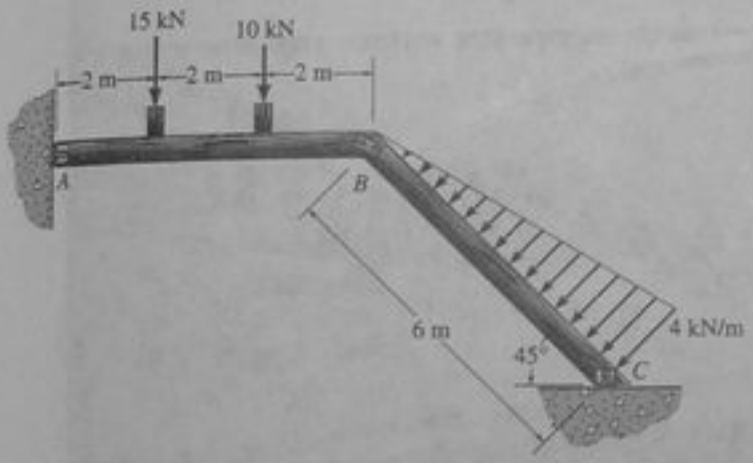
Prob. 4–41

4–42. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada miembro del marco. Suponga que el soporte en A es un pasador y el soporte en C un rodillo. El nudo en B es rígido. La carga de viento sobre el muro y segmento del techo simplemente apoyados se transmite a los miembros por medio de los largueros.



Prob. 4–42

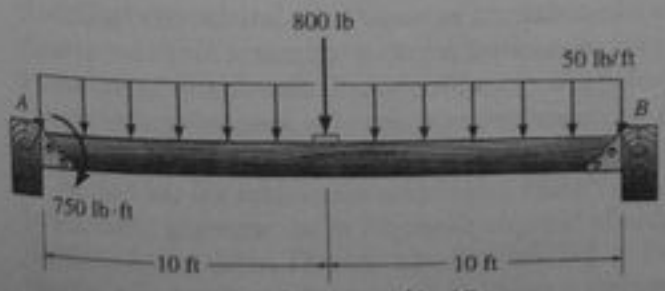
4–43. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada miembro del marco. Suponga que el marco está conectado por pasadores en *A*, *B* y *C*.



Prob. 4–43

***4–44.** Dibuje los diagramas de momento flexionante para la viga usando el método de superposición. Considere la viga como simplemente apoyada. Suponga que *A* es un pasador y *B* un rodillo.

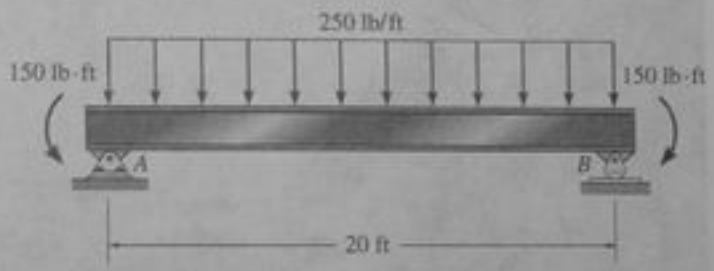
4–45. Resuelva el problema 4–44 considerando la viga en voladizo con empotramiento en *A*.



Probs. 4–44/4–45

4–46. Dibuje los diagramas de momento flexionante para la viga usando el método de superposición. Considere la viga en voladizo con empotramiento en *A*.

4–47. Dibuje los diagramas de momento flexionante para la viga usando el método de superposición. Considere la viga simplemente apoyada en *A* y en *B* como se muestra.

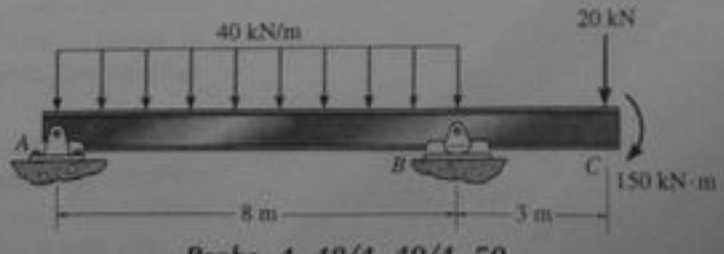


Probs. 4–46/4–47

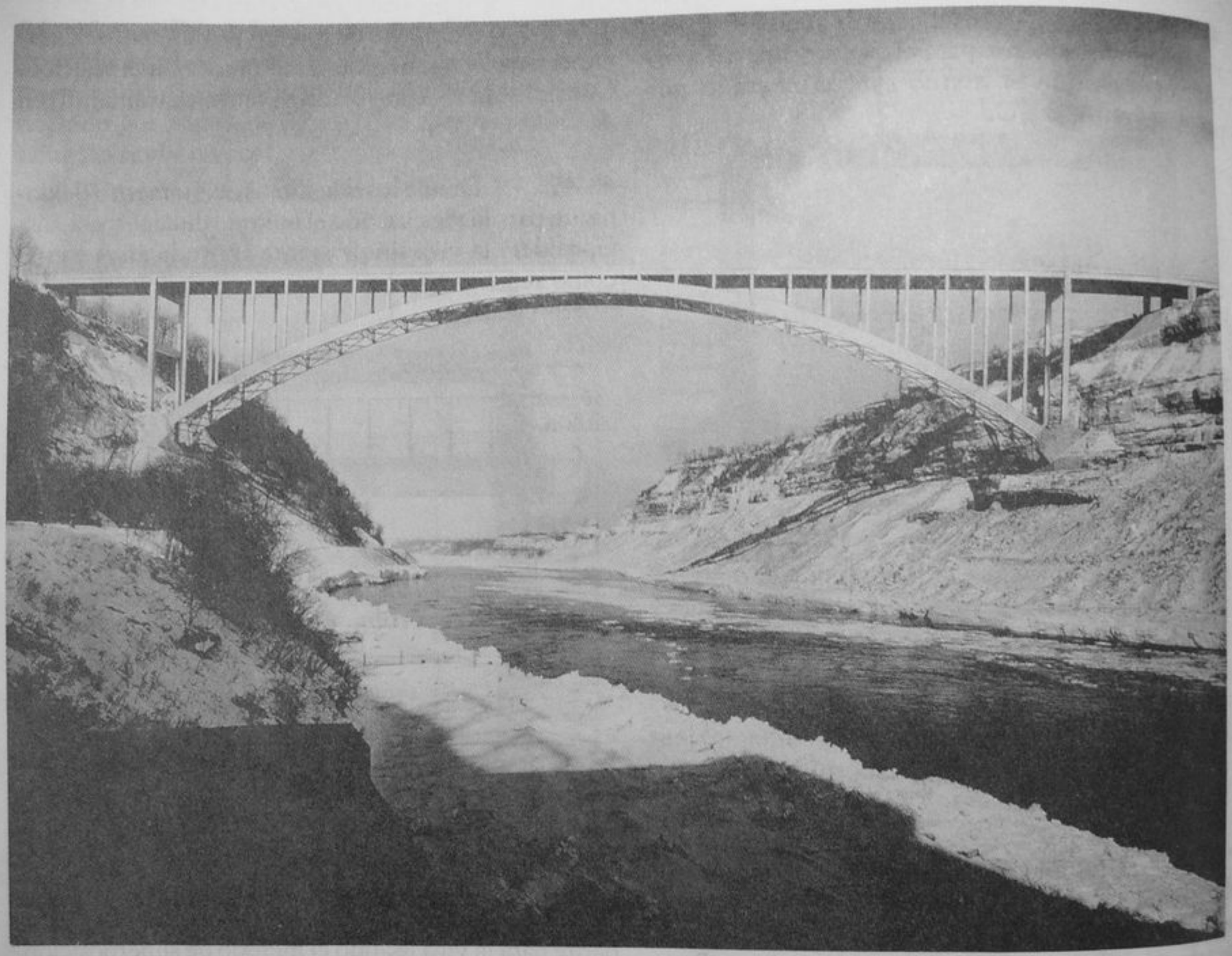
***4–48.** Dibuje los diagramas de momento flexionante para la viga usando el método de superposición. Considere la viga en voladizo con empotramiento en el soporte *A*.

4–49. Dibuje los diagramas de momento flexionante para la viga usando el método de superposición. Considere la viga en voladizo a partir del apoyo de balancín en *B*.

4–50. Dibuje los diagramas de momento flexionante para la viga usando el método de superposición. Considere la viga en voladizo con empotramiento en *C*.



Probs. 4–48/4–49/4–50



Ejemplo de un puente de arco empotrado, de dos costillas y tímpano abierto con claro principal de 1000 ft. (*Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

5

Cables y arcos

Los cables y los arcos constituyen a menudo los elementos principales portadores de la carga en muchos tipos de estructuras; en este capítulo veremos algunos de los aspectos importantes relacionados con su análisis estructural. El capítulo comienza con un análisis general de los cables, seguido de un análisis de aquellos cables sometidos a una carga concentrada y a una carga uniforme distribuida. Como la mayoría de los arcos son estáticamente indeterminados, se considerará sólo el caso especial de un arco de tres articulaciones. El análisis de esta estructura nos dará alguna información respecto al comportamiento fundamental de todas las estructuras en arco.

5.1 Cables

Los cables se usan a menudo en las estructuras de ingeniería para soportar y transmitir cargas de un miembro a otro. Cuando se usan para soportar techos colgantes, puentes y ruedas de trole, los cables constituyen el principal elemento portador de carga en la estructura. En el análisis de fuerzas de tales sistemas, el peso del cable puede despreciarse; sin embargo, cuando los cables se usan como retenidas para antenas de radio, líneas de transmisión eléctrica y grúas de brazo móvil, el peso del cable puede resultar importante y debe incluirse en el análisis estructural. Dos casos se considerarán en las secciones que siguen: un cable sometido a cargas concentradas y un cable sometido a una carga distribuida. Independientemente de qué condiciones de carga estén presentes, si la carga es coplanar con el cable, los requisitos de equilibrio se formulan de manera idéntica.

Al derivar las relaciones necesarias entre la fuerza en el cable y su pendiente, planteamos la hipótesis de que el cable es *perfectamente flexible* e *inextensible*. Debido a su flexibilidad, el cable no ofrece resistencia a la fuerza cortante o al momento flexionante y por ello, la

fuerza que actúa en el cable es siempre tangente a éste en puntos a lo largo de su longitud. Si es inextensible, el cable tiene la misma longitud antes y después de la aplicación de la carga. En consecuencia, una vez aplicada la carga, la geometría del cable permanece fija y el cable o segmentos de él pueden tratarse como un cuerpo rígido.

5.2 Cables sometidos a cargas concentradas

Cuando un cable de peso despreciable soporta varias cargas concentradas, el cable adopta la forma de varios segmentos de línea recta, cada uno de los cuales está sometido a una fuerza constante de tensión. Considere, por ejemplo, el cable que se muestra en la figura 5–1. Aquí, θ representa el ángulo de la *cuerda* AB del cable y $\mathcal{L}$ es el claro del cable. Si las distancias L_1, L_2 y L_3 y las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ se conocen, el problema es determinar las *nueve incógnitas que conforman la tensión en cada uno de los tres* segmentos, las *cuatro* componentes de reacción en A y B y las flechas y_C y y_D en los *dos* puntos C y D. Para la solución podemos escribir *dos* ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada uno de los puntos A, B, C y D. Esto da un total de *ocho ecuaciones*. Para completar la solución, es preciso saber algo sobre la geometría del cable para obtener la novena ecuación necesaria. Por ejemplo, si se especifica la *longitud* $\mathcal{L}$ total del cable, podemos usar el teorema de Pitágoras para relacionar cada una de las tres longitudes de los segmentos, escritas en términos de θ, y_C, y_D, L_1, L_2 y L_3, con la longitud total $\mathcal{L}$. Desafortunadamente, este tipo de problema no puede resolverse fácilmente a mano. Sin embargo, otra posibilidad es especificar una de las flechas, digamos y_C o y_D, en vez de la longitud del cable. Haciéndolo así, las ecuaciones de equilibrio son entonces sufi-

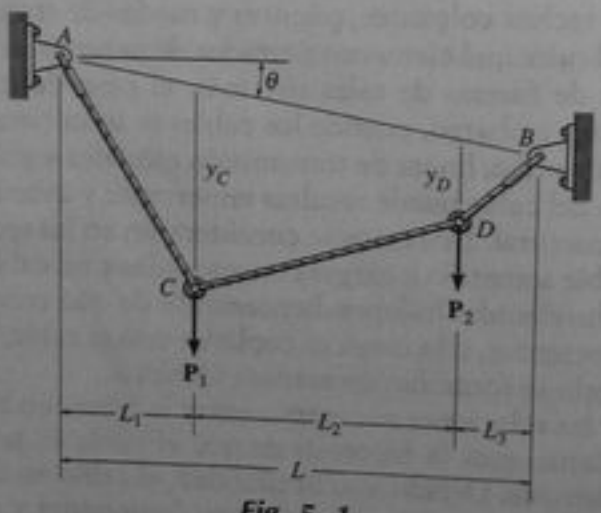


Fig. 5–1

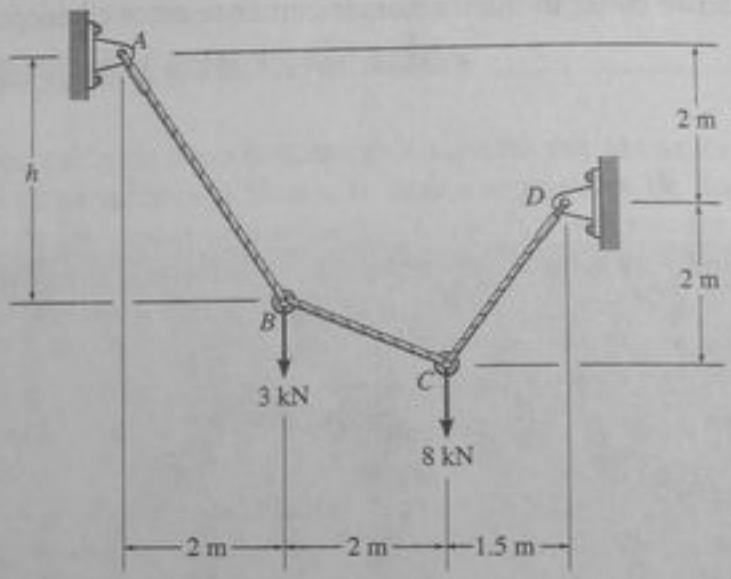
cientes para obtener las fuerzas desconocidas y la flecha restante. Una vez obtenida la flecha en cada punto de carga, la longitud del cable puede determinarse por trigonometría.

Al efectuar un análisis de equilibrio para un problema de este tipo, las fuerzas en el cable también pueden obtenerse escribiendo las ecuaciones de equilibrio para el cable entero o cualquier porción de él. El siguiente ejemplo ilustra numéricamente estos conceptos.

Puente con tirantes Paseo-Kennewick en Paseo, Washington. (*Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

Ejemplo 5-1

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura 5–2*a*. ¿Qué valor tiene la dimensión *h*?



(a)

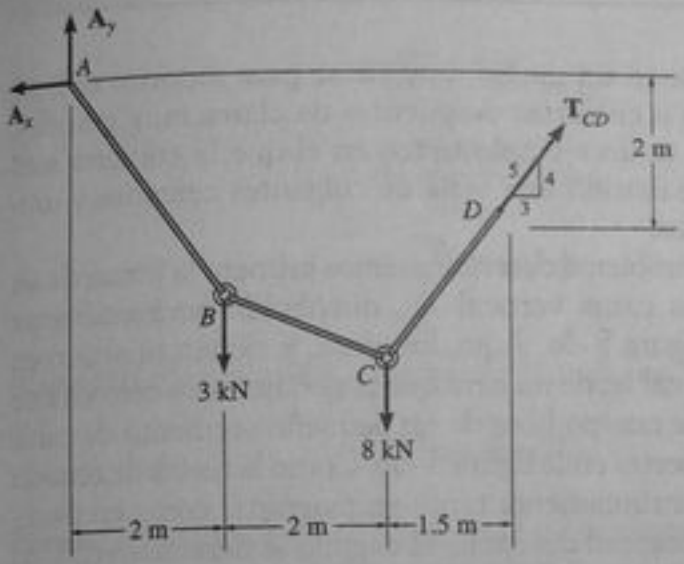
Fig. 5–2

Solución

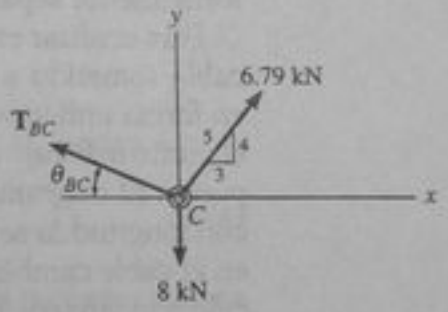
Por inspección vemos que hay cuatro reacciones externas desconocidas (A_x, A_y, D_x y D_y) y tres tensiones desconocidas en el cable, una en cada segmento de cable. Esas siete incógnitas, junto con la distancia *h*, pueden determinarse con las ocho ecuaciones de equilibrio disponibles ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) aplicadas en los puntos *A* al *D*.

Un procedimiento más directo de solución estriba en considerar la pendiente dada del cable *CD*; en la figura 5–2*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del cable entero. Podemos obtener la tensión en el segmento *CD* como sigue:

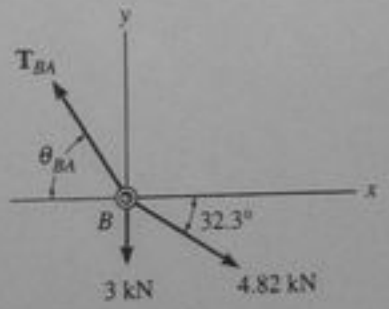
$$\Sigma M_A = 0;$$
$$T_{CD}(3/5)(2\text{ m}) + T_{CD}(4/5)(5.5\text{ m}) - 3\text{ kN}(2\text{ m}) - 8\text{ kN}(4\text{ m}) = 0$$
$$T_{CD} = 6.79\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)



(c)



(d)

Podemos analizar ahora el equilibrio de los puntos C y B en secuencia. Punto C (figura 5–2*c*):

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad 6.79\ \text{kN}(3/5) - T_{BC}\cos\theta_{BC} = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad 6.79\ \text{kN}(4/5) - 8\ \text{kN} + T_{BC}\,\text{sen}\,\theta_{BC} = 0$$
$$\theta_{BC} = 32.3°$$
$$T_{BC} = 4.82\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Punto B (figura 5–2*d*):

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad -T_{BA}\cos\theta_{BA} + 4.82\ \text{kN}\cos 32.3° = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad T_{BA}\,\text{sen}\,\theta_{BA} - 4.82\ \text{kN}\,\text{sen}\,32.3° - 3\ \text{kN} = 0$$
$$\theta_{BA} = 53.8°$$
$$T_{BA} = 6.90\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Entonces, de la figura 5–2*a*,

$$h = (2\ \text{m})\tan 53.8° = 2.74\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

5.3 Cable sometido a una carga uniforme distribuida

Los cables proporcionan un medio muy eficaz para soportar el peso muerto de las trabes o cubiertas de puentes de claros muy grandes. Un puente colgante es un ejemplo típico en el que la cubierta está suspendida del cable usando una serie de colgantes cercanos y uniformemente separados.

Para analizar este problema determinaremos primero la forma de un cable sometido a una carga vertical w_0, distribuida *horizontalmente* en forma uniforme, figura 5–3*a*. Aquí, los ejes x, y, tienen su origen en el punto más bajo del cable, de manera que la pendiente es cero en este punto. El diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de cable con longitud Δs se muestra en la figura 5–3*b*. Como la fuerza de tensión en el cable cambia continuamente tanto en magnitud como en dirección a lo largo de la longitud del cable, el cambio se denota con ΔT en el diagrama de cuerpo libre. La carga distribuida se representa por su fuerza resultante $w_0 \Delta x$ que actúa a una distancia $\Delta x/2$ del punto O. Aplicando las ecuaciones de equilibrio se obtiene

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad -T\cos\theta + (T + \Delta T)\cos(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad -T\,\text{sen}\,\theta - w_0(\Delta x) + (T + \Delta T)\,\text{sen}(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0; \quad w_0(\Delta x)(\Delta x/2) - T\cos\theta\,\Delta y + T\,\text{sen}\,\theta\,\Delta x = 0$$

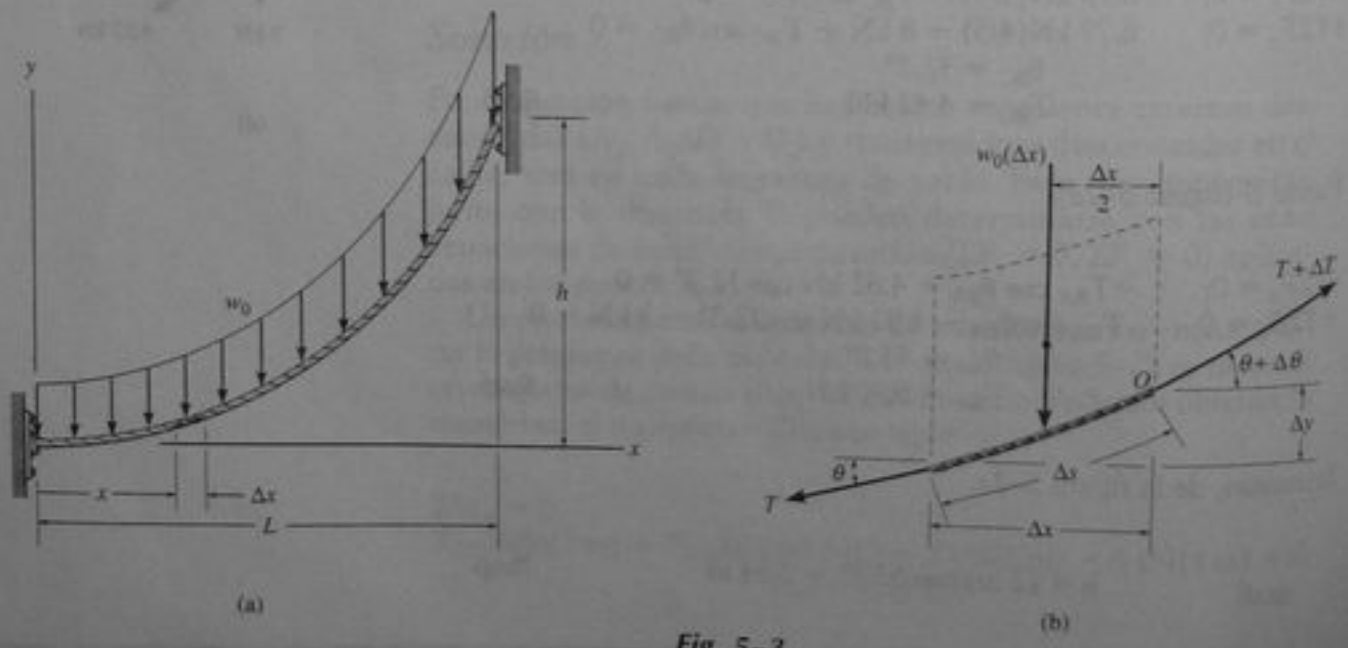


Fig. 5–3

Dividiendo cada una de esas ecuaciones entre Δx y tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, y por consiguiente $\Delta y \to 0$, $\Delta\theta \to 0$ y $\Delta T \to 0$, obtenemos

$$\frac{d(T\cos\theta)}{dx} = 0 \tag{5–1}$$

$$\frac{d(T\,\text{sen}\,\theta)}{dx} = w_0 \tag{5–2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \tag{5–3}$$

Integrando la ecuación 5–1, donde $T = F_H$ en $x = 0$, tenemos

$$T\cos\theta = F_H \tag{5–4}$$

Por tanto, la componente horizontal de la fuerza en *cualquier punto* a lo largo del cable permanece *constante*.

Integrando la ecuación 5–2, considerando que $T\,\text{sen}\,\theta = 0$ en $x = 0$, se obtiene

$$T\,\text{sen}\,\theta = w_0 x \tag{5–5}$$

Dividiendo la ecuación 5–5 entre la ecuación 5–4 se elimina T. Usando luego la ecuación 5–3, podemos obtener la pendiente en cualquier punto,

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0 x}{F_H} \tag{5–6}$$

Efectuando una segunda integración con $y = 0$ en $x = 0$, resulta

$$y = \frac{w_0}{2F_H}x^2 \tag{5–7}$$

Esta es la ecuación de una *parábola*. La constante F_H puede obtenerse usando la condición de frontera $y = h$ en $x = L$. Así entonces,

$$F_H = \frac{w_0 L^2}{2h} \tag{5–8}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación 5–7 se obtiene

$$y = \frac{h}{L^2}x^2 \tag{5–9}$$

De acuerdo con la ecuación 5–4, la tensión máxima en el cable ocurre cuando θ es máxima; esto es, en $x = L$. Por tanto, de las ecuaciones 5–4 y 5–5,

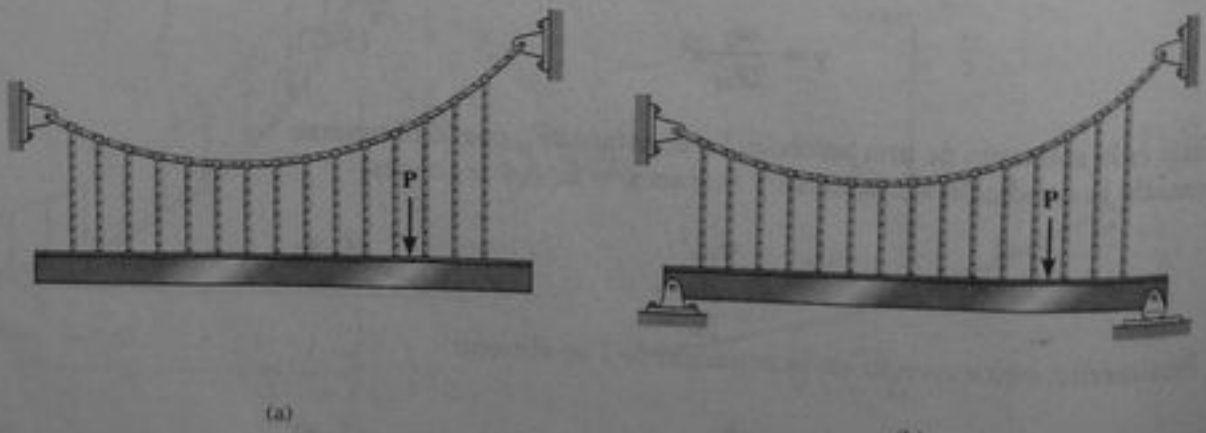
$$T_{máx} = \sqrt{F_H^2 + (w_0 L)^2} \tag{5–10}$$

Usando la ecuación 5–8, podemos también expresar $T_{máx}$ en términos de w_0, esto es,

$$T_{máx} = w_0 L \sqrt{1 + (L/2h)^2} \tag{5–11}$$

Note que hemos despreciado el peso del cable, que es *uniforme* sobre la *longitud* del cable y no sobre su proyección horizontal. En realidad, un cable sometido a su propio peso y libre de cualquier otra carga, tomará la forma de una curva *catenaria*. Sin embargo, si la razón flecha a claro es pequeña, que es el caso en la mayoría de las aplicaciones estructurales, esta curva se aproxima bastante a una curva parabólica, como se determina aquí.

De los resultados de este análisis, se infiere que si un cable *mantiene* una forma parabólica, la carga muerta de la cubierta de un puente colgante o de una trabe suspendida estará *uniformemente distribuida* sobre la longitud horizontalmente proyectada del cable. Por tanto, si la trabe en la figura 5–4*a* está soportada por una serie de colgantes, cercanos y uniformemente separados, la carga en cada colgante debe ser la *misma* para garantizar que el cable tenga una forma parabólica. Además, si suponemos que la trabe es *rígida*, y que se mantiene la pendiente parabólica del cable, entonces cualquier carga móvil P debe ser igualmente compartida por cada colgante.

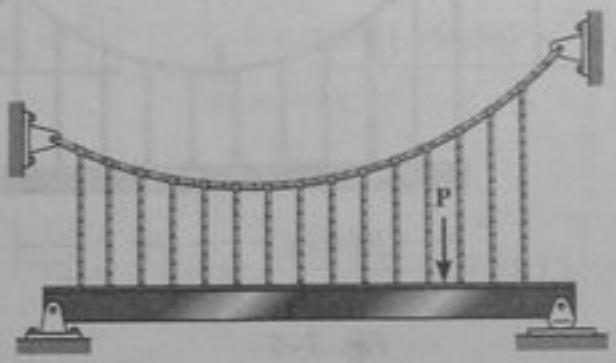


(a) (b)

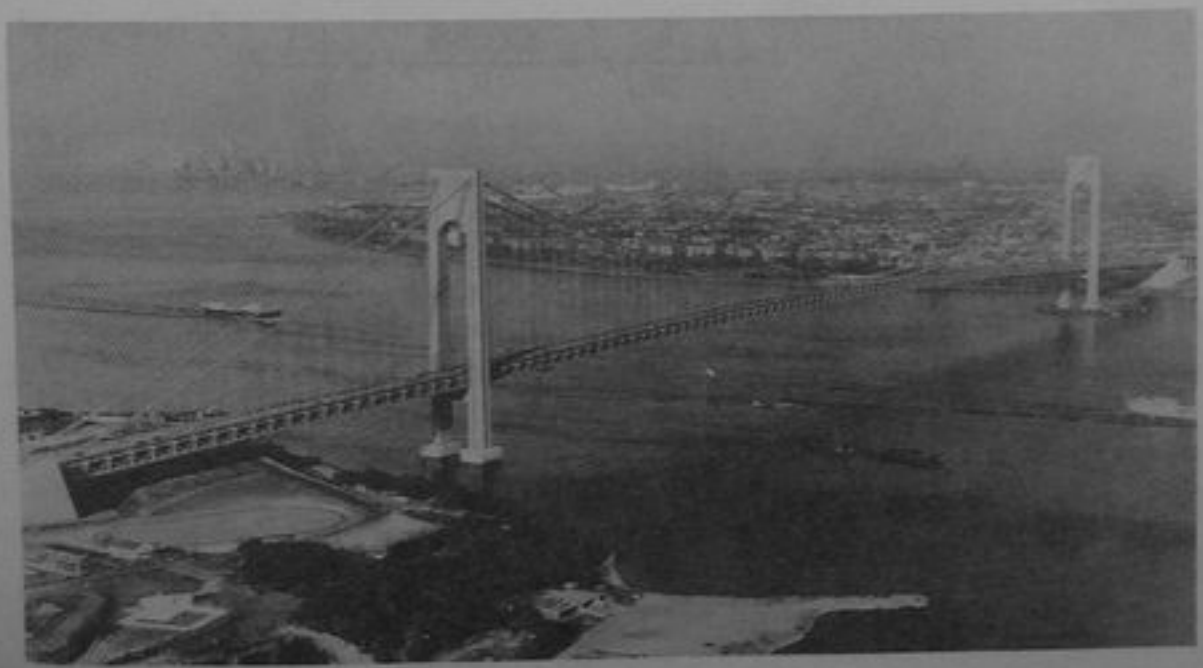
Fig. 5–4

Usando esta hipótesis podemos efectuar el análisis estructural de la trabe o de cualquier otra estructura que esté libremente suspendida del cable. En particular, si la trabe está simplemente soportada, así como soportada por el cable, el análisis será estáticamente indeterminado de primer grado, figura 5–4*b*. Sin embargo, si la trabe tiene un pasador interno en algún punto intermedio a lo largo de su longitud, figura 5–4*c*, esto dará una condición de momento nulo y puede entonces efectuarse un análisis estructural determinado de la trabe.

Los siguientes ejemplos ilustran numéricamente esos conceptos.



(c)



Puente Verrazano-Narrows en la entrada al puerto de Nueva York. Su claro principal es de 4,260 ft. (*Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

Ejemplo 5-2

El cable en la figura 5–5*a* soporta una trabe que pesa 850 lb/ft. Determine la tensión en el cable en los puntos *A*, *B* y *C*. Asimismo, ¿cuál es la fuerza en cada uno de los colgantes?

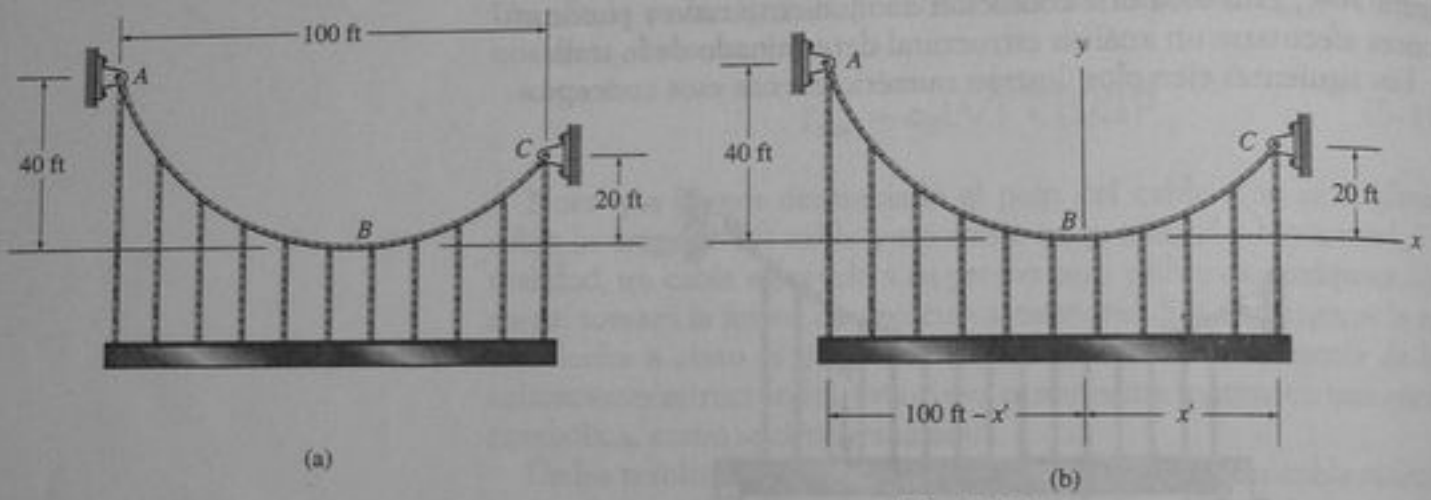


Fig. 5–5

Solución

El origen de los ejes coordenados se fija en el punto *B*, que es el punto más bajo del cable y en el que su pendiente es igual a cero; figura 5–5*b*. De la ecuación 5–7, la ecuación parabólica del cable es:

$$y = \frac{w_0}{2F_H}x^2 = \frac{850\ \text{lb/ft}}{2F_H}x^2 = \frac{425}{F_H}x^2 \qquad (1)$$

Suponiendo que el punto *C* está a una distancia x' de *B*, tenemos

$$20 = \frac{425}{F_H}x'^2$$
$$F_H = 21.25x'^2 \qquad (2)$$

También, para el punto *A*,

$$40 = \frac{425}{F_H}[-(100 - x')]^2$$
$$40 = \frac{425}{21.25x'^2}[-(100 - x')]^2$$
$$x'^2 + 200x' - 10{,}000 = 0$$
$$x' = 41.42\ \text{ft}$$

Entonces, de las ecuaciones 2 y 1 (o de la ecuación 5–6), tenemos

$$F_H = 21.25(41.42)^2 = 36{,}459.2 \text{ lb}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{850}{36{,}459.2}x = 0.02331x \qquad (3)$$

En el punto A,

$$x = -(100 - 41.42) = -58.58 \text{ ft}$$

$$\tan \theta_A = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-58.58} = 0.02331(-58.58) = -1.366$$

$$\theta_A = -53.79°$$

Usando la ecuación 5–4,

$$T_A = \frac{F_H}{\cos \theta} = \frac{36{,}459.2}{\cos(-53.79°)} = 61.7 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

En el punto B, $x = 0$,

$$\tan \theta_B = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0, \qquad \theta_B = 0$$

$$T_B = \frac{F_H}{\cos \theta_B} = \frac{36{,}459.2}{\cos 0} = 36.5 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

En el punto C,

$$x = 41.42 \text{ ft}$$

$$\tan \theta_C = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=41.42} = 0.02331(41.42) = 0.9657$$

$$\theta_C = 44.0°$$

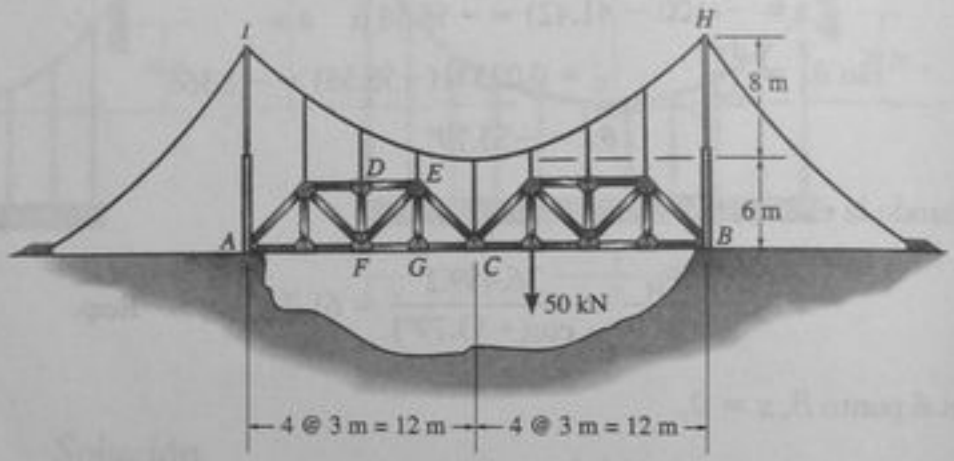
$$T_C = \frac{F_H}{\cos \theta_C} = \frac{36{,}459.2}{\cos 44.0°} = 50.7 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

Como la trabe está soportada por 11 colgantes, la fuerza en cada uno de ellos es

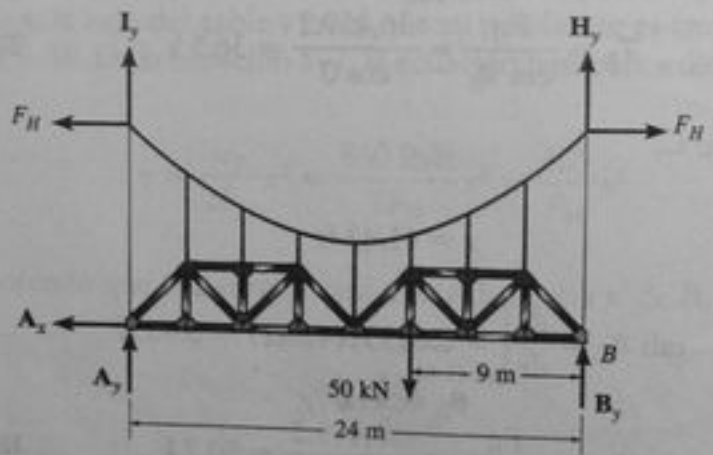
$$F_h = \frac{850 \text{ lb/ft } (100 \text{ ft})}{11} = 7.73 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 5-3

El puente colgante en la figura 5–6*a* está construido usando las dos armaduras de atirantamiento conectadas por pasadores en sus extremos C y apoyadas en un pasador en A y en una mecedora en B. Determine la tensión máxima en el cable *IH* y la fuerza en cada colgante. El cable tiene forma parabólica y el puente está sometido a una sola carga de 50 kN.



(a)



(b)

Fig. 5–6

Solución

El diagrama de cuerpo libre del sistema cable-armadura se muestra en la figura 5–6*b*. De acuerdo con la ecuación 5–4, la componente horizontal F_H de la tensión del cable en *I* y *H* debe ser constante. Tomando momentos respecto a *B*, tenemos

$$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0; \quad -I_y(24\text{ m}) - A_y(24\text{ m}) + 50\text{ kN}(9\text{ m}) = 0$$
$$I_y + A_y = 18.75$$

Si sólo se considera la mitad de la estructura suspendida, figura 5–6*c*, entonces al sumar momentos respecto al pasador C, obtenemos

$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0; \quad F_H(14\text{ m}) - F_H(6\text{ m}) - I_y(12\text{ m}) - A_y(12\text{ m}) = 0$$
$$I_y + A_y = 0.667F_H$$

De esas dos ecuaciones,

$$18.75 = 0.667F_H$$
$$F_H = 28.125\text{ kN}$$

Para obtener la tensión máxima en el cable, usaremos la ecuación 5–11, pero primero es necesario determinar w_0 con la ecuación 5–8:

$$w_0 = \frac{2F_H h}{L^2} = \frac{2(28.125\text{ kN})(6\text{ m})}{(12\text{ m})^2} = 2.344\text{ kN/m}$$

Entonces, usando la ecuación 5–11 tenemos,

$$T_{máx} = w_0 L\sqrt{1 + (L/2h)^2}$$
$$= 2.344(12\text{ m})\sqrt{1 + (12\text{ m}/2(6\text{ m}))^2}$$
$$= 39.8\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

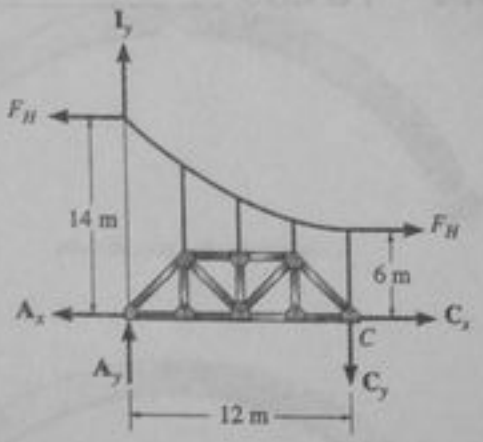
Cada colgante soporta la carga w_0 de una longitud efectiva de 3 m. Por tanto, la carga por colgante es

$$F_h = (2.344\text{ kN/m})(3\text{ m}) = 7.03\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

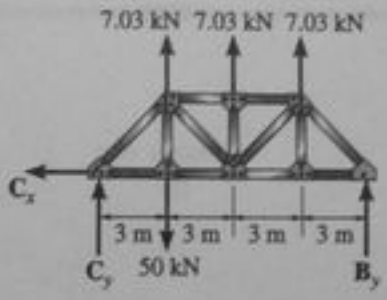
Nota: Para determinar las fuerzas en los miembros de las armaduras, es necesario determinar primero las reacciones en los soportes A, B y C. Por ejemplo, el diagrama de cuerpo libre de la armadura CB se muestra en la figura 5–6*d*. Así,

$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0; \quad 7.03\text{ kN}(3\text{ m} + 6\text{ m} + 9\text{ m}) - 50\text{ kN}(3\text{ m}) + B_y(12\text{ m}) = 0$$
$$B_y = 1.95\text{ kN}$$
$$\rightarrow +\Sigma F_x = 0; \quad C_x = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3(7.03\text{ kN}) - 50\text{ kN} + 1.95\text{ kN} + C_y = 0$$
$$C_y = 27.0\text{ kN}$$

Finalmente, podemos ahora usar el método de los nudos o el método de las secciones para determinar las fuerzas en los miembros en la manera usual.



(c)



(d)

5.4 Arcos

Igual que los cables, los arcos pueden usarse para reducir los momentos flexionantes en estructuras de gran claro. Esencialmente un arco es un cable invertido, por lo que recibe su carga principal en compresión aunque, debido a su rigidez debe también resistir cierta flexión y fuerza cortante dependiendo de cómo esté cargado y conformado. En particular, si el arco tiene una *forma parabólica* y está sometido a una carga vertical *uniforme* distribuida horizontalmente, entonces del análisis de cables se infiere que sólo fuerzas compresivas serán resistidas por el arco.

En la figura 5–7 se muestra un arco típico con la nomenclatura usada para definir su geometría. Dependiendo de la aplicación, pueden seleccionarse varios tipos de arcos para soportar una carga. Un arco *empotrado*, figura 5–8*a* se suele fabricar con concreto reforzado. Aunque puede requerirse menos material para construirlo que en el caso de otros tipos de arcos, deberá tener una cimentación muy sólida, ya que es indeterminado de tercer grado, y, en consecuencia, pueden presentarse esfuerzos adicionales en el arco debido al asentamiento relativo de sus soportes. Un *arco de dos articulaciones*, figura 5–8*b*, se construye generalmente de metal o madera; es indeterminado de primer grado y aunque menos rígido que un arco empotrado, es un tanto insensible a los asentamientos. Podríamos hacer esta estructura estáticamente determinada reemplazando una de las articulaciones por un rodillo. Sin embargo, de hacerlo así, se eliminaría la capacidad de la estructura de resistir flexión a lo largo de su claro, con lo cual acabaría sirviendo como una viga curva y no como un arco. Un *arco de tres articulaciones*, figura 5–8*c*, que también se fabrica en metal o de madera, es estáticamente determinado. A diferencia de los arcos estáticamente indeterminados, éste no se ve afectado por asentamientos o cambios de temperatura. Finalmente, si se van a construir arcos de dos o tres articulaciones se harán sin tener que construir grandes cimentaciones y si la altura libre no es un problema, los soportes pueden entonces conectarse con un tirante, figura 5–8*d*. Un *arco atirantado* permite que la estructura se comporte como una unidad rígida ya que el tirante soporta la componente horizontal del empuje o coceo en los soportes. No se ve afectado tampoco por los correspondientes asentamientos de los soportes.

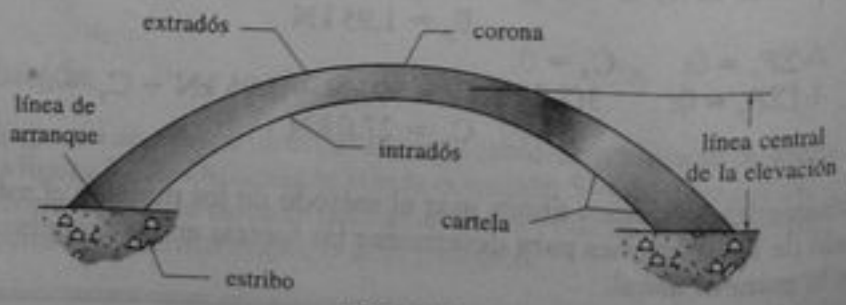
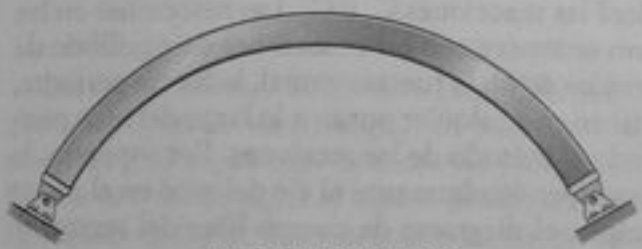


Fig. 5–7

arco empotrado
(a)

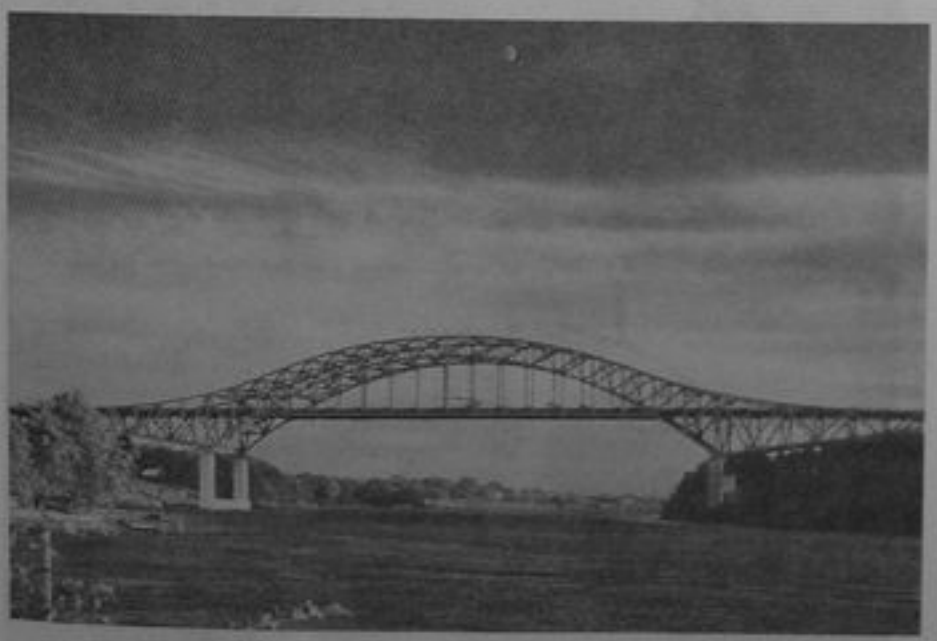


arco de dos articulaciones
(b)

arco de tres articulaciones
(c)

arco atirantado
(d)

Fig. 5–8



Puente de armadura con arco de paso a través y claro principal de 1,344 ft. (*Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

5.5 Arco de tres articulaciones

Para entender cómo los arcos transmiten las cargas, consideraremos ahora el análisis de un arco de tres articulaciones como el mostrado en la figura 5–9*a*. En este caso, la tercera articulación se localiza en la corona y los soportes están a diferentes alturas. Para determinar las reacciones en los soportes, el arco se desarma y el diagrama de cuerpo libre correspondiente a cada miembro se muestra en la figura 5–9*b*. Se tienen seis incógnitas para las cuales se dispone de seis ecuaciones de equilibrio. Un método para resolver este problema es aplicar ecuaciones de momento respecto a los puntos A y B. La solución simultánea de ellas dará las reacciones C_x y C_y. Las reacciones en los soportes se determinan entonces con las ecuaciones de equilibrio de fuerzas. Una vez obtenidas éstas, la fuerza normal, la fuerza cortante, y el momento flexionante en cualquier punto a lo largo del arco pueden encontrarse usando el método de las secciones. Por supuesto, la sección debe tomarse perpendicularmente al eje del arco en el punto considerado. Por ejemplo, el diagrama de cuerpo libre del segmento AD es el que se muestra en la figura 5–9*c*.

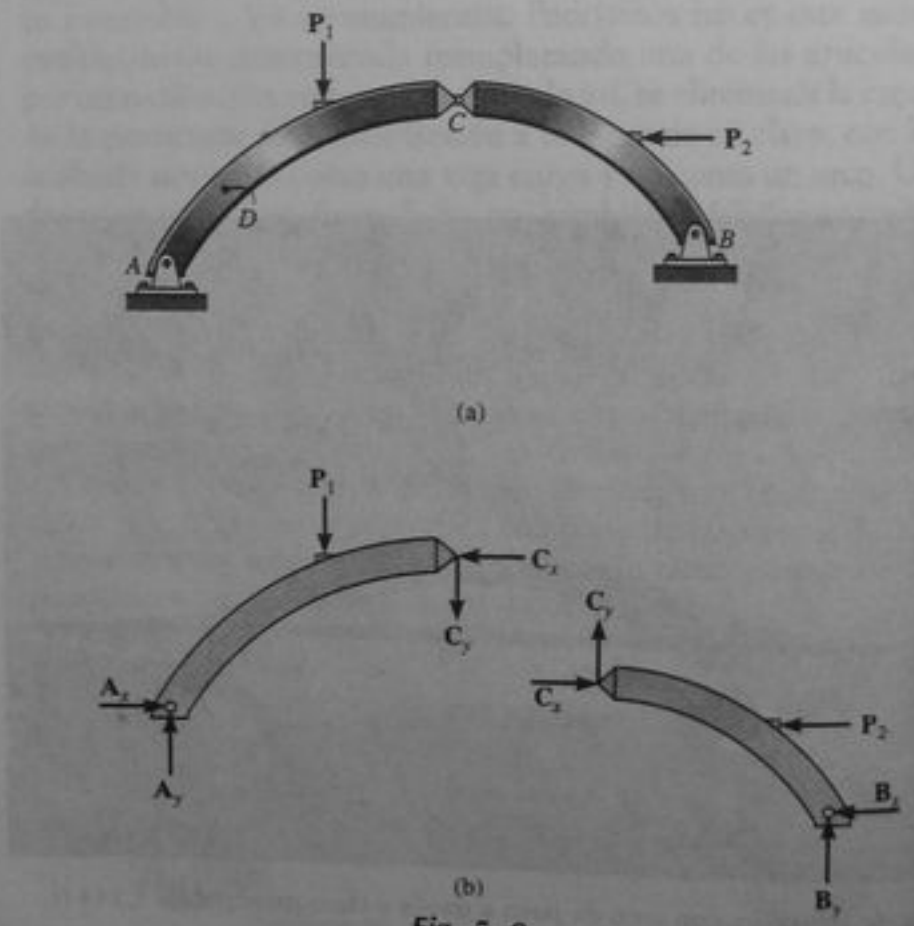
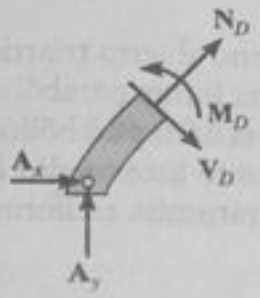


Fig. 5–9



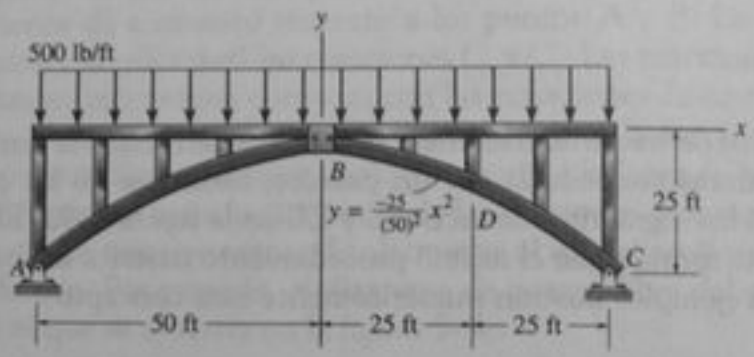
(c)

Los arcos de tres articulaciones también pueden tomar la forma de dos armaduras conectadas por un pasador, cada una de las cuales reemplaza los segmentos de arco *AC* y *CB* en la figura 5–9*a*. El análisis de esta forma sigue el mismo procedimiento descrito arriba. Los siguientes ejemplos ilustran numéricamente esos conceptos.

Puente en arco de tres articulaciones con tímpano abierto.

Ejemplo 5-4

El puente de arco de tímpano abierto triarticulado que se muestra en la figura 5–10*a* tiene una forma parabólica y soporta una carga uniforme. Demuestre que el arco parabólico está sometido sólo a compresión axial en un punto intermedio D a lo largo de su eje. Suponga que la carga se transmite uniformemente a las costillas del arco.

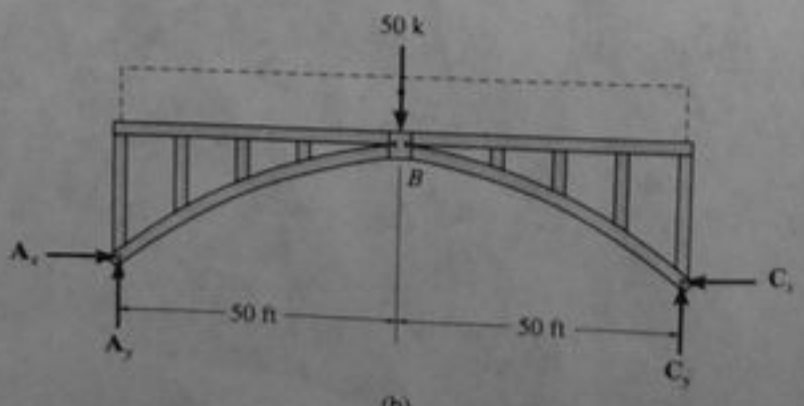


(a)

Fig. 5–10

Solución

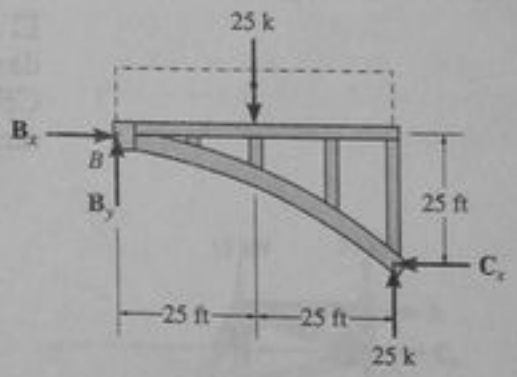
Aquí los soportes están a la misma altura. Los diagramas de cuerpo libre del arco entero y de la parte BC se muestran en la figura 5–10*b* y 5–10c, respectivamente. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos:



(b)

Arco entero:

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad C_y(100\text{ ft}) - 50\text{ k}(50\text{ ft}) = 0$$
$$C_y = 25\text{ k}$$



(c)

Segmento de arco *BC*:

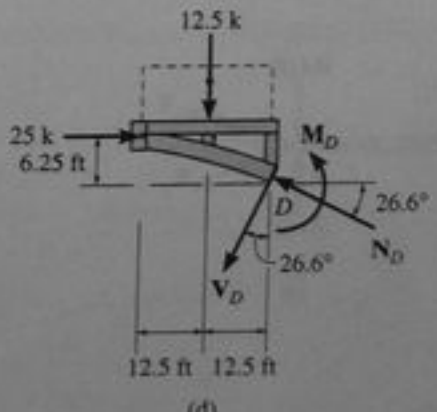
$$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0; \quad -25\text{ k}(25\text{ ft}) + 25\text{ k}(50\text{ ft}) - C_x(25\text{ ft}) = 0$$
$$C_x = 25\text{ k}$$
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad B_x = 25\text{ k}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad B_y - 25\text{ k} + 25\text{ k} = 0$$
$$B_y = 0$$

Una sección del arco tomada por el punto D, $x = 25$ ft, $y = -25(25)^2/(50)^2 = -6.25$ ft, se muestra en la figura 5–10*d*. La pendiente del segmento en D es

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{-50}{(50)^2}x\bigg|_{x=25\text{ ft}} = -0.5$$
$$\theta = -26.6°$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio, figura 5–10*d*, tenemos,

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 25\text{ k} - N_D\cos 26.6° + V_D \operatorname{sen} 26.6° = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -12.5\text{ k} + N_D \operatorname{sen} 26.6° - V_D\cos 26.6° = 0$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_D = 0; \quad M_D + 12.5\text{ k}(12.5\text{ ft}) - 25\text{ k}(6.25\text{ ft}) = 0$$
$$N_D = 28.0\text{ k} \quad \textit{Resp.}$$
$$V_D = 0 \quad \textit{Resp.}$$
$$M_D = 0 \quad \textit{Resp.}$$

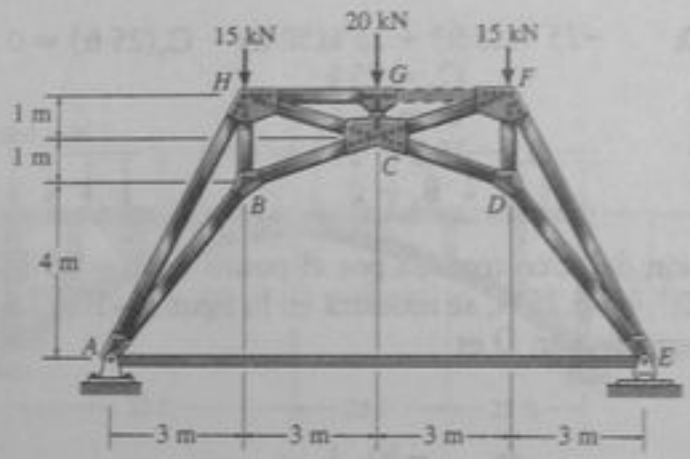


(d)

Nota: Si el arco tuviese una forma diferente o si la carga no fuese uniforme, entonces la fuerza cortante y el momento flexionante no serían cero. Además, si se usara una viga simplemente apoyada para soportar la carga distribuida, ésta tendría que resistir un momento flexionante de $M = 469\text{ k}\cdot\text{ft}$. En comparación, es más eficiente estructuralmente resistir una carga en compresión directa (aunque debe considerarse la posibilidad del pandeo) que resistir la carga por medio de un momento flexionante.

Ejemplo 5-5

El arco triarticulado atirantado está sometido a las cargas indicadas en la figura 5–11*a*. Determine la fuerza en los miembros CH y CB. El miembro indicado con línea punteada GF no debe tomar ninguna carga.

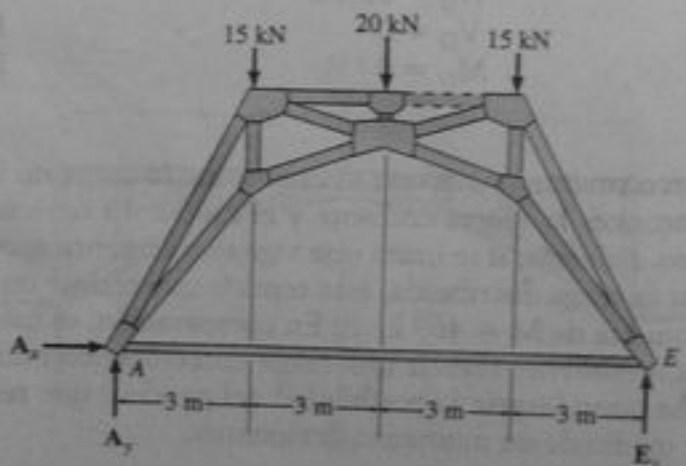


(a)

Fig. 5–11

Solución

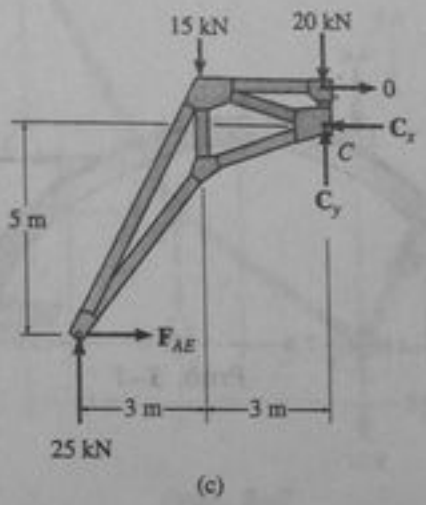
Las reacciones en los soportes pueden obtenerse del diagrama de cuerpo libre del arco entero, figura 5–11*b*:



(b)

$$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0;$$
$$E_y(12\text{ m}) - 15\text{ kN}(3\text{ m}) - 20\text{ kN}(6\text{ m}) - 15\text{ kN}(9\text{ m}) = 0$$
$$E_y = 25\text{ kN}$$
$$\pm\Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad A_y - 15\text{ kN} - 20\text{ kN} - 15\text{ kN} + 25\text{ kN} = 0$$
$$A_y = 25\text{ kN}$$

Las componentes de fuerza que actúan en el nudo C pueden determinarse considerando el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda del arco, figura 5–11c. (Esas componentes representan el efecto resultante de los miembros CF y CD que actúan en C.) Primero, determinamos la fuerza en el tirante:



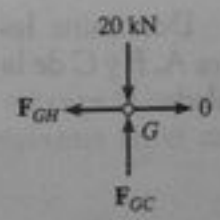
(c)

$$\curvearrowleft +\Sigma M_C = 0; \quad F_{AE}(5\text{ m}) - 25\text{ kN}(6\text{ m}) + 15\text{ kN}(3\text{ m}) = 0$$
$$F_{AE} = 21.0\text{ kN}$$

Entonces,

$$\pm\Sigma F_x = 0; \quad -C_x + 21.0\text{ kN} = 0; \quad C_x = 21.0\text{ kN}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad 25\text{ kN} - 15\text{ kN} - 20\text{ kN} + C_y = 0$$
$$C_y = 10\text{ kN}$$

Para obtener las fuerzas en CH y CB, podemos usar el método de los nudos, como sigue:

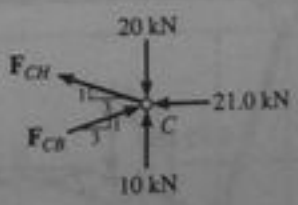


(d)

Nudo G; figura 5–11d,

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad F_{GC} - 20\text{ kN} = 0$$
$$F_{GC} = 20\text{ kN (C)}$$

Nudo C; figura 5–11e,



(e)

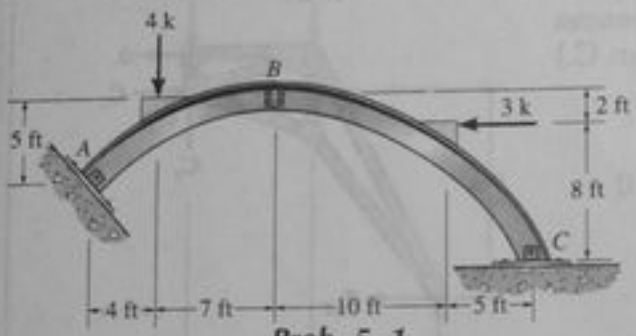
$$\pm\Sigma F_x = 0; \quad F_{CB}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - 21.0\text{ kN} - F_{CH}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad F_{CB}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + F_{CH}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 20\text{ kN} + 10\text{ kN} = 0$$

Así entonces,

$$F_{CB} = 26.9\text{ kN (C)} \quad \textit{Resp.}$$
$$F_{CH} = 4.74\text{ kN (T)} \quad \textit{Resp.}$$

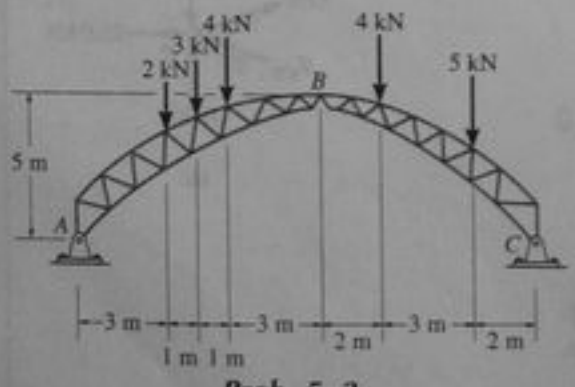
PROBLEMAS

5–1. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en *A*, *B* y *C* en el arco de tres articulaciones. Suponga que *A*, *B* y *C* están conectados por pasadores.



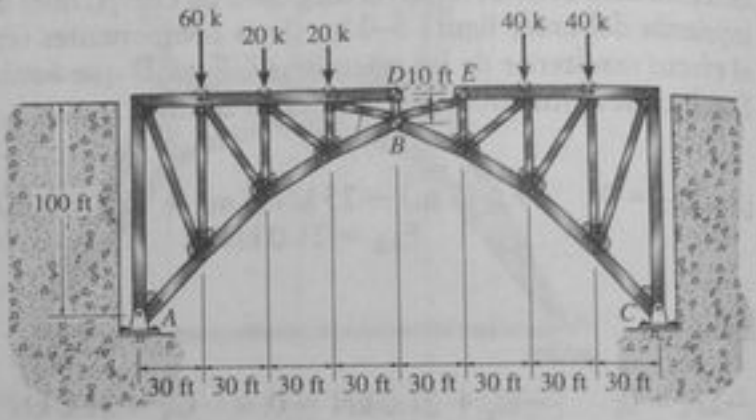
Prob. 5–1

5–2. Determine las fuerzas resultantes en los pasadores *A*, *B* y *C* de la armadura de techo en arco triarticulado.



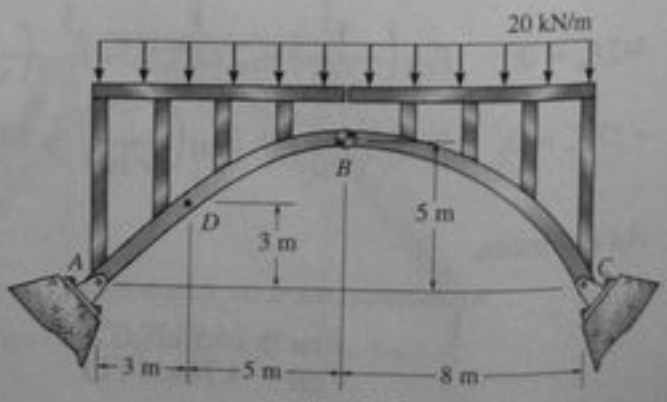
Prob. 5–2

5–3. El puente está construido con una armadura en arco triarticulado. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en las articulaciones (pasadores) en *A*, *B* y *C*. El miembro punteado *DE no* debe tomar ninguna fuerza.



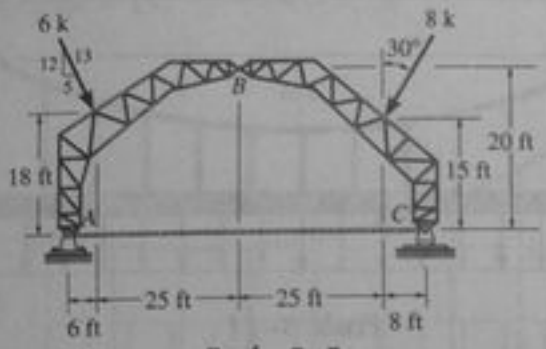
Prob. 5–3

***5–4.** El arco de tímpano triarticulado está sometido a la carga uniforme de 20 kN/m. Determine el momento interno en el arco en el punto *D*.



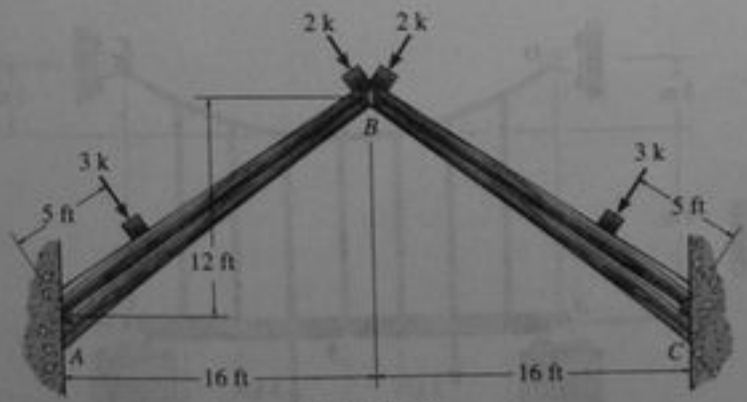
Prob. 5–4

5–5. El arco atirantado de armadura triarticulada está sometido a la carga mostrada. Determine las componentes de reacción en A y C así como la tensión en el tirante.



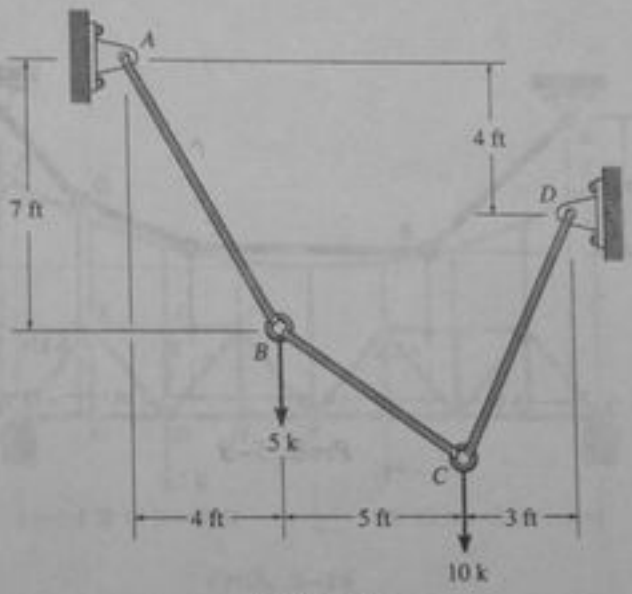
Prob. 5–5

5–6. El arco de tres articulaciones de madera laminada está sometido a la carga que se muestra. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los pasadores A, B y C y dibuje el diagrama de momento para el miembro AB.



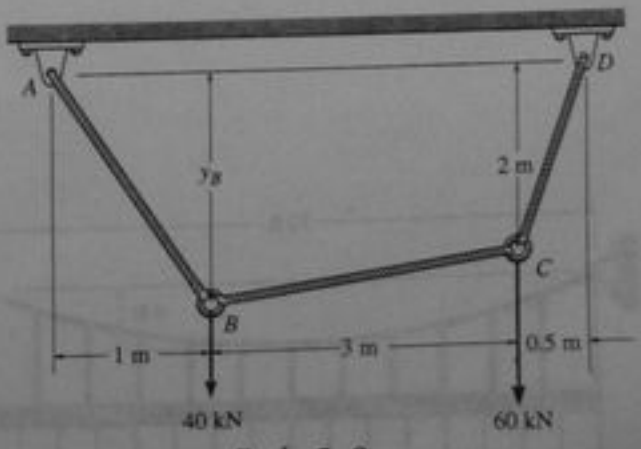
Prob. 5–6

5–7. Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total del cable.



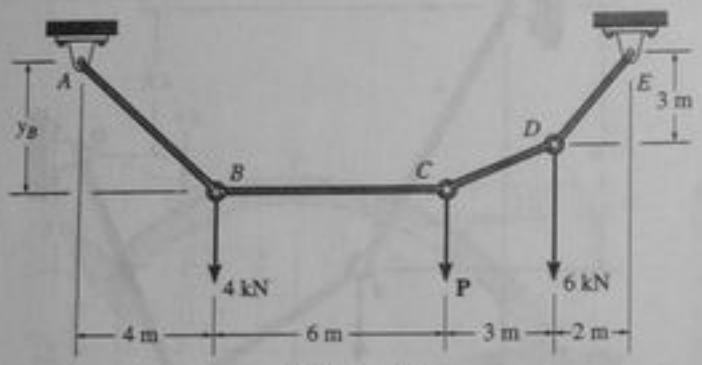
Prob. 5–7

*5–8. El cable ABCD soporta la carga mostrada. Determine la tensión máxima en el cable y la flecha del punto B.



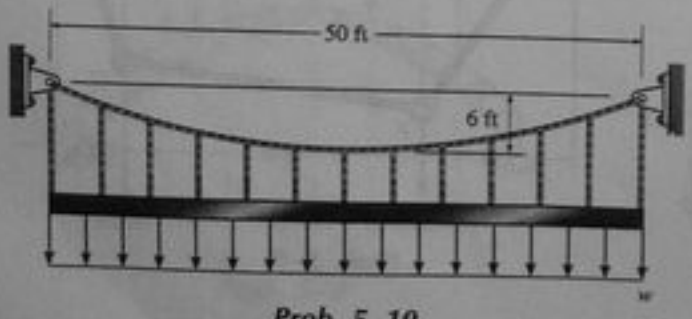
Prob. 5–8

5–9. Determine la fuerza **P** necesaria para mantener el cable en la posición mostrada, esto es, el segmento *BC* permanece horizontal. Calcule también la flecha y_B y la tensión máxima en el cable.



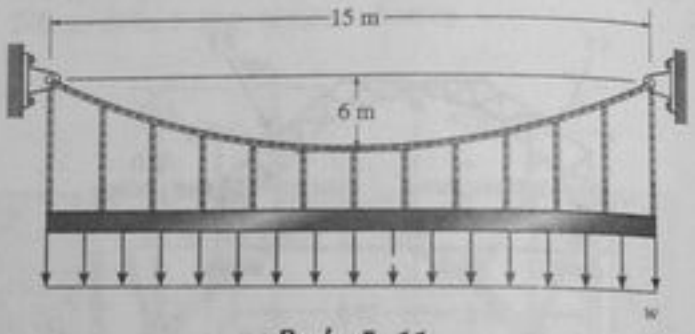
Prob. 5–9

5–10. Determine la carga máxima uniforme w que puede soportar el cable si éste es capaz de resistir una tensión máxima de 3000 lb antes de romperse.



Prob. 5–10

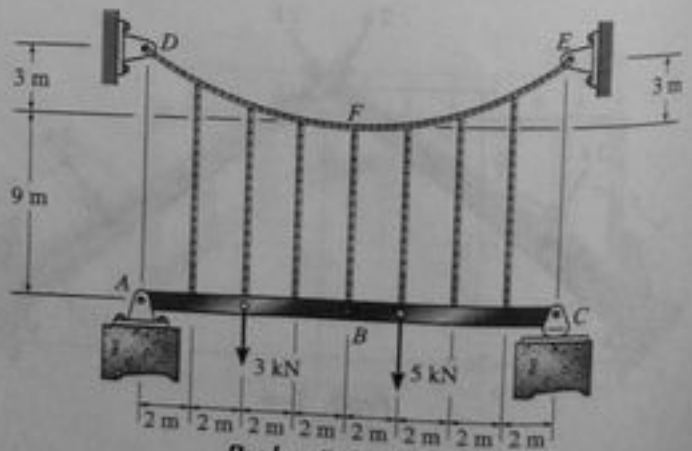
5–11. El cable se romperá cuando la tensión máxima alcance el valor $T_{máx} = 12$ kN. Determine la carga w uniforme distribuida que se requiere para desarrollar esta tensión máxima.



Prob. 5–11

***5–12.** Las vigas *AB* y *BC* están soportadas por el cable de forma parabólica. Determine la tensión en el cable en los puntos *D*, *F* y *E*, así como la fuerza en cada uno de los cables colgantes espaciados uniformemente.

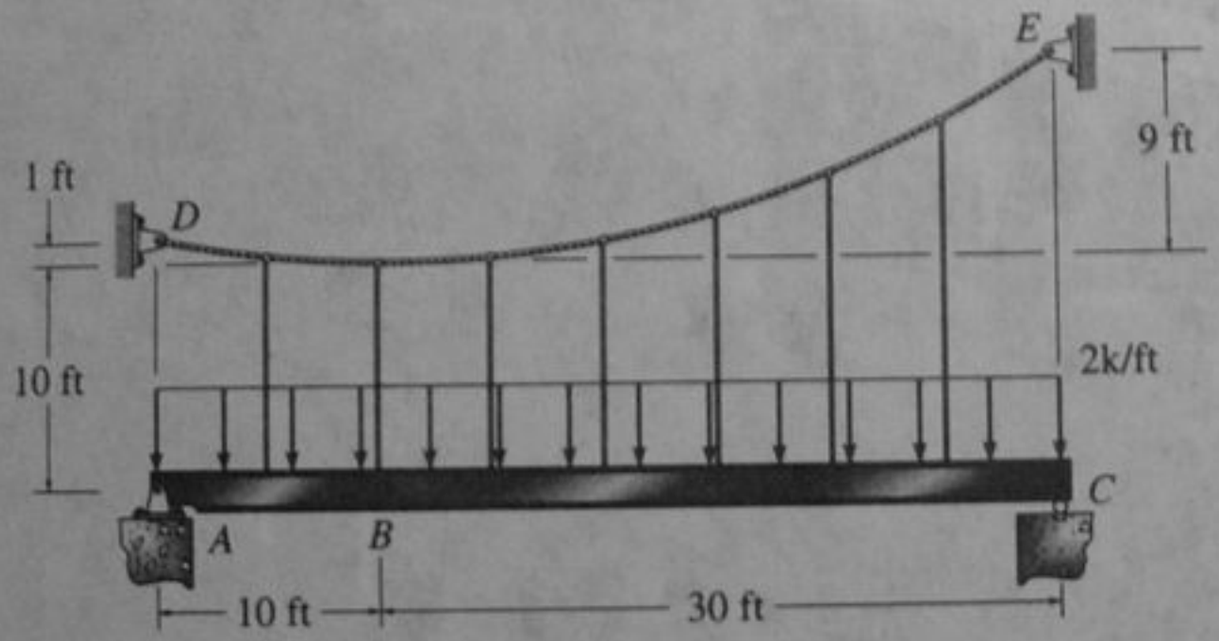
5–13. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las vigas *AB* y *BC* en el problema 5–12.



Probs. 5–12/5–13

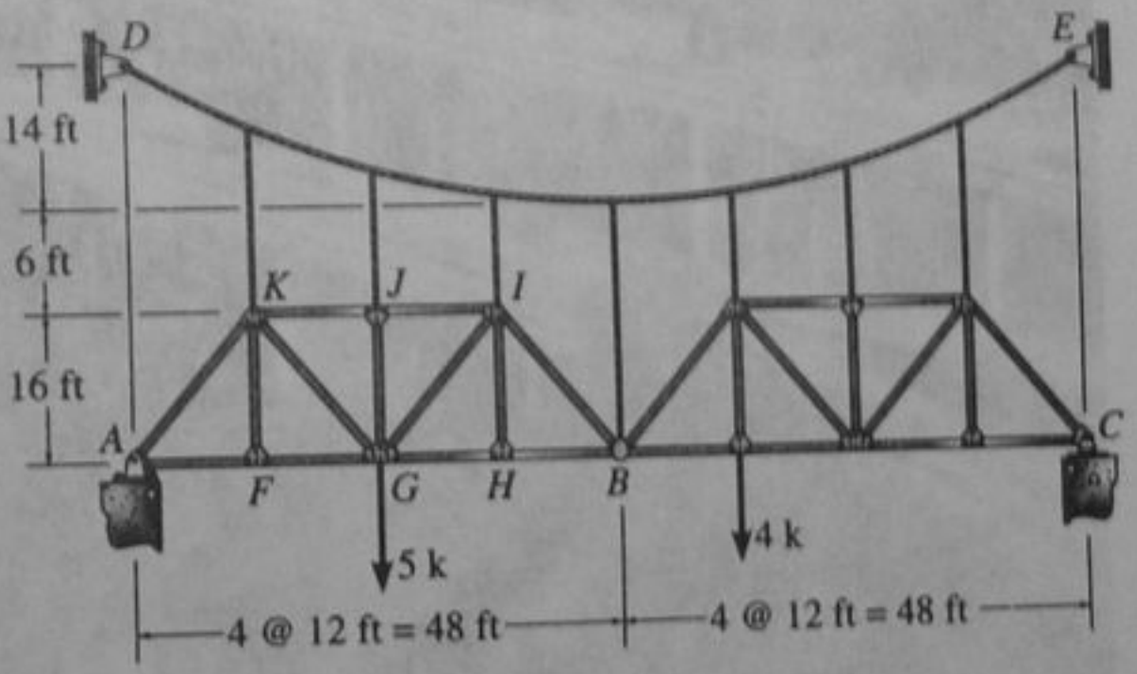
5–14. Determine la tensión máxima y mínima en el cable parabólico así como la fuerza en cada uno de los colgantes. La trabe está sometida a carga uniforme y está conectada por un pasador en *B*.

5–15. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las trabes *AB* y *BC* en el problema 5–14.

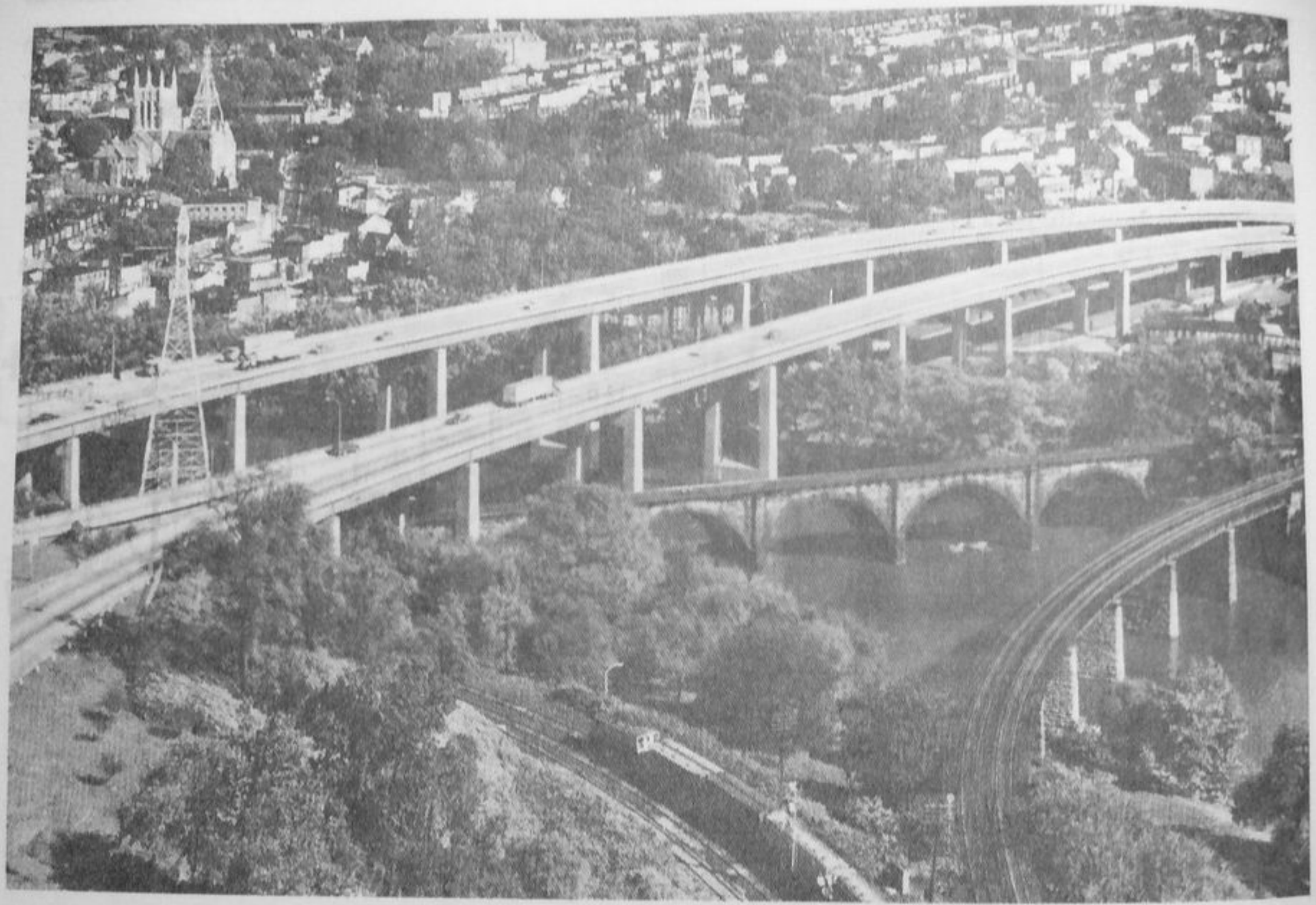


Probs. 5–14/5–15

***5–16.** Las armaduras están conectadas por un pasador y están suspendidas del cable parabólico. Determine la fuerza en los miembros *KJ* y *KG* cuando la estructura está sometida a la carga mostrada.



Prob. 5–16



Las cargas móviles causadas por el tránsito tuvieron que considerarse al diseñar las trabes para los puentes mostrados aquí. La línea de influencia para una trabe es una parte importante del análisis estructural. (*Fotografía por cortesía de la Bethlehem Steel Corp.*)

6

Líneas de influencia para estructuras estáticamente determinadas

Las líneas de influencia tienen importantes aplicaciones en el diseño de estructuras que resisten grandes cargas vivas. En este capítulo veremos cómo trazar la línea de influencia de una estructura estáticamente determinada. La teoría se aplica a estructuras sometidas a una carga distribuida o a una serie de fuerzas concentradas y se dan aplicaciones específicas a trabes de piso y armaduras de puentes. La determinación de la fuerza cortante y momento flexionante máximos absolutos por carga viva en un miembro se analiza al final del capítulo.

6.1 Líneas de influencia

En los capítulos anteriores desarrollamos procedimientos para analizar las fuerzas en miembros estructurales debido a *cargas muertas* o *fijas*. Se mostró que los *diagramas de fuerza cortante* y *momento flexionante* representan los métodos más descriptivos para exhibir la variación de esas cargas en un miembro. Sin embargo, si una estructura está sometida a una *carga viva* o *móvil*, la variación de la fuerza cortante y del momento flexionante en el miembro se describe mejor usando la *línea de influencia*. Una línea de influencia respresenta la variación de la reacción, de la fuerza cortante, del momento flexionante o de la deflexión en un *punto específico* de un miembro cuando una fuerza concentrada se mueve sobre el miembro. Una vez

construida esta línea, puede verse claramente dónde debe colocarse una carga viva sobre la estructura para que genere la máxima influencia en el punto especificado. Además, la magnitud de la reacción, fuerza cortante, momento o deflexión asociadas en el punto puede entonces calcularse a partir de las ordenadas del diagrama de la línea de influencia. Por estas razones, las líneas de influencia juegan una parte importante en el diseño de puentes, trabes carriles de grúas industriales, bandas transportadoras y otras estructuras donde las cargas se mueven a lo largo de su claro.

Procedimiento de análisis

Cualquiera de los siguientes procedimientos puede usarse para construir la línea de influencia en un punto P específico de un miembro para cualquier función (reacción, fuerza cortante o momento). En estos procedimientos escogeremos la fuerza móvil con una *magnitud unitaria adimensional.**

Valores tabulados. Coloque una carga unitaria en varias posiciones x a lo largo del miembro y en *cada* posición use la estática para determinar el valor de la función (reacción, fuerza cortante o momento) en el punto especificado. Por ejemplo, si va a construirse la línea de influencia para una *reacción* de fuerza vertical en un punto sobre la viga, considere la reacción como *positiva* en el punto cuando actúe *hacia arriba* sobre aquélla. Si va a dibujarse la línea de influencia de la fuerza cortante o del momento flexionante para un punto, tome la fuerza cortante o el momento como positivo en el punto si actúa en el sentido convencional usado para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento. Véase la figura 4–1. Todas las vigas estáticamente determinadas tendrán líneas de influencia que consisten en segmentos rectos de líneas. Después de cierta práctica uno debe ser capaz de minimizar los cálculos y localizar la carga unitaria *sólo* en puntos que representen los *puntos extremos* de cada segmento de línea. Para evitar errores, se recomienda que primero se construya una tabla en que aparezca la "carga unitaria en x" versus el valor correspondiente de la función calculada en el punto específico; esto es, la "reacción R"; la "fuerza cortante V" o el "momento flexionante M". Una vez que la carga se ha colocado en varios puntos a lo largo del claro del miembro, es posible trazar los valores tabulados y construir los segmentos de la línea de influencia.

Ecuaciones de las líneas de influencia. La línea de influencia puede también construirse colocando la carga unitaria en una posi-

* La razón para hacerlo así se explicará en la sección 6.2.

ción *x variable* sobre el miembro y luego calcular el valor de R, V o M en el punto como función de x. De esta manera, pueden determinarse y trazarse las ecuaciones de los varios segmentos de línea que componen la línea de influencia.

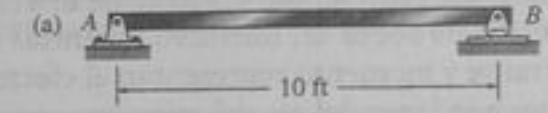
Aunque el procedimiento para construir una línea de influencia es básico, uno debe ser consciente de la *diferencia* entre construir una línea de influencia y construir un diagrama de fuerza cortante o de momento. Las líneas de influencia representan el efecto de una *carga móvil* sólo en un *punto especificado* sobre un miembro, mientras que los diagramas de fuerza cortante y momento representan el efecto de *cargas fijas* en *todos los puntos* a lo largo del eje del miembro.

Los ejemplos siguientes ilustran los métodos para construir numéricamente las líneas de influencia.

Deben dibujarse líneas de influencia para las trabes de estos puentes de concreto y acero a fin de diseñarlos apropiadamente.

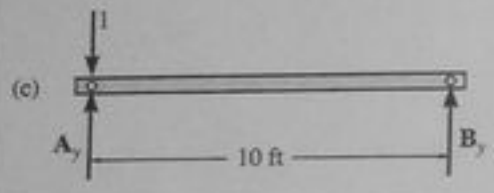
Ejemplo 6-1

Construya la línea de influencia para la reacción vertical en A de la viga en la figura 6–1*a*.

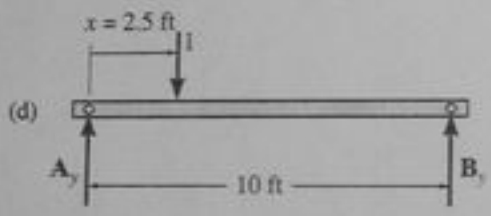


(b)

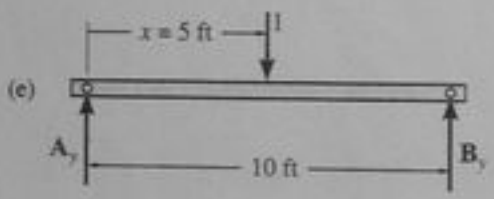
x	A_y
0	1
2.5	0.75
5	0.5
7.5	0.25
10	0



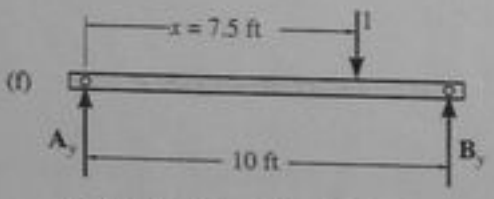
$$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ A_y(10) - 1(10) = 0$$
$$A_y = 1$$



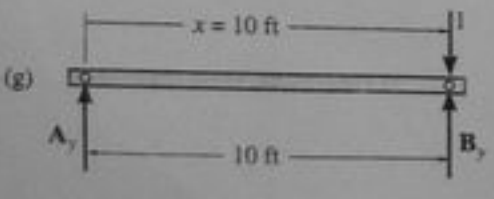
$$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ A_y(10) - 1(7.5) = 0$$
$$A_y = 0.75$$



$$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ A_y(10) - 1(5) = 0$$
$$A_y = 0.5$$



$$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ A_y(10) - 1(2.5) = 0$$
$$A_y = 0.25$$



$$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ A_y(10) - 1(0) = 0$$
$$A_y = 0$$

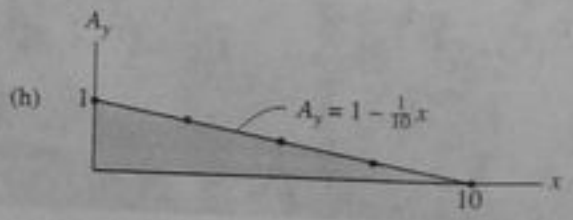
Solución

Valores tabulados. Se construye una tabla de posiciones x de la carga unitaria versus la reacción A_y, para varios valores de x, figura 6–1*b*. En cada punto seleccionado x se calcula el valor de A_y sumando momentos respecto a B. Vea las figuras 6–1c a la 6–1g. Los valores de A_y se registran en la tabla, figura 6–1*b*. La gráfica de esos valores representa la línea de influencia para la reacción en A, figura 6–1*h*.

Ecuación de la línea de influencia. Cuando la carga unitaria se coloca a una distancia variable x de A, figura 6–1*i*, la reacción A_y puede determinarse con la ecuación $\Sigma M_B = 0$. Tenemos $A_y(10) - (10 - x)(1) = 0$, o bien

$$A_y = 1 - \tfrac{1}{10}x$$

Esta línea está graficada en la figura 6–1*h*.



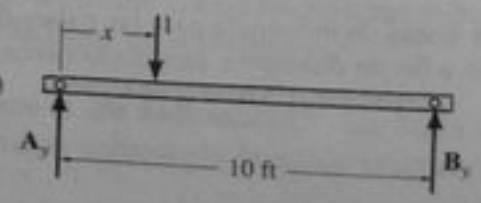
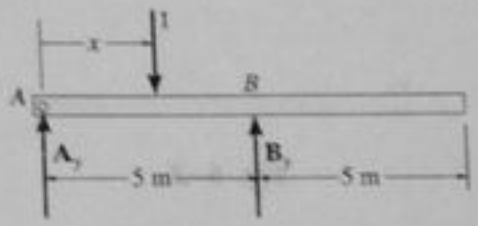


Fig. 6–1

Ejemplo 6-2

Construya la línea de influencia para la reacción vertical en B de la viga en la figura 6–2*a*.

(a)



(b)

Solución

Valores tabulados. Por medio de la estática, verifique que los valores para la reacción B_y dados en la tabla, figura 6–2*c*, están correctamente calculados para cada posición x de la carga unitaria, figura 6–2*b*. La gráfica de estos valores en la figura 6–2*c* representa la línea de influencia, mostrada en la figura 6–2*d*.

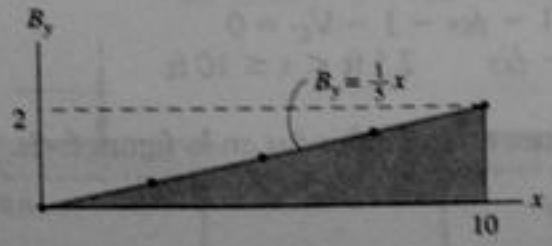
x	B_y
0	0
2.5	0.5
5	1
7.5	1.5
10	2

(c)

Ecuación de la línea de influencia. Aplicando la ecuación de momentos respecto a A, $\Sigma M_A = 0$ en la figura 6–2*b*, podemos escribir

$$B_y = \tfrac{1}{5}x$$

que está graficada en la figura 6–2*d*.

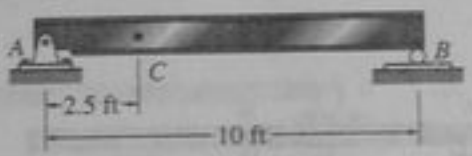


(d)

Fig. 6–2

Ejemplo 6-3

Construya la línea de influencia para la fuerza cortante en el punto C de la viga en la figura 6–3*a*.



(a)

Fig. 6–3

Solución

Valores tabulados. Se construye una tabla de la posición x de la carga unitaria versus la fuerza cortante V_C en el punto C, figura 6–3*b*, y en cada posición seleccionada x de la carga unitaria se usa el método de las secciones para calcular el valor de V_C como se muestra en los diagramas de cuerpo libre en las figuras 6–3*c* a la 6–3*h*. Note en particular que la carga unitaria debe colocarse justo a la izquierda ($x = 2.5^-$) y justo a la derecha ($x = 2.5^+$) del punto C, ya que la fuerza cortante es discontinua en C. Una gráfica de los valores en la figura 6–3*b* representa la línea de influencia para la fuerza cortante en C, figura 6–3*i*.

(b)

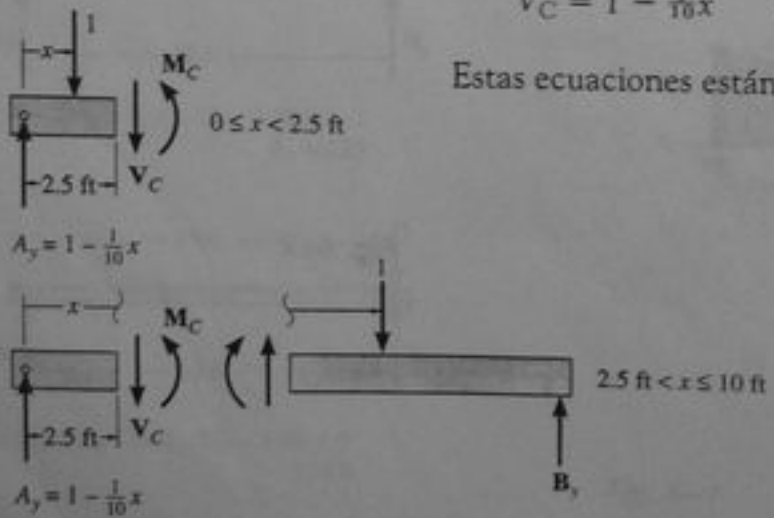
x	V_C
0	0
2.5^-	-0.25
2.5^+	0.75
5	0.5
7.5	0.25
10	0

Ecuaciones de la línea de influencia. Aquí deben determinarse dos ecuaciones, ya que hay dos segmentos para la línea de influencia. Según el método de las secciones, figura 6–3*j*, tenemos

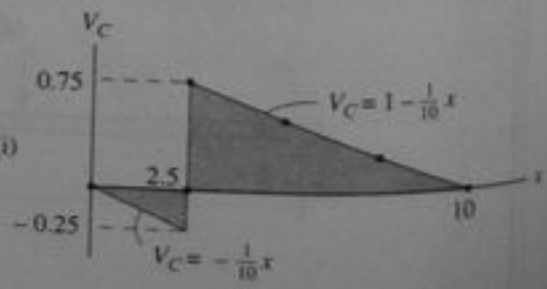
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ 1 - \tfrac{1}{10}x - 1 - V_C = 0$$
$$V_C = -\tfrac{1}{10}x \qquad 0 \le x < 2.5 \text{ ft}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ 1 - \tfrac{1}{10}x - 1 - V_C = 0$$
$$V_C = 1 - \tfrac{1}{10}x \qquad 2.5 \text{ ft} < x \le 10 \text{ ft}$$

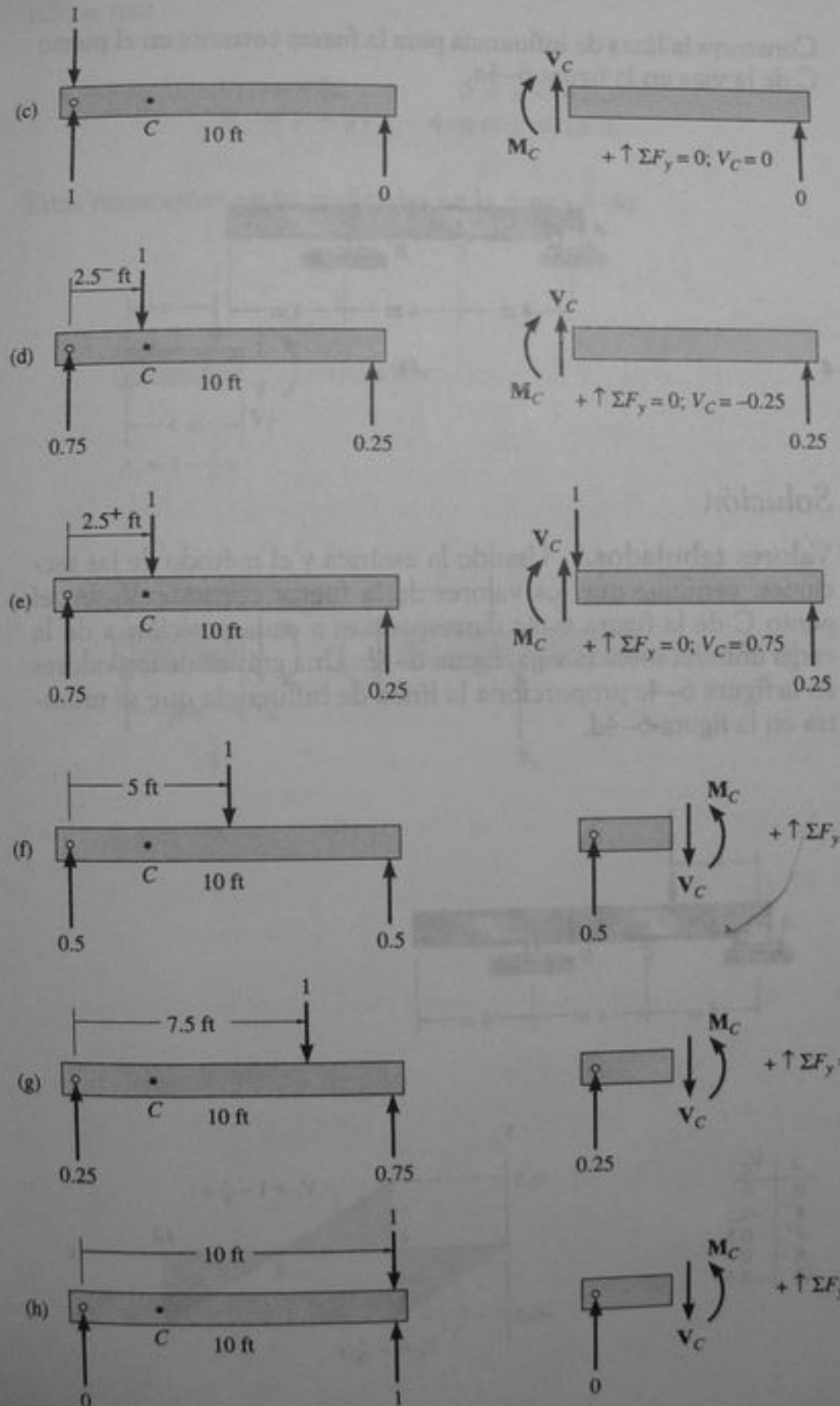
Estas ecuaciones están graficadas en la figura 6–3*i*.

(j)



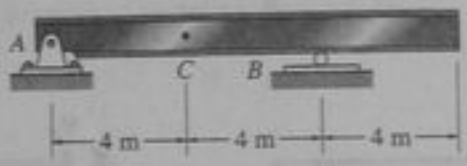
(i)




(c)
1
C
10 ft
1
0
V_C
M_C
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_C = 0$
0
(d)
2.5 ft
1
C
10 ft
0.75
0.25
V_C
M_C
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_C = -0.25$
0.25
(e)
2.5 ft
1
C
10 ft
0.75
0.25
1
V_C
M_C
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_C = 0.75$
0.25
(f)
5 ft
1
C
10 ft
0.5
0.5
M_C
V_C
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_C = 0.5$
0.5
(g)
7.5 ft
1
C
10 ft
0.25
0.75
M_C
V_C
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_C = 0.25$
0.25
(h)
10 ft
1
C
10 ft
0
1
M_C
V_C
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_C = 0$
0

Ejemplo 6-4

Construya la línea de influencia para la fuerza cortante en el punto C de la viga en la figura 6–4*a*.

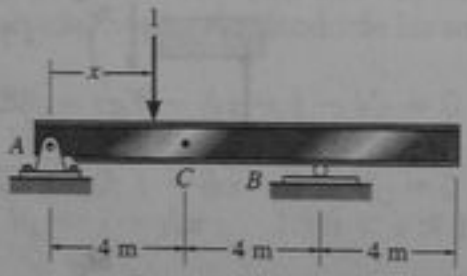


(a)

Fig. 6–4

Solución

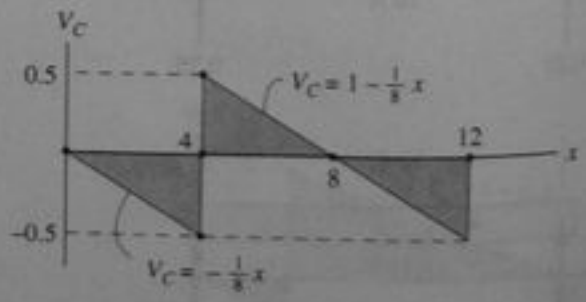
Valores tabulados. Usando la estática y el método de las secciones, verifique que los valores de la fuerza cortante V_C en el punto C de la figura 6–4*c* correspondan a cada posición x de la carga unitaria sobre la viga, figura 6–4*b*. Una gráfica de los valores en la figura 6–4*c* proporciona la línea de influencia que se muestra en la figura 6–4*d*.



(b)

(c)

x	V_C
0	0
4^-	−0.5
4^+	0.5
8	0
12	−0.5

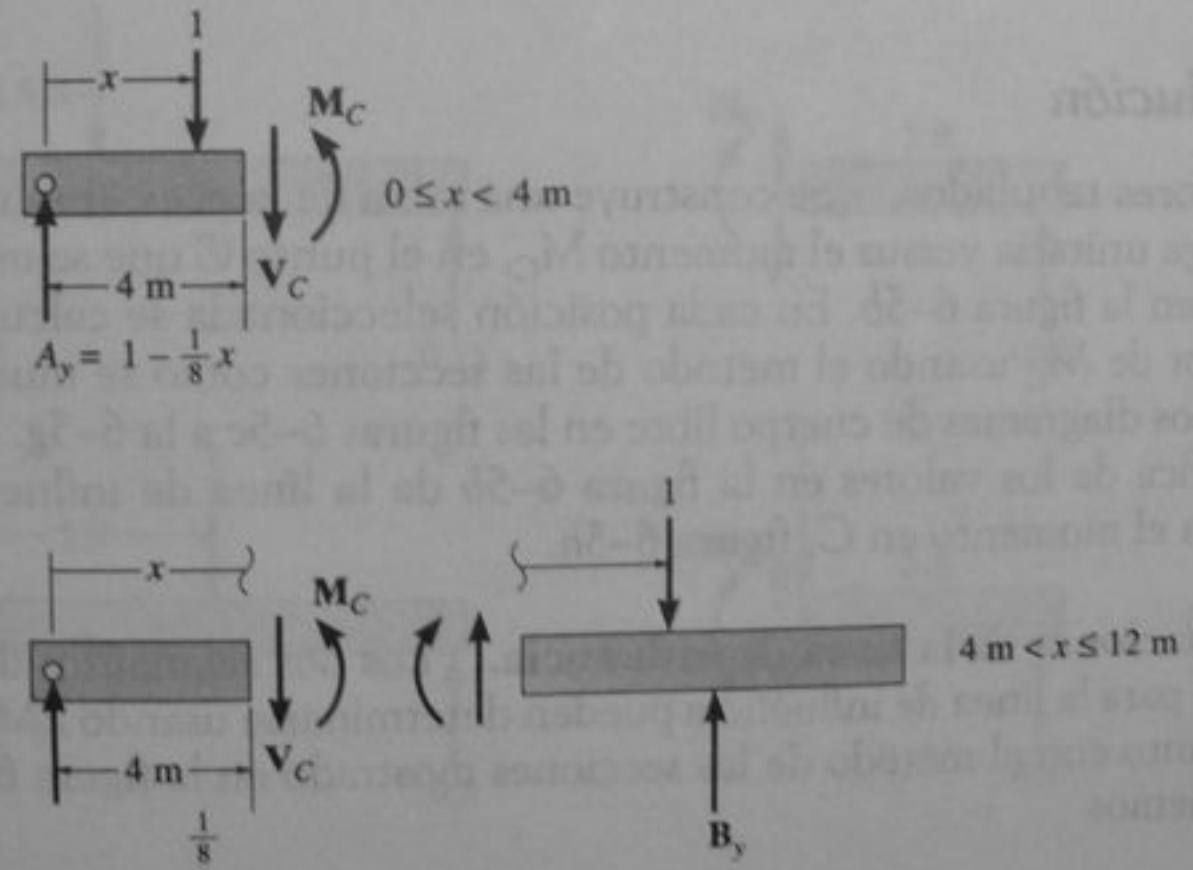


(d)

Ecuaciones de la línea de influencia. En la figura 6–4e, verifique que

$$V_C = -\tfrac{1}{8}x \qquad 0 \le x < 4\text{ m}$$
$$V_C = 1 - \tfrac{1}{8}x \qquad 4\text{ m} < x \le 12\text{ m}$$

Estas ecuaciones están graficadas en la figura 6–4*d*.



(e)

Ejemplo 6-5

Construya la línea de influencia para el momento en el punto C de la viga en la figura 6–5*a*.

(a)

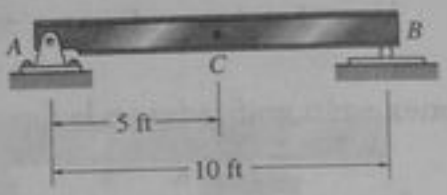


Fig. 6–5

Solución

Valores tabulados. Se construye una tabla de la posición x de la carga unitaria versus el momento M_C, en el punto C que se muestra en la figura 6–5*b*. En cada posición seleccionada se calcula el valor de M_C usando el método de las secciones como se muestra en los diagramas de cuerpo libre en las figuras 6–5c a la 6–5g. Una gráfica de los valores en la figura 6–5*b* da la línea de influencia para el momento en C, figura 6–5*h*.

(b)

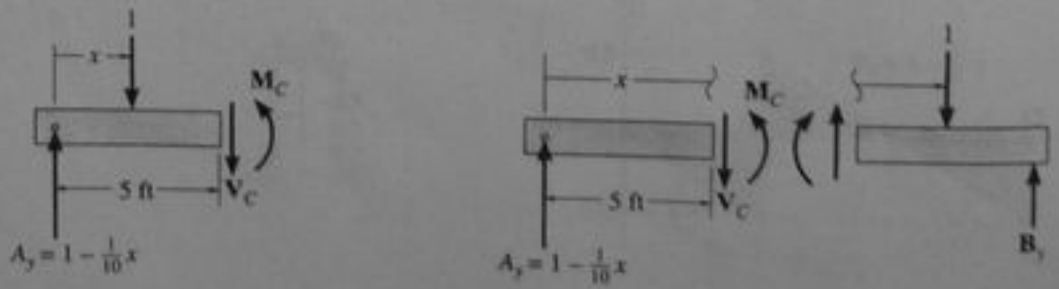
x	M_C
0	0
2.5	1.25
5	2.5
7.5	1.25
10	0

Ecuaciones de la línea de influencia. Los dos segmentos de línea para la línea de influencia pueden determinarse usando $\Sigma M_C = 0$ junto con el método de las secciones mostrado en la figura 6–5i. Tenemos

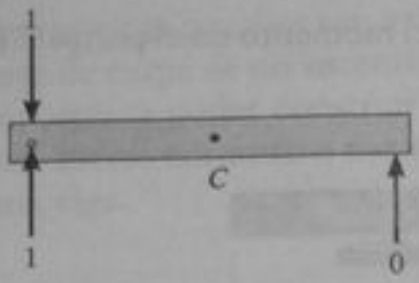
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad M_C + 1(5 - x) - (1 - \tfrac{1}{10}x)5 = 0$$
$$M_C = \tfrac{1}{2}x \qquad 0 \le x < 5 \text{ ft}$$
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad M_C - (1 - \tfrac{1}{10}x)5 = 0$$
$$M_C = 5 - \tfrac{1}{2}x \qquad 5 \text{ ft} < x \le 10 \text{ ft}$$

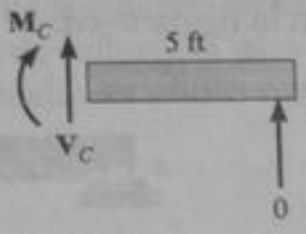
Al trazar esas ecuaciones se obtiene la línea de influencia mostrada en la figura 6–5*h*.

(i)



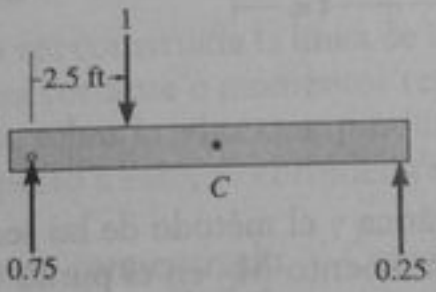
(c)

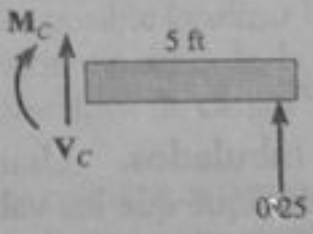




$(+\Sigma M_C = 0;\ M_C = 0$

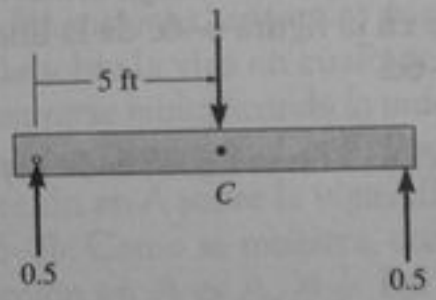
(d)

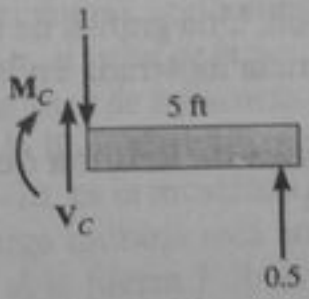




$(+\Sigma M_C = 0;\ M_C - 0.25\,(5) = 0$
$M_C = 1.25$

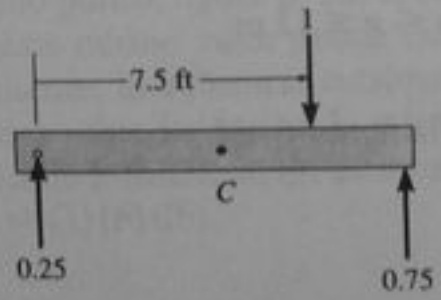
(e)

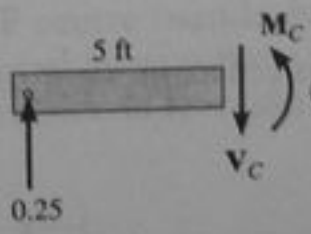




$(+\Sigma M_C = 0;\ M_C - 0.5(5) = 0$
$M_C = 2.5$

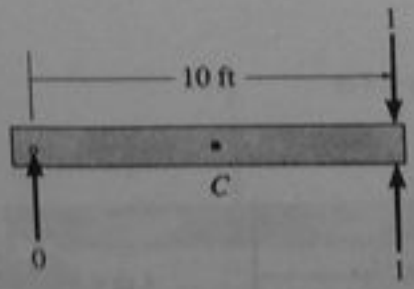
(f)

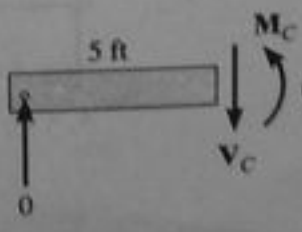




$(+\Sigma M_C = 0;\ 0.25\,(5) - M_C = 0$
$M_C = 1.25$

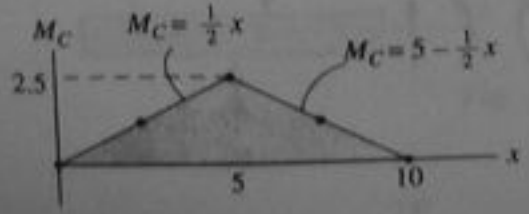
(g)





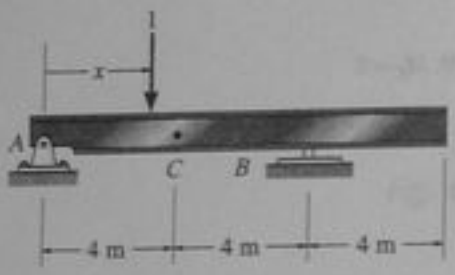
$(+\Sigma M_C = 0;\ M_C = 0$

(h)

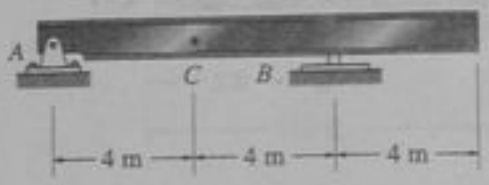


Ejemplo 6-6

Construya la línea de influencia para el momento en el punto C de la viga en la figura 6–6*a*.



(b)



(a)

Solución

Valores tabulados. Usando la estática y el método de las secciones, verifique que los valores del momento M_C en el punto C la figura 6–6*c* correspondan a cada posición *x* de la carga unitaria, figura 6–6*b*. Una gráfica de los valores en la figura 6–6*c* da la línea de influencia mostrada en la figura 6–6*d*.

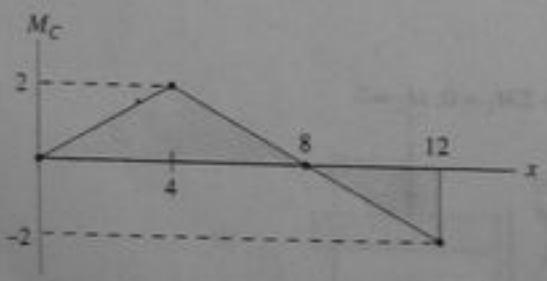
Ecuaciones de la línea de influencia. En la figura 6–6*e* verifique que

$$M_C = \tfrac{1}{2}x \qquad 0 \le x < 4\ \text{m}$$
$$M_C = 4 - \tfrac{1}{2}x \qquad 4\ \text{m} < x \le 12\ \text{m}$$

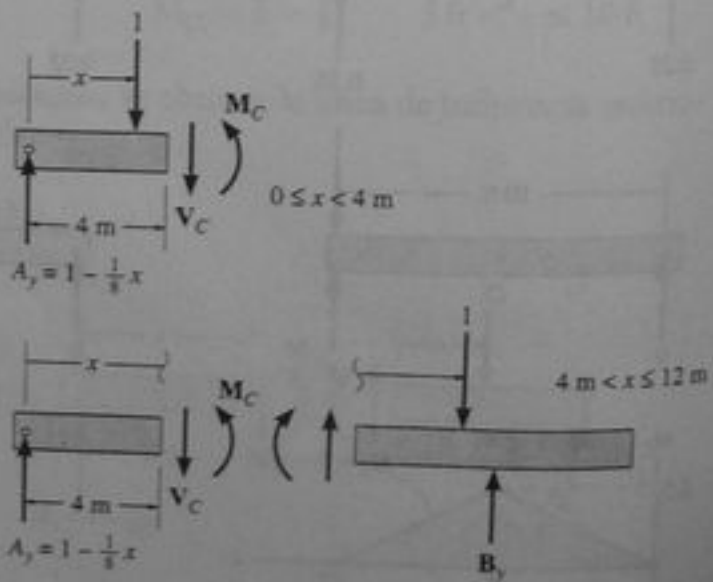
Estas ecuaciones están graficadas en la figura 6–6*d*.

x	M_C
0	0
4	2
8	0
12	-2

(c)



(d)



(e)

Fig. 6–6

6.2 Líneas de influencia para vigas

Como las vigas o trabes son a menudo los elementos principales portadores de carga de un sistema de piso o de la cubierta de un puente, es importante poder construir las líneas de influencia para las reacciones, fuerza cortante o momento en cualquier punto especificado de una viga.

Cargas

Una vez construida la línea de influencia para una función (reacción, fuerza cortante o momento) será entonces posible *localizar* las cargas vivas sobre la viga que produzcan el valor máximo de la función. Respecto a esto, se considerarán ahora dos tipos de cargas.

Fuerza concentrada. Como los valores numéricos de una función para una línea de influencia se determinan usando una carga unitaria sin dimensiones, entonces para cualquier fuerza concentrada **F** que actúe sobre la viga en cualquier posición x, *el valor de la función puede encontrarse multiplicando la ordenada de la línea de influencia en la posición x por la magnitud de* **F**. Por ejemplo, la línea de influencia para la reacción en A sobre la viga AB, figura 6–7*a*, es la mostrada en la figura 6–7*b*. Como se muestra, cuando la carga unitaria está en $x = \frac{1}{2}$, la reacción en A es $A_y = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, si la fuerza F lb está en este mismo punto, figura 6–7*a*, la reacción es $A_y = (\frac{1}{2})(F)$ lb. Por supuesto, éste mismo valor puede también determinarse por estática. Obviamente, la *influencia máxima* causada por **F** ocurre cuando ésta se coloca sobre la viga en la misma posición que el *punto máximo* de la línea de influencia, en este caso en $x = 0$, cuando la reacción sería $A_y = (1)(F)(\text{lb})$.

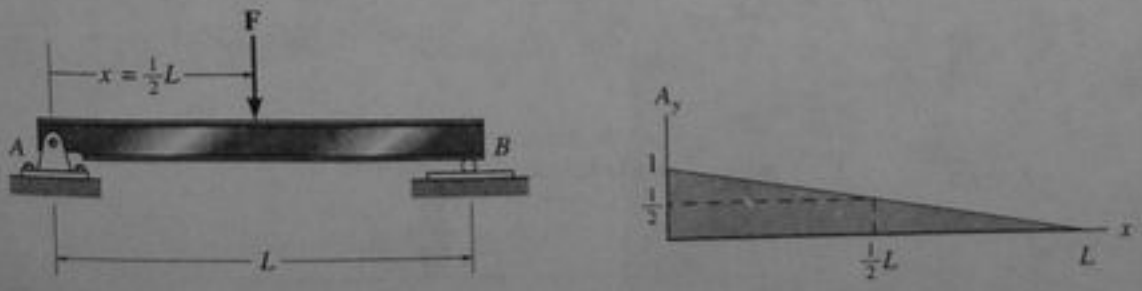
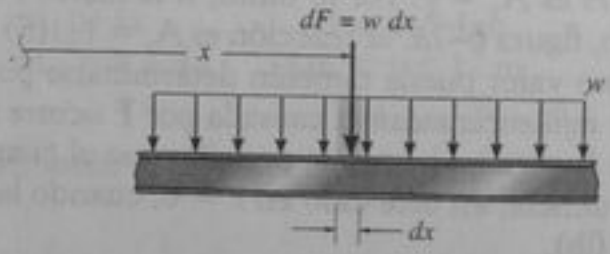


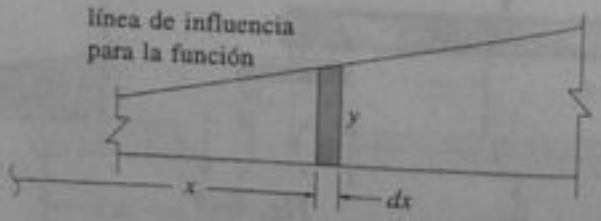
Fig. 6–7

Carga uniforme. Considere una porción de una viga sometida a una carga uniforme w, figura 6–8*a*. Como se muestra, cada segmento dx de la carga w crea una fuerza concentrada igual a $dF = w\,dx$ sobre la viga. Si dF está localizada en x, donde la ordenada de la línea de influencia de la viga para alguna función (reacción, fuerza cortante, momento) es y, figura 6–8*b*, entonces el valor de la función es $(dF)(y) = (w\,dx)y$. El efecto de todas las fuerzas concentradas dF se determina integrando sobre la longitud total de la viga, esto es, $\int wy\,dx = w\int y\,dx$, ya que w es constante. Además, como $\int y\,dx$ es equivalente al área bajo la línea de influencia, figura 6–8*b*, entonces, en general, *el valor de una función causada por una carga uniforme distribuida es simplemente el área bajo la línea de influencia para la función, multiplicada por la intensidad de la carga uniforme*. Por ejemplo, en el caso de una viga cargada uniformemente, figura 6–9*a*, la reacción A_y puede determinarse con la línea de influencia, figura 6–9*b*, como $A_y = (\text{área})(w) = [\frac{1}{2}(1)(L)]w = \frac{1}{2}wL$. Este valor puede también, por supuesto, calcularse con la estática, figura 6–9*c*.

Los siguientes ejemplos ilustran estos conceptos numéricamente.



(a)



(b)

Fig. 6–8

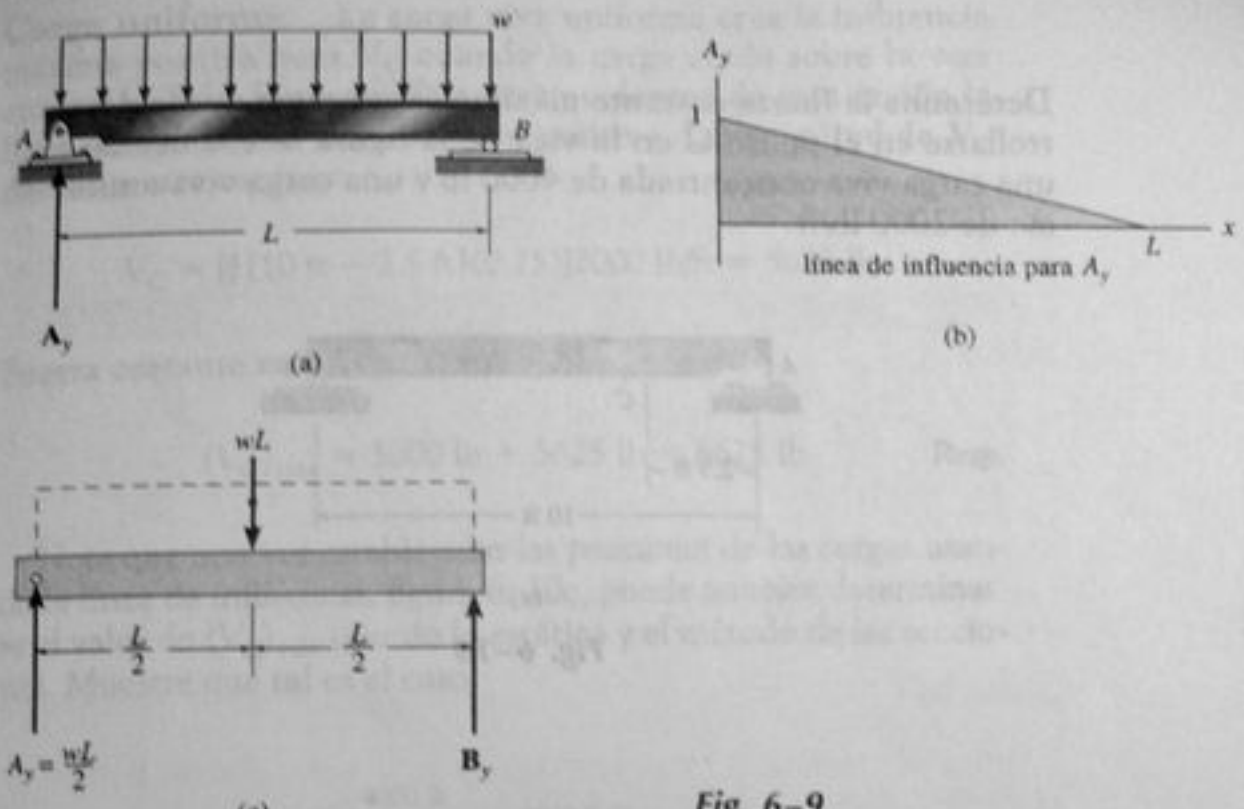
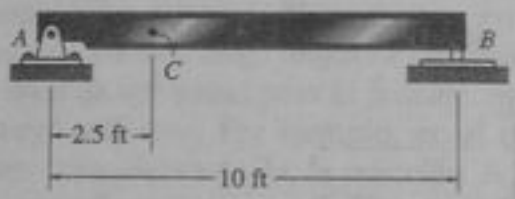


Fig. 6–9

Las trabes de este puente carretero deben diseñarse para soportar cargas sumamente pesadas como las de este camión. Para tal fin, deben usarse líneas de influencia. (*Joseph Schuyler/Stock, Boston.*)

Ejemplo 6-7

Determine la fuerza cortante máxima *positiva* que puede desarrollarse en el punto C en la viga de la figura 6–10*a* debido a una carga viva concentrada de 4000 lb y una carga viva uniforme de 2000 lb/ft.

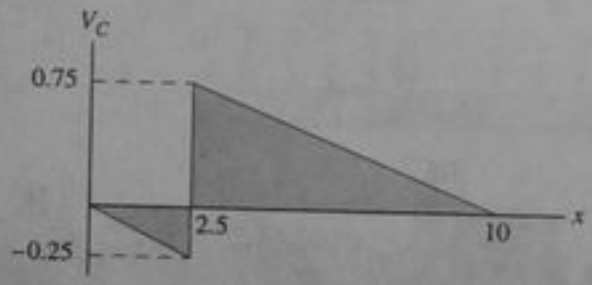


(a)

Fig. 6–10

Solución

La línea de influencia para la fuerza cortante en C se ha establecido en el ejemplo 6–3 y se muestra en la figura 6–10*b*.



(b)

Fuerza concentrada. La fuerza cortante máxima positiva en C ocurre cuando la fuerza viva de 4000 lb se coloca en $x = 2.5^+$ ft, ya que ésta es la posición del máximo positivo de la línea de influencia. La ordenada de este máximo es +0.75; así

$$V_C = 0.75(4000\text{ lb}) = 3000\text{ lb}$$

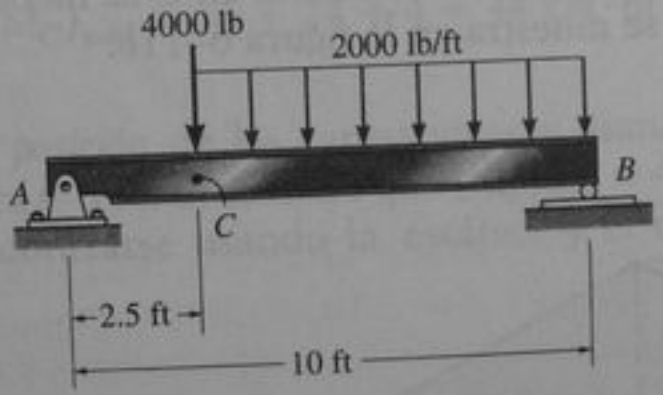
Carga uniforme. La carga viva uniforme crea la influencia máxima positiva para V_C cuando la carga actúa sobre la viga entre $x = 2.5^+$ ft y $x = 10$ ft, ya que dentro de esta región la línea de influencia tiene un área positiva. La magnitud de V_C debido a esta carga es

$$V_C = [\tfrac{1}{2}(10\text{ ft} - 2.5\text{ ft})(0.75)]2000\text{ lb/ft} = 5625\text{ lb}$$

Fuerza cortante máxima total en C

$$(V_C)_{\text{máx}} = 3000\text{ lb} + 5625\text{ lb} = 8625\text{ lb} \qquad \textbf{Resp.}$$

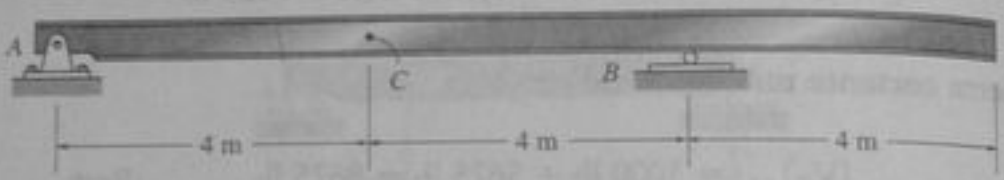
Note que una vez establecidas las *posiciones* de las cargas usando la línea de influencia, figura 6–10c, puede *también* determinarse el valor de $(V_C)_{\text{máx}}$ usando la estática y el método de las secciones. Muestre que tal es el caso.



(c)

Ejemplo 6-8

Determine el momento máximo *positivo* que puede desarrollarse en el punto C sobre la viga mostrada en la figura 6–11*a* debido a una carga concentrada viva de 8000 N, una carga viva uniforme de 3000 N/m y el peso de la viga (carga muerta) de 1000 N/m.

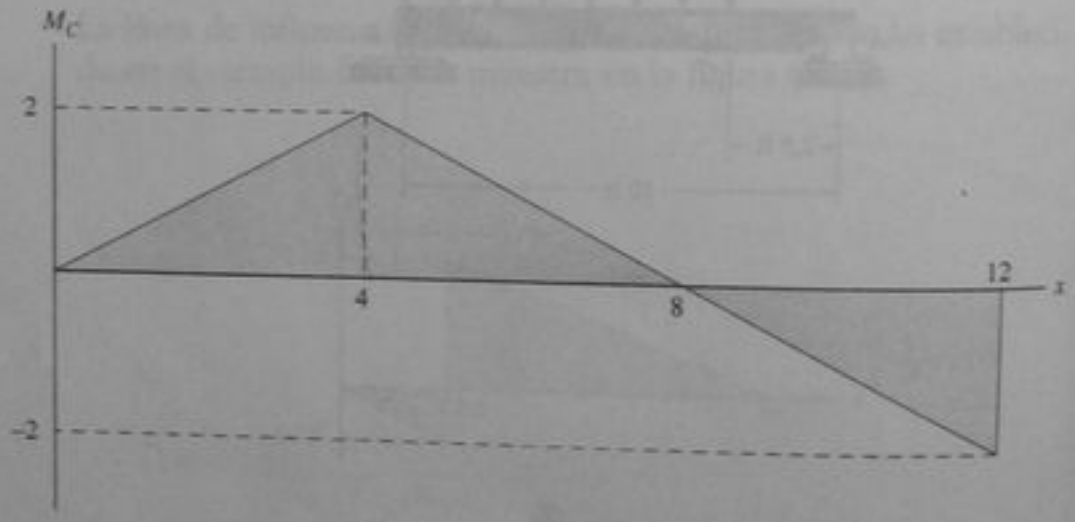


(a)

Fig. 6–11

Solución

La línea de influencia para el momento en C se ha obtenido ya en el ejemplo 6–6 y se muestra en la figura 6–11*b*.



(b)

Fuerza concentrada. La fuerza viva de 8000 N debe colocarse en $x = 4$ m para obtener un momento máximo positivo M_C. ¿Por qué? Por lo tanto,

$$M_C = 2(8000) = 16\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Carga viva uniforme. La carga viva uniforme de 3000 N/m debe colocarse sobre la viga entre $x = 0$ y $x = 8$ m para obtener un momento máximo positivo M_C. ¿Por qué? Por lo tanto,

$$M_C = [\tfrac{1}{2}(8)(2)](3000) = 24\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

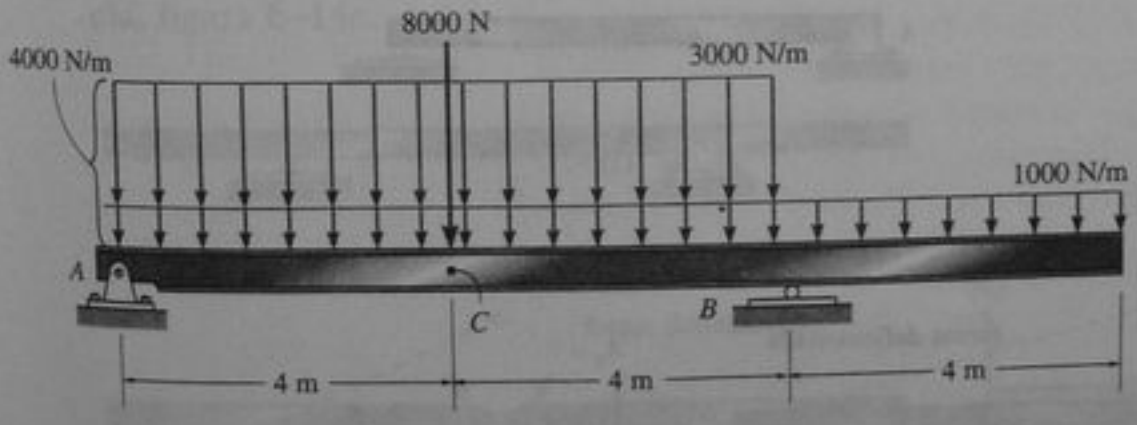
Carga muerta uniforme. Se *requiere* que la carga muerta de 1000 N/m actúe sobre *toda la longitud* de la viga. Podemos encontrar el momento en C debido a esta carga usando el método de las secciones y la estática, o bien por conveniencia podemos usar la línea de influencia. En este caso, debe usarse el *área total* de la línea de influencia. Como el área de $x = 8$ a $x = 12$ es negativa, tenemos

$$M_C = [\tfrac{1}{2}(8)(2) - \tfrac{1}{2}(12 - 8)(2)]1000 = 4\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Momento total máximo en C

$$(M_C)_{\text{máx}} = 16 + 24 + 4 = 44\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Conocida la *posición* de las cargas vivas y usando la línea de influencia, figura 6–11c, demuestre que $(M_C)_{\text{máx}} = 44\ \text{kN} \cdot \text{m}$ puede también encontrarse usando la estática y el método de las secciones.



(c)

6.3 Líneas de influencia cualitativas

En 1886, Heinrich Müller-Breslau desarrolló un procedimiento para construir rápidamente la forma de una línea de influencia. Se le llama *principio de Müller-Breslau* y *establece que la línea de influencia para una función (reacción, fuerza cortante o momento) es, a la misma escala, la forma deflexionada de la viga cuando sobre ésta actúa la función.* Para dibujar la forma deflexionada apropiadamente, la capacidad de la viga para resistir la función aplicada debe *retirarse* de manera que la viga pueda deflexionarse cuando se aplica la función. Por ejemplo, considere la viga en la figura 6–12*a*. Si va a determinarse la línea de influencia para la *reacción vertical* en A, el pasador se reemplaza primero por un *rodillo guiado*, como se muestra en la figura 6–12*b*. Se requiere un rodillo guiado ya que la viga debe aún resistir una fuerza horizontal en A pero *ninguna fuerza vertical*. Cuando se aplica entonces la fuerza positiva (hacia arriba) $\mathbf{A}_y$ en A, la viga asume la posición indicada por la línea interrumpida,* que representa la forma general de la línea de influencia para A_y, figura 6–12*c*. (Los valores numéricos para este caso específico se calcularon en el ejemplo 6–1.) Si va a determinarse la forma de la línea de influencia para la *fuerza cortante* en C, figura 6–13*a*, la conexión en C puede simbolizarse por un *rodillo guiado*, como se muestra en la figura 6–13*b*. Este dispositivo resistirá un mo-

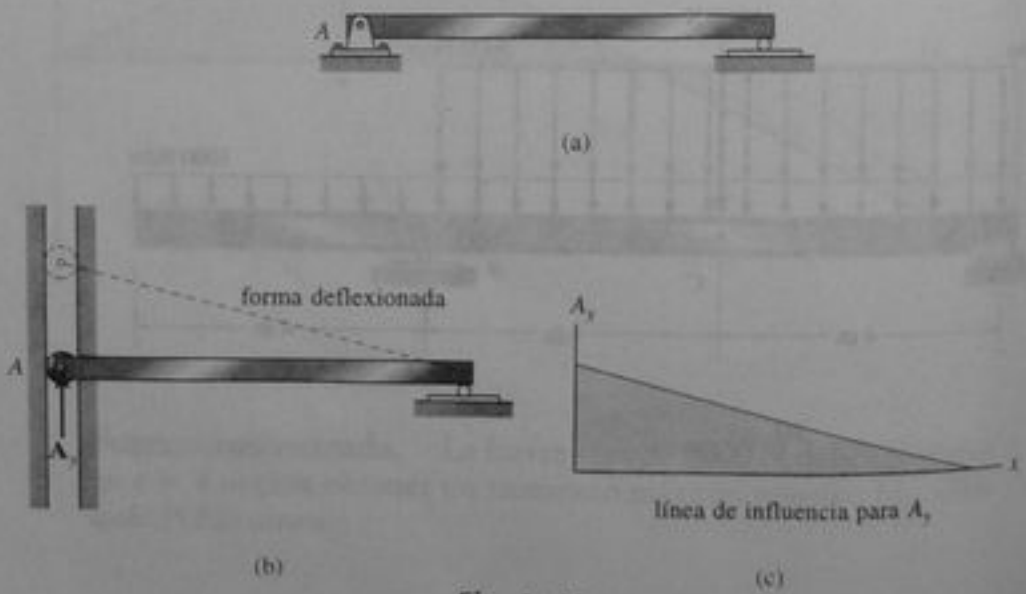


Fig. 6–12

* En todo este análisis, las posiciones deflexionadas se dibujan a una escala exagerada para ilustrar mejor el concepto.

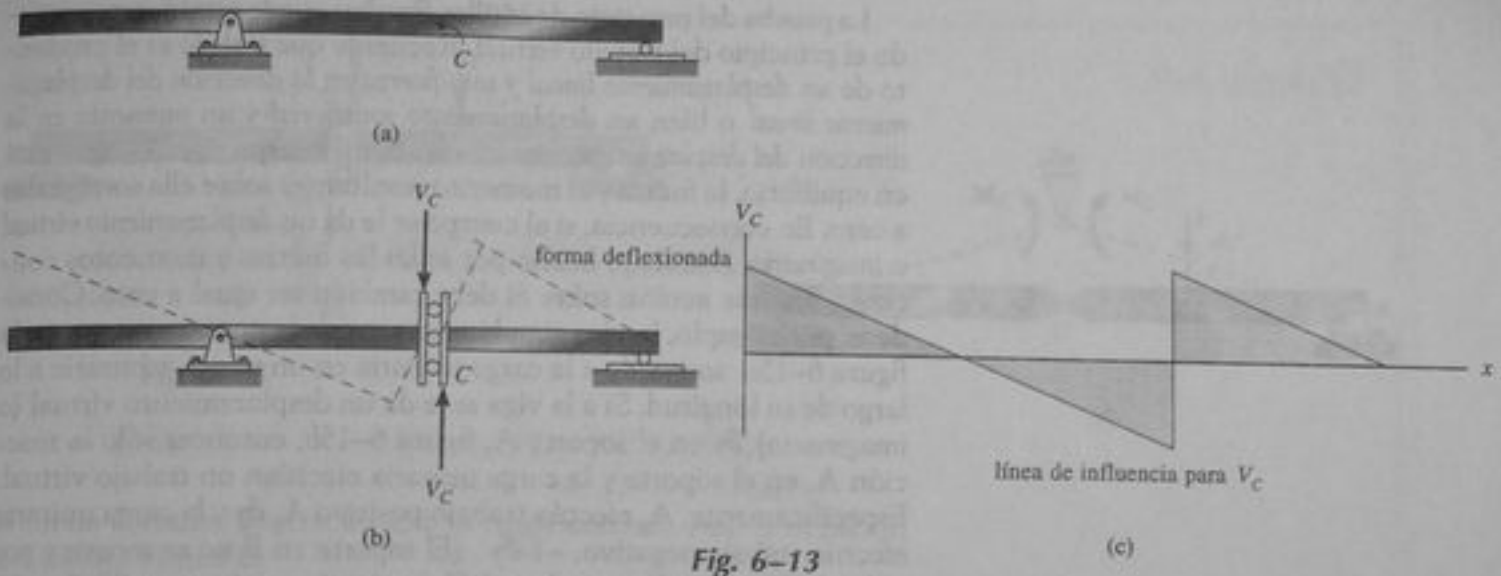


Fig. 6–13

mento y una fuerza axial pero ninguna *fuerza cortante*.† Si aplicamos una fuerza cortante positiva V_C a la viga en C y permitimos que la viga asuma la posición indicada por la línea cortada, encontramos la forma de la línea de influencia que se muestra en la figura 6–13c. Finalmente, si va a determinarse la forma de la línea de influencia para el *momento* en C, figura 6–14*a*, se coloca un *pasador* o *articulación* interna en C, ya que esta conexión resiste fuerzas axiales y cortantes pero *no puede resistir un momento*, figura 6–14*b*. Aplicando momentos positivos M_C a la viga, ésta sufrirá deflexión según la línea interrumpida, que es la forma de la línea de influencia, figura 6–14c.

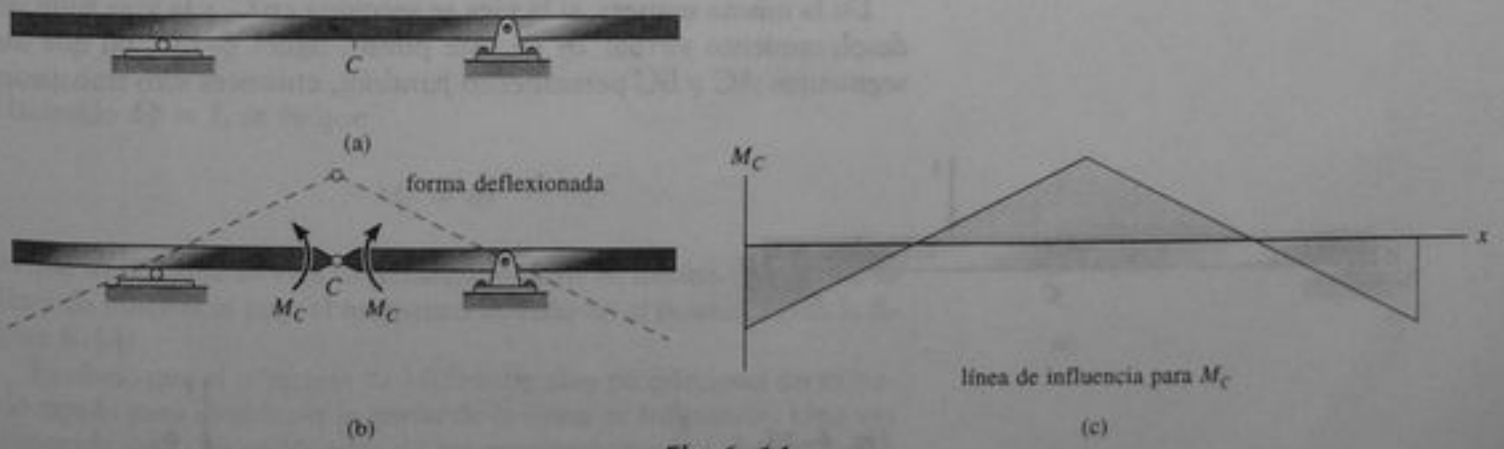


Fig. 6–14

† Aquí, los rodillos simbolizan soportes que toman cargas tanto en tensión como en compresión. Vea la tabla 2–1, soporte (2).

La prueba del principio de Müller-Breslau puede establecerse usando el principio del trabajo virtual. Recuerde que *trabajo* es el producto de *un desplazamiento lineal y una fuerza en la dirección del desplazamiento lineal* o bien *un desplazamiento rotacional y un momento en la dirección del desplazamiento rotacional*. Si un cuerpo rígido (viga) está en equilibrio, la fuerza y el momento resultantes sobre ella son iguales a cero. En consecuencia, si al cuerpo se le da un *desplazamiento virtual* o *imaginario*, el trabajo hecho por *todas* las fuerzas y momentos concentrados que actúan sobre él debe también ser igual a cero. Considere, por ejemplo, la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 6–15*a*, sometida a la carga unitaria en un punto arbitrario a lo largo de su longitud. Si a la viga se le da un desplazamiento virtual (o imaginario) δy en el soporte A, figura 6–15*b*, entonces sólo la reacción A_y en el soporte y la carga unitaria efectúan un trabajo virtual. Específicamente, A_y efectúa trabajo positivo $A_y\,\delta y$ y la carga unitaria efectúa trabajo negativo, $-1\,\delta y'$. (El soporte en B no se mueve y por tanto la fuerza en B no trabaja.) Como la viga está en equilibrio y en realidad no se mueve, el trabajo virtual suma cero, esto es,

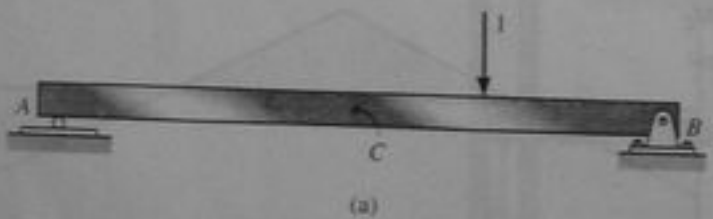
$$A_y\,\delta y - 1\,\delta y' = 0$$

Note que si δy se hace igual a 1, entonces,

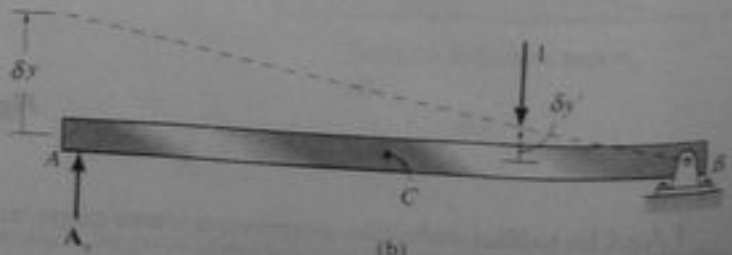
$$A_y = \delta y'$$

En otras palabras, el valor numérico de la reacción en A es equivalente al desplazamiento en la posición de la carga unitaria de manera que la *forma* de la línea de influencia para la reacción en A ha sido establecida (véase la figura 6–12). Esto prueba el principio de Müller-Breslau para reacciones.

De la misma manera, si la viga se secciona en C, y la viga sufre un desplazamiento virtual δy en este punto, figura 6–15*c*, tal que los segmentos AC y BC permanecen *paralelos*, entonces sólo trabajarán

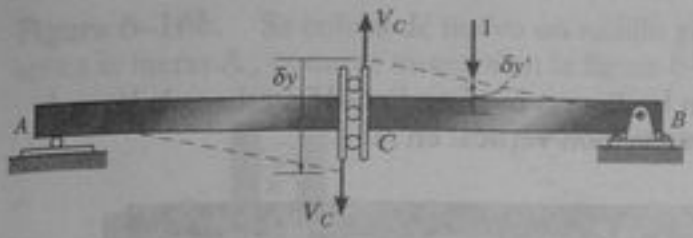


(a)

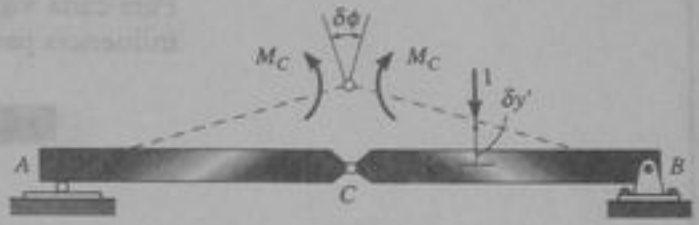


(b)

Fig. 6–15



(c)



(d)

Fig. 6–15

la fuerza cortante interna en C y la carga unitaria. Así, la ecuación del trabajo virtual es

$$V_C\,\delta y - 1\,\delta y' = 0$$

Nuevamente, si δy se hace igual a 1, entonces

$$V_C = \delta y'$$

y la *forma* de la línea de influencia para la fuerza cortante en C ha sido establecida (véase la figura 6–13).

Finalmente, suponga que una articulación o un pasador se inserta en el punto C de la viga, figura 6–15*d*. Si se le da al pasador una rotación virtual $\delta\phi$, sólo efectuarán un trabajo virtual el momento interno M_C y la carga unitaria. Así,

$$M_C\,\delta\phi - 1\,\delta y' = 0$$

Haciendo $\delta\phi = 1$, se ve que

$$M_C = \delta y'$$

lo que indica que la viga deflexionada tiene la misma forma que la línea de influencia para el momento interno en el punto C (vea la figura 6–14).

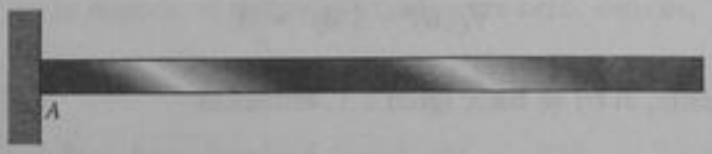
Es obvio que el principio de Müller-Breslau proporciona un método rápido para establecer la *forma* de la línea de influencia. Una vez conocida ésta, las ordenadas de los máximos pueden determinarse usando el método básico analizado en la sección 6.1. Además, conociendo la forma general de la línea de influencia, es posible *situar* la carga viva sobre la viga y luego determinar el valor máximo de la función *usando la estática*. El ejemplo 6–12 ilustra este procedimiento.

Ejemplo 6-9

Para cada viga en las figuras 6–16*a* a la 6–16c, esboce la línea de influencia para la reacción vertical en A.

(a)

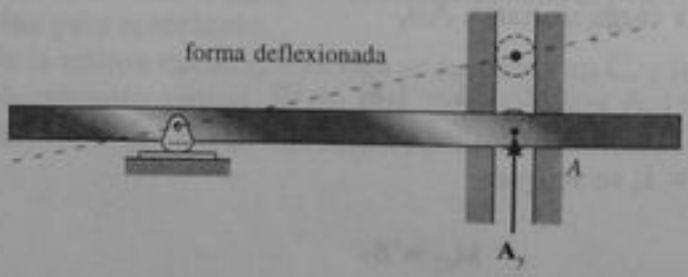
(b)

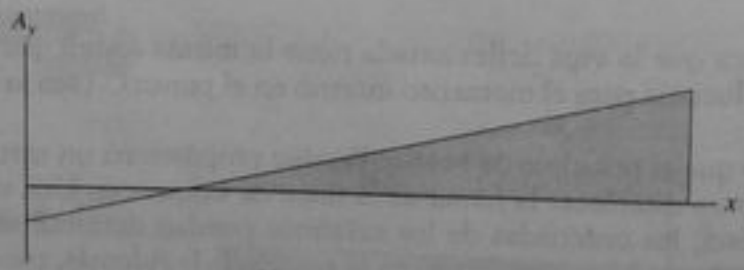


(c)

Solución

Figura 6–16*a*. El soporte se reemplaza por un rodillo guiado en A y se aplica la fuerza A_y, como se muestra en la figura 6–16*d*.





línea de influencia para A_y

(d)

Fig. 6–16

Figura 6–16b. Se coloca de nuevo un rodillo guiado en A y se aplica la fuerza A_y, como se muestra en la figura 6–16e.

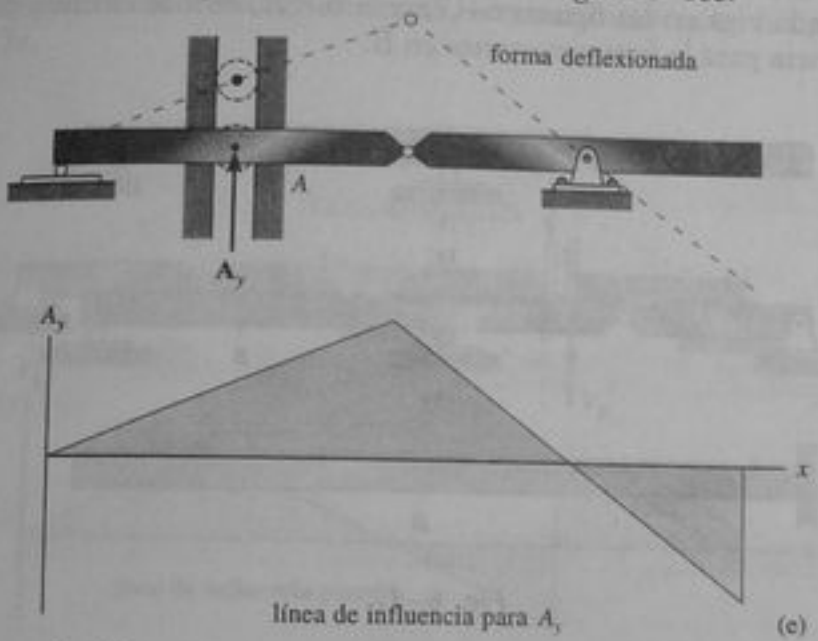
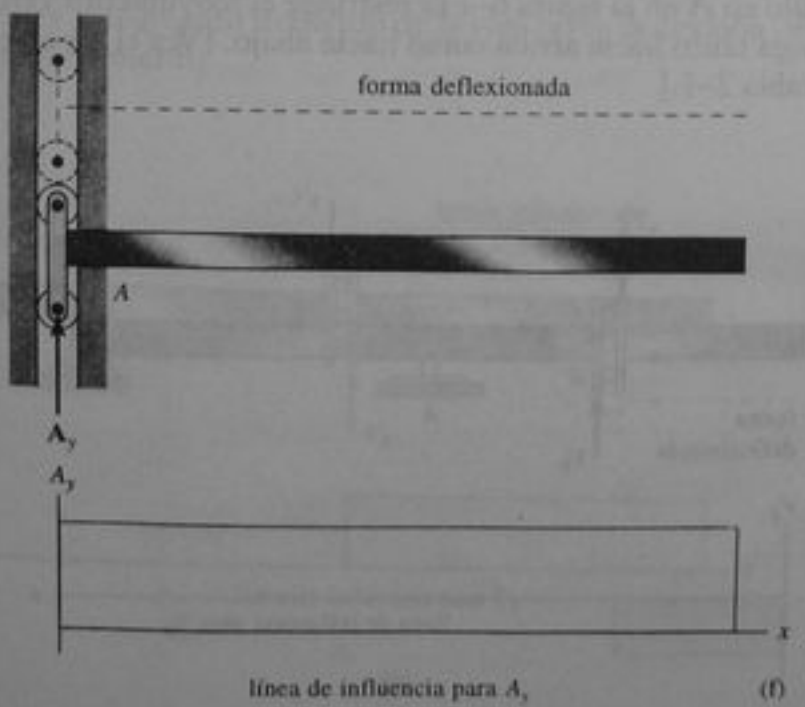


Figura 6–16c. En este caso debe usarse un *rodillo doble guiado* en A, ya que este tipo de soporte transmitirá un momento M_A en el empotramiento y una carga axial A_x, pero no una fuerza A_y, figura 6–16f.



Ejemplo 6-10

Para cada viga en las figuras 6–17*a* a la 6–17*c*, esboce la línea de influencia para la fuerza cortante en *B*.

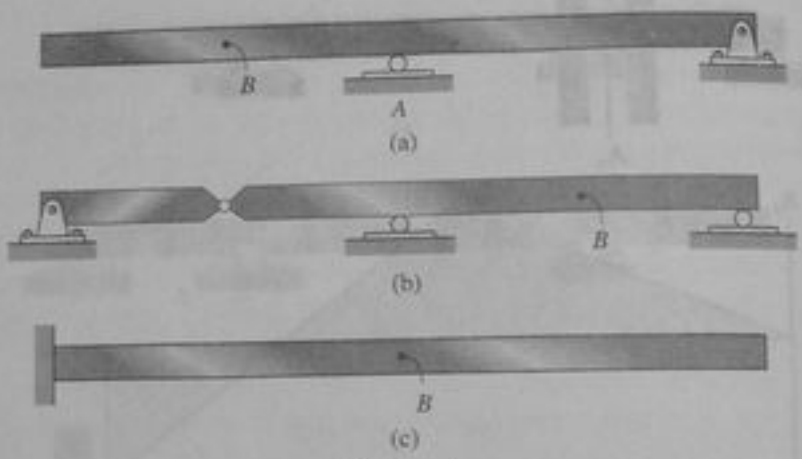


Fig. 6–17

Solución

Figura 6–17(*a*). Se introduce el rodillo guiado en *B* y se aplica la fuerza cortante positiva V_B como se muestra en la figura 6–17*d*. Note que el segmento derecho de la viga *no se deflexionará* ya que el rodillo en *A* en la figura 6–17*a* restringe el movimiento vertical de la viga tanto hacia arriba como hacia abajo. [Vea el soporte (2) en la tabla 2–1.]

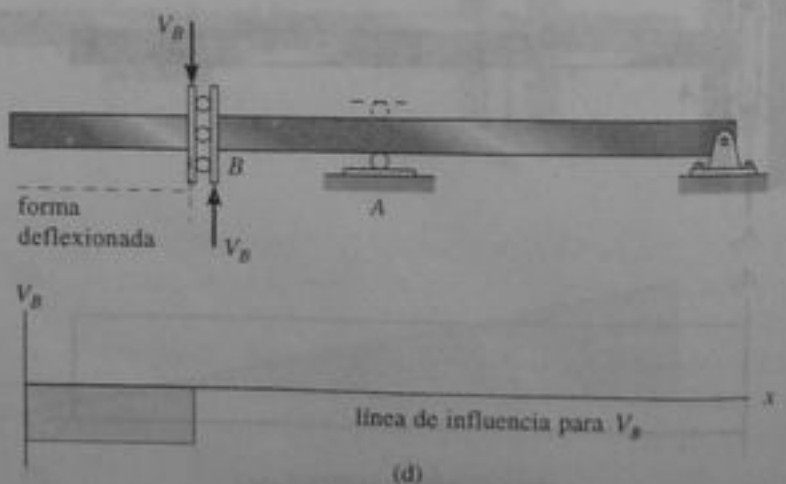
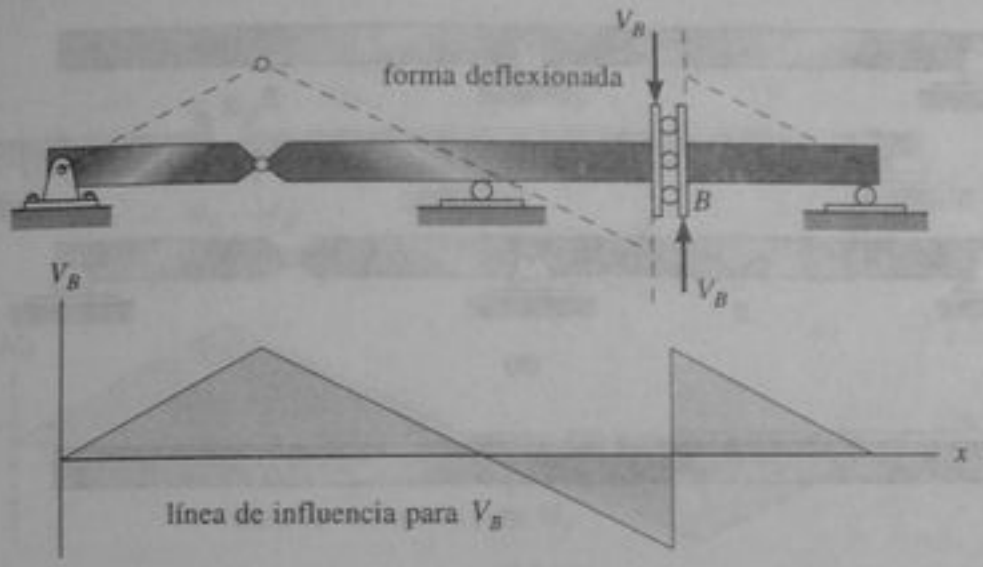
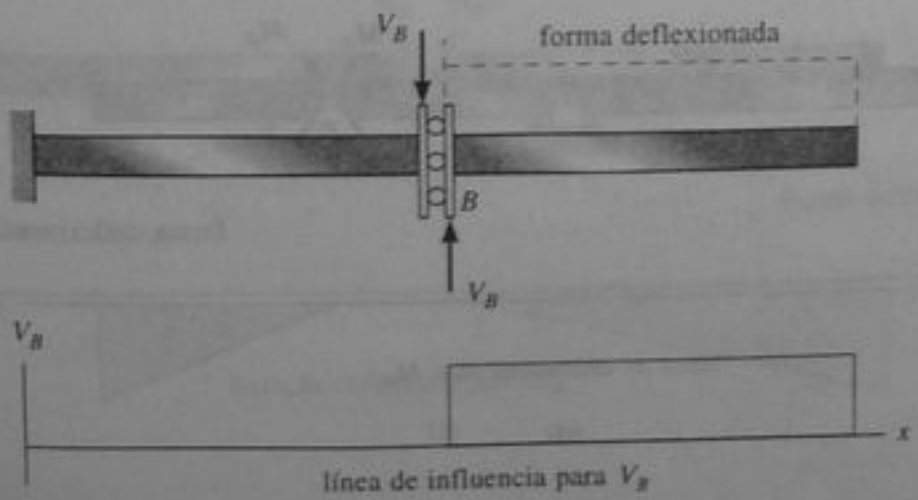


Figura 6–17*b*. Colocando el rodillo guiado en *B* y aplicando la fuerza cortante positiva en *B* se obtiene la forma deflexionada y la correspondiente línea de influencia, como se muestra en la figura 6–17*e*.



(e)

Figura 6–17*c*. Nuevamente, se coloca el rodillo guiado en *B*, se aplica la fuerza cortante positiva y la forma deflexionada y la correspondiente línea de influencia se muestran en la figura 6–17*f*. Nótese que el segmento izquierdo de la viga no se deflexiona debido al empotramiento.



(f)

Ejemplo 6-11

Para cada viga en las figuras 6–18*a* a la 6–18c, esboce la línea de influencia para el momento en *B*.

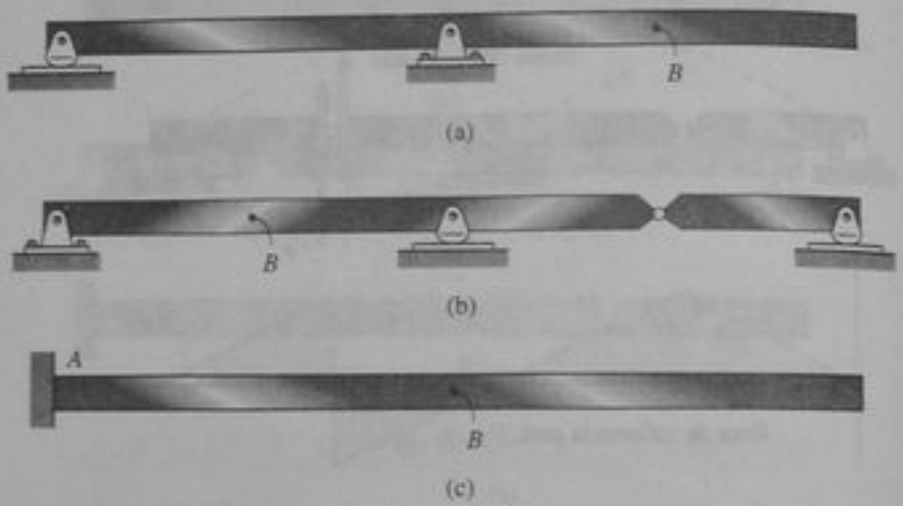


Fig. 6–18

Solución

Figura 6–18*a*. Se inserta una articulación en *B* y se aplican los momentos positivos $\mathbf{M}_B$ a la viga. La forma deflexionada y la correspondiente línea de influencia se muestran en la figura 6–18*d*.

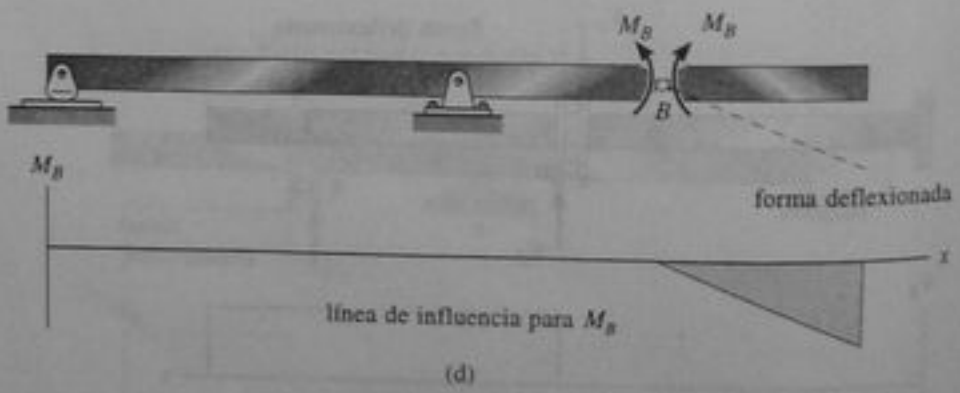
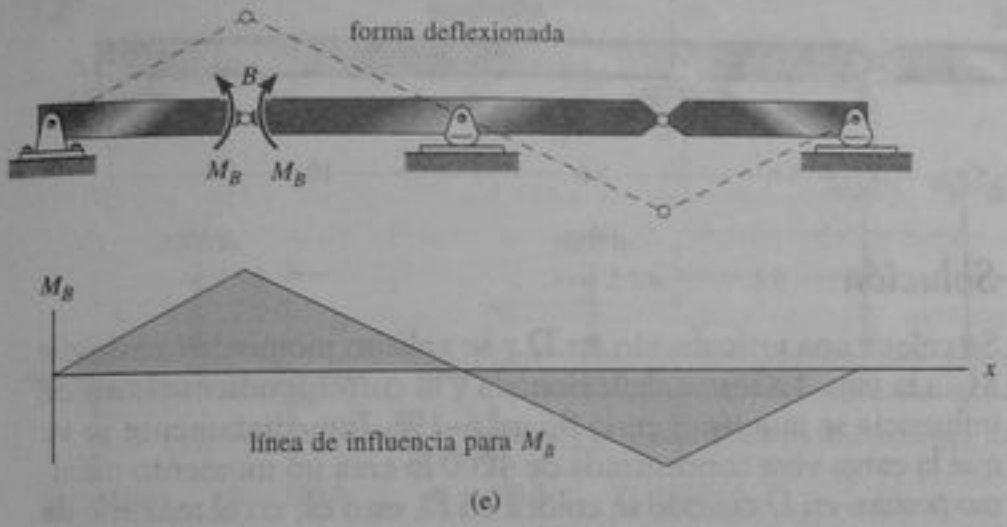
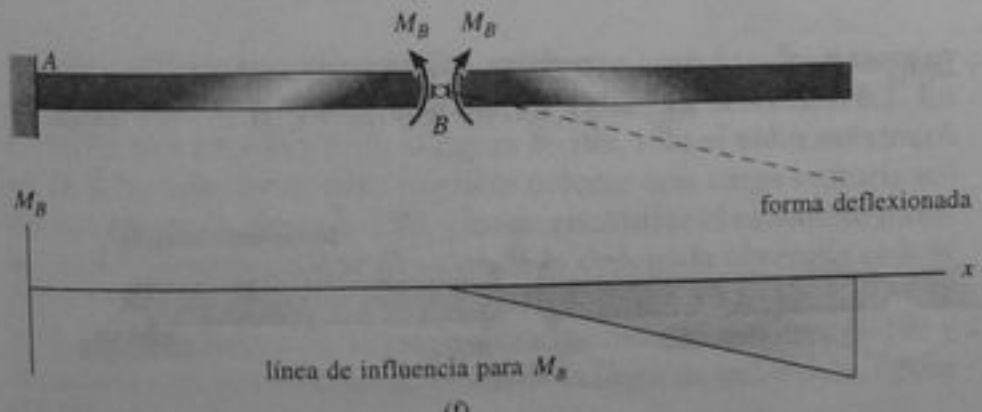


Figura 6–18b. Colocando una articulación en B y aplicando momentos positivos $\mathbf{M}_B$ sobre la viga se obtiene la forma deflexionada y la línea de influencia que se muestra en la figura 6–18e.



(e)

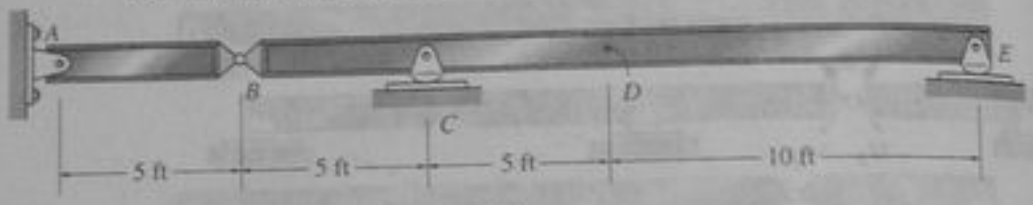
Figura 6–18c. Con la articulación y el momento positivo en B, la forma deflexionada y la línea de influencia son como se muestran en la figura 6–18*f*. El segmento izquierdo de la viga no puede moverse debido al empotramiento en A.



(f)

Ejemplo 6-12

Determine el momento positivo máximo que puede desarrollarse en el punto D en la viga mostrada en la figura 6–19*a* debido a una carga viva concentrada de 4000 lb, una carga viva uniforme de 300 lb/ft y una carga muerta de 200 lb/ft.



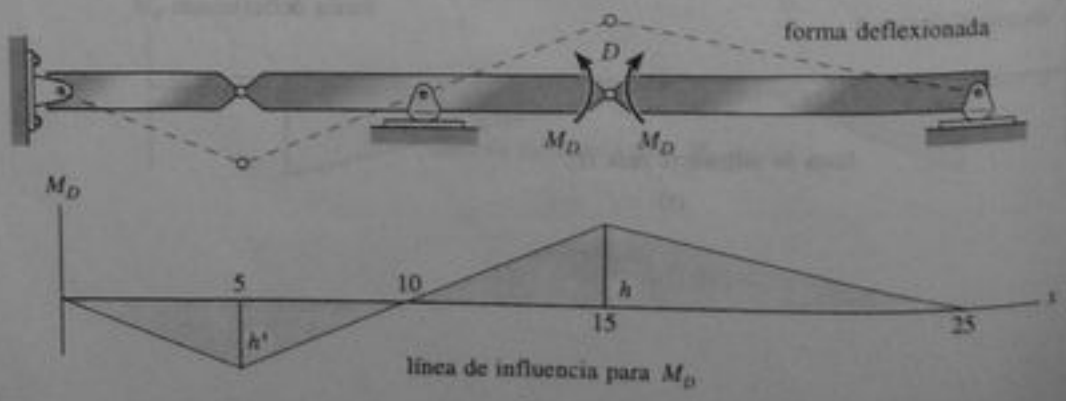
(a)

Fig. 6–19

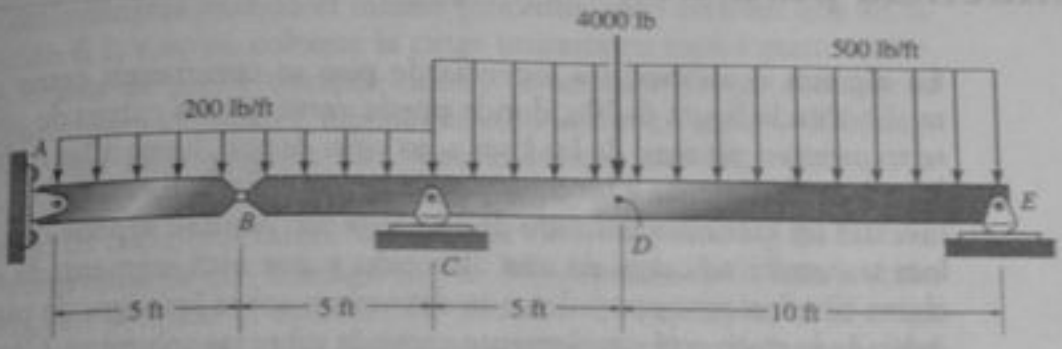
Solución

Se coloca una articulación en D y se aplican momentos positivos M_D a la viga. La forma deflexionada y la correspondiente línea de influencia se muestran en la figura 6–19*b*. Inmediatamente se ve que la carga viva concentrada de 4000 lb crea un momento máximo *positivo* en D cuando se coloca en D, esto es, en el máximo de la línea de influencia. Además, la carga viva uniforme de 300 lb/ft debe extenderse de C a E para cubrir la región donde el área de la línea de influencia es positiva. Finalmente, la carga muerta uniforme de 200 lb/ft actúa sobre toda la longitud de la viga. La carga entera se muestra sobre la viga en la figura 6–19*c*. Conociendo la posición de las cargas, podemos ahora determinar el momento máximo en D usando la estática. En la figura 6–19*d* se muestra el cálculo de las reacciones sobre BE. Seccionando la viga en D y usando el segmento DE, figura 6–19*e*, tenemos

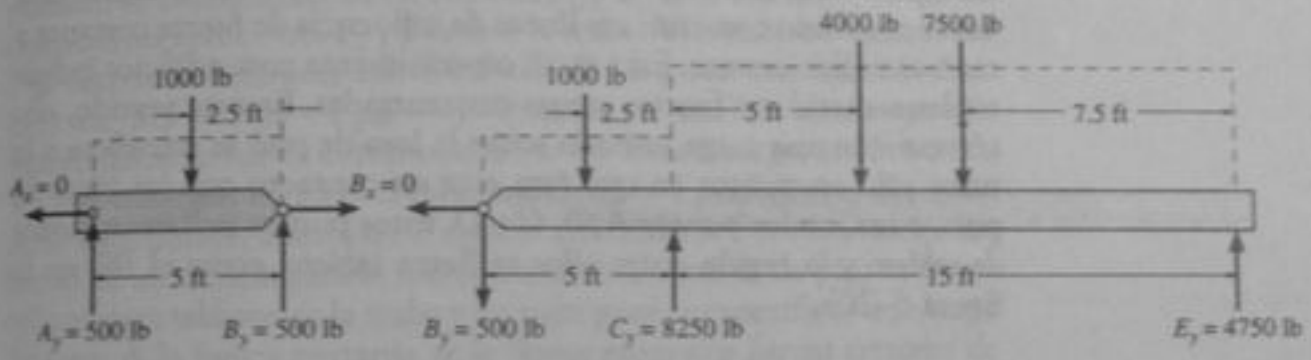
$$\curvearrowright +\Sigma M_D = 0; \qquad M_D + 5000(5) - 4750(10) = 0$$
$$M_D = 22{,}500\ \text{lb}\cdot\text{ft} = 22.5\ \text{k}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$



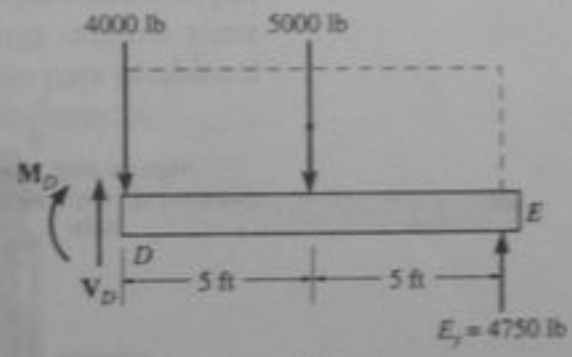
(b)



(c)



(d)



(e)

Este problema puede también resolverse usando *valores numéricos* para la línea de influencia como se indicó en la sección 6.1. En realidad, por inspección de la figura 6–19*b*, sólo el valor máximo h en D debe calcularse. Esto requiere colocar una carga unitaria sobre la viga en D, figura 6–19*a*, y luego encontrar el momento interno en D. Demuestre que el valor de la ordenada obtenida es $h = 3.33$. Por triángulos semejantes, $h'/(10 - 5) = 3.33/(15 - 10)$ o $h' = 3.33$. Por tanto, con la carga situada como en la figura 6–19*c* y usando las áreas y valores máximos de la línea de influencia, figura 6–19*b*, obtenemos

$$M_D = 500[\tfrac{1}{2}(25 - 10)(3.33)] + 4000(3.33) - 200[\tfrac{1}{2}(10)(3.33)]$$
$$= 22{,}500 \text{ lb} \cdot \text{ft} = 22.5 \text{ k} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

6.4 Líneas de influencia para trabes de piso

En algunas ocasiones, los sistemas de piso se construyen como se muestra en la figura 6–20*a*, donde puede verse que las cargas de piso se transmiten primero de las *losas* a las *vigas de piso*, luego a las *trabes laterales* y finalmente a las *columnas* de soporte. En la figura 6–20*b* se muestra un modelo idealizado de este sistema. Aquí se supone que la losa transmite su carga en una dirección y que está segmentada en claros simplemente apoyados que descansan sobre las vigas de piso. Además, la trabe está simplemente apoyada sobre las columnas. Como las trabes son miembros principales de carga en este sistema, es a veces necesario construir sus líneas de influencia de fuerza cortante y momento flexionante. Esto es así especialmente para edificios industriales sometidos a fuertes cargas concentradas. En este sentido, obsérvese que una carga unitaria sobre la losa de piso se transfiere a la trabe sólo en puntos en que ésta está en contacto con las vigas de piso, o sea, en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. Estos puntos se llaman *puntos de tablero* y la región entre ellos se llama *tablero*, como el *BC* en la figura 6–20*b*.

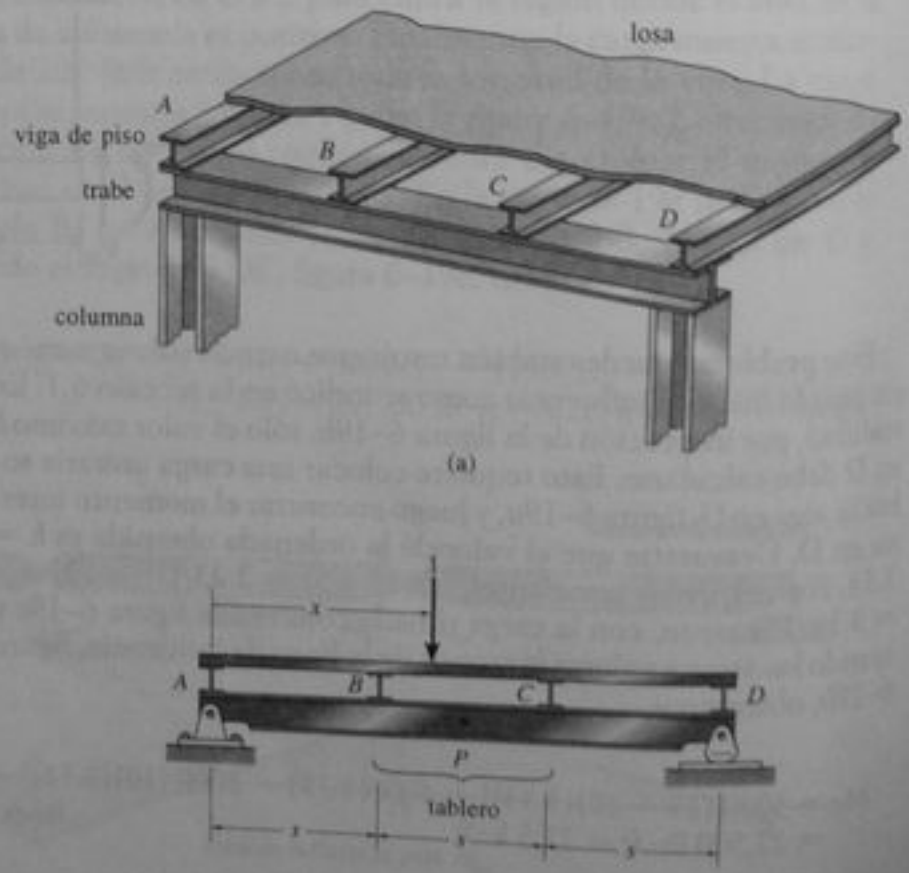
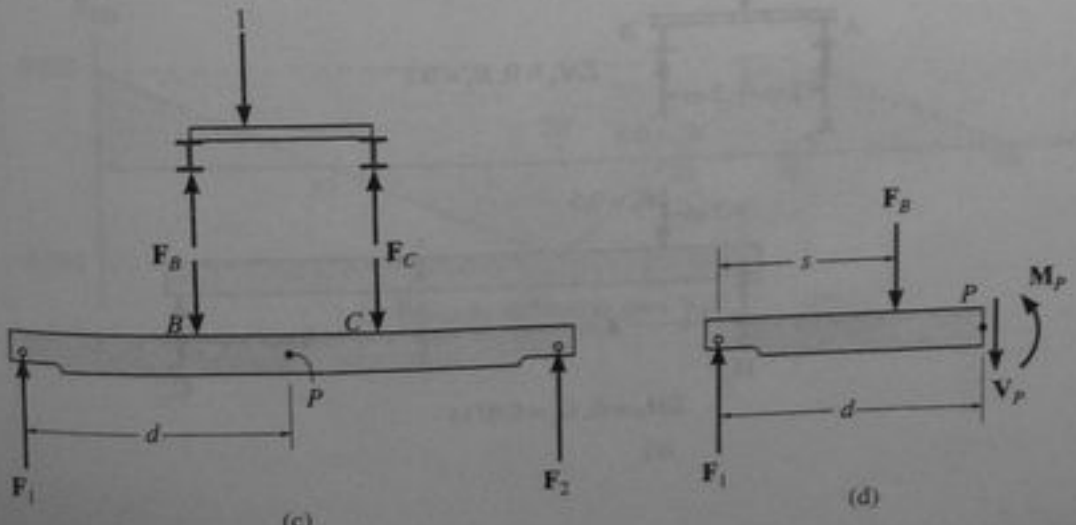


Fig. 6–20

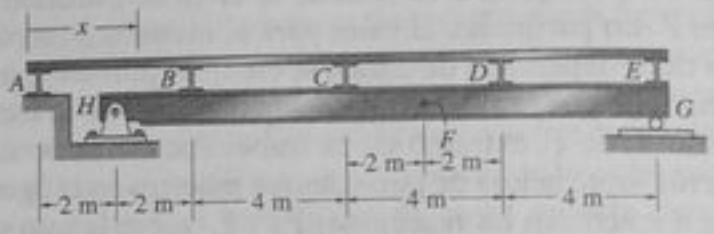
La línea de influencia para un punto específico sobre la trabe puede determinarse usando el mismo procedimiento estático que en la sección 6.1; esto es, coloque la carga unitaria en varios puntos x sobre la losa de piso y siempre calcule la función (fuerza cortante o momento) en el punto P especificado en la trabe, figura 6–20*b*. Trazando esos valores versus x se obtiene la línea de influencia para la función en P. En particular, el valor para el momento interno en un tablero de trabe dependerá de dónde se escoja el punto P para la línea de influencia, ya que la magnitud de $\mathbf{M}_P$ depende de la localización del punto d desde el extremo de la trabe. Por ejemplo, si la carga unitaria actúa sobre la losa de piso como se muestra en la figura 6–20*c*, primero se encuentran las reacciones $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ sobre la losa y luego se calculan las reacciones $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ sobre la trabe. El momento interno en P se determina entonces con el método de las secciones, figura 6–20*d*. Esto da, $M_P = F_1 d - F_B(d - s)$. Usando un análisis similar puede determinarse la fuerza cortante interna $\mathbf{V}_P$. Sin embargo, en este caso, V_P será *constante* en todo el tablero $BC (V_P = F_1 - F_B)$ y no depende de la localización exacta de P dentro del tablero. Por esta razón, las líneas de influencia para la fuerza cortante en trabes de piso se especifican para *tableros* en la trabe y no para puntos específicos a lo largo de ésta. A la fuerza cortante se le llama entonces *fuerza cortante de tablero*. Debe notarse también que como la trabe es afectada sólo por las cargas transmitidas por las vigas de piso, la carga unitaria tiene que colocarse sólo en cada posición de la viga de piso para establecer los datos que se requieren para dibujar la línea de influencia.

Los siguientes ejemplos numéricos deben aclarar el análisis de fuerzas.



Ejemplo 6-13

Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en el tablero *CD* de la trabe de piso en la figura 6–21*a*.



(a)

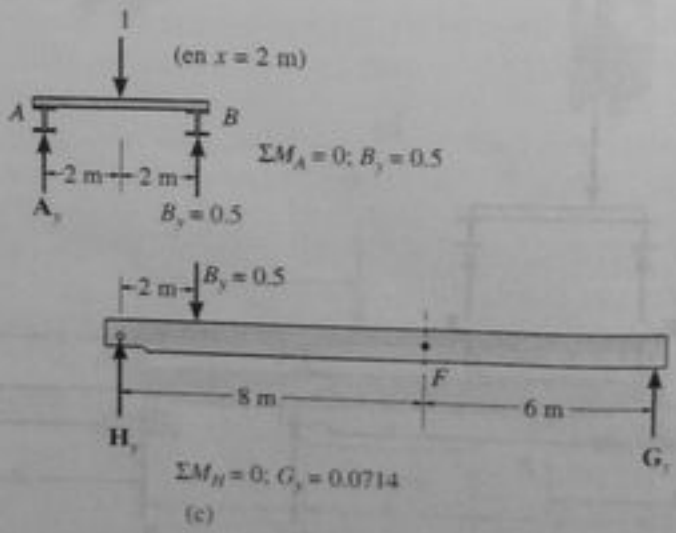
Fig. 6–21

Solución

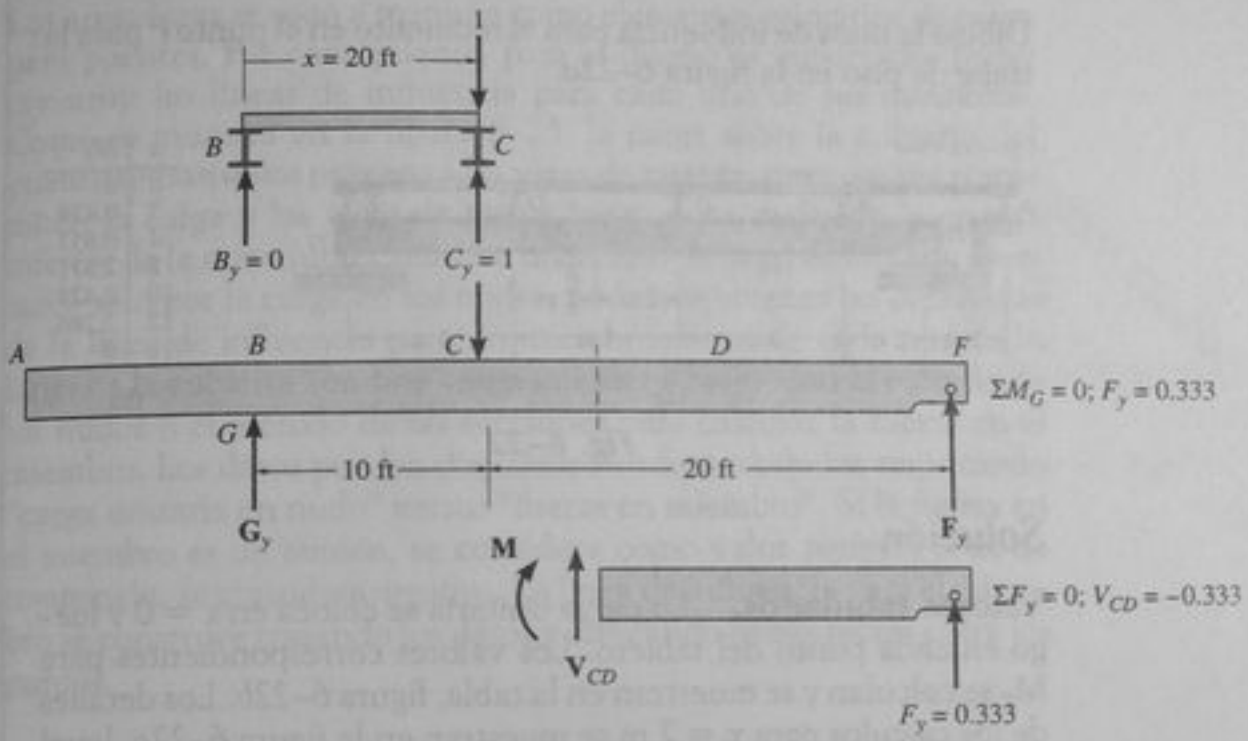
Valores tabulados. La carga unitaria se coloca en cada posición de la viga de piso y se calcula la fuerza cortante en el tablero *CD*. En la figura 6–21*b* se muestra una tabla de los resultados. Los detalles de los cálculos cuando $x = 0$ y $x = 20$ ft se dan en las figuras 6–21*c* y 6–21*d*, respectivamente. Nótese cómo en cada caso las reacciones de las vigas de piso sobre la trabe se calculan primero, seguidas de una determinación de la reacción en el soporte de la trabe en *F* (G_y no se necesita) y finalmente, se considera un segmento de la trabe y se calcula la fuerza cortante interna V_{CD} en el tablero. Como ejercicio, verifique los valores para V_{CD} cuando $x = 10$ ft, 30 ft y 40 ft.

x	V_{CD}
0	0.333
10	0
20	−0.333
30	0.333
40	0

(b)

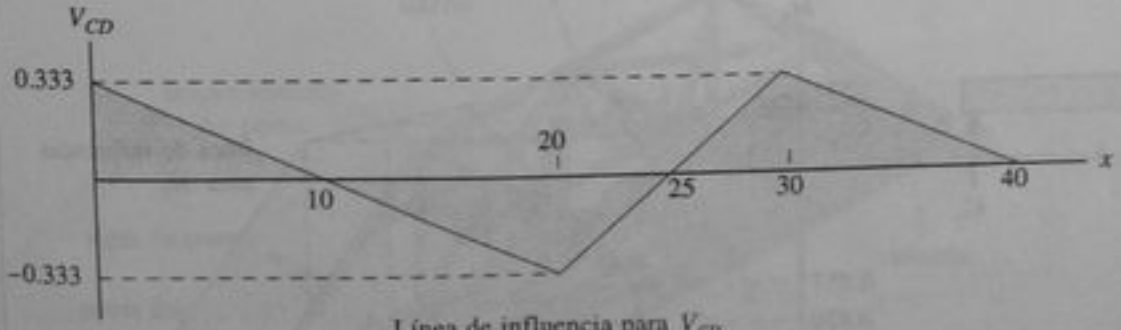


(c)



(d)

Línea de influencia. Graficando los valores en la figura 6–21*b* y conectando los puntos con segmentos de línea recta, se obtiene la línea de influencia resultante para V_{CD} que se muestra en la figura 6–21*e*.

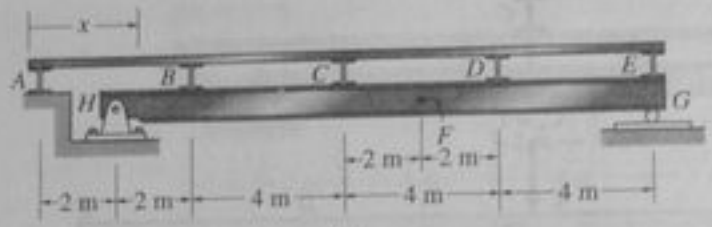


Línea de influencia para V_{CD}

(e)

Ejemplo 6-14

Dibuje la línea de influencia para el momento en el punto F para la trabe de piso en la figura 6–22*a*.



(a)

x	M_F
0	0
2	0.429
4	0.857
8	2.571
10	2.429
12	2.286
16	0

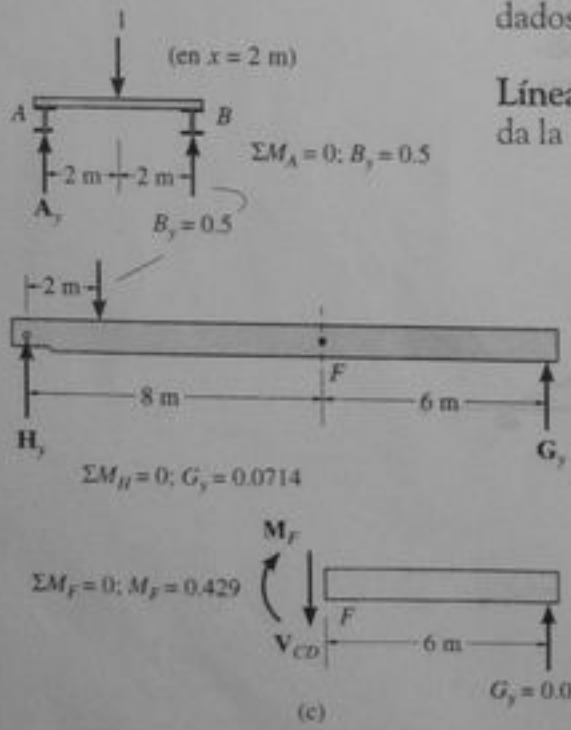
(b)

Fig. 6–22

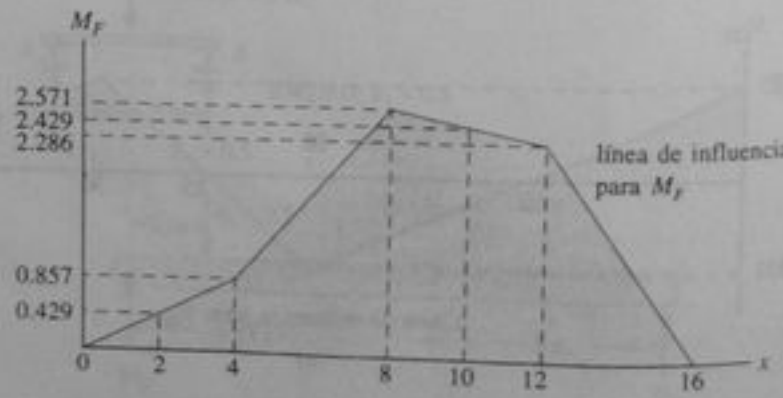
Solución

Valores tabulados. La carga unitaria se coloca en $x = 0$ y luego en cada punto del tablero. Los valores correspondientes para M_F se calculan y se muestran en la tabla, figura 6–22*b*. Los detalles de los cálculos para $x = 2$ m se muestran en la figura 6–22*c*. Igual que en el ejemplo anterior, es necesario determinar primero las reacciones de las vigas de piso sobre la trabe, seguido de una determinación de la reacción G_y de la trabe (H_y no se necesita) y finalmente se considera el segmento GF de ésta y se calcula el momento interno M_F. Como ejercicio, determine los otros valores de M_F dados en la figura 6–22*b*.

Línea de influencia. Una gráfica de los valores en la figura 6–22*b* da la línea de influencia para M_F, figura 6–22*d*.



(c)



(d)

6.5 Líneas de influencia para armaduras

Las armaduras se usan a menudo como elementos primarios de carga para puentes. Por consiguiente, para el diseño es importante poder construir las líneas de influencia para cada uno de sus miembros. Como se muestra en la figura 6–23, la carga sobre la cubierta del puente se transmite primero a las vigas de puente, que a su vez transmiten la carga a las vigas de piso y luego a los *nudos* de la cuerda inferior de la armadura. Como los miembros de la armadura son afectados sólo por la carga en los nudos, podemos obtener las ordenadas de la línea de influencia para un miembro cargando cada nudo a lo largo de la cubierta con una carga unitaria y luego usar el método de los nudos o el método de las secciones para calcular la fuerza en el miembro. Los datos pueden disponerse en forma tabular, registrando "carga unitaria en nudo" versus "fuerza en miembro". Si la fuerza en el miembro es de *tensión*, se considera como valor *positivo*; si es de *compresión*, se considera *negativo*. La línea de influencia para el miembro se construye trazando los datos y dibujando líneas rectas entre los puntos.

Los siguientes ejemplos ilustran el método de construcción.

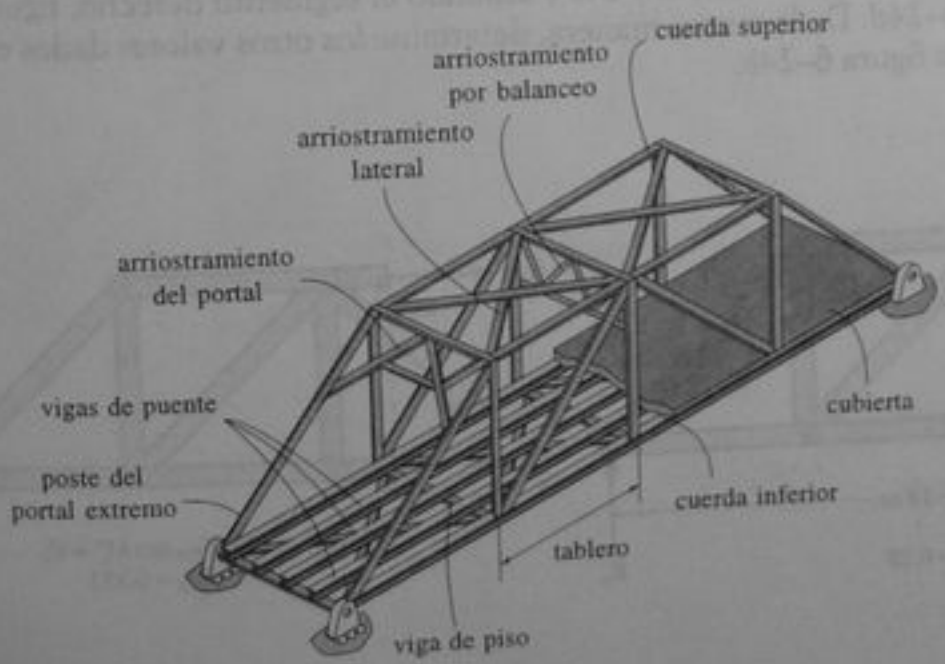
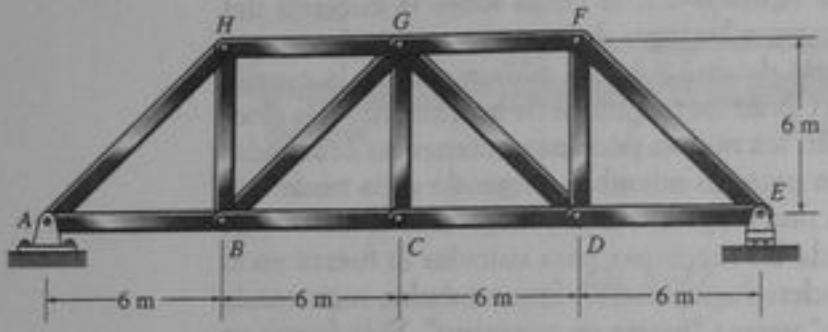


Fig. 6–23

Ejemplo 6-15

Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro GB de la armadura de puente mostrada en la figura 6–24*a*.



(a)

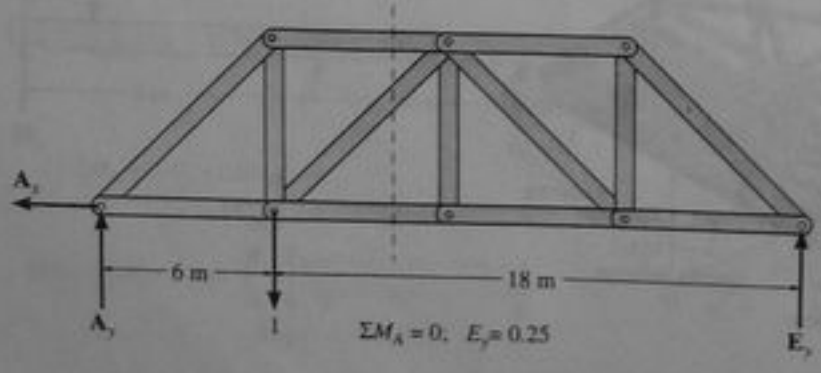
x	F_{GB}
A	0
B	0.353
C	-0.707
D	-0.353
E	0

(b)

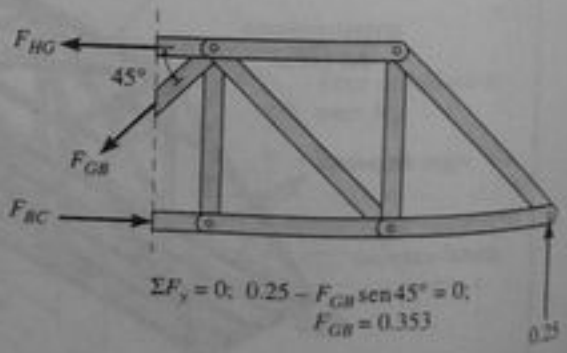
Fig. 6–24

Solución

Valores tabulados. En la figura 6–24*b* se muestra una tabla de posiciones x de la carga unitaria en los nudos de la cuerda inferior versus la fuerza en el miembro GB. Aquí, cada nudo sucesivo de la cuerda inferior se carga y se calcula la fuerza en el miembro GB usando el método de las secciones. Por ejemplo, se calcula primero la reacción en E colocando la carga unitaria en $x = 6$ m (nudo B), figura 6–24c; se determina luego la fuerza en GB, pasando una sección por HG, GB y BC y aislando el segmento derecho, figura 6–24*d*. De la misma manera, determine los otros valores dados en la figura 6–24*b*.

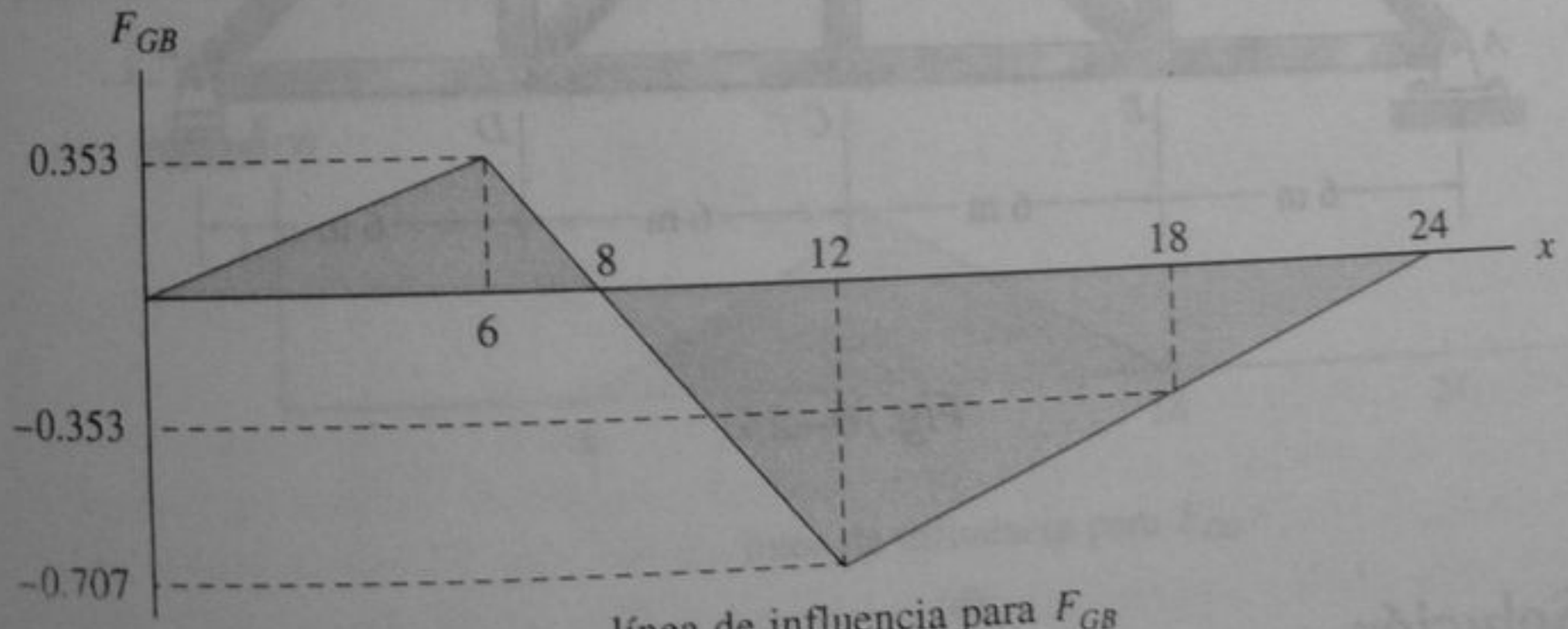


(c)



(d)

Línea de influencia. Trazando los datos en la figura 6–24*b* y conectando los puntos se obtiene la línea de influencia para el miembro *GB*, que se muestra en la figura 6–24*e*. Como la línea de influencia se extiende sobre todo el claro de la armadura, al miembro *GB* se le llama *miembro primario*. Esto significa que GB está sometido a una fuerza, independientemente de donde esté cargada la cubierta (superficie de rodamiento) del puente. El punto de fuerza cero, $x = 8$ m, se determina por triángulos semejantes entre $x = 6$ m y $x = 12$ m, esto es $(0.353 + 0.707)/(12 - 6) = 0.353/x'$, $x' = 2$ m, por lo que $x = 6 + 2 = 8$ m.

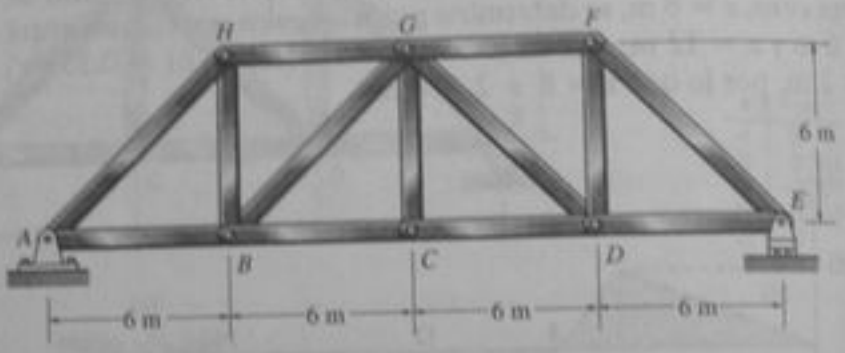


línea de influencia para F_{GB}

(e)

Ejemplo 6-16

Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro CG de la armadura de puente mostrada en la figura 6–25*a*.



(a)

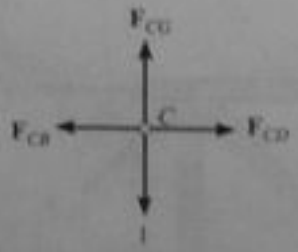
Fig. 6–25

Solución

Valores tabulados. En la figura 6–25*b* se muestra una tabla de posiciones de la carga unitaria en los nudos de la cuerda inferior versus la fuerza en el miembro CG. Esos valores se obtienen fácilmente aislando el nudo C, figura 6–25*c*. Se ve aquí que CG es un miembro de fuerza cero a menos que la carga unitaria se aplique en el nudo C, en cuyo caso $F_{CG} = 1$ (T).

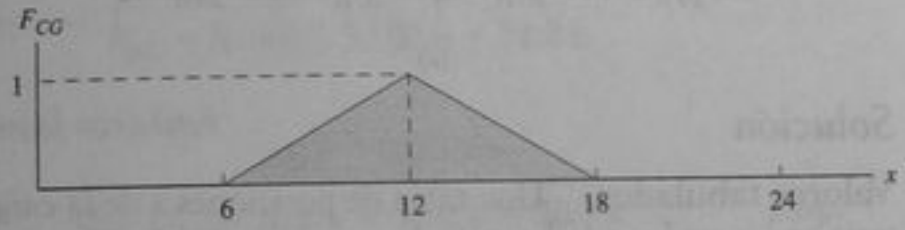
x	F_{CG}
A	0
B	0
C	1
D	0
E	0

(b)



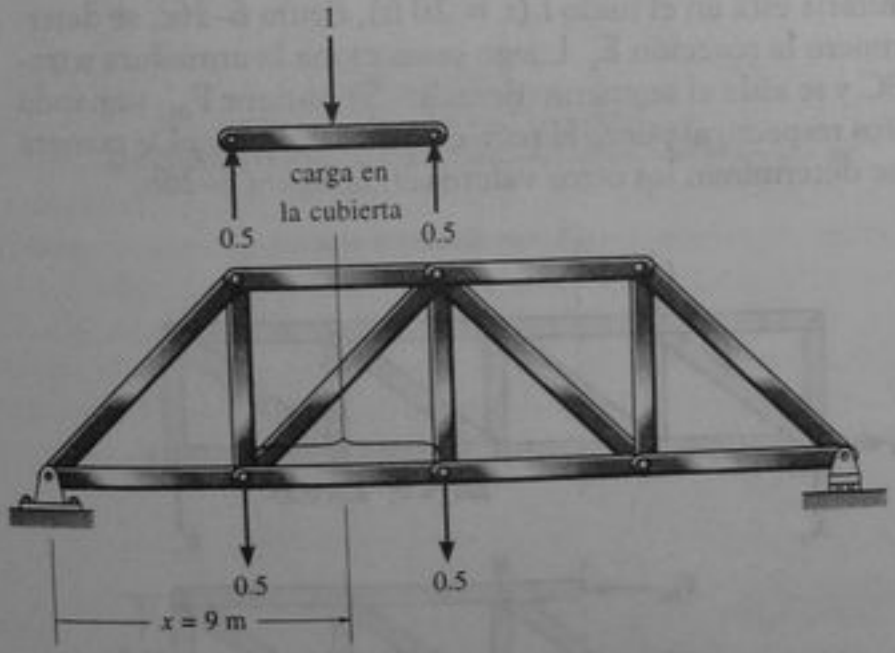
(c)

Línea de influencia. Trazando los datos en la figura 6–25*b* y conectando los puntos se obtiene la línea de influencia para el miembro CG como se muestra en la figura 6–25*d*. En particular, obsérvese que cuando la carga unitaria está en $x = 9$ m, la fuerza en el miembro CG es $F_{CG} = 0.5$. Esta situación requiere que la carga unitaria se coloque sobre la cubierta del puente *entre* los nudos. La transferencia de esta carga de la cubierta a la armadura se muestra en la figura 6–25*e*. Puede verse que efectivamente $F_{CG} = 0.5$, si se analiza el equilibrio del nudo C, figura 6–25*f*. Como la línea de influencia para CG no se extiende sobre todo el claro de la armadura, figura 6–25*d*, al miembro CG se le llama *miembro secundario*.



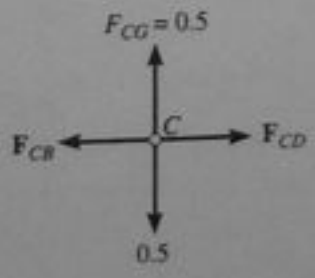
línea de influencia para F_{CG}

(d)



carga en la armadura

(e)

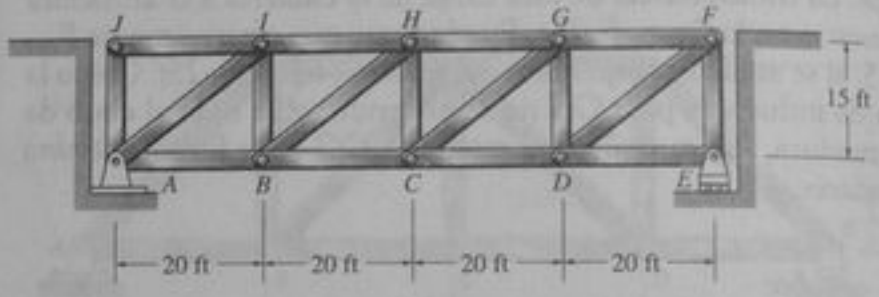


carga en el nudo

(f)

Ejemplo 6-17

Determine la mayor fuerza que puede desarrollarse en el miembro *BC* de la armadura de puente mostrada en la figura 6–26*a* debido a una carga viva concentrada de 20 k y a una carga viva uniforme de 0.6 k/ft. La carga se aplica en la cuerda superior.



(a)

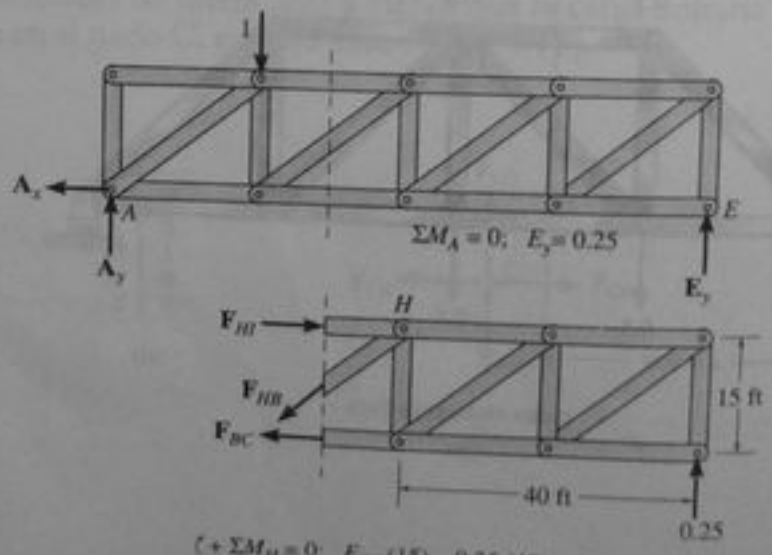
Fig. 6–26

Solución

Valores tabulados. Una tabla de posiciones x de la carga unitaria en los nudos a lo largo de la cuerda superior versus la fuerza en el miembro *BC* se muestra en la figura 6–26*b*. El método de las secciones puede usarse para los cálculos. Por ejemplo, cuando la carga unitaria está en el nudo *I* ($x = 20$ ft), figura 6–26*c*, se determina primero la reacción $\mathbf{E}_y$. Luego se secciona la armadura a través de *BC* y se aísla el segmento derecho. Se obtiene $\mathbf{F}_{BC}$ sumando momentos respecto al punto *H* para eliminar $\mathbf{F}_{HI}$ y $\mathbf{F}_{HB}$. De manera similar se determinan los otros valores en la figura 6–26*b*.

x	F_{BC}
J	0
I	0.667
H	1.33
G	0.667
F	0

(b)



(c)

Línea de influencia. Una gráfica de los valores en la figura 6–26*b* da la línea de influencia, figura 6–26*d*. Por inspección, *BC* es un miembro primario. ¿Por qué?

Fuerza concentrada. La fuerza más grande en el miembro *BC* se genera cuando la fuerza viva concentrada de 20 k se coloca en $x = 40$ ft. Así,

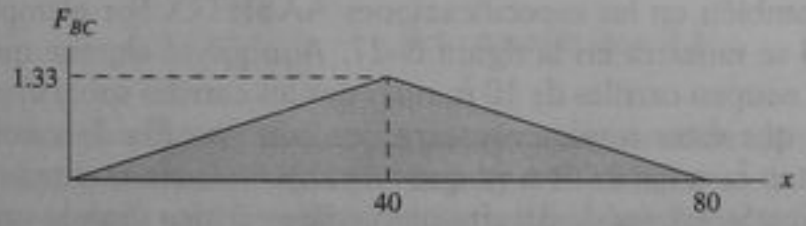
$$F_{BC} = (1.33)(20) = 26.7 \text{ k}$$

Carga viva uniforme. La carga viva uniforme debe colocarse sobre toda la cubierta de la armadura para generar la máxima fuerza de tensión en *BC*.* Así,

$$F_{BC} = [\tfrac{1}{2}(80)(1.33)]0.6 = 32.0 \text{ k}$$

Fuerza total máxima

$$(F_{BC})_{máx} = 26.7 \text{ k} + 32.0 \text{ k} = 58.7 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$



línea de influencia para F_{BC}

(d)

*La fuerza más grande de *tensión* en el miembro *GB* del ejemplo 6–15 se genera cuando la carga distribuida actúa sobre la cubierta de la armadura entre $x = 0$ y $x = 8$ m, figura 6–24*e*.

6.6 Cargas vivas para puentes

Puentes carreteros

En la sección 1.3 mencionamos que las cargas vivas principales sobre claros de puentes son las debidas al tránsito. La carga vehicular más pesada que se encuentra es la causada por una serie de camiones. Las especificaciones para cargas de camión sobre puentes carreteros están contenidas en el código de la American Association of State and Highway Transportation Officials (AASHTO). Para camiones de dos ejes, estas cargas se designan con una H, seguida del peso del camión en toneladas y otro número, que da el año de la especificación en que se reportó la carga. Por ejemplo, un H15-44 es un camión de 15 toneladas como se da en las especificaciones de 1944. Los camiones de la serie H pesan entre 10 y 20 toneladas. Sin embargo, los puentes localizados en la mayoría de las carreteras, que soportan una gran cantidad de tránsito, se diseñan a menudo para camiones de dos ejes más un semirremolque de un eje. Estas cargas se designan HS, por ejemplo, HS 20-44. En general, una carga de camión seleccionada para un diseño depende del tipo de puente, de su localización y del tipo de tránsito esperado.

El tamaño del "camión estándar" y la distribución de su peso se indican también en las especificaciones AASHTO. Por ejemplo, el HS 20-44 se muestra en la figura 6–27. Aunque se supone que los camiones ocupan carriles de 10 ft, no todos los carriles sobre el puente tienen que estar totalmente cargados con una fila de camiones para obtener la carga crítica, ya que tal carga sería altamente improbable. Además, en vez de determinar la carga crítica úsando una serie de cargas de ruedas de camión concentradas, en algunos casos las especificaciones permiten una simplificación que representa una carga de carril como una carga uniforme más una sola fuerza concentrada. Esto se hace con la idea de representar una distribución de tránsito de peso mediano con un camión pesado situado en el punto máximo de la línea de influencia.

carga de camión HS 20-44

Fig. 6–27

Puentes ferrocarrileros

Las cargas sobre puentes de ferrocarril son especificadas por el código de la American Railroad Engineers Association (AREA). Para el diseño se usan normalmente las cargas E, como fueron establecidas originalmente por Theodore Cooper en 1894. Por ejemplo, un tren moderno con una carga de 72 k en el eje motriz de la locomotora se designa como una carga E-72. La carga entera E-72 para diseño se distribuye como se muestra en la figura 6–28. D. B. Steinmann ha actualizado la distribución de cargas de Cooper y ha inventado una serie de cargas M, que también son aceptables para el diseño. Como las cargas de trenes implican una complicada serie de fuerzas concentradas, se usan tablas y gráficas para simplificar los cálculos a mano y a veces se usan éstas en conjunción con líneas de influencia para obtener la carga crítica.*

Cargas de impacto

Los vehículos móviles pueden rebotar o ladearse al circular sobre un puente, provocando un *impacto* en la cubierta de éste. El incremento porcentual de cargas vivas debido al impacto se llama *factor de impacto I*. Este factor se obtiene generalmente de fórmulas desarrolladas a partir de evidencia experimental. Por ejemplo, para puentes carreteros, las especificaciones AASHTO requieren que

$$I = \frac{50}{L + 125} \qquad \text{Pero no más que } 0.3$$

donde L es la longitud del claro en pies que está sometido a la carga viva. Por ejemplo, el miembro BC en el ejemplo 6–17 tiene un factor de impacto calculado para L = 80 ft, ya que la línea de influencia (y la carga) se extiende sobre la longitud entera de la armadura, figura 6–26d.† Por tanto, $I = 50/(80 + 125) = 0.244 \leq 0.3$. La carga adicional en el miembro BC debido a impacto es entonces $I(F_{BC})_{máx} = 0.244(58.7\text{ k}) = 14.3\text{ k}$. Cuando ésta se suma a la colocación "estática" de la carga viva, la fuerza "total" en BC es por tanto 58.7 k + 14.3 k = 73.0 k. Tipos similares de fórmulas y sus aplicaciones pueden encontrarse en el código AREA.

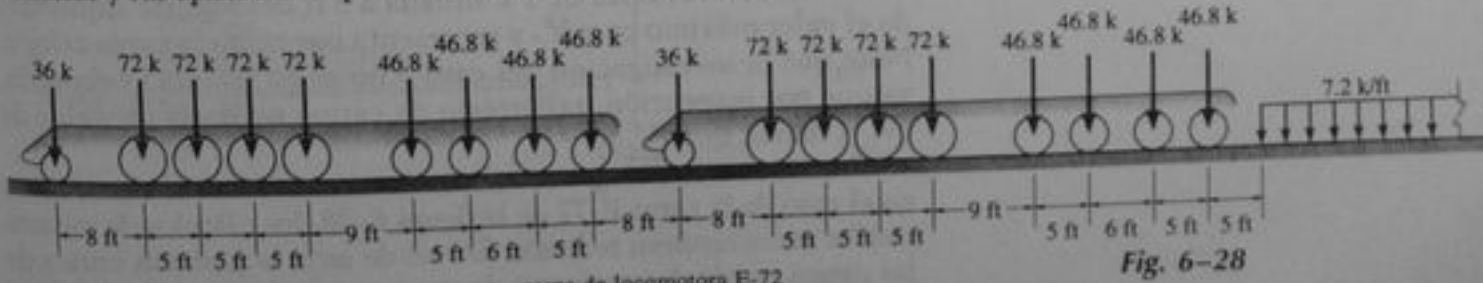


Fig. 6–28

* Véase *Specifications for Steel Railway Bridges*, indicado en las referencias al final del capítulo.

† Para el miembro GB en el ejemplo 6–15, L = 8m para cargas vivas de tensión y L = 24 m – 8 m = 16 m para cargas vivas de compresión, figura 6–24e.

6.7 Influencia máxima en un punto debido a una serie de cargas concentradas

Una vez que se ha establecido la línea de influencia de una función para un punto en una estructura, el efecto máximo causado por una fuerza viva concentrada se determina multiplicando la ordenada máxima de la línea de influencia por la magnitud de la fuerza. Sin embargo, en algunos casos, *varias* fuerzas concentradas deben colocarse sobre la estructura. Un ejemplo serían las cargas de ruedas de un camión o un tren, como se muestra en las figuras 6–27 y 6–28. Para determinar el máximo efecto en este caso, puede usarse un procedimiento de tanteos o bien un método basado en el cambio en la función que tiene lugar cuando la carga se mueve. Cada uno de esos métodos se explicará ahora específicamente aplicado a la fuerza cortante y al momento flexionante.

Fuerza cortante

Considere la viga simplemente apoyada con la línea de influencia asociada para la fuerza cortante en el punto C en la figura 6–29*a*. Debe determinarse la *fuerza cortante* máxima positiva en el punto C debido a la serie de cargas concentradas (de rueda) que se muestran en la figura 6–29*b*, las cuales se mueven de derecha a izquierda sobre la viga. La carga crítica ocurrirá cuando una de las cargas se coloque *justo a la derecha* del punto C, que coincide con el máximo positivo de la línea de influencia. Cada uno de tres posibles casos puede investigarse por tanteos, figura 6–29*c*. Tenemos

$$\text{Caso 1:}\quad (V_C)_1 = 1(0.75) + 4(0.625) + 4(0.5) = 5.25\ \text{k}$$
$$\text{Caso 2:}\quad (V_C)_2 = 1(-0.125) + 4(0.75) + 4(0.625) = 5.375\ \text{k}$$
$$\text{Caso 3:}\quad (V_C)_3 = 1(0) + 4(-0.125) + 4(0.75) = 2.5\ \text{k}$$

El caso 2, con la fuerza de 1 k situada a 5 ft del soporte izquierdo, da el valor máximo para V_C y representa por tanto la carga crítica. Note que la investigación del caso 3 no es en realidad necesaria, ya que por inspección, tal arreglo de cargas no daría un valor de $(V_C)_3$ mayor que $(V_C)_2$.

Cuando muchas cargas concentradas actúan sobre el claro, como en el caso de la carga E-72 de la figura 6–28, los cálculos de tanteos usados antes resultan tediosos. En vez de esto, la posición crítica de las cargas puede determinarse de manera más directa calculando el cambio en la fuerza cortante, ΔV, que ocurre cuando las cargas se mueven del caso 1 al caso 2; luego del caso 2 al caso 3, etc. En tanto que cada ΔV calculada sea *positiva*, la nueva posición dará una fuerza cortante mayor en el punto C de la viga que la de la posición previa.

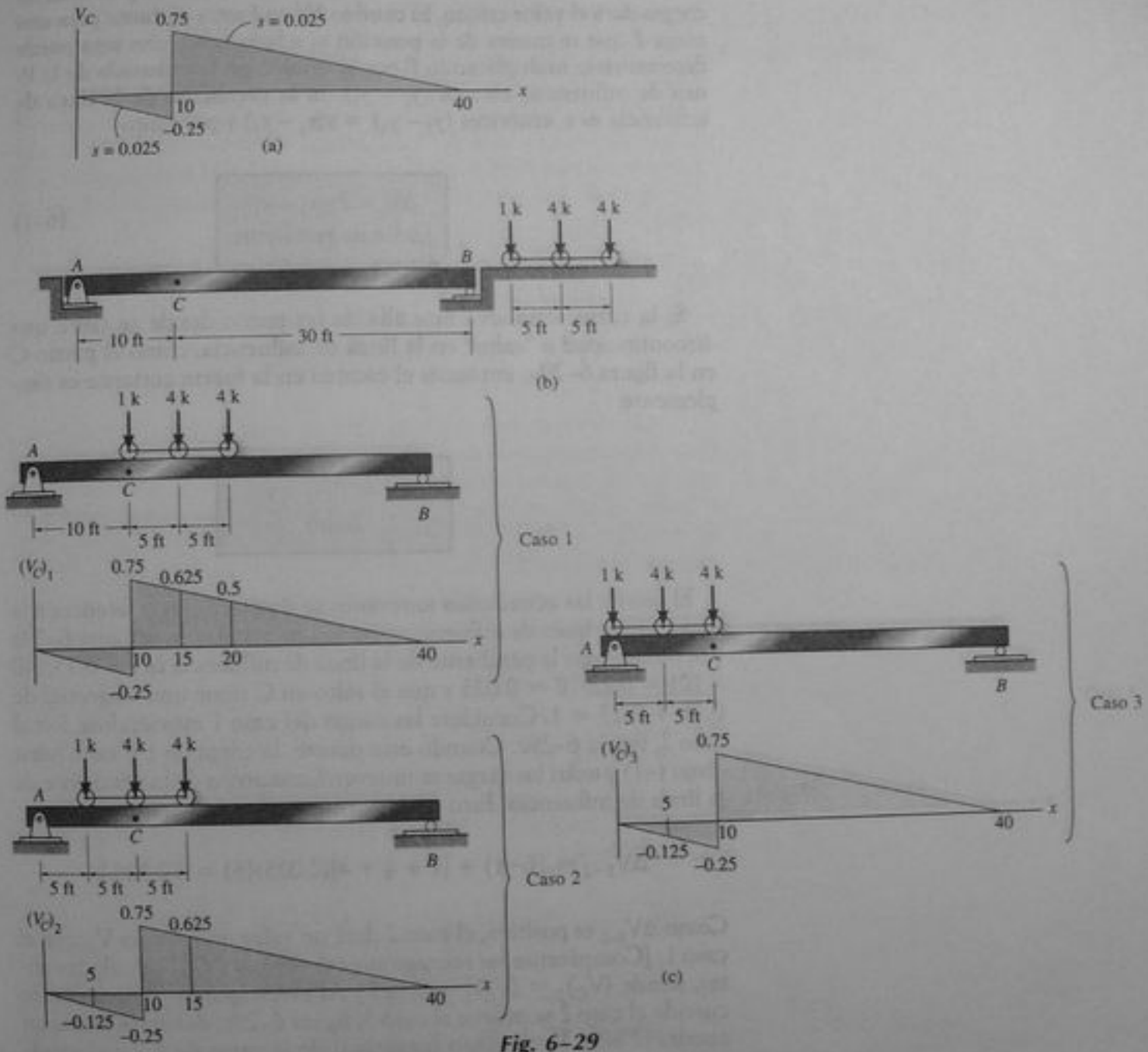

V_C
0.75
$s = 0.025$
10
40
x
−0.25
$s = 0.025$
(a)
1 k
4 k
4 k
A
B
C
10 ft
30 ft
5 ft
5 ft
(b)
Caso 1
$(V_C)_1$
0.625
0.5
15
20
Caso 2
$(V_C)_2$
5
−0.125
Caso 3
$(V_C)_3$
(c)

Fig. 6–29

Cada movimiento se investiga hasta que se calcula un cambio negativo en la fuerza cortante. Cuando esto ocurre, la posición previa de las cargas dará el valor crítico. El cambio ΔV en fuerza cortante para una carga P que se mueve de la posición x_1 a la x_2 sobre una viga puede determinarse multiplicando P por el cambio en la ordenada de la línea de influencia, esto es $(y_2 - y_1)$. Si la pendiente de la línea de influencia es s, entonces $(y_2 - y_1) = s(x_2 - x_1)$ y por tanto

$$\Delta V = Ps(x_2 - x_1) \quad \text{Línea de pendiente} \tag{6–1}$$

Si la carga se mueve más allá de un punto donde se tiene una discontinuidad o "salto" en la línea de influencia, como el punto C en la figura 6–29*a*, entonces el cambio en la fuerza cortante es simplemente

$$\Delta V = P(y_2 - y_1) \quad \text{Salto} \tag{6–2}$$

El uso de las ecuaciones anteriores se ilustrará con referencia a la viga, carga y línea de influencia para V_C, mostradas en la figura 6–29*a* y *b*. Nótese que la pendiente de la línea de influencia es $s = 0.75/(40 - 10) = 0.25/10 = 0.025$ y que el salto en C tiene una magnitud de $0.75 + 0.25 = 1$. Considere las cargas del caso 1 moviéndose 5 ft al caso 2, figura 6–29*c*. Cuando esto ocurre, la carga de 1 k salta *hacia abajo* (–1) y *todas* las cargas se mueven *hacia arriba* de la pendiente de la línea de influencia. Esto causa un cambio de fuerza cortante,

$$\Delta V_{1-2} = 1(-1) + [1 + 4 + 4](0.025)(5) = +0.125 \text{ k}$$

Como ΔV_{1-2} es positiva, el caso 2 dará un valor mayor para V_C que el caso 1. [Compárense las respuestas para $(V_C)_1$ y $(V_C)_2$ calculadas antes, donde $(V_C)_2 = (V_C)_1 + 0.125$.] Al investigar ΔV_{2-3}, que ocurre cuando el caso 2 se mueve al caso 3, figura 6–29*c*, debemos tomar en cuenta el salto hacia abajo (negativo) de la carga de 4 k y el movimiento horizontal de 5 ft de todas las cargas *hacia arriba* de la pendiente de la línea de influencia. Tenemos

$$\Delta V_{2-3} = 4(-1) + (1 + 4 + 4)(0.025)(5) = -2.875 \text{ k}$$

Como ΔV_{2-3} es negativa, el caso 2 es la posición de la carga crítica, como se determinó previamente.

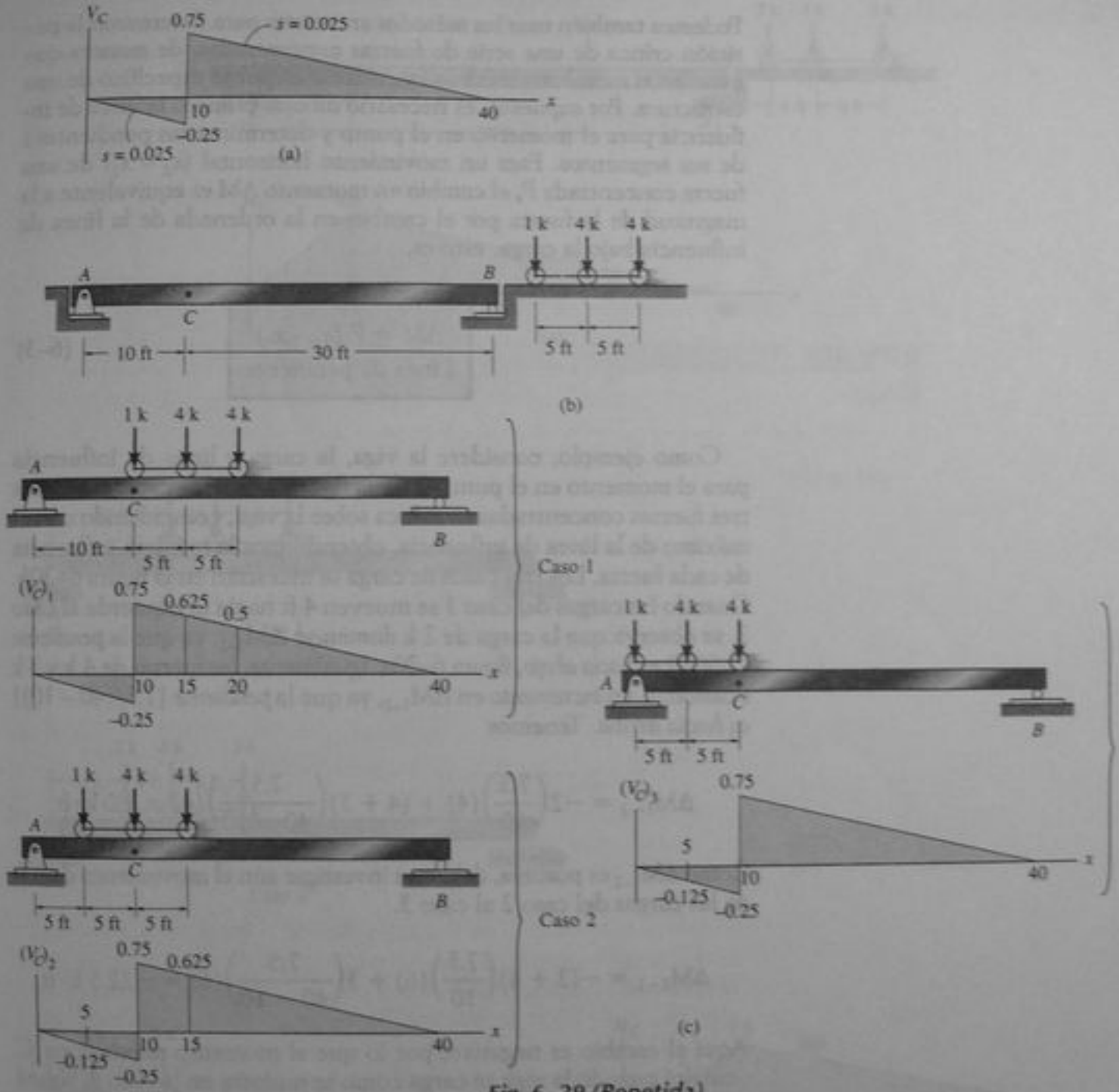


Fig. 6–29 (Repetida)

Momento flexionante

Podemos también usar los métodos anteriores para determinar la posición crítica de una serie de fuerzas concentradas, de manera que generen el momento máximo interno en un punto específico de una estructura. Por supuesto, es necesario dibujar primero la línea de influencia para el momento en el punto y determinar las pendientes s de sus segmentos. Para un movimiento horizontal $(x_2 - x_1)$ de una fuerza concentrada P, el cambio en momento ΔM es equivalente a la magnitud de la fuerza por el cambio en la ordenada de la línea de influencia bajo la carga, esto es,

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta M = Ps(x_2 - x_1) \\ \text{Línea de pendiente}\end{array}} \tag{6–3}$$

Como ejemplo, considere la viga, la carga y línea de influencia para el momento en el punto C de la figura 6–30*a*. Si cada una de las tres fuerzas concentradas se coloca sobre la viga, coincidiendo con el máximo de la línea de influencia, obtendremos la máxima influencia de cada fuerza. Los tres casos de carga se muestran en la figura 6–30*b*. Cuando las cargas del caso 1 se mueven 4 ft hacia la izquierda al caso 2, se observa que la carga de 2 k *disminuye* ΔM_{1-2}, ya que la *pendiente* (7.5/10) es *hacia abajo*, figura 6–30*a*. Igualmente, las fuerzas de 4 k y 3 k ocasionan un *incremento* en ΔM_{1-2}, ya que la *pendiente* [7.5/(40 – 10)] es *hacia arriba*. Tenemos

$$\Delta M_{1-2} = -2\left(\frac{7.5}{10}\right)(4) + (4 + 3)\left(\frac{7.5}{40 - 10}\right)(4) = 1.0\,\text{k}\cdot\text{ft}$$

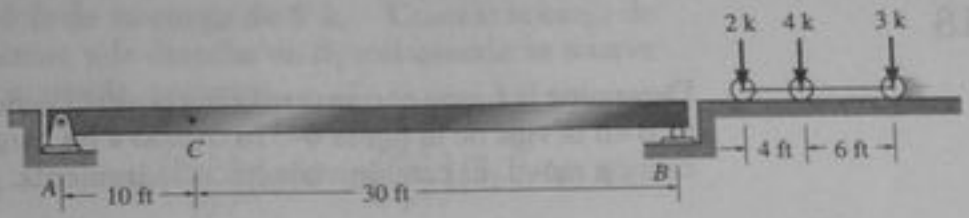
Como ΔM_{1-2} es positiva, debemos investigar aún el movimiento de 6 ft de las cargas del caso 2 al caso 3.

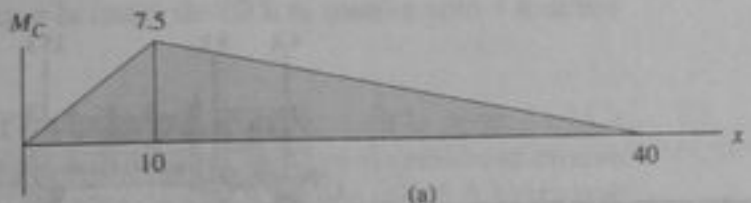
$$\Delta M_{2-3} = -(2 + 4)\left(\frac{7.5}{10}\right)(6) + 3\left(\frac{7.5}{40 - 10}\right)(6) = -22.5\,\text{k}\cdot\text{ft}$$

Aquí el cambio es negativo, por lo que el momento máximo en C ocurrirá cuando la viga se carga como se muestra en la caso 2, figura 6–30*c*. El momento máximo en C es, entonces,

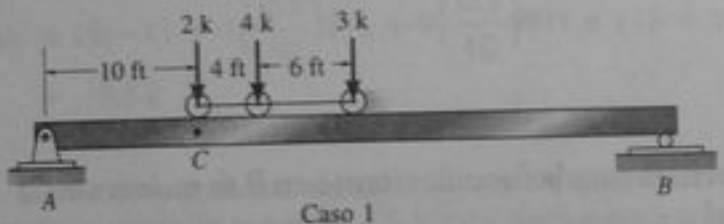
$$(M_C)_{\text{máx}} = 2(4.5) + 4(7.5) + 3(6.0) = 57.0\,\text{k}\cdot\text{ft}$$

Los siguientes ejemplos ilustran más aún este método.

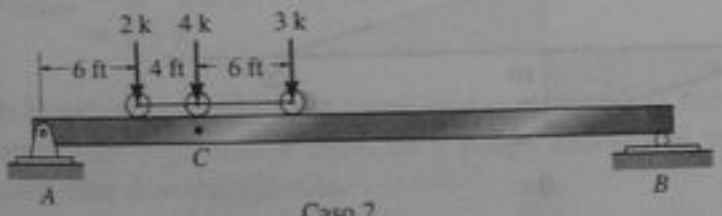




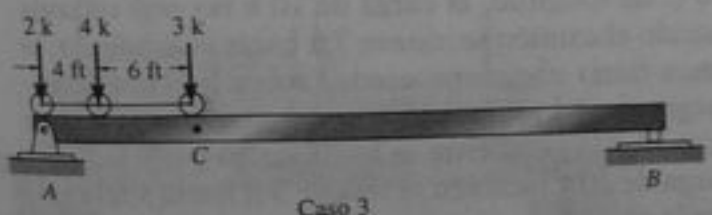
(a)



Caso 1

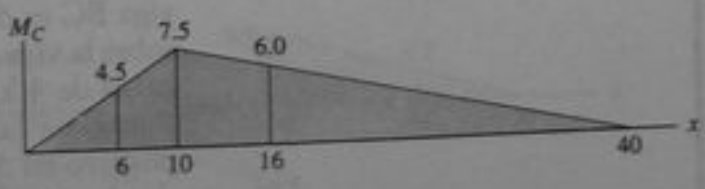


Caso 2



Caso 3

(b)

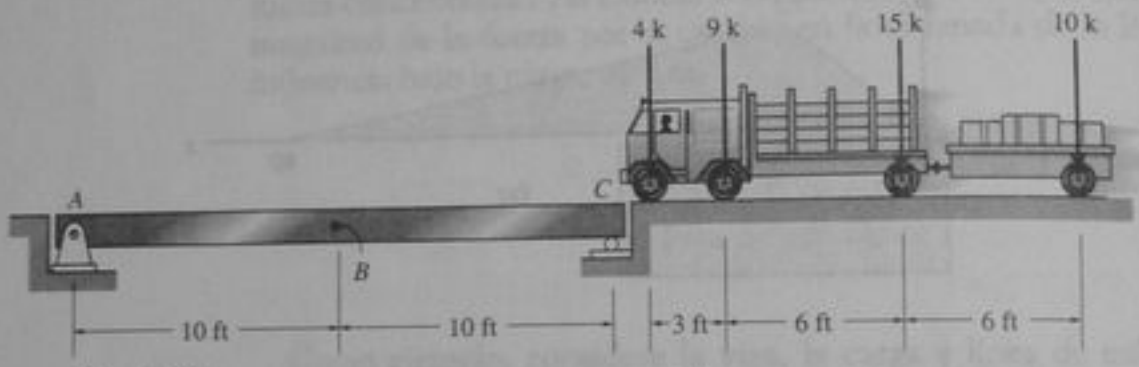


(c)

Fig. 6–30

Ejemplo 6-18

Determine la fuerza cortante máxima positiva generada en el punto B en la viga de la figura 6–31*a* debido a las cargas de rueda del camión móvil. El camión viaja hacia la izquierda.

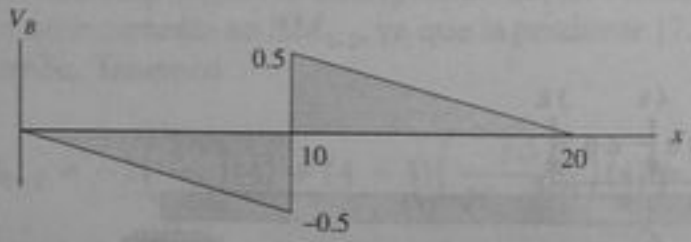


(a)

Fig. 6–31

Solución

La línea de influencia para la fuerza cortante en B se muestra en la figura 6–31*b*.



(b)

Movimiento de 3 ft de la carga de 4 k. Imagine que la carga de 4 k actúa justamente a la derecha del punto B de manera que obtenemos su influencia máxima positiva. Como el segmento de viga BC es de 10 ft de longitud, la carga de 10 k no está todavía sobre la viga. Cuando el camión se mueve 3 ft hacia la izquierda, la carga de 4 k brinca *hacia abajo* una unidad sobre la línea de influencia y las cargas de 4 k, 9 k y 15 k generan un incremento positivo en ΔV_B, ya que la pendiente es hacia arriba y a la izquierda. Aunque la carga de 10 k también se mueve 3 ft hacia adelante, aún no está sobre la viga. Así,

$$\Delta V = 4(-1) + (4 + 9 + 15)\left(\frac{0.5}{10}\right)3 = +0.2\,\text{k}$$

Movimiento de 6 ft de la carga de 9 k. Cuando la carga de 9 k actúa precisamente a la derecha de B, y el camión se mueve luego 6 ft hacia la izquierda, tenemos

$$\Delta V = 9(-1) + (4 + 9 + 15)\left(\frac{0.5}{10}\right)(6) + 10\left(\frac{0.5}{10}\right)(4) = +1.4\text{ k}$$

Note en los cálculos que la carga de 10 k se mueve sólo 4 ft sobre la viga.

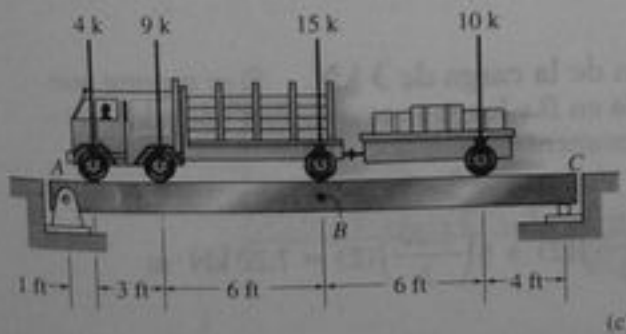
Movimiento de 6 ft de la carga de 15 k. Si la carga de 15 k se sitúa precisamente a la derecha de B y luego el camión se mueve 6 ft hacia la izquierda, la carga de 4 k se mueve sólo 1 ft hasta que está fuera de la viga y, de modo similar, la carga de 9 k se mueve sólo 4 ft hasta que está fuera de la viga. Por consiguiente,

$$\Delta V = 15(-1) + 4\left(\frac{0.5}{10}\right)(1) + 9\left(\frac{0.5}{10}\right)(4) + (15 + 10)\left(\frac{0.5}{10}\right)(6)$$
$$= -5.5\text{ k}$$

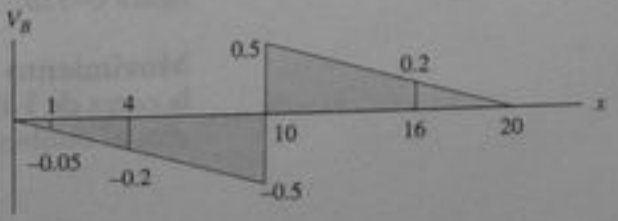
Como ΔV es ahora negativa, la posición correcta de las cargas ocurre cuando la carga de 15 k está justamente a la derecha del punto B, figura 6–30c. En consecuencia,

$$(V_B)_{máx} = 4(-0.05) + 9(-0.2) + 15(0.5) + 10(0.2)$$
$$= 7.5\text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

En la práctica también se tiene que considerar el movimiento del camión de izquierda a derecha y luego escoger el valor máximo entre esas dos situaciones.



(c)



Ejemplo 6-19

Determine el momento máximo positivo generado en el punto B en la viga de la figura 6–32*a* debido a las cargas de rueda de la grúa.

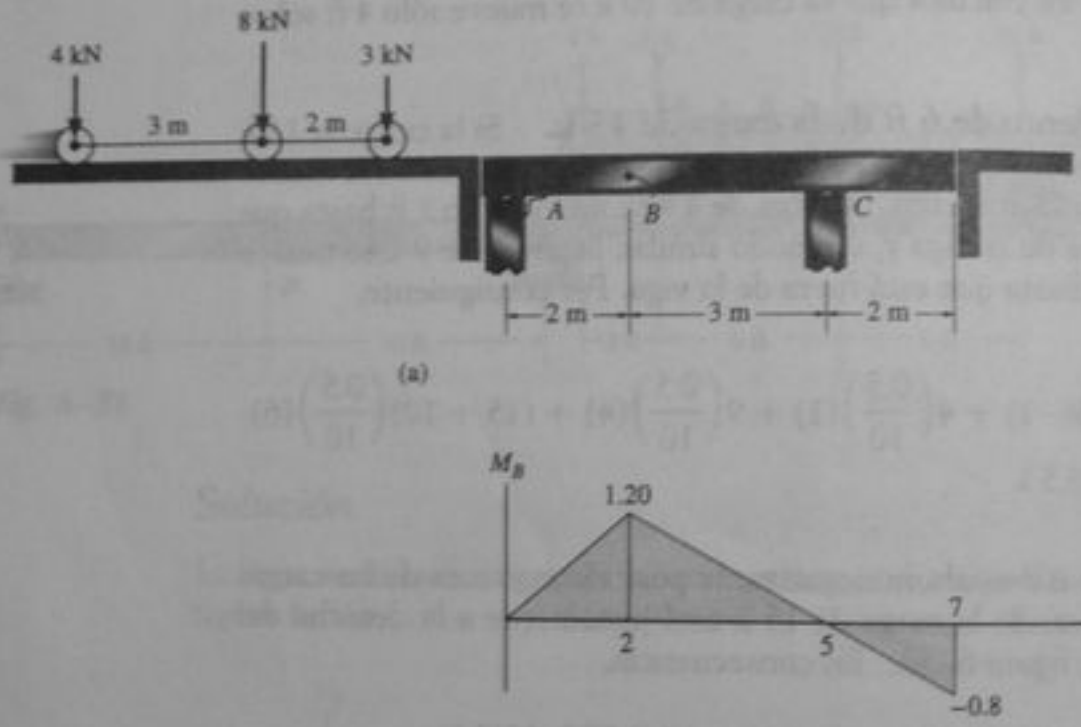


Fig. 6–32

Solución

La línea de influencia para el momento en B se muestra en la figura 6–32*b*.

Movimiento de 2 m de la carga de 3 kN. Si se supone que la carga de 3 kN actúa en B y luego se mueve 2 m hacia la derecha, el cambio en el momento es

$$\Delta M = -3\left(\frac{1.20}{3}\right)(2) + 8\left(\frac{1.20}{2}\right)(2) = 7.20\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

¿Por qué no se incluye la carga de 4 kN en los cálculos?

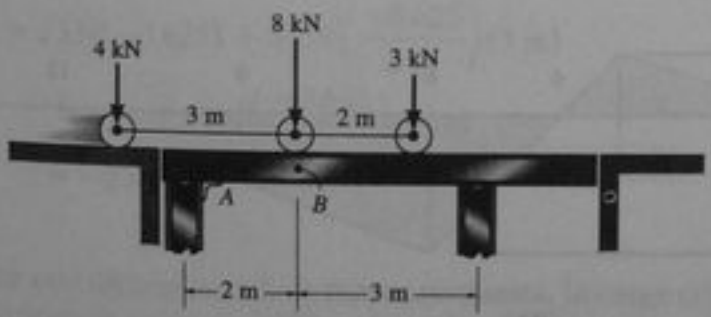
Movimiento de 3 m de la carga de 8 kN. Si se supone que la carga de 8 kN actúa en B y luego se mueve 3 m hacia la derecha, el cambio en el momento es

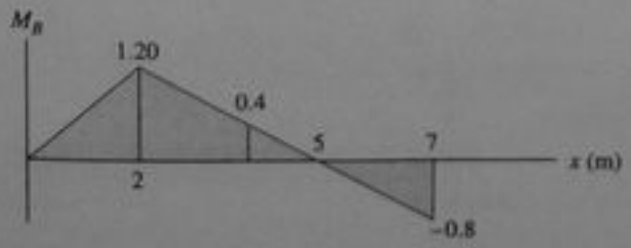
$$\Delta M = -3\left(\frac{1.20}{3}\right)(3) - 8\left(\frac{1.20}{3}\right)(3) + 4\left(\frac{1.20}{2}\right)(2)$$
$$= -8.40\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Nótese aquí que la carga de 4 kN estaba inicialmente 1 m fuera de la viga y por tanto se mueve sólo 2 m sobre ésta.

Como hay un cambio de signo en ΔM, la posición correcta de las cargas para tener un momento máximo positivo en B ocurre cuando la fuerza de 8 kN está en B, figura 6–32*c*. Por lo tanto,

$$(M_B)_{\text{máx}} = 8(1.20) + 3(0.4) = 10.8\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

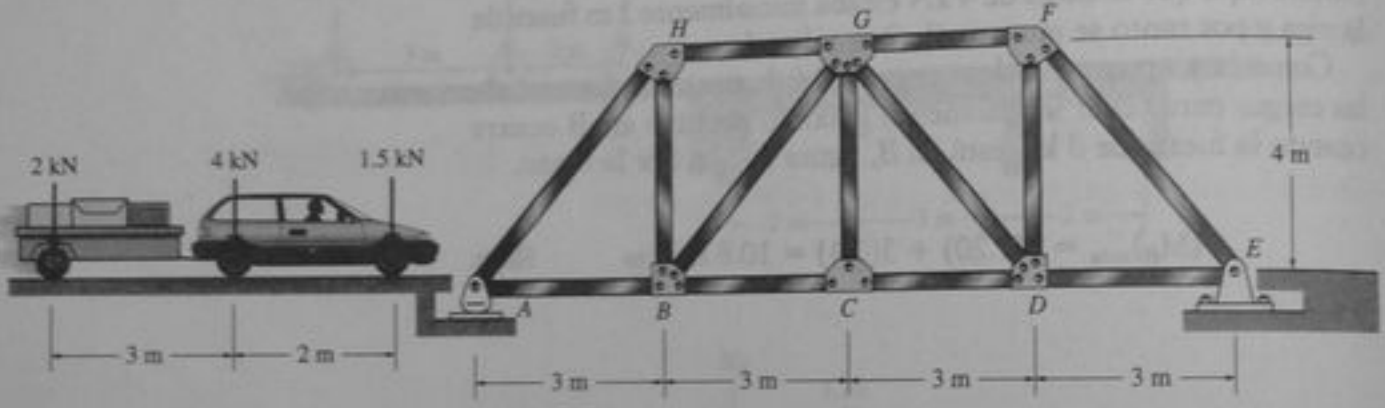




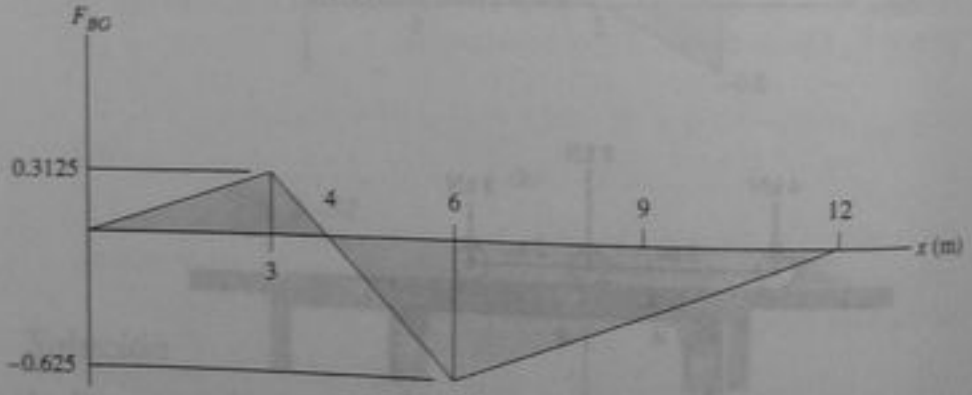
(c)

Ejemplo 6-20

Determine la fuerza máxima de compresión desarrollada en el miembro *BG* de la armadura en la figura 6–33*a* debido a las cargas de rueda del automóvil y del remolque. Suponga que las cargas se aplican directamente a la armadura y se mueven sólo hacia la derecha.



(a)



(b)

Fig. 6–33

Solución

La línea de influencia para la fuerza en el miembro *BG* se muestra en la figura 6–33*b*. Se usará aquí un método de tanteos para la solución. Como buscamos la fuerza máxima negativa (de compresión) en *BG*, comenzamos como sigue:

Carga de 1.5 kN en el punto C. En este caso

$$F_{BC} = 1.5\,\text{kN}(-0.625) + 4(0) + 2\,\text{kN}\left(\frac{0.3125}{3\,\text{m}}\right)(1\,\text{m})$$
$$= -0.729\,\text{kN}$$

Carga de 4 kN en el punto C. Por inspección, éste parece ser un caso más razonable que el anterior.

$$F_{BC} = 4\,\text{kN}(-0.625) + 1.5\,\text{kN}\left(\frac{-0.625}{6\,\text{m}}\right)(4\,\text{m}) + 2\,\text{kN}(0.3125)$$
$$= -2.50\,\text{kN}$$

Carga de 2 kN en el punto C. En este caso todas las cargas generan una fuerza de compresión en *BC*.

$$F_{BC} = 2\,\text{kN}(-0.625) + 4\,\text{kN}\left(\frac{-0.625}{6\,\text{m}}\right)(3\,\text{m})$$
$$+ 1.5\,\text{kN}\left(\frac{-0.625}{6\,\text{m}}\right)(1\,\text{m})$$
$$= -2.66\,\text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Como este último caso da la mayor respuesta, la carga crítica ocurre cuando la carga de 2 kN está en C.

6.8 Fuerza cortante y momento flexionante máximos absolutos

En la sección 6.7 desarrollamos los métodos para calcular la fuerza cortante y el momento máximos en un *punto específico* de una viga debido a una serie de cargas concentradas móviles. Un problema más general implica la determinación tanto de la *posición del punto* en la viga como de la *posición de la carga* sobre la viga, de manera que se pueda obtener la fuerza cortante y el momento *máximos absolutos* causados por las cargas. Si la viga es en voladizo o simplemente apoyada, este problema puede resolverse fácilmente.

Fuerza cortante

Para una *viga en voladizo*, la fuerza cortante máxima absoluta ocurrirá en un punto localizado justamente al lado del empotramiento. La fuerza cortante máxima se encuentra por el método de las secciones, con las cargas situadas cerca del soporte, la primera situada justamente al lado de la sección, como se muestra en la figura 6–34.

En *vigas simplemente apoyadas*, la fuerza cortante máxima absoluta ocurrirá justamente al lado de uno de los soportes. En este caso las cargas se sitúan de manera que la primera en secuencia se coloque cerca del soporte, como se muestra en la figura 6–35.

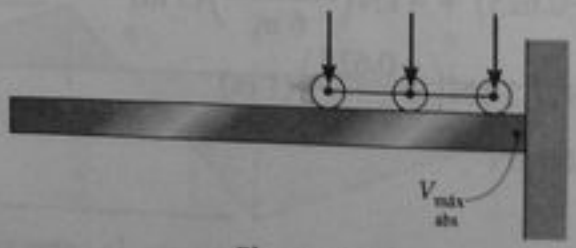


Fig. 6–34

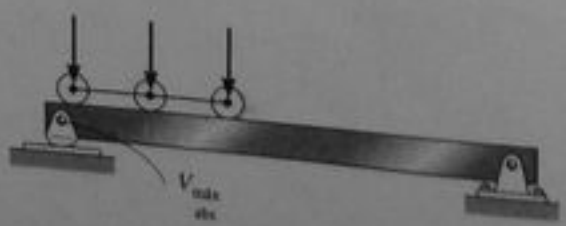


Fig. 6–35

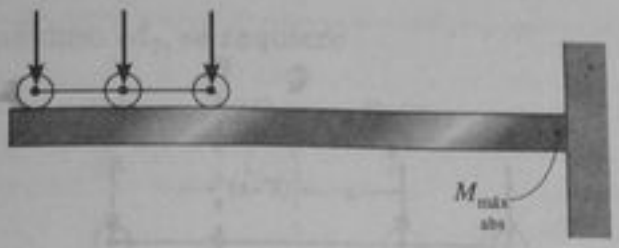


Fig. 6–36

Momento flexionante

El momento máximo absoluto para una *viga en voladizo* ocurre en el mismo punto en que ocurre la fuerza cortante máxima absoluta, aunque en este caso, las cargas concentradas deben situarse en el *extremo alejado* de la viga, como en la figura 6–36.

Para una *viga simplemente apoyada*, las posiciones críticas de las cargas y el momento máximo absoluto asociado no pueden, en general, determinarse por inspección. Sin embargo, podemos determinar analíticamente la posición. Para fines de análisis, consideremos una viga sometida a las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$, que se muestran en la figura 6–37*a*. Como el diagrama de momentos para una serie de fuerzas concentradas consiste en segmentos de líneas rectas con puntos máximos en cada fuerza, el momento máximo absoluto ocurrirá bajo una de las fuerzas. Supongamos que este momento máximo ocurre bajo $\mathbf{F}_2$. La posición de las cargas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ sobre la viga estará especificada por la distancia x, medida de $\mathbf{F}_2$ al centro del claro de la viga, como se muestra. Para determinar un valor específico de x, obtenemos primero la fuerza resultante del sistema, $\mathbf{F}_R$ y su distancia $\bar{x}'$, medida desde $\mathbf{F}_2$. Una vez hecho esto, sumamos momentos respecto a B, lo que da la reacción izquierda de la viga $\mathbf{A}_y$, esto es,

$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad A_y = \frac{1}{L}(F_R)\left[\frac{L}{2} - (\bar{x}' - x)\right]$$

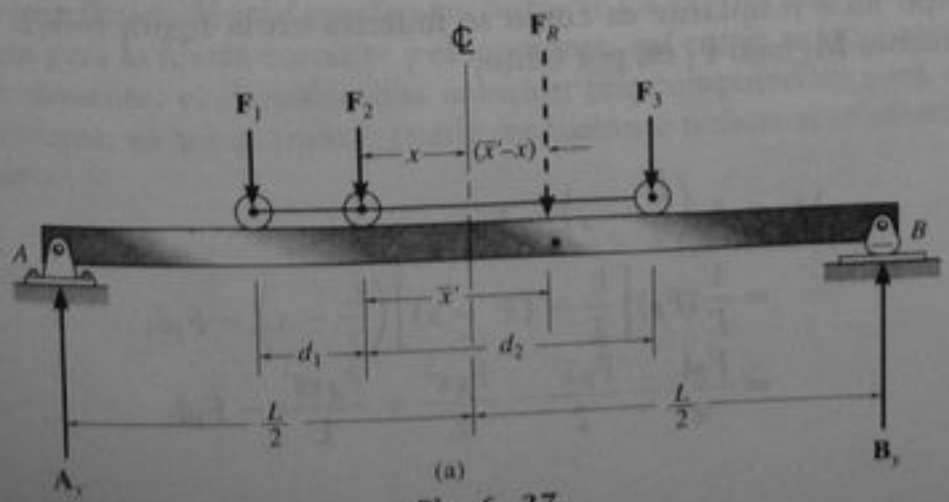
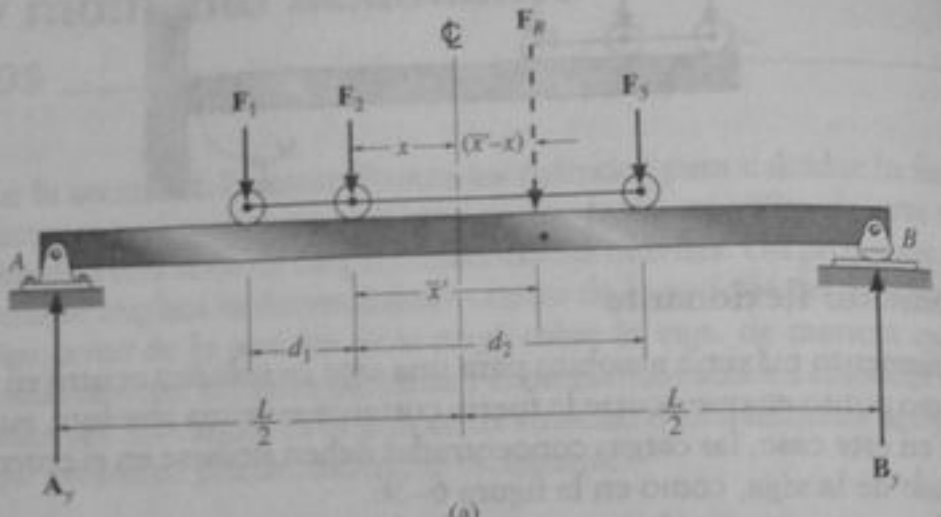
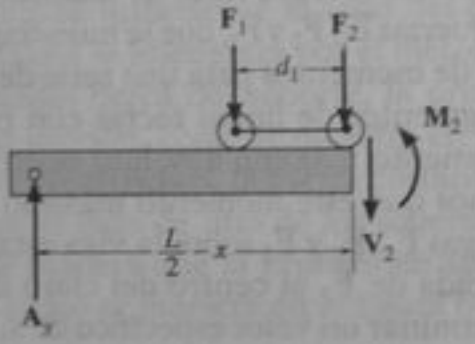


Fig. 6–37



(a)



(b)

Fig. 6–37

Si la viga se secciona entre el soporte en A y $\mathbf{F}_2$, el diagrama de cuerpo libre resultante es como se muestra en la figura 6–37*b*. El momento $\mathbf{M}_2$ bajo $\mathbf{F}_2$ es, por tanto,

$$\begin{aligned} M_2 &= A_y\left(\frac{L}{2}-x\right) - F_1 d_1 \\ &= \frac{1}{L}(F_R)\left[\frac{L}{2}-(\bar{x}'-x)\right]\left(\frac{L}{2}-x\right) - F_1 d_1 \\ &= \frac{F_R L}{4} - \frac{F_R \bar{x}'}{2} - \frac{F_R x^2}{L} + \frac{F_R x \bar{x}'}{L} - F_1 d_1 \end{aligned}$$

Para tener un máximo M_2, se requiere

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{-2F_R x}{L} + \frac{F_R \bar{x}'}{L} = 0$$

o

$$x = \frac{\bar{x}'}{2}$$

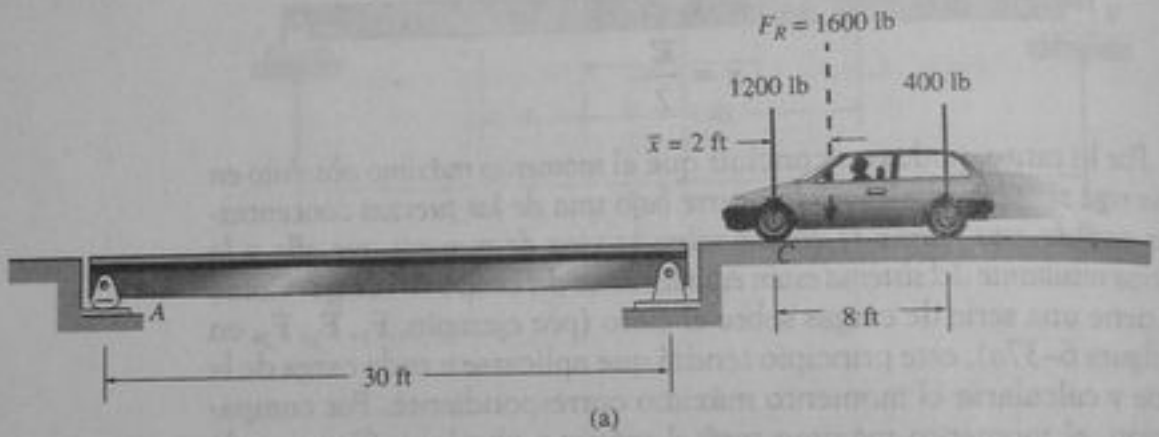
Por lo tanto, podemos concluir que el *momento máximo absoluto en una viga simplemente apoyada ocurre bajo una de las fuerzas concentradas cuando esta fuerza se coloca sobre la viga de manera que ella y la fuerza resultante del sistema estén equidistantes del centro de la viga.* Como se tiene una serie de cargas sobre el claro (por ejemplo, F_1, F_2, F_3, en la figura 6–37*a*), este principio tendrá que aplicarse a cada carga de la serie y calcularse el momento máximo correspondiente. Por comparación, el momento máximo será el máximo absoluto. Como regla general, el momento máximo absoluto ocurre con frecuencia bajo la fuerza más grande que se encuentre más cercana a la fuerza resultante del sistema.

Envolvente de valores máximos de líneas de influencia

Es difícil establecer reglas o fórmulas para determinar las fuerzas cortantes o momentos flexionantes máximos absolutos para vigas soportadas de manera distinta a las vistas aquí hasta ahora, esto es, simplemente apoyadas o en voladizo. Sin embargo, una manera elemental de resolver este problema requiere construir líneas de influencia para la fuerza cortante o el momento en puntos seleccionados a lo largo de la longitud entera de la viga, y luego calcular la fuerza cortante o momento máximos en la viga para cada punto usando los métodos de la sección 6.7. Esos valores dan una "envolvente de máximos" cuando se grafican; de aquí pueden encontrarse los valores máximos absolutos para la fuerza cortante y el momento, así como su localización. Obviamente, es deseable una solución por computadora para este problema, ya que el trabajo puede ser bastante tedioso si se efectúa a mano.

Ejemplo 6-21

Determine el momento máximo absoluto sobre la viga simplemente apoyada causado por las cargas de rueda del automóvil mostrado en la figura 6–38*a*.



(a)

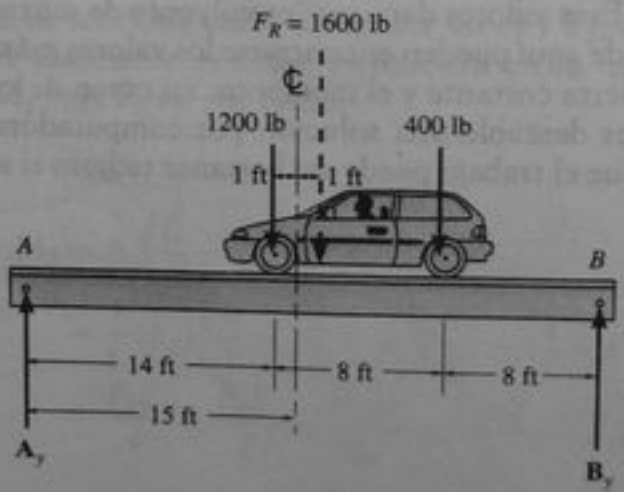
Fig. 6–38

Solución

Primero se determinan la magnitud y posición de la fuerza resultante de las dos fuerzas, figura 6–38*a*. Tenemos

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = 1200 + 400 = 1600 \text{ lb}$$
$$\curvearrowright +M_{R_C} = \Sigma M_C; \qquad 1600\bar{x} = 1200(0) + 400(8) \qquad \bar{x} = 2 \text{ ft}$$

Supondremos primero que el momento máximo absoluto ocurre bajo la fuerza de 1200 lb. Si colocamos esta fuerza y la fuerza resultante a la misma distancia del centro de la viga, figura 6–38*b*, podemos entonces calcular el momento interno bajo la fuerza de



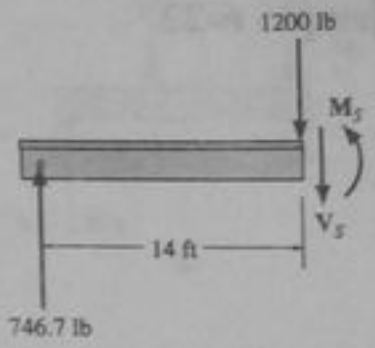
(b)

1200 lb usando el método de las secciones. Esto requiere primero el cálculo de la reacción en A. La manera más sencilla de hacer esto es usar *sólo* la fuerza resultante para el cálculo, figura 6–38*b*, esto es,

$$\curvearrowright +\Sigma M_B = 0; \qquad A_y(30) - 1600(14) = 0 \qquad A_y = 746.7 \text{ lb}$$

Usando ahora la sección izquierda de la viga, figura 6–38*c*, tenemos

$$\curvearrowright +\Sigma M_S = 0; \qquad 746.7(14) - M_S = 0 \qquad M_S = 10.45 \text{ k} \cdot \text{ft}$$



(c)

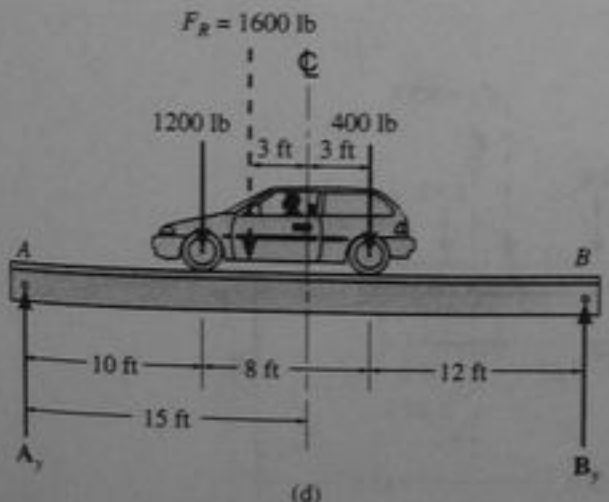
Existe la posibilidad de que el momento máximo absoluto ocurra bajo la fuerza de 400 lb. En este caso, la fuerza de 400 lb y $\mathbf{F}_R$ se colocan en posición equidistante del centro de la viga, figura 6–38*d*. Demuestre que $B_y = 640$ lb, como se indica en la figura 6–38*e*, y que

$$M_S = 7.68 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

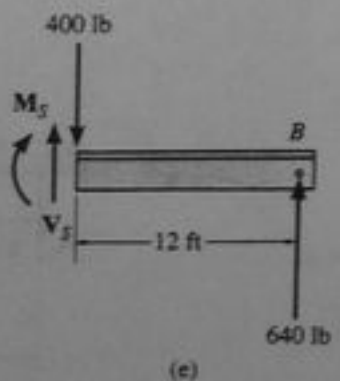
Por comparación, el momento máximo absoluto es

$$M_S = 10.45 \text{ k} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

que ocurre bajo la fuerza de 1200 lb cuando las ruedas del auto se colocan sobre la viga como se muestra en la figura 6–38*b*.



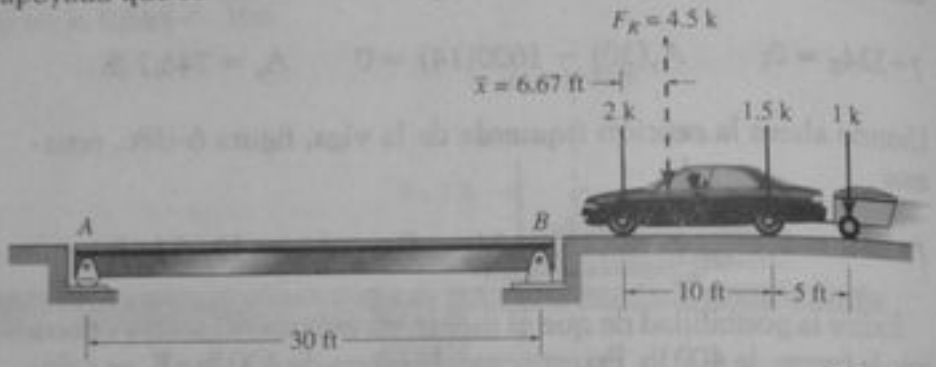
(d)



(e)

Ejemplo 6-22

Determine el momento máximo absoluto en la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 6–39*a*.



(a)

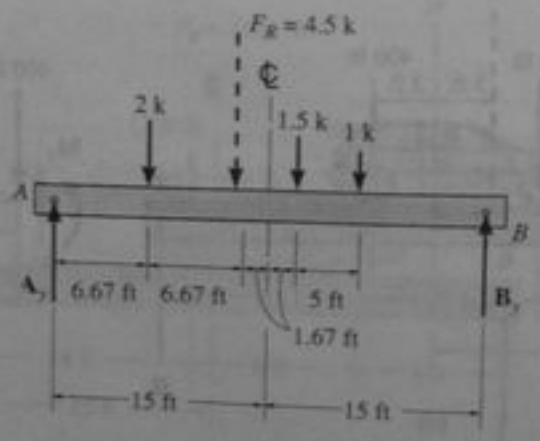
Fig. 6–39

Solución

La magnitud y posición de la fuerza resultante del sistema son determinadas primero, figura 6–39*a*. Tenemos

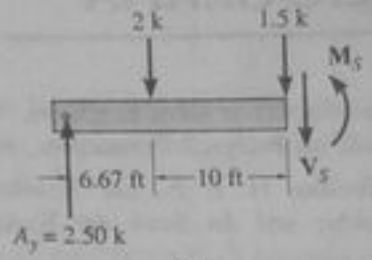
$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = 2 + 1.5 + 1 = 4.5 \text{ k}$$
$$\curvearrowleft +M_{R_C} = \Sigma M_C; \qquad 4.5\bar{x} = 1.5(10) + 1(15)$$
$$\bar{x} = 6.67 \text{ ft}$$

Supongamos primero que el momento máximo absoluto ocurre bajo la carga de 1.5 k. La carga y la fuerza resultante se colocan a igual distancia del centro de la viga, figura 6–39*b*. Calculando A_y primero, figura 6–39*b*, tenemos



(b)

$$\curvearrowleft +\Sigma M_B = 0; \qquad A_y(30) - 4.5(16.67) = 0 \qquad A_y = 2.50\ \text{k}$$



(c)

Usando ahora la sección izquierda de la viga, figura 6–39*c*, obtenemos

$$\curvearrowleft +\Sigma M_S = 0; \qquad 2.50(16.67) - 2(10) - M_S = 0$$
$$M_S = 21.67\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

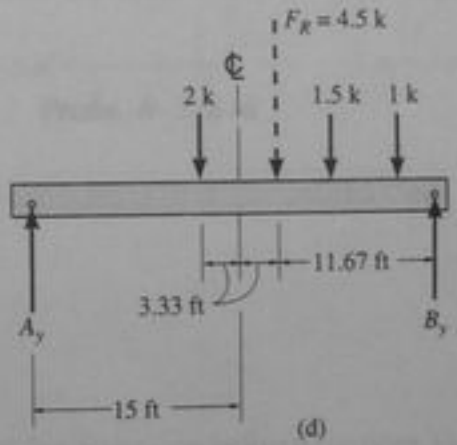
Hay la posibilidad de que el momento máximo absoluto ocurra bajo la carga de 2 k, ya que 2 k > 1.5 k y F_R está entre 2 k y 1.5 k. Para investigar este caso, la carga de 2 k y F_R se colocan a la misma distancia del centro de la viga, figura 6–39*d*. Demuestre que A_y = 1.75 k, como se indica en la figura 6–39*e*, y que

$$M_S = 20.42\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

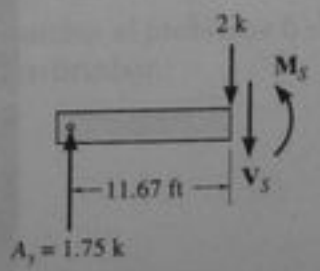
Por comparación, el momento máximo absoluto es

$$M_S = 21.67\ \text{k}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

que ocurre bajo la carga de 1.5 k, cuando las cargas están colocadas sobre la viga como se muestra en la figura 6–39*b*.



(d)



(e)

BIBLIOGRAFÍA

American Society of Civil Engineers, "Locomotive Loadings for Railroad Bridges," *Transactions*, ASCE, Vol. 86, 1923.

Müller-Breslau, H. F. B., *Die Neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*. Berlin, 1886.

Specifications for Steel Railway Bridges, American Railway Engineering Association, Chicago, 1965.

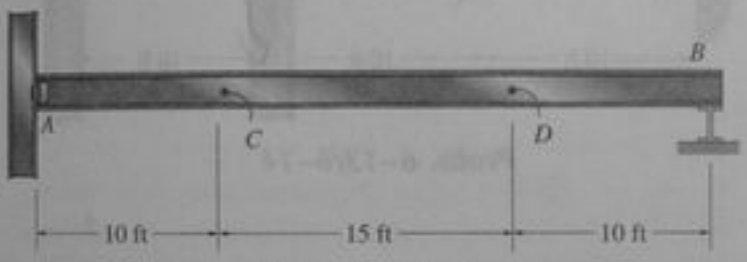
Standard Specifications for Highway Bridges, American Association of State Highway and Transportation Officials, 12th ed., Washington, D.C., 1973.

Los miembros de esta armadura de puente se diseñaron usando líneas de influencia. (*Dean Abramson /Stock, Boston.*)

PROBLEMAS

6–1. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en *A*, (b) la fuerza cortante en *C* y (c) el momento flexionante en *D*. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo y *A* es un pasador. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

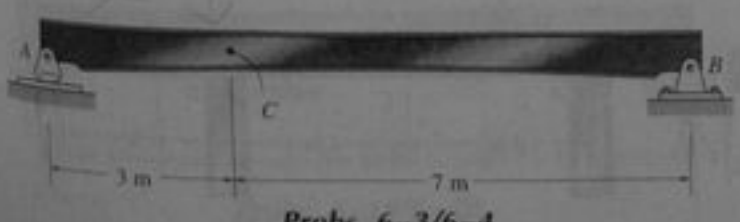
6–2. Resuelva el problema 6–1 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–1/6–2

6–3. Dibuje influencia para (a) la reacción vertical en *B*, (b) la fuerza cortante en *C* y (c) el momento flexionante en *C*. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

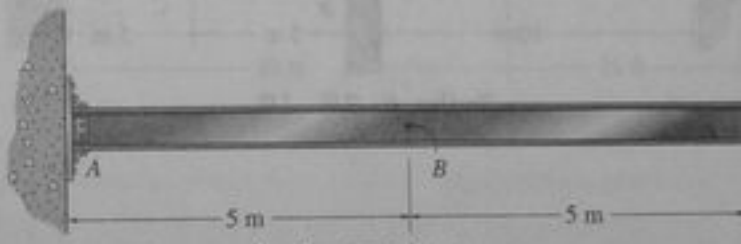
***6–4.** Resuelva el problema 6–3 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–3/6–4

6–5. Dibuje las líneas de influencia para (a) la fuerza cortante en el empotramiento *A* y (b) el momento flexionante en *B*.

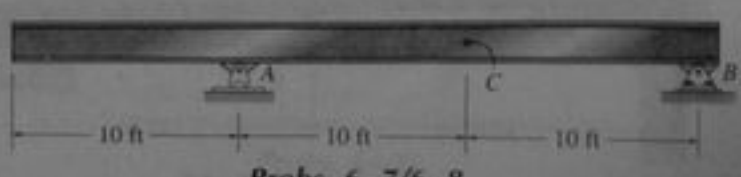
6–6. Resuelva el problema 6–5 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–5/6–6

6–7. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en *A*, (b) la fuerza cortante en *C* y (c) el momento flexionante en *C*. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

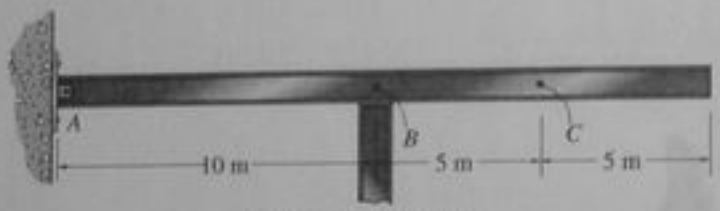
***6–8.** Resuelva el problema 6–7 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–7/6–8

6–9. Dibuje la línea de influencia para el momento flexionante en C. Suponga que el soporte en A es un pasador y B es un rodillo.

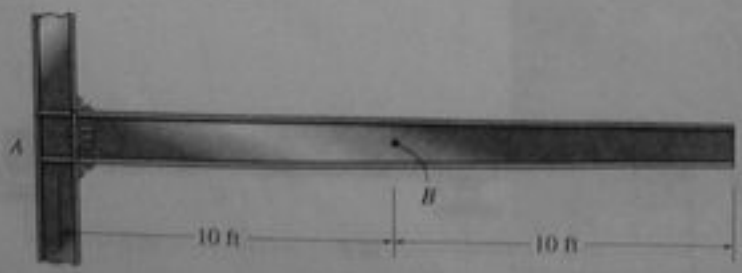
6–10. Resuelva el problema 6–9 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–9/6–10

6–11. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en A, (b) el momento flexionante en A y (c) la fuerza cortante en B. Suponga que el soporte en A es un empotramiento. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

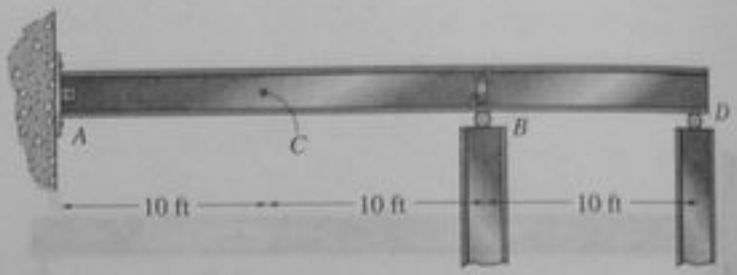
***6–12.** Resuelva el problema 6–11 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–11/6–12

6–13. Dibuje las líneas de influencia para (a) la fuerza cortante en C, (b) el momento flexionante en C y (c) la reacción vertical en D. Indique los valores numéricos de los puntos máximos. En B se tiene un eslabón vertical corto y A es un soporte de pasador. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

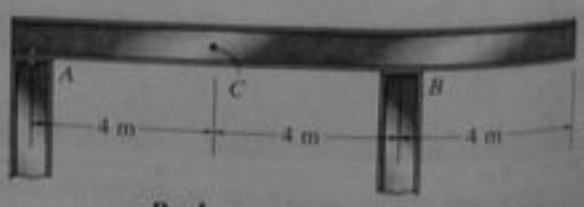
6–14. Resuelva el problema 6–13 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–13/6–14

6–15. Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en C. Suponga que A es un soporte de rodillo y B es un pasador. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

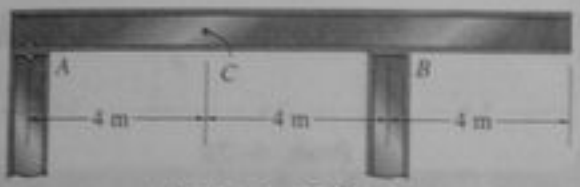
***6–16.** Resuelva el problema 6–15 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–15/6–16

6–17. Dibuje la línea de influencia para el momento flexionante en *C*. Suponga que *A* es un soporte de rodillo y *B* es un pasador. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

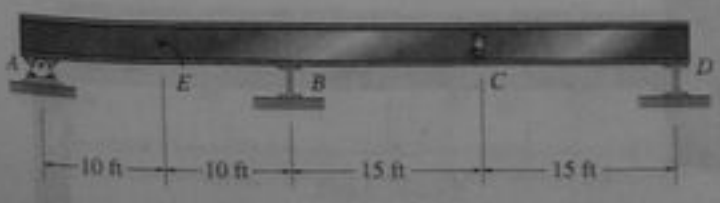
6–18. Resuelva el problema 6–17 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6–17/6–18

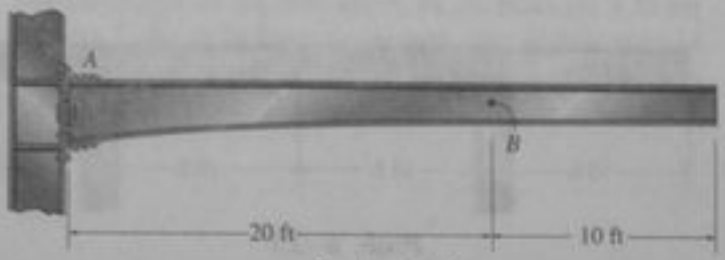
6–19. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en *B* y (b) el momento flexionante en *E*. Suponga que los soportes en *B* y *D* son rodillos. En *C* se tiene un eslabón corto. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6.1.

***6–20.** Resuelva el problema 6–19 usando el principio de Müller-Breslau.



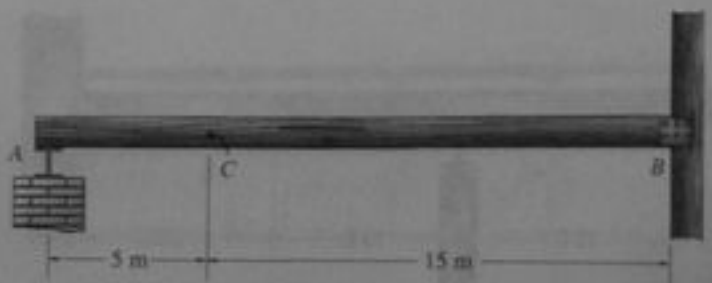
Probs. 6–19/6–20

6–21. Una carga viva uniforme de 0.2 k/ft y una sola fuerza concentrada viva de 10 k pueden colocarse sobre la trabe acartelada. Determine (a) el momento flexionante negativo máximo por carga viva en *A*, (b) la fuerza cortante máxima positiva por carga viva en *B* y (c) el momento flexionante máximo negativo por carga viva en *B*.



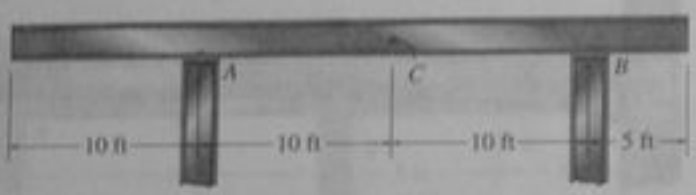
Prob. 6–21

6–22. La viga soporta una carga muerta uniforme de 500 N/m y una sola fuerza viva concentrada de 3,000 N. Determine (a) el momento máximo por carga viva que puede presentarse en *C* y (b) la fuerza cortante máxima positiva por carga viva que puede presentarse en *C*. Suponga que el soporte en *A* es un rodillo y *B* un pasador.



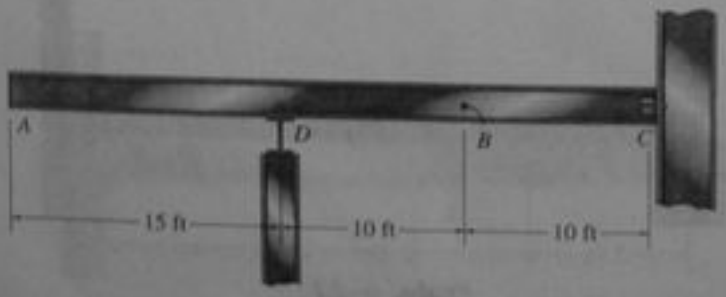
Probs. 6–22

6–23. Una carga viva uniforme de 0.5 k/ft y una fuerza concentrada de 20 k van a colocarse sobre la viga. Determine (a) la reacción vertical máxima positiva por carga viva en el soporte B, (b) la fuerza cortante máxima positiva por carga viva en el punto C y (c) el momento flexionante máximo positivo por carga viva en el punto C. Suponga que el soporte en A es un pasador y B un rodillo.



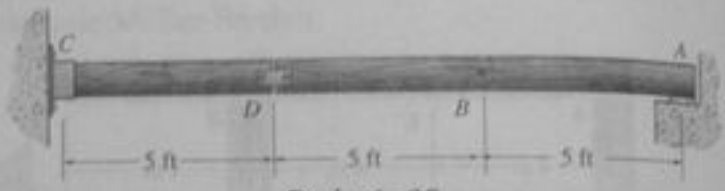
Prob. 6–23

***6–24.** La viga soporta una carga viva uniforme de 60 lb/ft y una fuerza concentrada viva de 200 lb. Determine (a) el momento flexionante máximo positivo por carga viva que puede desarrollarse en B y (b) la reacción vertical máxima positiva por carga viva en D. Suponga que C es un pasador y D un rodillo.



Prob. 6–24

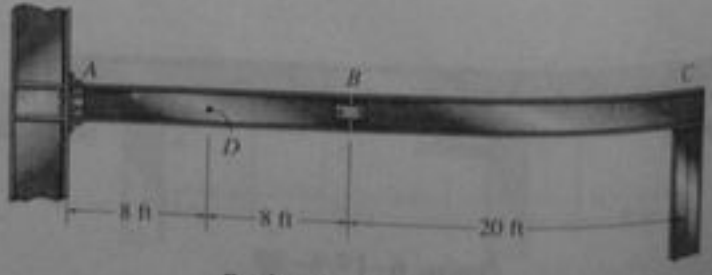
6–25. La viga compuesta está sometida a una carga muerta uniforme de 200 lb/ft y a una carga viva uniforme de 150 lb/ft. Determine (a) el momento flexionante máximo que esas cargas desarrollan en C y (b) la fuerza cortante máxima positiva en B. Suponga que C es un empotramiento, D un pasador y A un rodillo.



Prob. 6–25

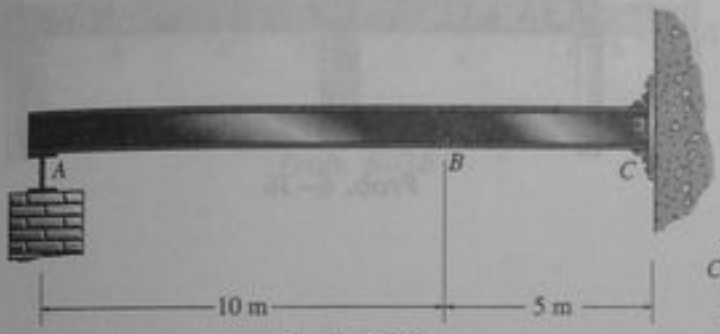
6–26. ¿Dónde debe colocarse una carga viva de 500 lb sobre la viga para que ocasione el máximo momento flexionante por carga viva en D? ¿Qué valor tiene este momento? Suponga que el soporte en A es un empotramiento, B un pasador y C un rodillo.

6–27. ¿Dónde debe cargarse la viga ABC con una carga viva uniforme distribuida de 300 lb/ft para que ocasione (a) el momento flexionante máximo por carga viva en el punto A y (b) la fuerza cortante máxima por carga viva en D? Calcule los valores del momento flexionante y de la fuerza cortante. Suponga que el soporte en A es un empotramiento, B un pasador y C un rodillo.



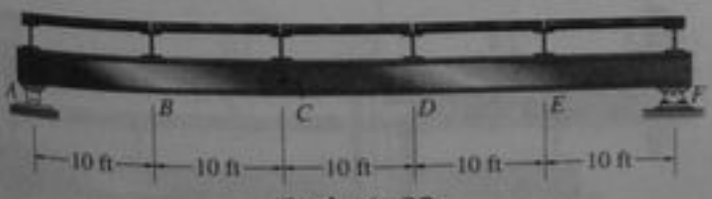
Probs. 6–26/6–27

*6–28. La viga compuesta está sometida a una carga muerta uniforme de 0.8 kN/m y a una carga viva concentrada de 4 kN. Determine (a) el momento flexionante máximo ocasionado por esas cargas en C y (b) la reacción máxima en el pasador en B. Suponga que A es un rodillo, B un pasador y C un empotramiento.



Prob. 6–28

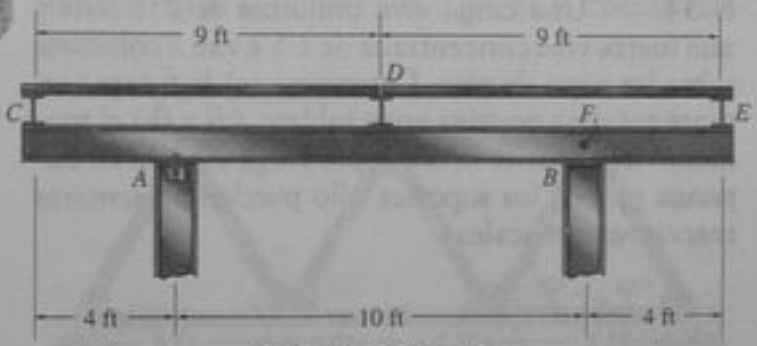
6–29. Dibuje las líneas de influencia para (a) la fuerza cortante en el tablero DE de la trabe y (b) el momento flexionante en C.



Prob. 6–29

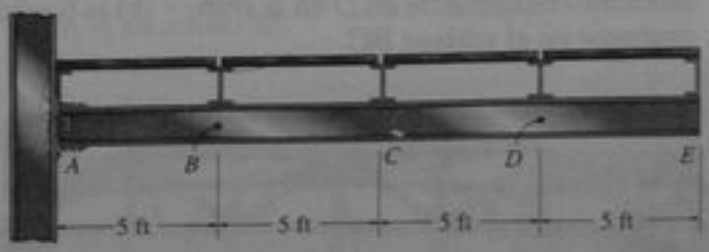
6–30. Dibuje la línea de influencia para el momento flexionante en el punto F de la trabe. Suponga que el soporte en A es un pasador y B un rodillo. Calcule el momento flexionante máximo por carga viva en F en la trabe si las losas de piso están sometidas a una carga viva uniforme distribuida de 1.5 k/ft.

6–31. Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en el tablero extremo CA de la trabe. Suponga que el soporte en A es un pasador y B un rodillo. Calcule la fuerza cortante viva máxima en la región CA de la trabe si las losas de piso están sometidas a una carga uniforme distribuida de 1.5 k/ft.



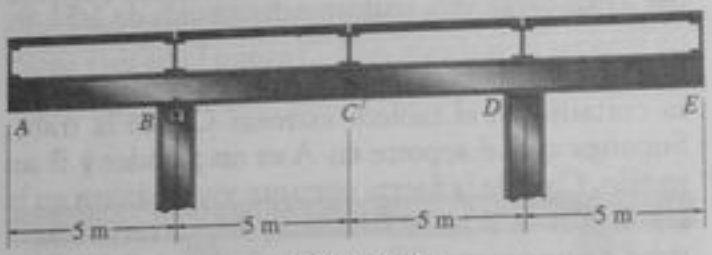
Probs. 6–30/6–31

*6–32. Una carga viva uniforme de 0.4 k/ft y una fuerza viva concentrada de 2 k van a colocarse sobre las losas de piso. Determine (a) la fuerza cortante viva máxima en el tablero CD y (b) el momento flexionante máximo por carga viva en B.



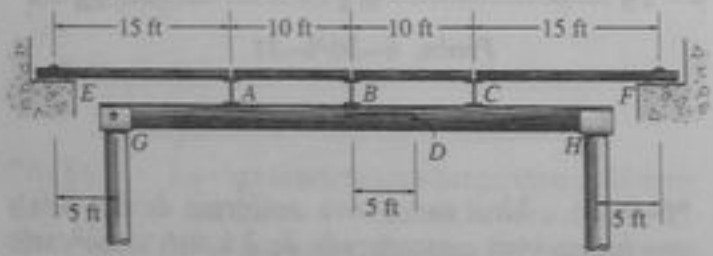
Prob. 6–32

6–33. Dibuje la línea de influencia para (a) la fuerza cortante en el tablero *BC* de la trabe y (b) el momento flexionante en *C*. Suponga que el soporte en *B* es un pasador y *D* un rodillo.



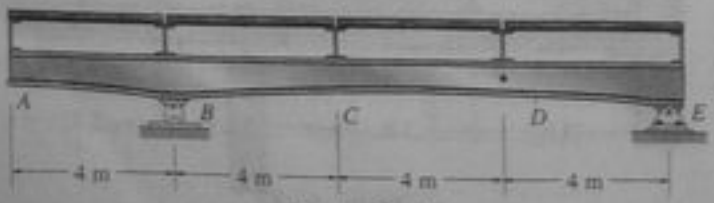
Prob. 6–33

6–34. Una carga viva uniforme de 250 lb/ft y una fuerza viva concentrada de 1.5 k van a colocarse sobre las vigas de piso. Determine (a) la fuerza cortante máxima positiva en el tablero *AB* y (b) el momento flexionante máximo por carga viva en *D*. Suponga que en los soportes sólo pueden presentarse reacciones verticales.



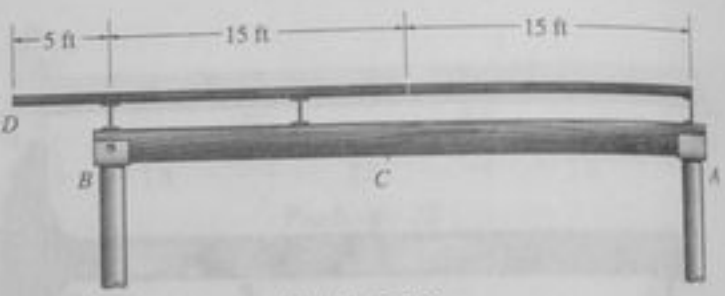
Prob. 6–34

6–35. Dibuje las líneas de influencia para (a) el momento flexionante en *D* en la trabe y (b) la fuerza cortante en el tablero *BC*.



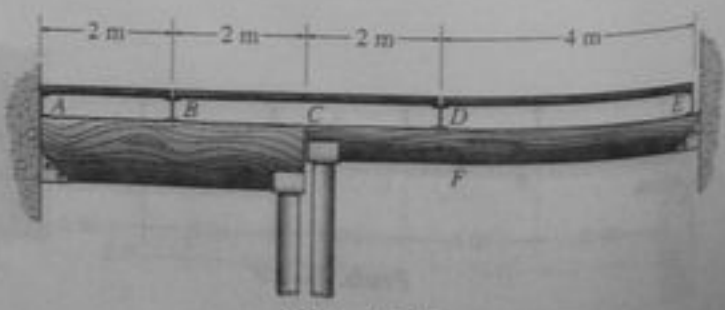
Prob. 6–35

***6–36.** Una carga viva uniforme de 0.6 k/ft y una fuerza viva concentrada de 5 k van a colocarse sobre las vigas superiores. Determine (a) la fuerza cortante máxima positiva viva en el tablero *BC* de la trabe y (b) el momento máximo positivo por carga viva en *C*. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo y *D* un pasador.



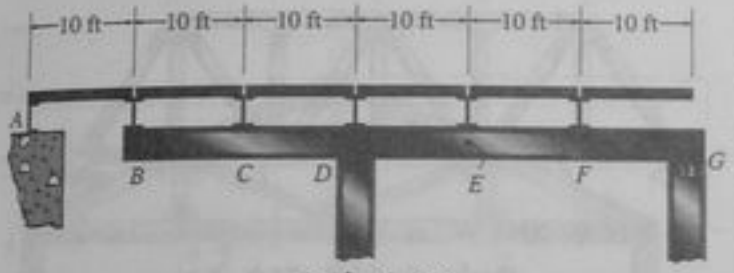
Prob. 6–36

6–37. Dibuje la línea de influencia para el momento en *F* en la trabe. Determine el momento máximo positivo por carga viva en la trabe en *F* si una fuerza concentrada viva de 8 kN se mueve sobre las vigas de piso superiores. Suponga que los soportes para todos los miembros pueden ejercer sólo fuerzas hacia arriba o hacia abajo sobre los miembros.



Prob. 6–37

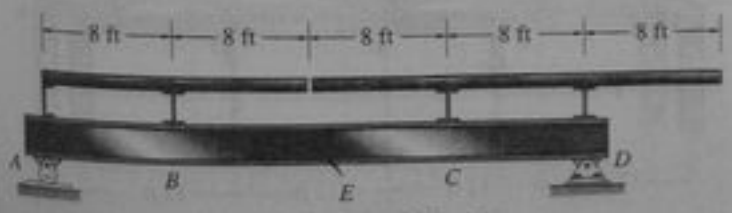
6–38. Una carga viva uniforme de 0.2 k/ft y una fuerza viva concentrada de 4 k van a colocarse sobre las losas de piso. Determine (a) la reacción vertical máxima viva en el soporte *D*, (b) la fuerza cortante máxima viva en el tablero *DE* de la trabe y (c) el momento flexionante positivo por carga viva en *E*. Suponga que *D* es un rodillo y *G* un pasador.



Prob. 6–38

6–39. Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en el tablero *CD* de la trabe. Determine la fuerza cortante máxima negativa viva en el tablero *CD* debido a una carga uniforme viva de 500 lb/ft actuando sobre las vigas superiores.

***6–40.** Dibuje la línea de influencia para el momento flexionante en *E* en la trabe. Determine el momento positivo máximo por carga viva en *E* en la trabe si una fuerza viva concentrada de 8 kip se mueve sobre las vigas superiores.

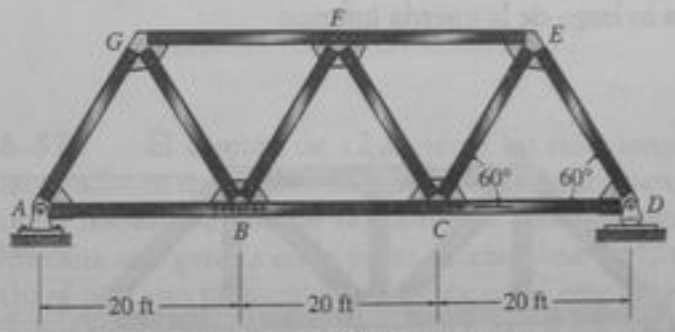


Probs. 6–39/6–40

6–41. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *BC* de la armadura Warren. Indique valores numéricos para los máximos de la línea. Todos los miembros tienen la misma longitud. La carga se mueve a lo largo de la cuerda inferior.

6–42. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *BF* de la armadura Warren. Indique valores numéricos para los máximos de la línea. Todos los miembros tienen la misma longitud. La carga se mueve a lo largo de la cuerda inferior.

6–43. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *FE* de la armadura Warren. Indique valores numéricos para los puntos máximos de la línea. Todos los miembros tienen la misma longitud. La carga se mueve a lo largo de la cuerda inferior.



Probs. 6–41/6–42/6–43

***6–44.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en (a) el miembro *CJ* y (b) el miembro *DJ*.

6–45. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *CD*.

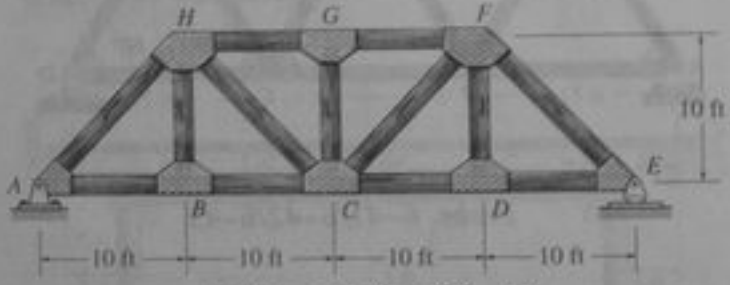
6–46. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *KJ*.

Probs. 6–44/6–45/6–46

6–47. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *CF* y luego calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en este miembro debido a una carga viva uniforme de 800 lb/ft transmitida a la armadura a lo largo de la cuerda inferior.

***6–48.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *CD* y luego calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en este miembro debido a una carga viva uniforme de 800 lb/ft que se transmite a la armadura a lo largo de la cuerda inferior.

6–49. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *GF* y luego calcule la fuerza máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en este miembro debido a una carga viva uniforme de 800 lb/ft que se transmite a la armadura a lo largo de la cuerda inferior.

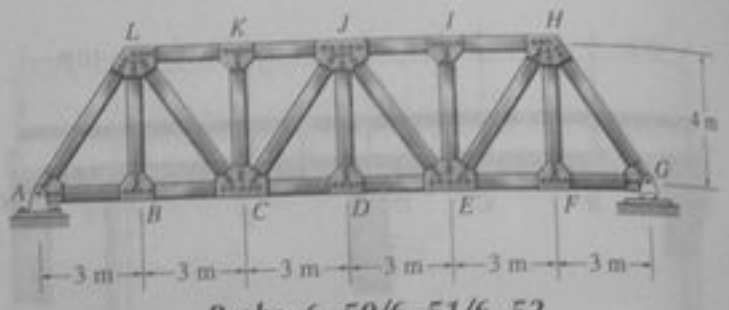


Probs. 6–47/6–48/6–49

6–50. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *KJ* y luego calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en este miembro debido a una carga viva uniforme de 3 kN/m que se transmite a la armadura a lo largo de su cuerda inferior.

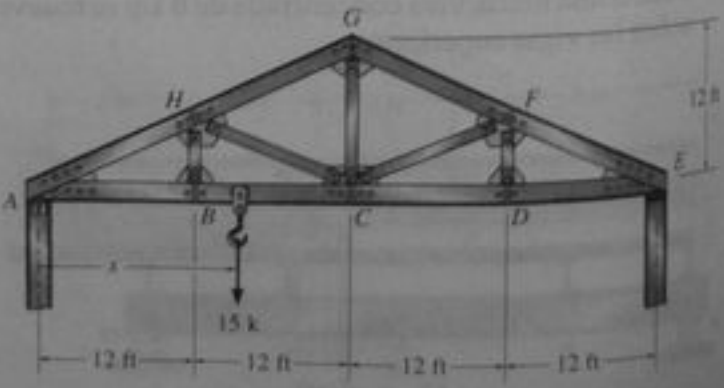
6–51. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *CJ* y luego calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en este miembro debido a una carga viva uniforme de 3 kN/m que se transmite a la armadura a lo largo de la cuerda inferior.

***6–52.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *CD* y luego calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en este miembro debido a una carga viva uniforme de 3kN/m que se transmite a la armadura a lo largo de la cuerda inferior.



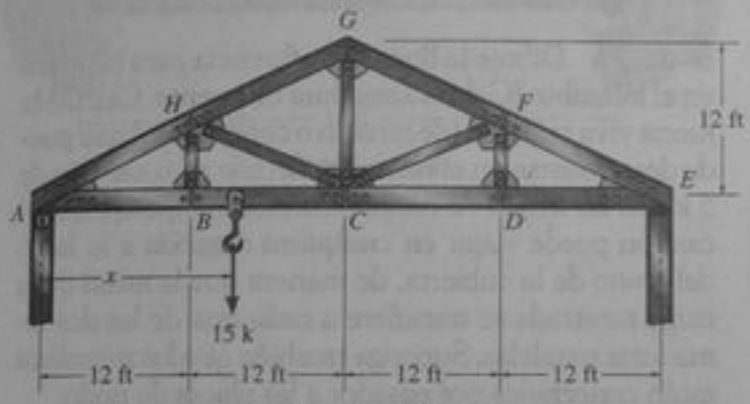
Probs. 6–50/6–51/6–52

6–53. La armadura de techo sirve para soportar el riel de una grúa que está unido a la cuerda inferior de la armadura como se muestra. Determine la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro *GF* debido a la carga de 15 k de la grúa. Especifique la posición *x* de la carga. Suponga que la armadura está soportada en *A* por un pasador y en *E* por un rodillo. Además, suponga que todos los miembros están seccionados y conectados por pasador en las placas de nudo.



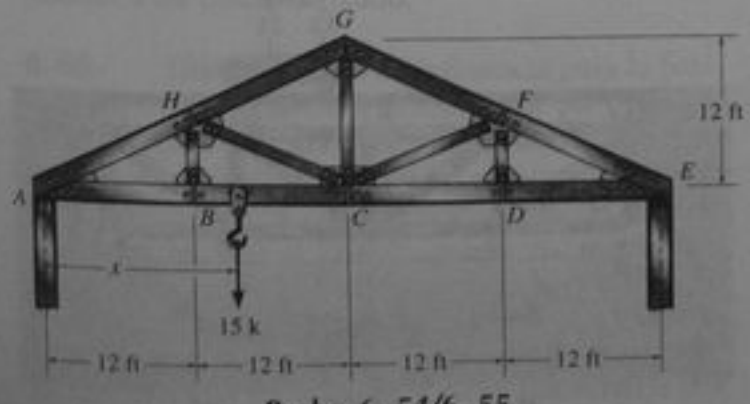
Prob. 6–53

6–54. Determine la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro *CF* de la armadura debido a la carga de 15 k de la grúa. Especifique la posición *x* de la carga. Suponga que la armadura está soportada en *A* por un pasador y en *E* por un rodillo. Además, suponga que todos los miembros están seccionados y conectados por pasador en las placas de nudo.



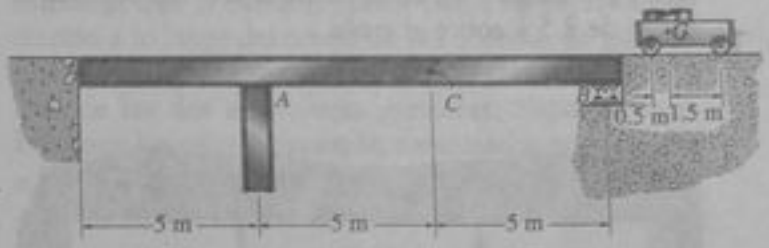
Probs. 6–54/6–55

6–55. Determine la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro *GC* de la armadura debido a la carga de 15 k de la grúa. Especifique la posición *x* de la carga. Suponga que la armadura está soportada en *A* por un pasador y en *E* por un rodillo. Además, suponga que todos los miembros están seccionados y conectados por pasador en las placas de nudo.



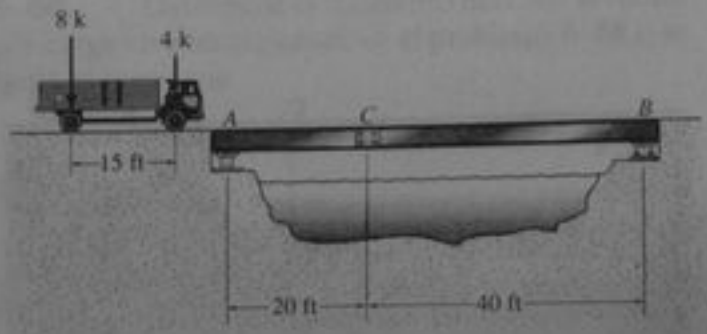
Probs. 6–54/6–55

***6–56.** Determine el momento máximo por carga viva en el punto *C* de la trabe causado por el carro móvil que tiene una masa de 2 Mg y su centro de masa en *G*. Suponga que *A* es un rodillo.



Prob. 6–56

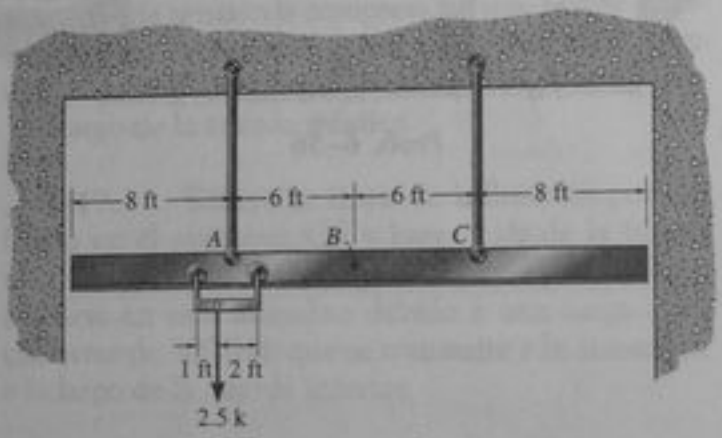
6–57. El camión de 12 k ejerce las reacciones mostradas en sus ruedas sobre la cubierta de un puente de trabes. Determine (a) la fuerza cortante viva máxima que genera en la junta de empalme en *C* y (b) el máximo momento que ejerce en el empalme. Suponga que el camión puede viajar en *cualquier dirección* a lo largo del *centro* de la cubierta, por lo que transfiere *la mitad* de su carga a cada una de las dos trabes laterales del puente. Suponga que el empalme es una conexión rígida y que, como la trabe, puede soportar fuerza cortante y momento flexionante.



Prob. 6–57

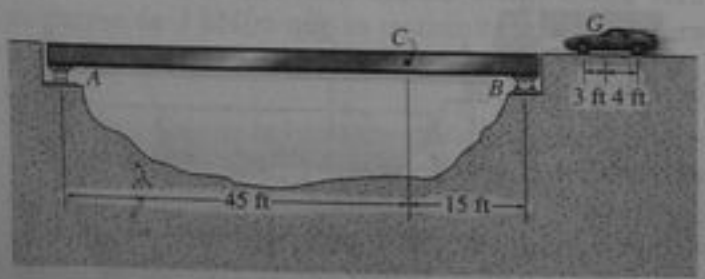
6–58. Determine el momento máximo por carga viva en el punto *B* del riel suspendido si éste soporta la carga de 2.5 k sobre el trole

6–59. Determine la fuerza cortante máxima positiva por carga viva en el punto *B* si el riel soporta la carga de 2.5 k sobre el trole.



Probs. 6–58/6–59

***6–60.** El automóvil tiene un peso de 4200 lb y su centro de gravedad en G. Determine el momento máximo por carga viva en el punto C de la trabe lateral generado al pasar el auto por el puente. Suponga que el auto puede viajar en cualquier dirección a lo largo del *centro* de la cubierta, de manera que la *mitad* de su carga se transfiere a cada una de las dos trabes laterales.

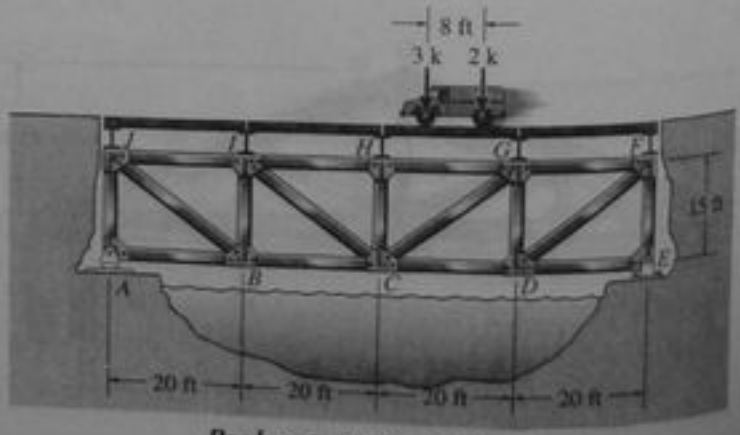


Prob. 6–60

6–61. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *BC* de la armadura de puente. Calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro debido a un camión de 5 k con las cargas de rueda mostradas. Suponga que el camión puede viajar en *cualquier dirección* a lo largo del *centro* de la cubierta, de manera que la *mitad* de la carga mostrada se transfiere a cada una de las dos armaduras paralelas. Suponga también que los miembros están conectados por pasador a las placas de nudo.

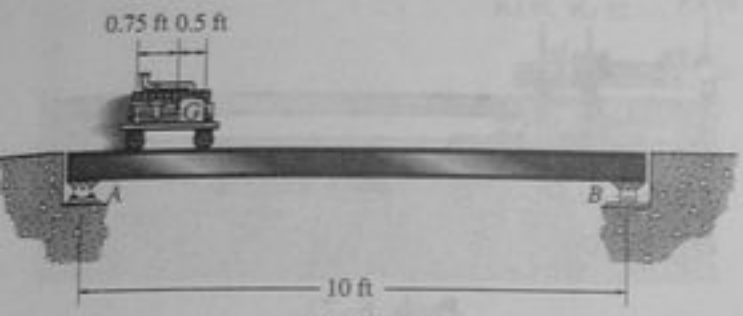
6–62. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *IC* de la armadura de puente. Calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro debido a un camión de 5 k con las cargas de rueda mostradas. Suponga que el camión puede viajar en *cualquiera dirección* a lo largo del *centro* de la cubierta, de manera que la *mitad* de la carga mostrada se transfiere a cada una de las dos armaduras paralelas. Suponga también que los miembros están conectados por pasador a las placas de nudo.

6–63. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *IH* de la armadura de puente. Calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro debido a un camión de 5 k con las cargas de rueda mostradas. Suponga que el camión puede viajar en *cualquier dirección* a lo largo del *centro* de la cubierta, de manera que la *mitad* de la carga mostrada se transfiere a cada una de las dos armaduras paralelas. Suponga también que los miembros están conectados por pasador a las placas de nudo.



Probs. 6–61/6–62/6–63

*6–64. La máquina tiene un peso de 5000 lb y su centro de masa en G. Determine el momento máximo que produce en la trabe.

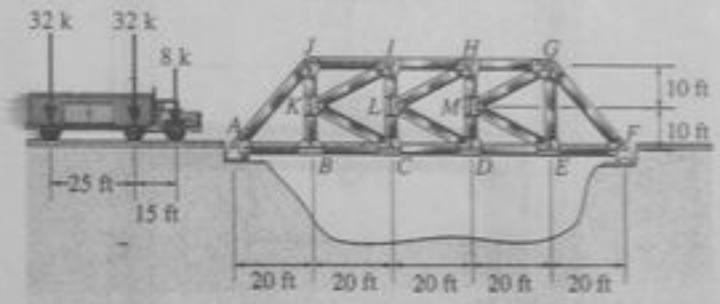


Prob. 6–64

6–65. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *IH* de la armadura de puente. Calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro debido a un camión de 72 k con las cargas de rueda mostradas. Suponga que el camión puede viajar en *cualquier dirección* a lo largo del *centro* de la cubierta, de manera que la *mitad* de la carga mostrada se transfiere a cada una de las dos armaduras paralelas. Suponga también que los miembros están conectados por pasador a las placas de nudo.

6–66. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *CD* de la armadura de puente. Calcule la fuerza viva máxima (de tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro debido a un camión de 72 k con las cargas de rueda mostradas. Suponga que el camión puede viajar en *cualquier dirección* a lo largo del *centro* de la cubierta, de manera que la *mitad* de la carga mostrada se transfiere a cada una de las dos armaduras paralelas. Suponga también que los miembros están conectados por pasador a las placas de nudo.

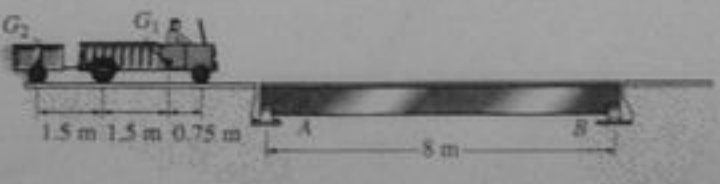
6–67. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el miembro *BC* de la armadura de puente. Calcule la fuerza viva máxima (tensión o compresión) que puede desarrollarse en el miembro debido a un camión de 72 k con las cargas de rueda mostradas. Suponga que el camión puede viajar en *cualquier dirección* a lo largo del *centro* de la cubierta, de manera que la *mitad* de la carga mostrada se transfiere a cada una de las dos armaduras paralelas. Suponga también que los miembros están conectados por pasador a las placas de nudo.



Probs. 6–65/6–66/6–67

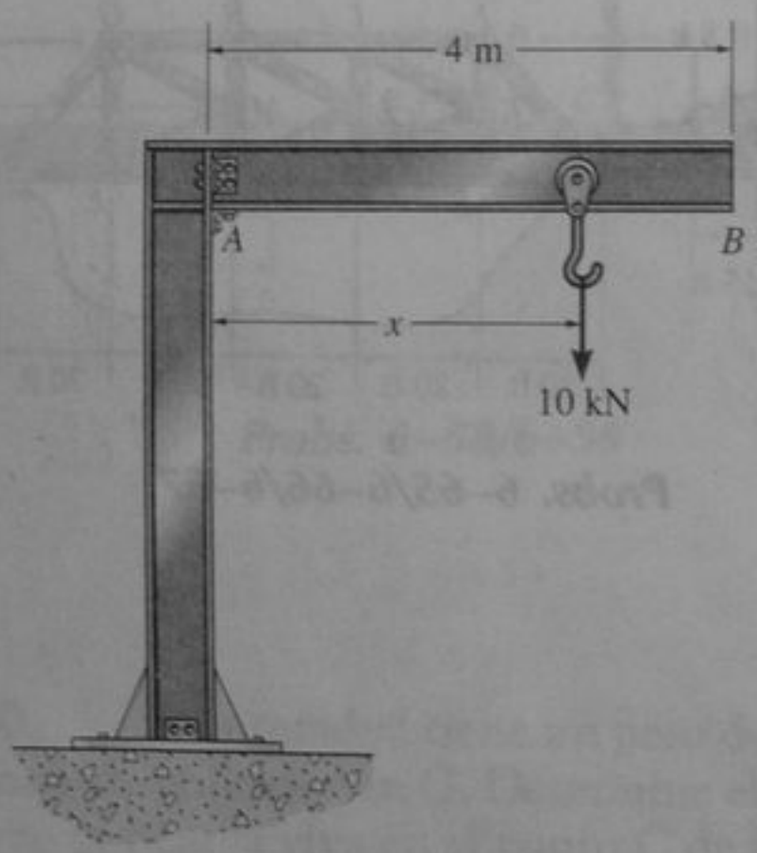
*6–68. El camión tiene una masa de 4 Mg y centro de masa en G_1; el remolque tiene una masa de 1 Mg y centro de masa en G_2. Determine el momento máximo absoluto por carga viva desarrollado en el puente.

6–69. Determine el momento máximo absoluto por carga viva en el puente en el problema 6–68 si se quita el remolque.



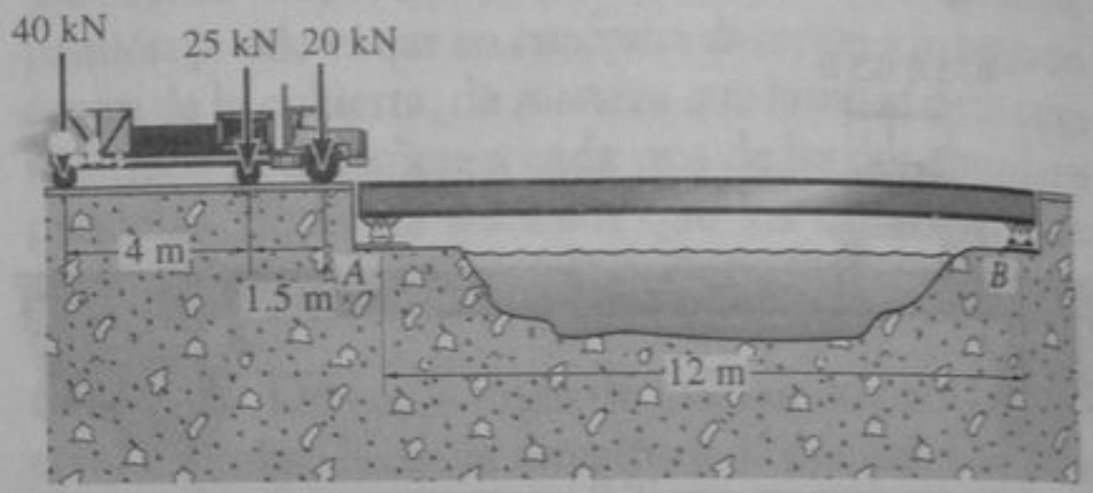
Probs. 6–68/6–69

6–70. Determine la fuerza cortante y el momento flexionante máximos absolutos por carga viva en la viga pescante *AB* debido a la carga de 10 kN. Las restricciones en los extremos requieren que 0.1 m ≤ x ≤ 3.9 m.



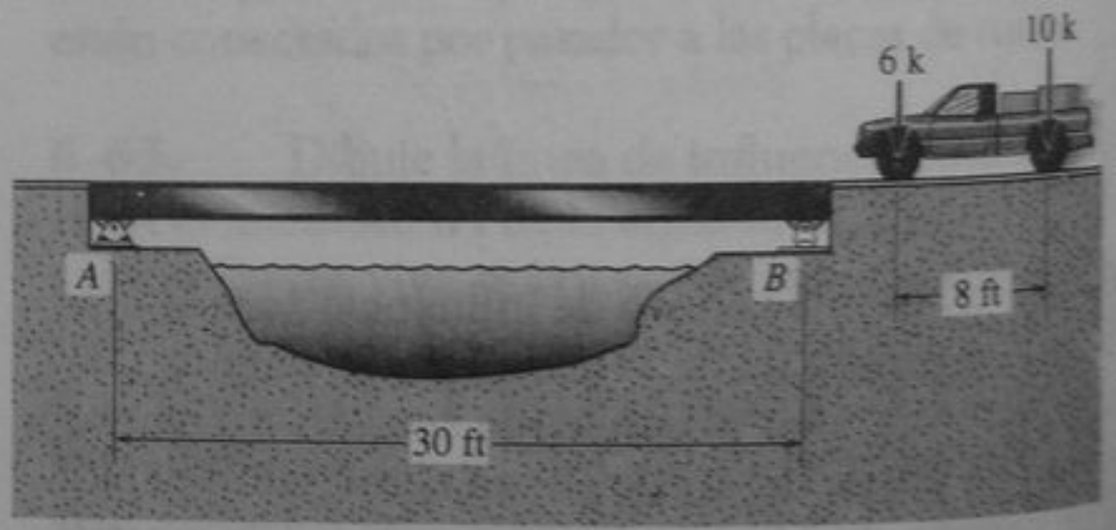
Prob. 6–70

6–71. Determine el momento máximo absoluto por carga viva en el puente debido a la carga mostrada.



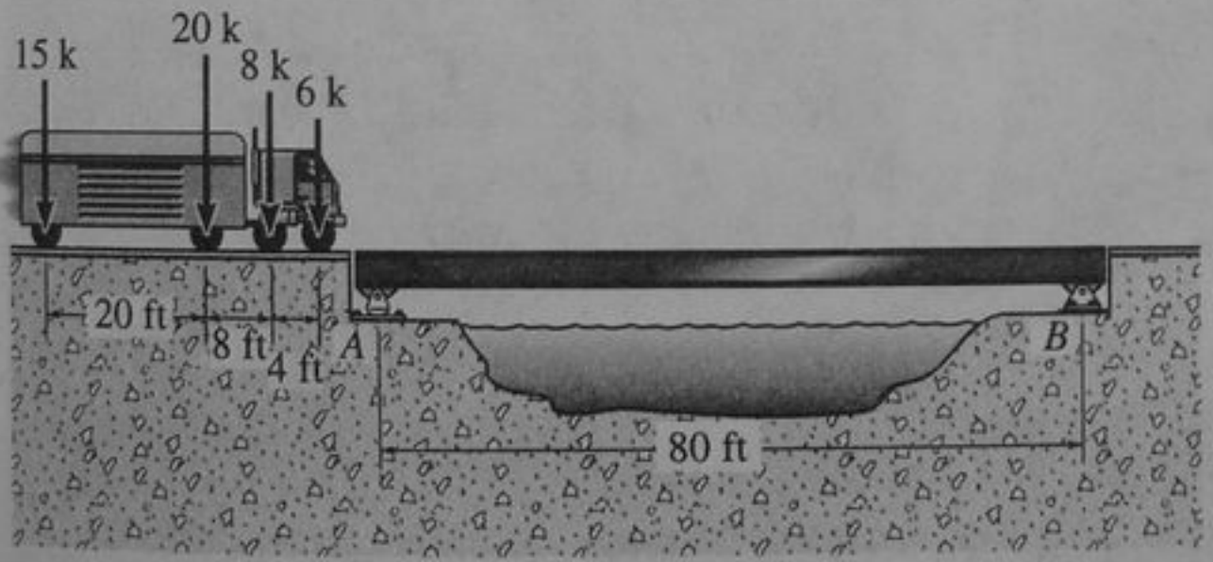
Prob. 6–71

***6–72.** Determine el momento máximo absoluto por carga viva en el puente debido a la carga mostrada.



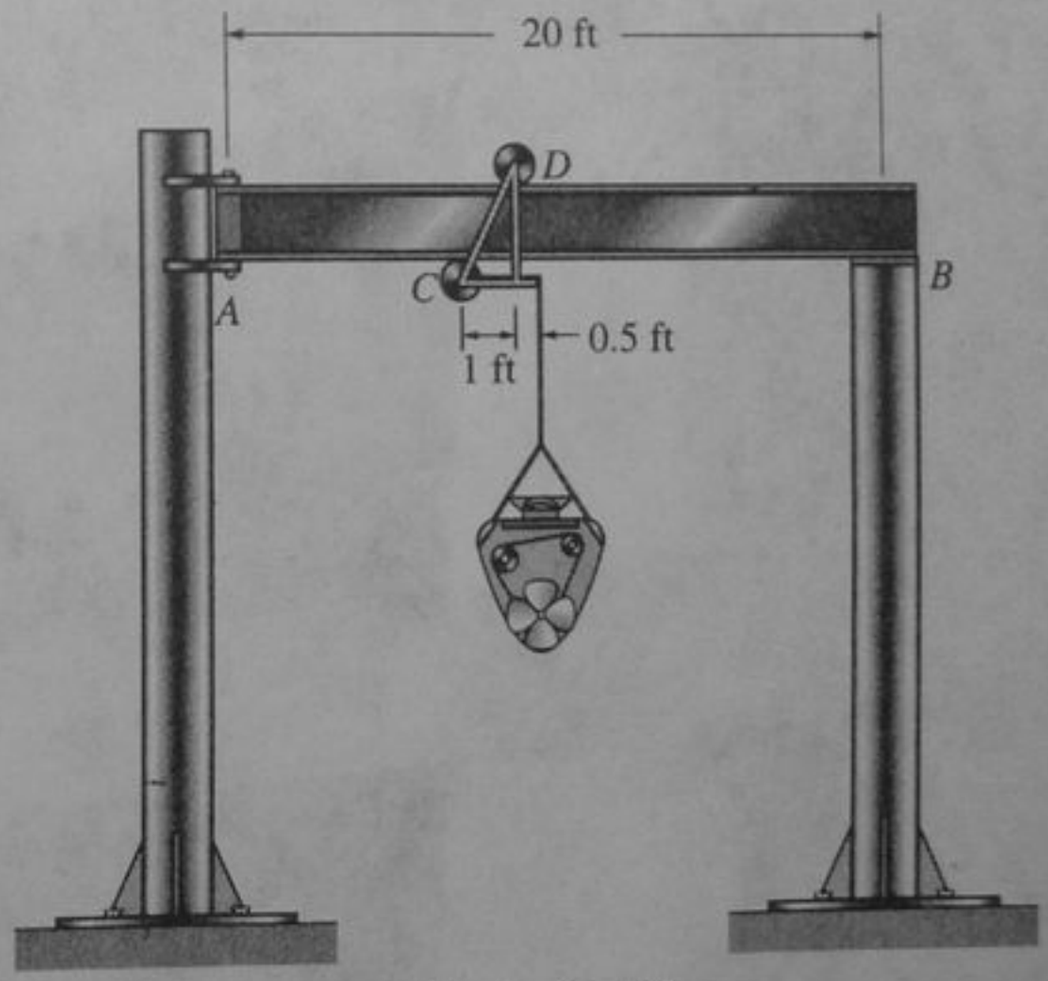
Prob. 6–72

6–73. Determine el momento máximo absoluto por carga viva en el puente debido a la carga del camión mostrado.



Prob. 6–73

6–74. El trole rueda en C y D a lo largo de los patines inferior y superior de la viga AB. Determine el momento máximo absoluto por carga viva desarrollado en la viga cuando la carga soportada por el trole es de 2 k. Suponga que el soporte en A es un pasador y B un rodillo.



Prob. 6–74

Todos los miembros de este edificio de concreto están rígidamente conectados, por lo que la estructura es estáticamente indeterminada. Se hicieron aproximaciones para el diseño preliminar de los miembros antes de efectuar un análisis estructural más exacto.

7

Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas

En este capítulo presentaremos algunos de los métodos aproximados que se usan para analizar armaduras y marcos estáticamente indeterminados. Estos métodos se desarrollaron con base en el comportamiento estructural y su exactitud se compara favorablemente con la de los métodos más exactos de análisis. Aunque no se verán aquí todos los tipos de formas estructurales, se espera que se gane suficiente perspicacia del estudio de esos métodos de manera que se pueda juzgar cuáles son las mejores aproximaciones por hacer al efectuar un análisis aproximado de fuerzas de una estructura estáticamente indeterminada.

7.1 Uso de métodos aproximados

Cuando se usa un *modelo* para representar cualquier estructura, su análisis debe satisfacer tanto las condiciones de equilibrio como la compatibilidad de los desplazamientos en los nudos. Como se verá en capítulos posteriores de este texto, las condiciones de compatibilidad para una estructura *estáticamente indeterminada* sólo pueden relacionarse con las cargas si conocemos el módulo de elasticidad del material y el *tamaño y forma de los miembros*. Sin embargo, para el diseño, no conocemos de antemano el tamaño de un miembro por lo que no puede considerarse un análisis estáticamente indeterminado. Para el análisis, debe desarrollarse un modelo simple de la estructura, uno que sea estáticamente determinado. Una vez especificado este modelo, su análisis se llama *análisis aproximado*. Si se efectúa un análisis aproximado, puede hacerse un diseño preliminar de los miembros de

una estructura y una vez completo éste, puede entonces efectuarse el análisis indeterminado más exacto y refinarse el diseño. Un análisis aproximado da también información sobre el comportamiento de la estructura bajo carga y es útil para realizar un análisis más exacto o bien para cuando no se dispone de tiempo, dinero o capacidad para efectuar un análisis más exacto.

Debe quedar claro que en un sentido general, todos los métodos de análisis estructural son aproximados, simplemente porque las condiciones reales de carga, geometría, comportamiento del material y resistencia en los soportes, nunca se conocen con *exactitud*. Sin embargo, en este texto llamaremos *análisis exacto* al análisis estáticamente indeterminado de una estructura y al análisis más simple estáticamente determinado, lo llamaremos *análisis aproximado*.

7.2 Armaduras

Un tipo común de armadura usado a menudo para el arriostramiento lateral de un edificio o de las cuerdas superior e inferior de un puente, se muestra en la figura 7–1*a*. (Véase también la figura 3–4.) Cuando se usa para este fin, esta armadura no se considera como un elemento primario del soporte de la estructura y, en consecuencia, se analiza con frecuencia por métodos aproximados. En el caso mostrado, se notará que, si se quita una diagonal de cada uno de los tres tableros, la armadura será estáticamente determinada. Por ello, la armadura es

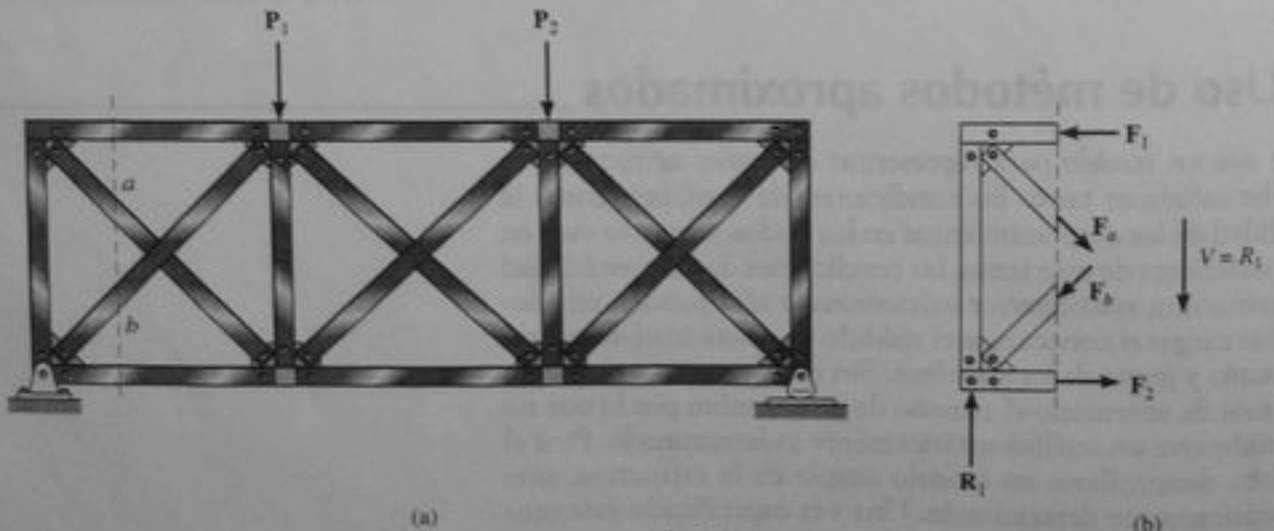


Fig. 7–1

estáticamente indeterminada de tercer grado,* y tendremos que hacer tres hipótesis con respecto a las fuerzas en las barras para reducir la armadura a una que sea estáticamente determinada. Estas hipótesis pueden hacerse con respecto a las diagonales cruzadas, observando que, cuando una diagonal de un tablero está en tensión, la correspondiente contradiagonal está en compresión. Esto es evidente en la figura 7–1*b*, donde la "fuerza cortante del tablero" V se toma como la *componente vertical* de la fuerza de tensión del miembro *a* y como la *componente vertical* de la fuerza de compresión del miembro *b*. Por lo general, se aceptan dos métodos de análisis.

Método 1: Si las diagonales se diseñan intencionalmente *largas* y *esbeltas*, es razonable suponer que *no* pueden soportar una fuerza de compresión; de otra manera, podrían pandearse fácilmente. Por consiguiente, la fuerza cortante en el tablero es soportada enteramente por la *diagonal en tensión*, mientras que la *diagonal en compresión se supone que es un miembro de fuerza cero.*

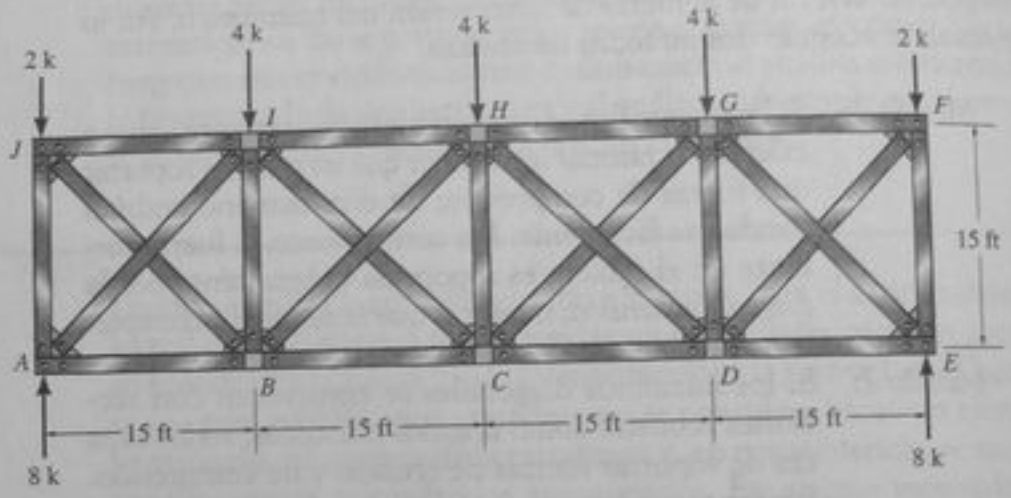
Método 2: Si los miembros diagonales se construyen con secciones robustas como ángulos o canales, serán capaces de soportar fuerzas de tensión y de compresión. Por tanto, podemos suponer que cada diagonal toma *la mitad* de la fuerza cortante en el tablero.

Estos dos métodos de análisis aproximado se ilustran numéricamente en los ejemplos siguientes.

*Usando la ecuación 3–1, $b + r = 2j$, o $16 + 3 > 8(2)$.

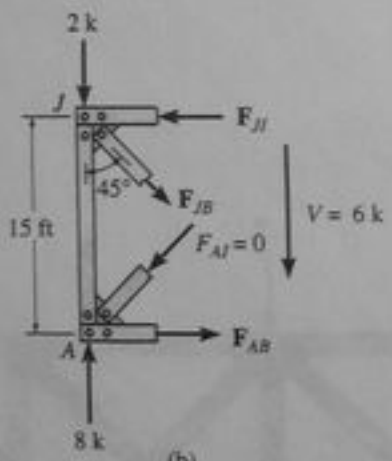
Ejemplo 7–1

Determine (en forma aproximada) las fuerzas en los miembros de la armadura que se muestra en la figura 7–2*a*. Suponga que las diagonales son esbeltas y que, por tanto, no pueden soportar las fuerzas de compresión. Las reacciones en los soportes ya se han calculado.



(a)

Fig. 7–2



(b)

(c)

Solución

Por inspección, la armadura es estáticamente indeterminada de cuarto grado. Así, las cuatro hipótesis por usarse requieren que cada diagonal en compresión no soporte ninguna fuerza. Por consiguiente de una sección vertical a través del tablero izquierdo, figura 7–2*b*, tenemos

$$F_{AJ} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8 - 2 - F_{JB} \cos 45° = 0$$

$$F_{JB} = 8.49 \text{ k (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_A = 0; \quad 8.49 \operatorname{sen} 45°(15) - F_{JI}(15) = 0$$

$$F_{JI} = 6 \text{ k (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_J = 0; \quad F_{AB}(15) = 0$$

$$F_{AB} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

Del nudo A, figura 7–2*c*,

$$F_{JA} = 8 \text{ k (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

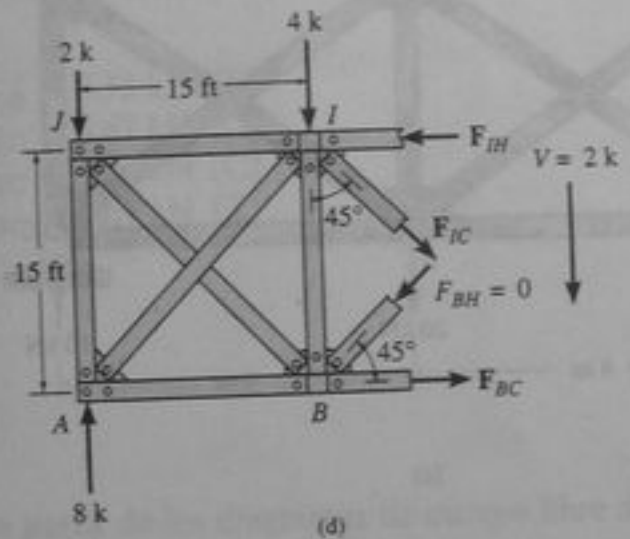
En la figura 7–2*d* se muestra una sección vertical de la armadura a través de los miembros *IH*, *IC*, *BH* y *BC*. La fuerza cortante en el tablero es $V = \Sigma F_y = 8 - 2 - 4 = 2$ k. Se requiere

$$F_{BH} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8 - 2 - 4 - F_{IC}\cos 45° = 0$$
$$F_{IC} = 2.83 \text{ k (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 8(15) - 2(15) + 2.83 \operatorname{sen} 45°(15) - F_{IH}(15) = 0$$
$$F_{IH} = 8 \text{ k (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

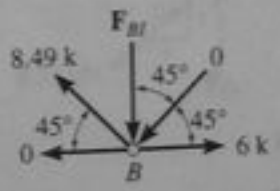
$$\curvearrowleft + \Sigma M_I = 0; \quad 8(15) - 2(15) - F_{BC}(15) = 0$$
$$F_{BC} = 6 \text{ k (T)} \qquad \textit{Resp.}$$



(d)

Del nudo B, figura 7–2*e*,

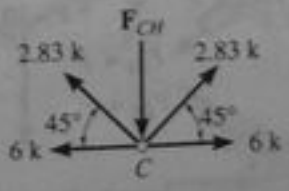
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8.49 \operatorname{sen} 45° - F_{BI} = 0 \qquad F_{BI} = 6 \text{ k (C)} \qquad \textit{Resp.}$$



(e)

Las fuerzas en los otros miembros pueden determinarse por simetría, excepto F_{CH}; sin embargo, del nudo C, figura 7–2*f*, tenemos

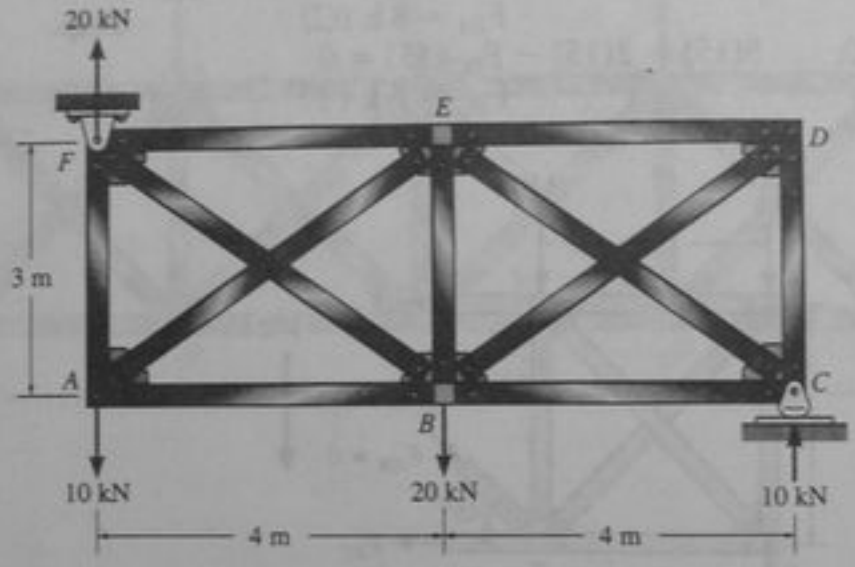
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2(2.83 \operatorname{sen} 45°) - F_{CH} = 0 \qquad F_{CH} = 4 \text{ k (C)} \qquad \textit{Resp.}$$



(f)

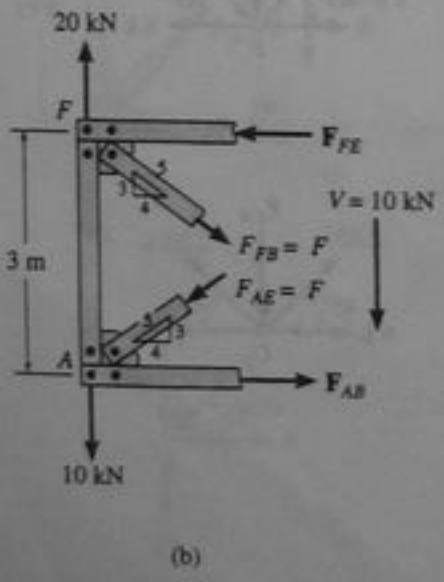
Ejemplo 7–2

Determine (en forma aproximada) las fuerzas en los miembros de la armadura que aparece en la figura 7–3*a*. Las diagonales se diseñarán para soportar fuerzas de tensión y de compresión, por lo que se supone que cada una toma la mitad de la fuerza cortante del tablero. Las reacciones en los soportes ya han sido calculadas.



(a)

Fig. 7–3



(b)

Solución

Por inspección, la armadura es estáticamente indeterminada de segundo grado. Las dos hipótesis requieren que las diagonales en tensión y compresión soporten fuerzas iguales, esto es, $F_{FB} = F_{AE} = F$. Para una sección vertical a través del tablero izquierdo, figura 7–3*b*, tenemos

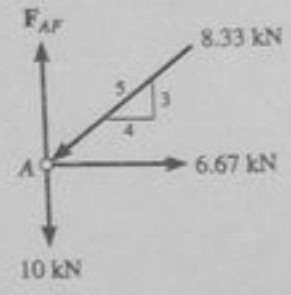
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 20 - 10 - 2(\tfrac{3}{5}F) = 0 \qquad F = 8.33 \text{ kN}$$

por lo que

$$F_{FB} = 8.33 \text{ kN (T)} \qquad \textit{Resp.}$$
$$F_{AE} = 8.33 \text{ kN (C)} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\curvearrowright+\Sigma M_A = 0; \quad 8.33(\tfrac{4}{5})(3) - F_{FE}(3) = 0$$
$$F_{FE} = 6.67 \text{ kN (C)} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\curvearrowright+\Sigma M_F = 0; \quad 8.33(\tfrac{4}{5})(3) - F_{AB}(3) = 0$$
$$F_{AB} = 6.67 \text{ kN (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

Del nudo A, figura 7–3c,

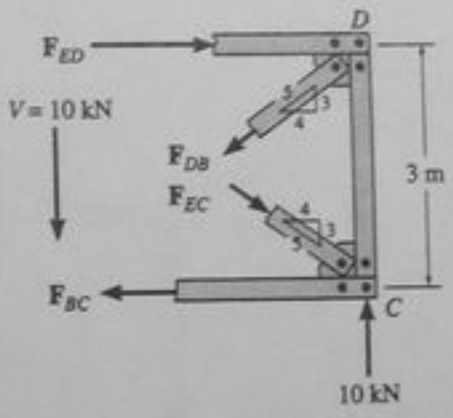
$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ F_{AF} - 8.33\left(\frac{3}{5}\right) - 10 = 0 \qquad F_{AF} = 15\ \text{kN (T)}$ *Resp.*



(c)

Una sección vertical a través del tablero derecho se muestra en la figura 7–3*d*. Demuestre que

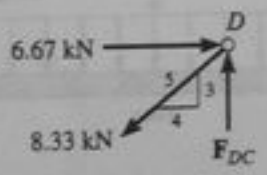
$F_{DB} = 8.33\ \text{kN (T)}$ *Resp.*
$F_{ED} = 6.67\ \text{kN (C)}$ *Resp.*
$F_{EC} = 8.33\ \text{kN (C)}$ *Resp.*
$F_{BC} = 6.67\ \text{kN (T)}$ *Resp.*



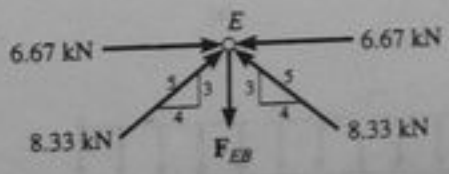
(d)

Además, a partir de los diagramas de cuerpo libre de los nudos D y E, figuras 7–3*e* y 7–3*f*, demuestre que

$F_{DC} = 5\ \text{kN (C)}$ *Resp.*
$F_{EB} = 10\ \text{kN (T)}$ *Resp.*



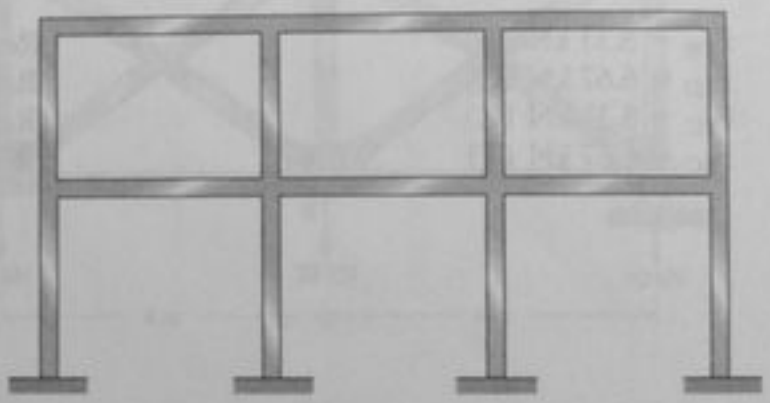
(e)



(f)

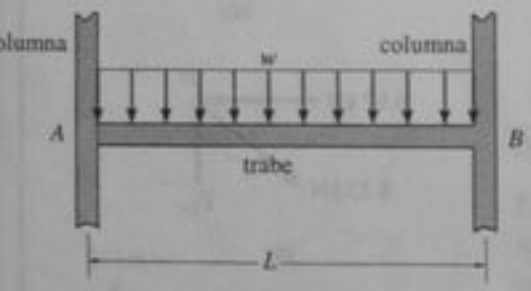
7.3 Cargas verticales sobre marcos de edificios

Los marcos de los edificios consisten, a menudo, en trabes *conectadas rígidamente* a las columnas, de modo que la estructura entera resiste mejor los efectos de las fuerzas laterales debidas al viento o un sismo. Un ejemplo de semejante marco rígido se muestra en la figura 7–4. En esta sección estableceremos un método para analizar (en forma aproximada) las fuerzas en los marcos debidas a cargas verticales, y en las secciones 7.5 y 7.6 un método de análisis para marcos sometidos a cargas laterales. En todos estos casos debe notarse que la mayor parte de las hipótesis simplificatorias hechas para reducir un marco estáticamente indeterminado a uno estáticamente determinado, se basan en *la manera en que la estructura se deforma bajo carga.*

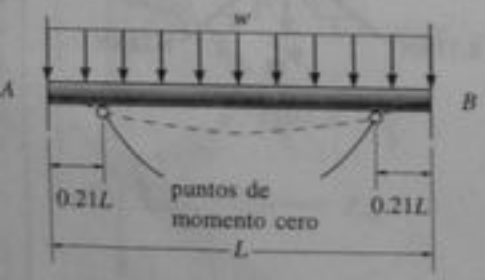


marco típico de edificio

Fig. 7–4



(a)



empotrada

(b)

Fig. 7–5

Hipótesis para un análisis aproximado

Considere una trabe típica localizada en un marco de un edificio y sometida a una carga uniforme vertical, como se muestra en la figura 7–5*a*. Los soportes de columna en *A* y *B* ejercerán cada uno tres reacciones sobre la trabe por lo que ésta será estáticamente indeterminada de tercer grado (6 reacciones – 3 ecuaciones de equilibrio). Para hacer la trabe estáticamente determinada, un análisis aproximado requerirá tres hipótesis. Si las columnas son extremadamente rígidas, no habrá rotación ni en *A* ni en *B* y la curva elástica de la trabe tendrá una forma como la mostrada en la figura 7–5*b*. Usando uno de los métodos presentados en los capítulos 9 al 11 para un análisis exacto, revela que para este caso, los puntos de inflexión o de momento cero, ocurren a 0.21*L* de cada soporte. Sin embargo, si las conexiones en las columnas, en *A* y *B* son muy flexibles, entonces, como en el caso de una viga simplemente apoyada, el momento cero ocurrirá en los soportes, figura 7–5*c*. Sin embargo, las columnas proporcionan algo de flexibilidad en los soportes por lo que supondremos que los momentos cero ocurren en un *punto promedio* entre los dos casos extre-

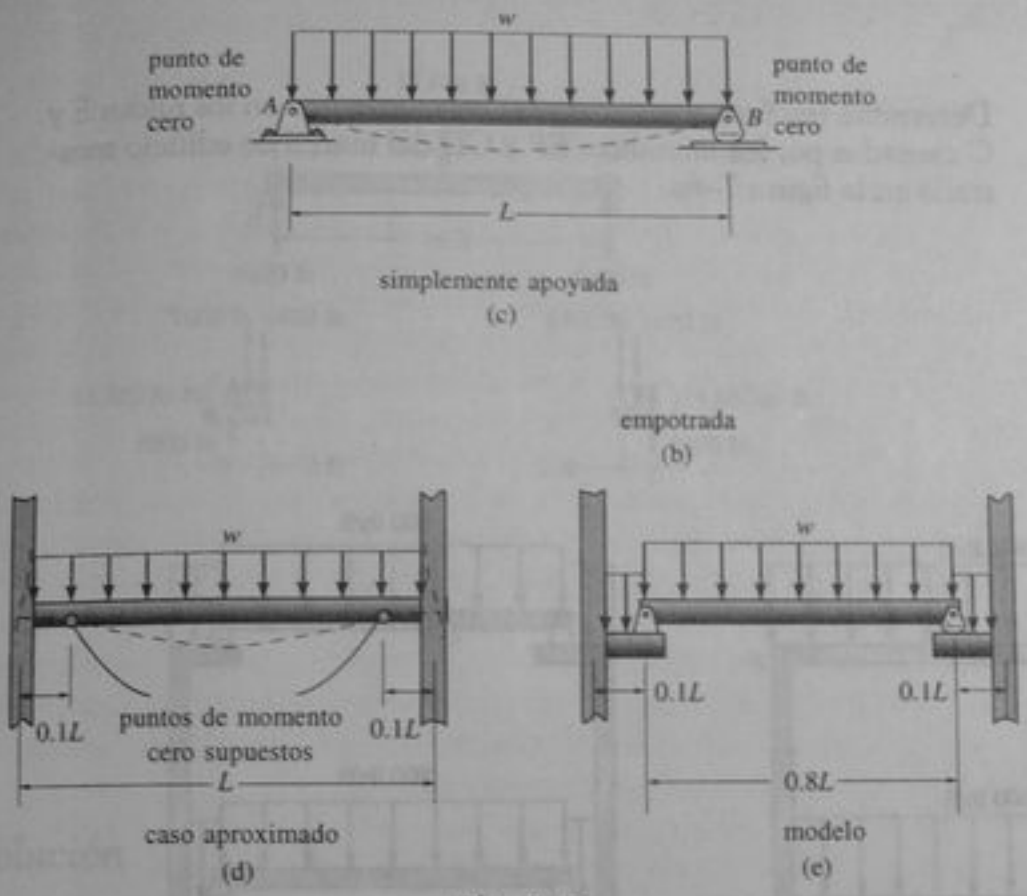


Fig. 7–5

mos, esto es, a $(0.21L + 0)/2 = 0.1L$ de cada soporte, figura 7–5*d*. Además, un análisis exacto de marcos que soportan cargas verticales indica que las fuerzas axiales en la trabe son despreciables.

Como resultado del análisis anterior, cada trabe de longitud L puede modelarse como un claro simplemente apoyado de longitud $0.8L$ que descansa sobre dos extremos en voladizo, cada uno de longitud $0.1L$, figura 7–5*e*. Las siguientes tres hipótesis se incorporan en este modelo:

1. Se tiene un momento cero en la trabe a $0.1L$ del soporte izquierdo
2. Se tiene un momento cero en la trabe a $0.1L$ del soporte derecho.
3. En la trabe no se tiene una fuerza axial.

Por medio de la estática pueden ahora obtenerse las cargas internas en las trabes y efectuarse un diseño preliminar de sus secciones transversales. El siguiente ejemplo ilustra esto numéricamente.

Ejemplo 7–3

Determine (en forma aproximada) los momentos en los nudos E y C causados por los miembros *EF* y *CD* del marco de edificio mostrado en la figura 7–6*a*.

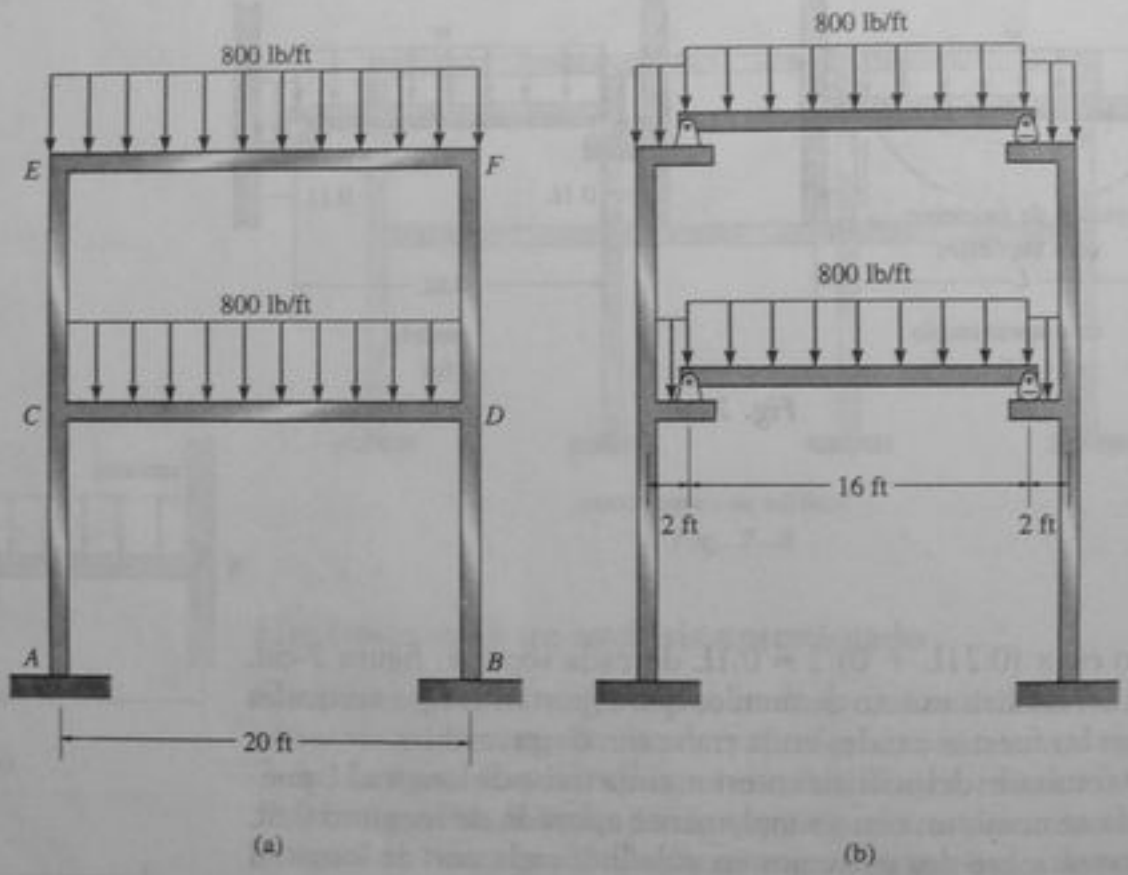
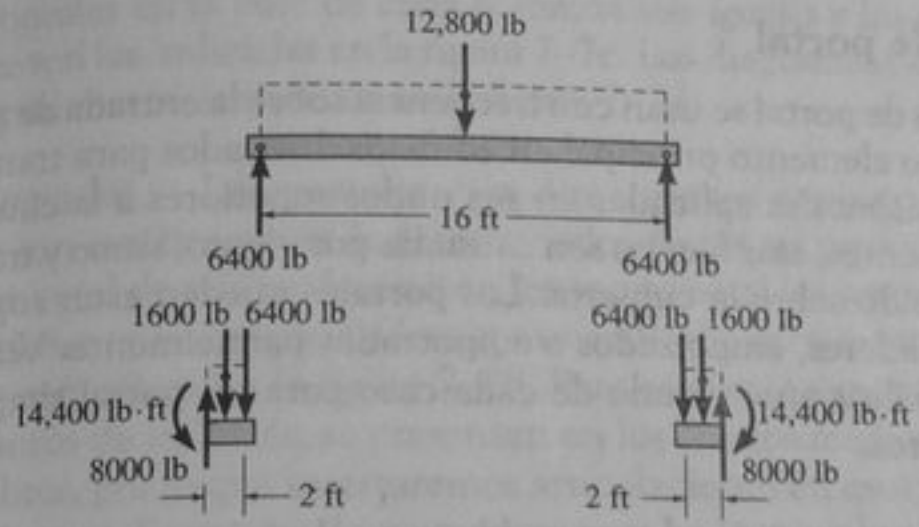


Fig. 7–6



(c)

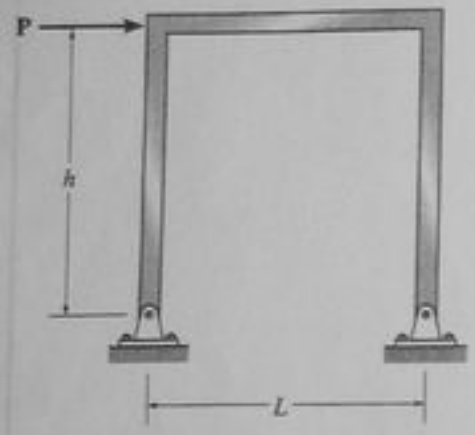
Solución

Para un análisis aproximado, el marco se modela como se muestra en la figura 7–6*b*. Note que los claros en voladizo que soportan la porción central de la trabe tienen una longitud de $0.1L = 0.1(20) = 2$ ft. Por equilibrio se requiere que las reacciones extremas de la porción central de la trabe sean de 6400 lb, figura 7–6*c*. Los claros en voladizo están entonces sometidos a un momento de

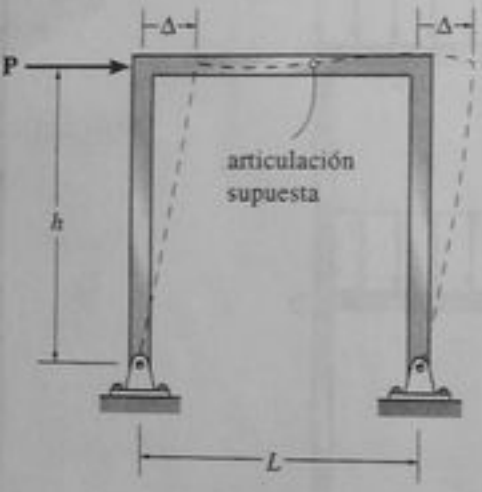
$$M = 1600(1) + 6400(2) = 14\,400 \text{ lb} \cdot \text{ft} = 14.4 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

Este momento, con sentido opuesto, actúa sobre los nudos E y C.

7.4 Marcos de portal y armaduras



(a)



(b)

Marcos de portal

Los marcos de portal se usan con frecuencia sobre la entrada de puentes* y como elemento principal en edificios diseñados para transferir fuerzas horizontales aplicadas en sus nudos superiores a la cimentación. En puentes, esas fuerzas son causadas por viento, sismo y tránsito desbalanceado sobre la cubierta. Los portales pueden estar soportados por pasadores, empotrados o empotrados parcialmente. Veremos ahora el análisis aproximado de cada caso para un portal simple de tres miembros.

Soportados por pasadores. Un portal típico soportado por pasadores consiste en columnas verticales articuladas de igual longitud y tamaño con una trabe horizontal rígidamente conectada a las columnas, figura 7–7*a*. Como se tienen cuatro incógnitas en los soportes y sólo tres ecuaciones de equilibrio disponibles para la solución, esta estructura es estáticamente indeterminada de primer grado. En consecuencia, sólo debe hacerse una hipótesis para reducir el marco a uno que sea estáticamente determinado.

La deflexión elástica del portal se muestra en la figura 7–7*b*. Este diagrama indica que un punto de inflexión, esto es, donde el momento cambia de positivo a negativo, se localiza *aproximadamente* en el punto medio de la trabe. Como el momento en la trabe es cero en este punto, podemos suponer que existe ahí una articulación y en-

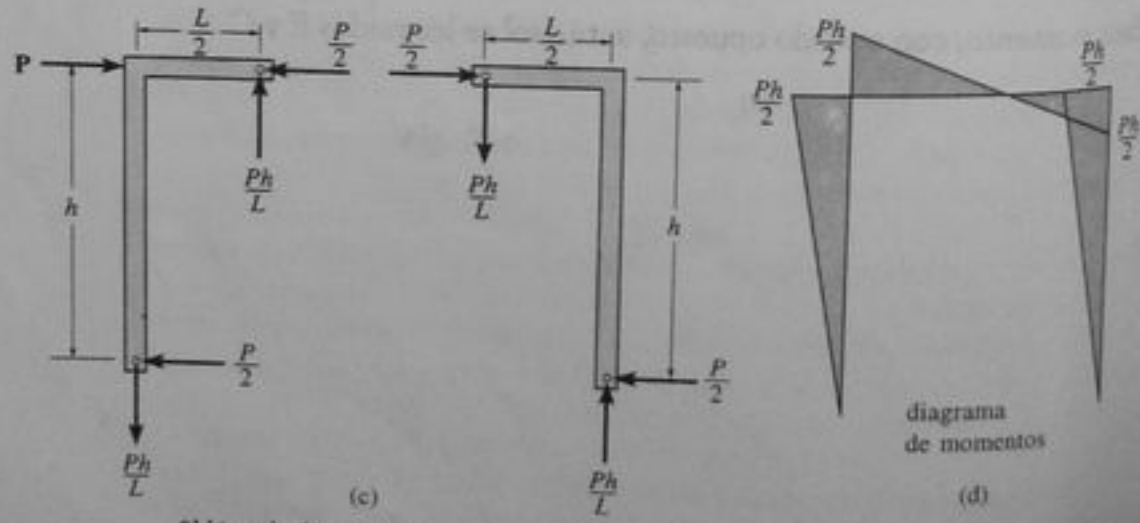
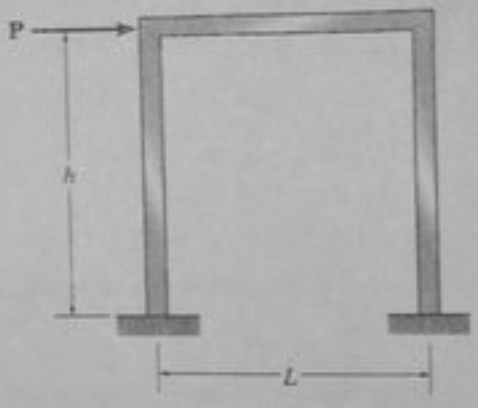


Fig. 7–7

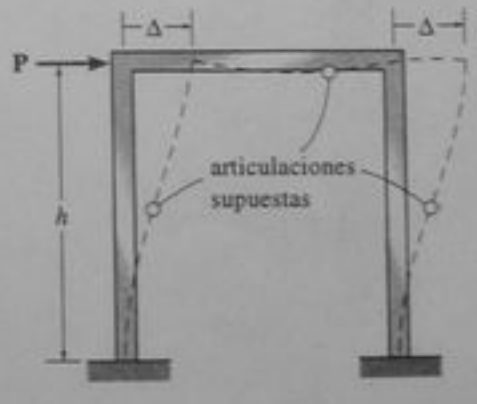
*Véase la figura 3–4.

tonces procedemos a determinar las reacciones en los soportes por medio de la estática. Si se hace así, se encuentra que las reacciones horizontales en la base de cada columna son *iguales* y las otras reacciones son las indicadas en la figura 7–7*c*. Los diagramas de momento para este marco se indican en la figura 7–7*d*.

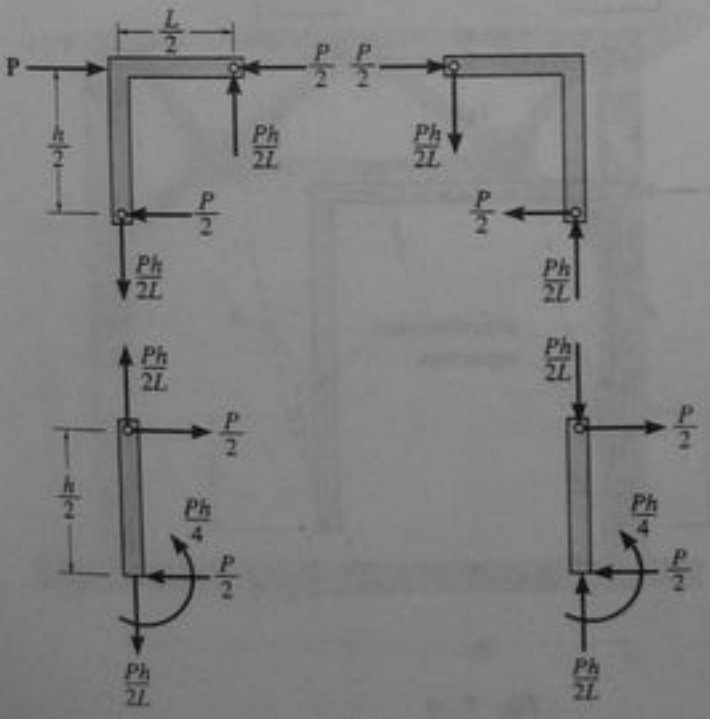
Empotrados. Los portales con dos soportes empotrados, figura 7–8*a*, son estáticamente indeterminados de tercer grado ya que tienen un total de seis incógnitas en los soportes. Si los miembros verticales tienen igual longitud y área transversal, el marco sufrirá deflexión, como se muestra en la figura 7–8*b*. Para este caso supondremos que los puntos de inflexión se presentan en los puntos medios de los tres miembros, por lo que insertaremos articulaciones en esos puntos. Las reacciones y diagramas de momentos para cada miembro pueden determinarse desmembrando la estructura en las articulaciones y aplicando las ecuaciones de equilibrio a cada una de las cuatro partes. Los resultados se muestran en la figura 7–8*c*. Nótese que, como en el caso del portal conectado por pasadores, las reacciones horizontales en la base de cada columna son *iguales*. El diagrama de momentos para este marco se muestra en la figura 7–8*d*.



(a)



(b)



(c)

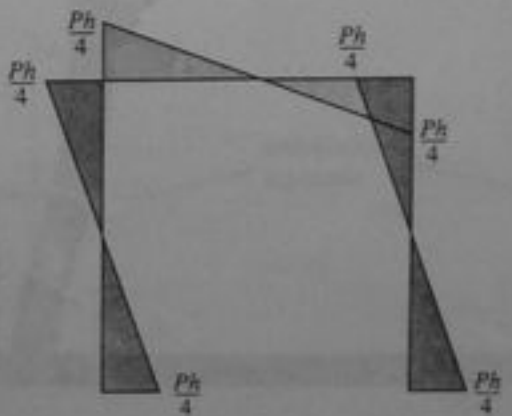
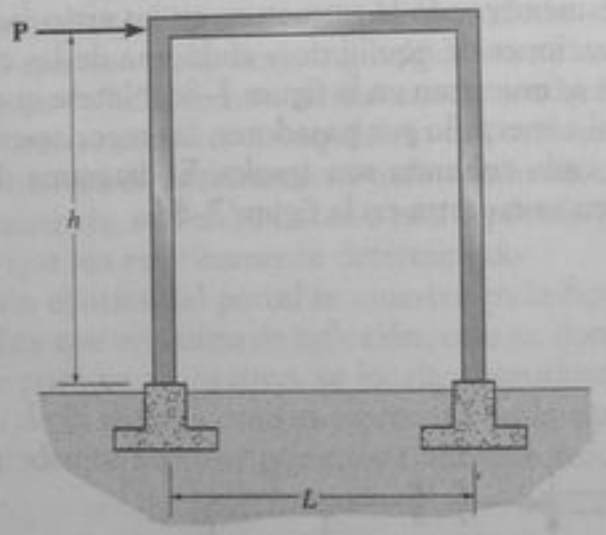


diagrama de momentos

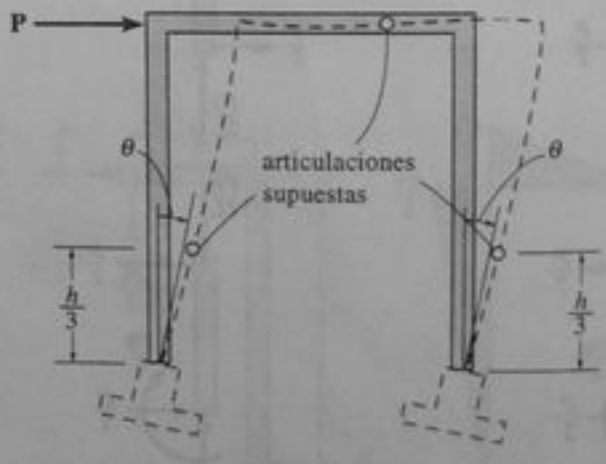
(d)

Fig. 7–8

Empotramiento parcial. Como es a la vez difícil y costoso construir un empotramiento perfecto para un marco de portal, es conservador y algo realista suponer que ocurre una ligera rotación en los soportes, figura 7–9*a*. En consecuencia, los puntos de inflexión sobre las columnas se encuentran entre las posiciones correspondientes al caso de un portal soportado por pasadores en su base, figura 7–7*a* y al caso de un portal empotrado, figura 7–8*a*; en el primer caso, los puntos de inflexión coinciden con la base y en el segundo, se encuentran a la mitad de la altura de las columnas. Muchos ingenieros definen arbitrariamente la posición de los puntos de inflexión en $h/3$, figura 7–9*b*, y colocan entonces articulaciones en esos puntos y también en el centro de la trabe.†



(a)



(b)

Fig. 7–9

†Véase el problema 7–10.

Armaduras

Cuando se usa un portal para salvar grandes distancias, puede usarse una armadura en vez de una trabe horizontal. Tal estructura se usa sobre grandes puentes y como marcos transversales en grandes auditorios y edificios fabriles. Un ejemplo típico se muestra en la figura 7–10*a*. En todos los casos, la armadura suspendida se supone articulada en sus puntos de unión con las columnas. Además, la armadura mantiene rectas a las columnas dentro de la región de unión cuando el portal está sometido a un desplazamiento lateral Δ, figura 7–10*b*. Podemos entonces analizar los portales de armadura usando las mismas hipótesis que en el caso de los portales con trabe superior. Para columnas soportadas por pasadores, suponga que las reacciones horizontales son iguales, como en la figura 7–7*c*. Para columnas empotradas, suponga que las reacciones horizontales son iguales y que un punto de inflexión (o articulación) se presenta en cada columna a la mitad de la altura entre la base y el *punto más bajo* de la conexión con la armadura. Vea las figuras 7–8*c* y 7–10*b*.

El siguiente ejemplo ilustra cómo determinar las fuerzas en los miembros de un portal de armadura usando el método aproximado de análisis descrito arriba.

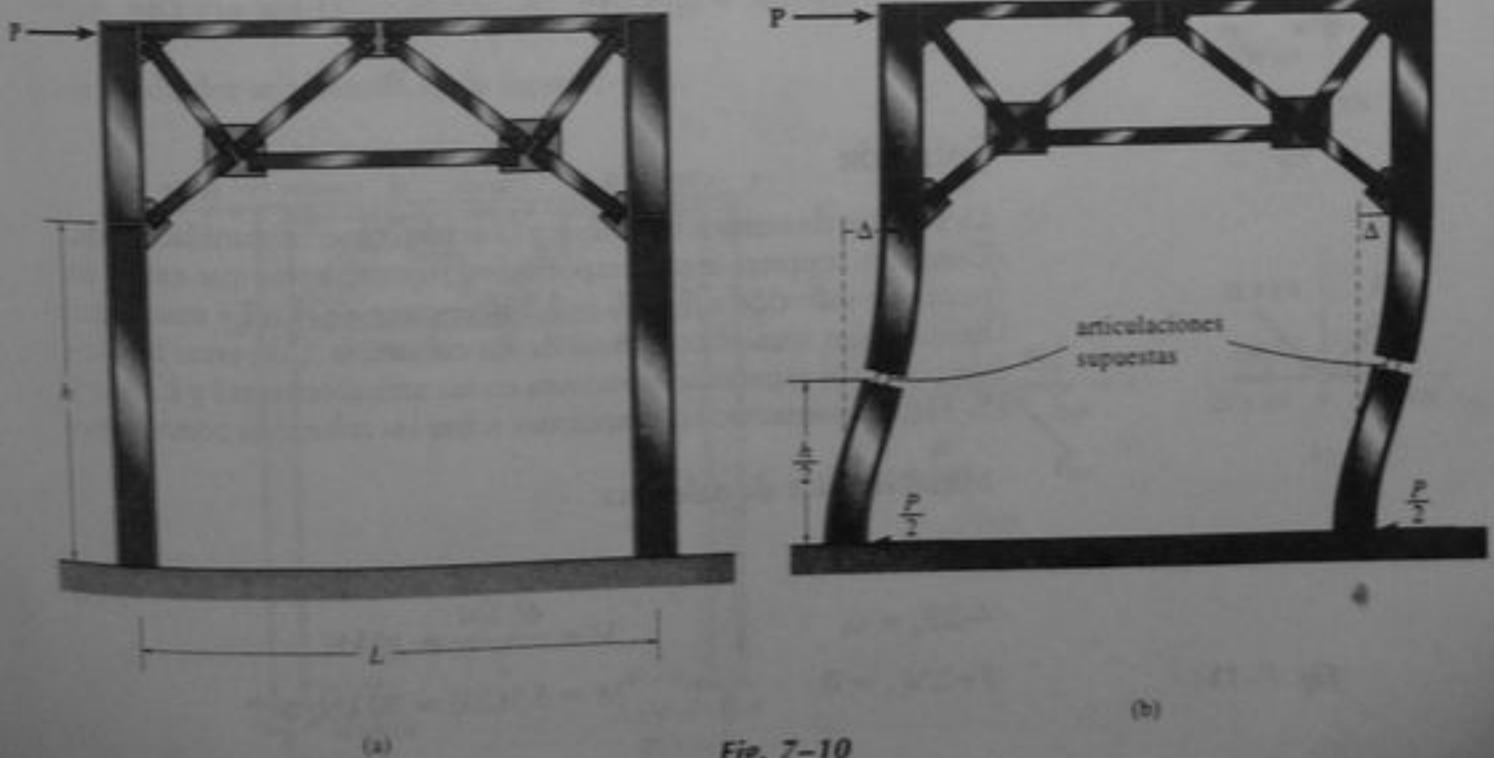
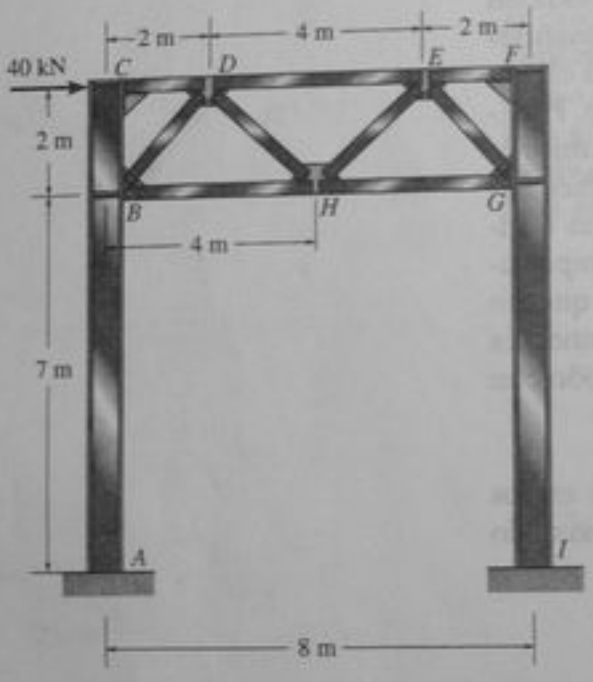


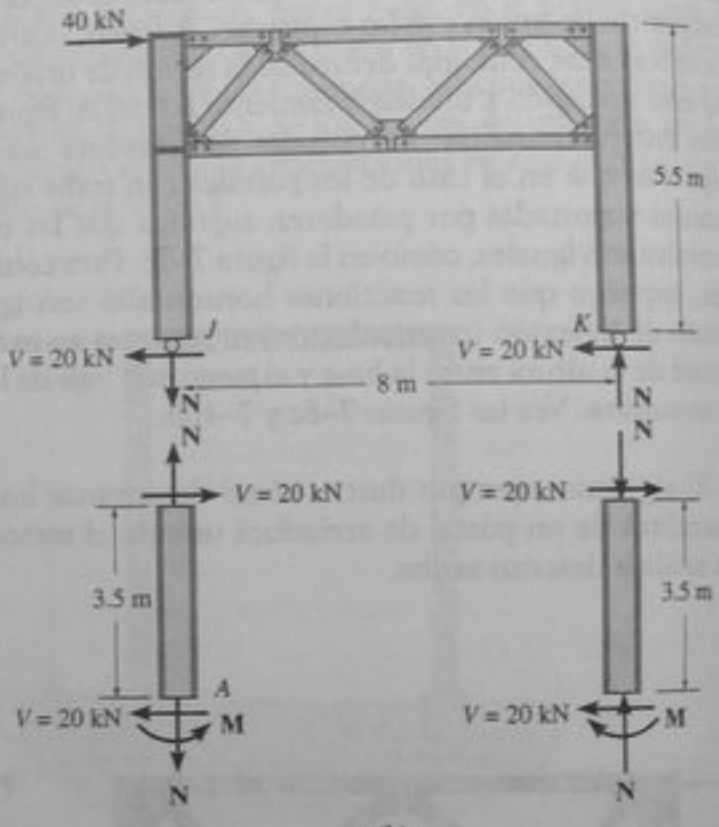
Fig. 7–10

Ejemplo 7–4

Determine por métodos aproximados las fuerzas que actúan en los miembros del portal Warren mostrado en la figura 7–11*a*.



(a)



(b)

Solución

La porción de armadura *B*, *C*, *F* y *G* actúa como una unidad rígida. Como los soportes están empotrados, supondremos que existe un punto de inflexión a 7 m/2 = 3.5 m encima de *A* e *I* y reacciones horizontales iguales en la base de las columnas. Con estas hipótesis, podemos separar la estructura en las articulaciones *J* y *K*, figura 7–11*b*, y determinar las reacciones sobre las columnas como sigue:

Mitad inferior de columna

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \qquad V = \frac{40\ \text{kN}}{2} = 20\ \text{kN}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad M = 3.5(20) = 70\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

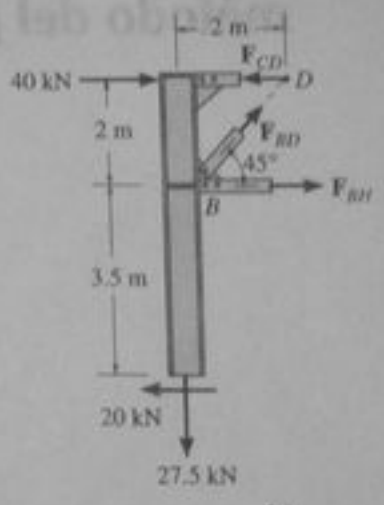
Fig. 7–11

Porción superior de columna

$\curvearrowright +\Sigma M_J = 0;$ $\quad 40(5.5) - N(8) = 0 \quad N = 27.5\ \text{kN}$

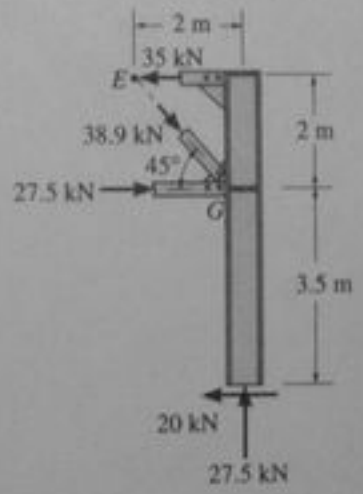
Usando el método de las secciones, figura 7–11c, podemos proceder ahora a obtener las fuerzas en los miembros *CD*, *BD* y *BH*.

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ -27.5 + F_{BD}\,\text{sen}\,45° = 0 \quad F_{BD} = 38.9\ \text{kN (T)}$ *Resp.*
$\downarrow+\Sigma M_B = 0;\ -20(3.5) - 40(2) + F_{CD}(2) = 0 \quad F_{CD} = 75\ \text{kN (C)}$ *Resp.*
$\downarrow+\Sigma M_D = 0;\ F_{BH}(2) - 20(5.5) = 0 \quad F_{BH} = 27.5\ \text{kN (T)}$ *Resp.*



(c)

De manera similar, demuestre que se obtienen los resultados del diagrama de cuerpo libre de la columna *FGI* mostrado en la figura 7–11*d*. Usando esos resultados, podemos encontrar ahora la fuerza en cada uno de los otros miembros de la armadura del portal usando el método de los nudos.



(d)

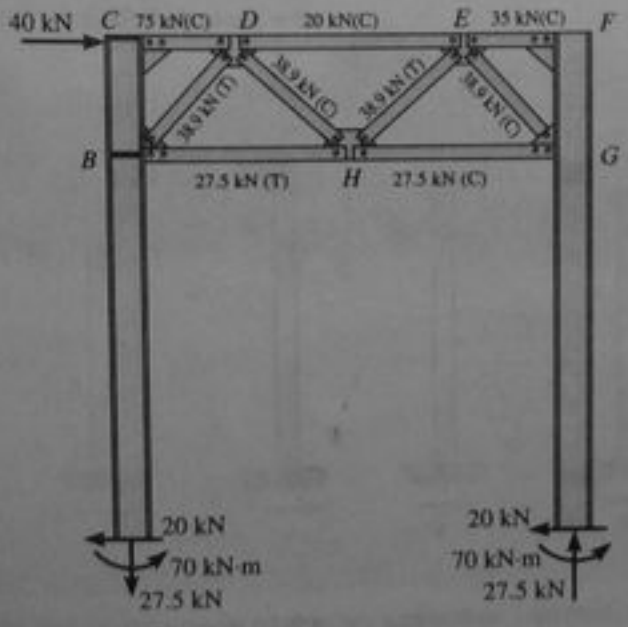
Nudo *D*, figura 7–11e:

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ F_{DH}\,\text{sen}\,45° - 38.9\,\text{sen}\,45° = 0 \quad F_{DH} = 38.9\ \text{kN (C)}$ *Resp.*
$\rightarrow\Sigma F_x = 0;\ 75 - 2(38.9\cos 45°) - F_{DE} = 0 \quad F_{DE} = 20\ \text{kN (C)}$ *Resp.*

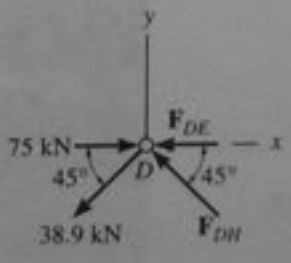
Nudo *H*, figura 7–11*f*:

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ F_{HE}\,\text{sen}\,45° - 38.9\,\text{sen}\,45° = 0 \quad F_{HE} = 38.9\ \text{kN (T)}$ *Resp.*

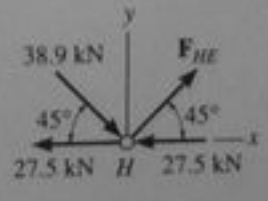
Esos resultados se resumen en la figura 7–11g.



(g)



(e)



(f)

7.5 Cargas laterales en marcos de edificios: método del portal

En la sección 7.4 analizamos la acción de las cargas laterales sobre portales y encontramos que para un portal (o marco) empotrado en su base, los puntos de inflexión ocurren aproximadamente en el centro de cada trabe y columna y que las columnas soportan cargas cortantes iguales, figura 7–8. El marco de un edificio se deflexiona de la misma manera que un portal, figura 7–12*a*, y por ello es apropiado suponer que los puntos de inflexión ocurren en el centro de las columnas y trabes. Si consideramos cada crujía del marco como compuesta por una serie de portales, figura 7–12*b*, entonces, como hipótesis adicional, las *columnas interiores* representarían el efecto de *dos columnas de portal* y soportarían entonces el doble de la fuerza cortante V respecto a la que soportan las dos columnas exteriores.

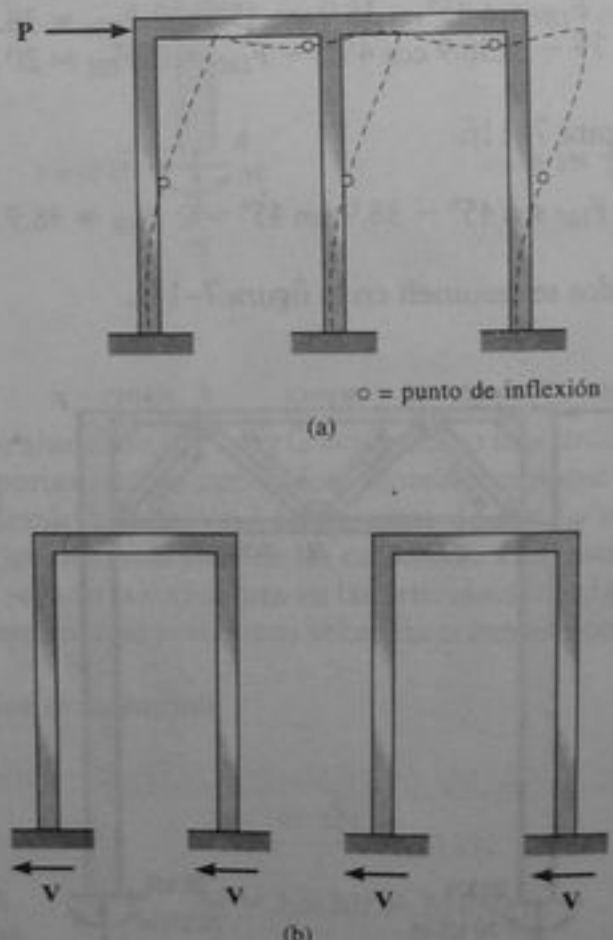


Fig. 7–12

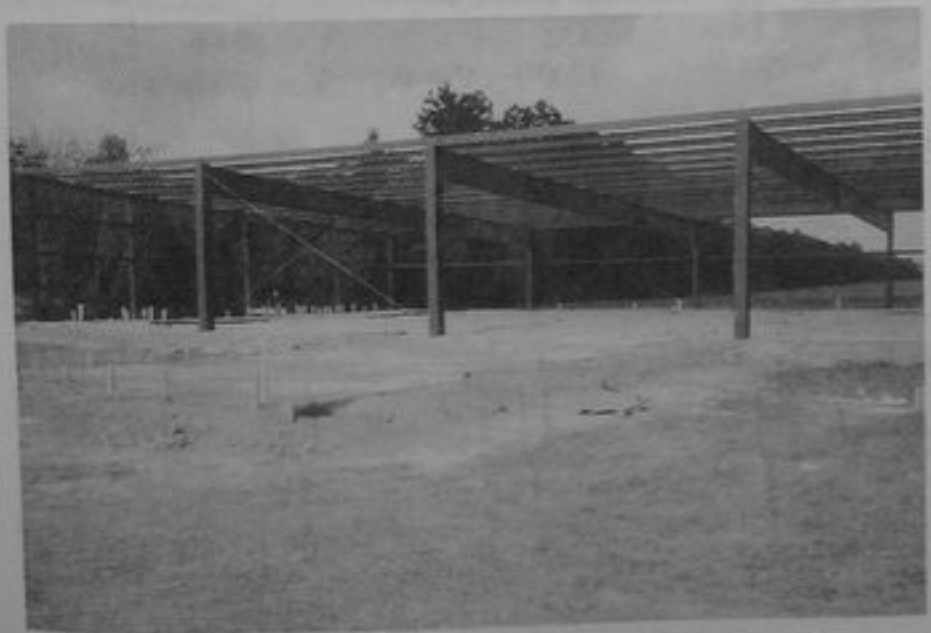
En resumen, el método del portal para el análisis de marcos de edificios empotrados en su base, requiere las siguientes hipótesis:

1. Se coloca una articulación en el centro de cada trabe ya que se supone que éste es un punto de momento cero.
2. Se coloca una articulación en el centro de cada columna ya que se supone que éste es un punto de momento cero.
3. En un nivel de piso dado, la fuerza cortante en las articulaciones de columnas interiores es doble que en las articulaciones de columnas exteriores ya que el marco se considera como una superposición de portales.

Estas hipótesis proporcionan una reducción adecuada del marco a uno que es estáticamente determinado y estable bajo carga.

En comparación con el análisis estáticamente indeterminado más exacto, el *método del portal es más adecuado para edificios de baja elevación y estructuración uniforme*. La razón para esto tiene que ver con el comportamiento de la estructura bajo carga. Respecto a esto, *considere que el marco actúa como una viga en voladizo* empotrada en el suelo. Recuerde de la mecánica de materiales que la *resistencia al cortante* resulta más importante en el diseño de vigas *cortas*, mientras que la *flexión* es más importante si *la viga es larga* (véase la sección 7.6). El método del portal se basa en la hipótesis relativa al cortante como se estableció en el inciso 3 anterior.

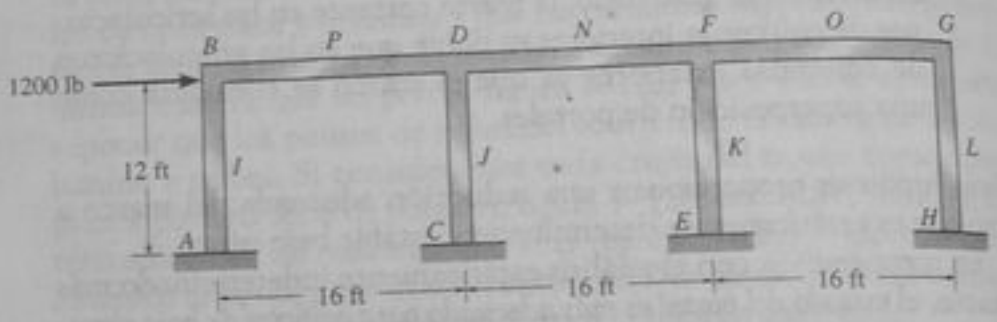
Los siguientes ejemplos ilustran cómo aplicar el método del portal en el análisis del marco de un edificio.



El método del portal puede usarse para efectuar (aproximadamente) un análisis por carga lateral de un marco de un solo nivel.

Ejemplo 7–5

Determine (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco mostrado en la figura 7–13*a*. Use para el análisis el método del portal.



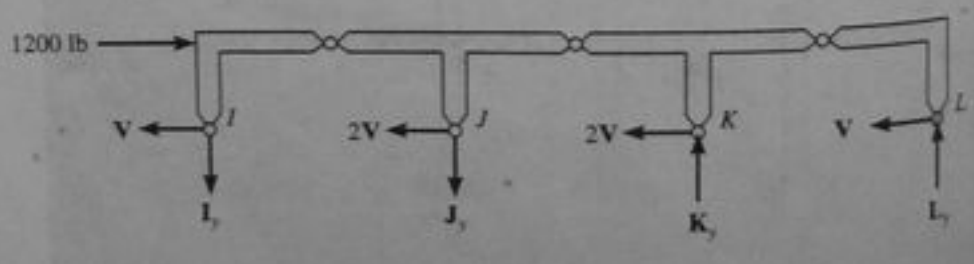
(a)

Fig. 7–13

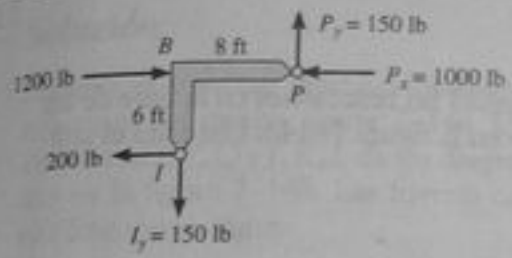
Solución

Aplicando las dos primeras hipótesis del método del portal, insertamos articulaciones en los centros de las trabes y columnas del marco, figura 7–13*a*. Una sección por las articulaciones de las columnas en *I*, *J*, *K* y *L* da el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 7–13*b*. Aquí se aplica la tercera hipótesis respecto a la fuerza cortante en las columnas. Se requiere

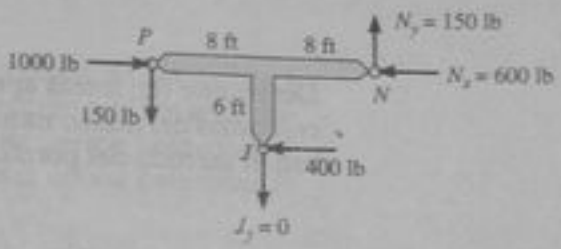
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 1200 - 6V = 0 \qquad V = 200 \text{ lb}$$



(b)

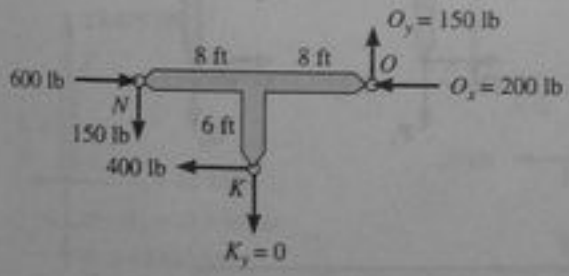


(c)

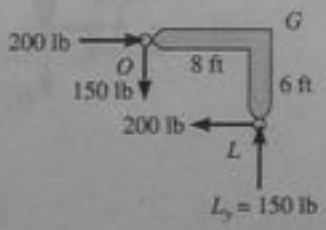


(d)

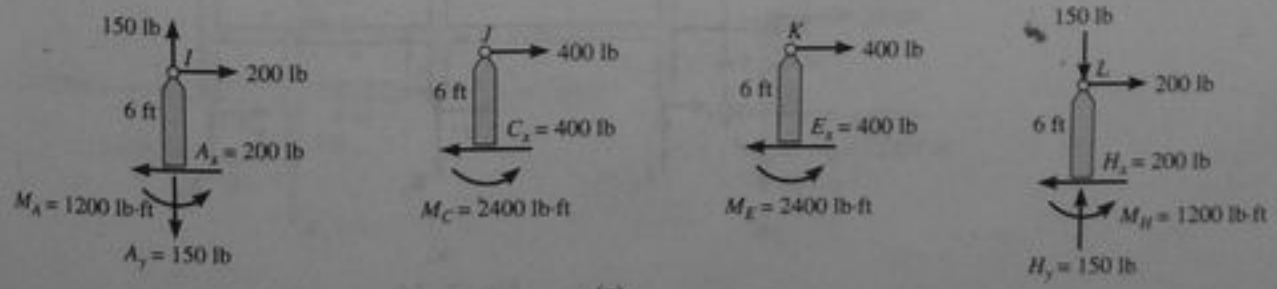
Usando este resultado, podemos proceder a desmembrar el marco en las articulaciones y determinar sus reacciones. *Como regla general, siempre comience este análisis en la esquina en que se aplica la carga horizontal.* El diagrama de cuerpo libre del segmento *IBP* se muestra en la figura 7–13*c*. Las tres componentes de reacción en las articulaciones, I_y, P_x y P_y se determinan aplicando $\Sigma M_P = 0$, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$. El segmento adyacente *PJN* se analiza a continuación, figura 7–13*d*, seguido del segmento *NKO*, figura 7–13*e* y finalmente el segmento *OL*, figura 7–13*f*. Usando esos resultados, los diagramas de cuerpo libre de las columnas con sus reacciones en los soportes se muestran en la figura 7–13*g*.



(e)



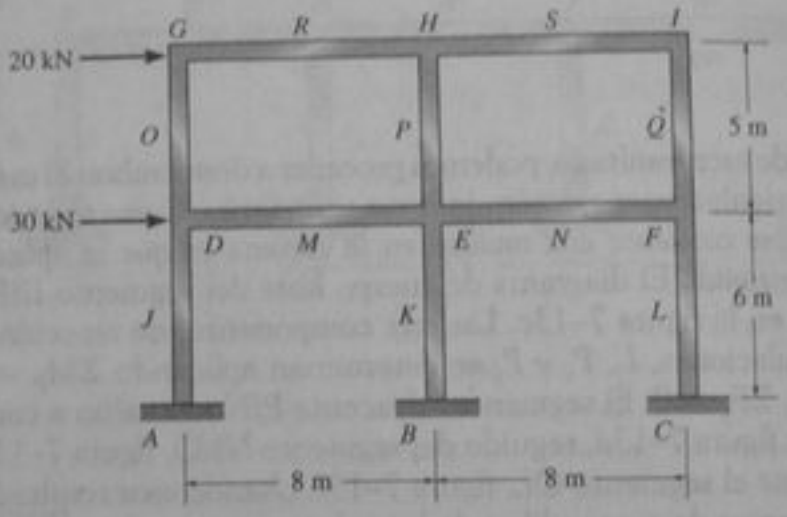
(f)



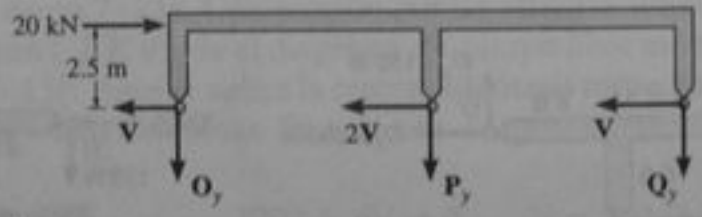
(g)

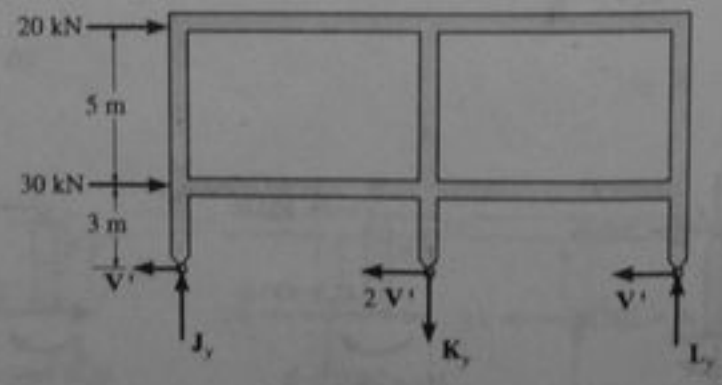
Ejemplo 7–6

Determine (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco mostrado en la figura 7–14*a*. Use para el análisis el método del portal.



(a)





(b)

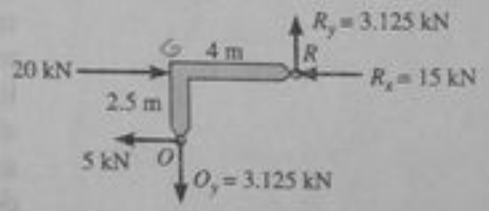
Fig. 7–14

Solución

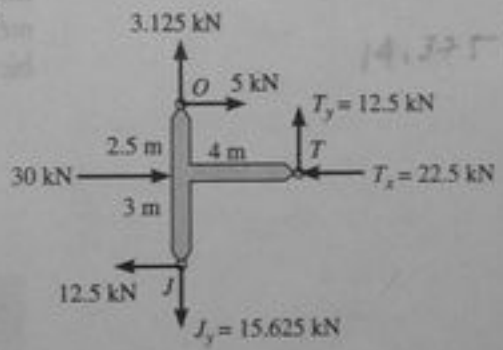
Primero se insertan articulaciones en los *centros* de las trabes y columnas del marco, figura 7–14*a*. Una sección por las articulaciones en *O*, *P*, *Q* y *J*, *K*, *L* da los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 7–14*b*. Las fuerzas cortantes en las columnas se calculan como sigue:

$$\pm\Sigma F_x = 0; \qquad 20 - 4V = 0 \qquad V = 5\ \text{kN}$$
$$\pm\Sigma F_x = 0; \qquad 20 + 30 - 4V' = 0 \qquad V' = 12.5\ \text{kN}$$

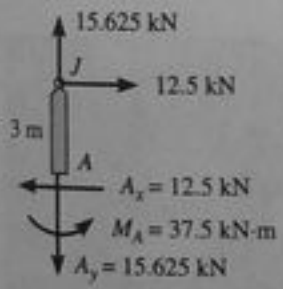
Usando estos resultados, podemos proceder a analizar cada parte del marco. El análisis comienza en el segmento de *esquina* *OGR*, figura 7–14*c*. Las tres incógnitas O_y, R_x y R_y se han calculado usando las ecuaciones de equilibrio. Con estos resultados se analiza ahora el segmento *OJT*, figura 7–14*d*; luego, los segmentos *JA*, figura 7–14*e*; *RPS*, figura 7–14*f*; *PT KN*, figura 7–14*g*; y *KB*, figura 7–14*h*. Complete este ejemplo analizando los segmentos *SIQ*, *QNL* y *LC* y demuestre que $C_x = 12.5$ kN, $C_y = 15.625$ kN y $M_C = 37.5$ kN · m.



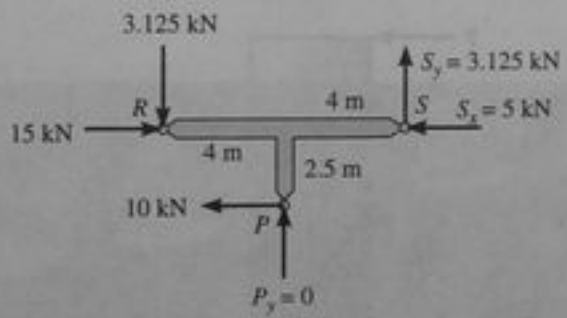
(c)



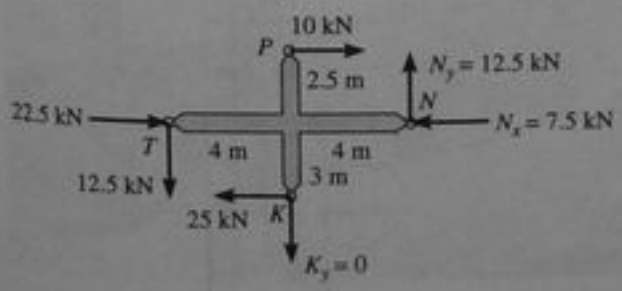
(d)



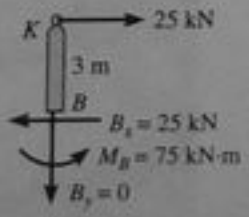
(e)



(f)



(g)



(h)

7.6 Cargas laterales en marcos de edificios: método del voladizo

El método del voladizo supone que el esfuerzo axial en una columna es proporcional a su distancia desde el centroide de todas las áreas de las columnas de un nivel de piso dado. Esta hipótesis se basa en la misma acción que la que tiene lugar en una viga en voladizo sometida a carga transversal. Recuerde de la mecánica de materiales que una carga semejante ocasiona un esfuerzo de flexión en la viga, que varía linealmente desde el eje neutro de la viga, figura 7–15*a*. De manera similar, las cargas laterales sobre un marco tienden a volcar a éste o a ocasionar una rotación del marco respecto a un "eje neutro" situado en un plano horizontal que pasa por las columnas de cada nivel de piso. Para contrarrestar este volteo, las fuerzas axiales (o esfuerzos) en las columnas serán de tensión en un lado del eje neutro y de compresión en el otro lado, figura 7–15*b*. Como en una viga en voladizo, parece razonable suponer que este esfuerzo axial tiene una variación lineal desde el centroide de las áreas de las columnas o eje neutro. El *método del voladizo es por tanto apropiado si el marco es alto y esbelto o bien tiene columnas con áreas de sección transversal diferentes.*

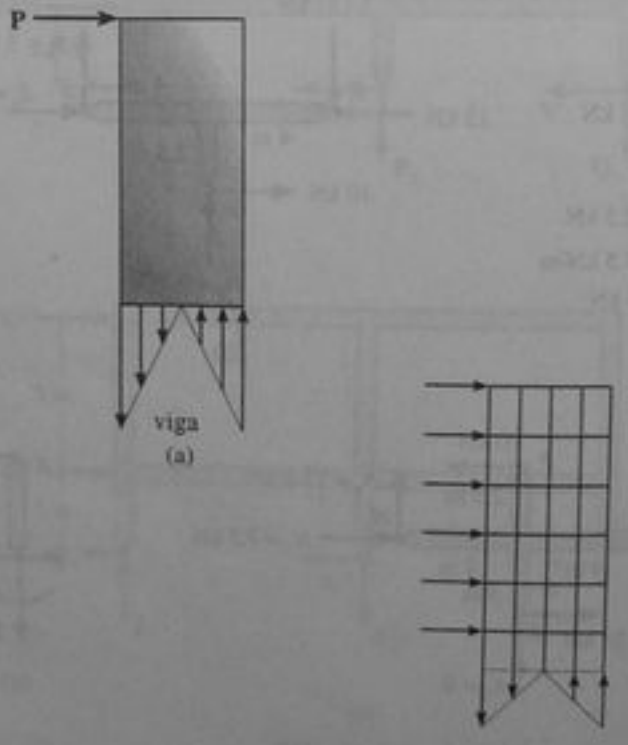


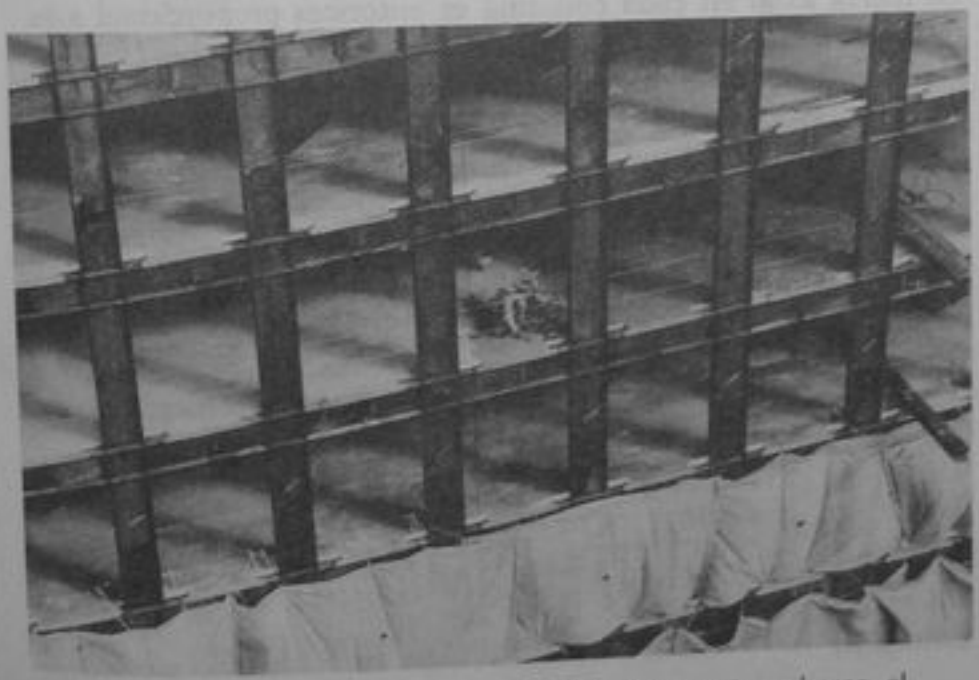
Fig. 7–15

En resumen, al usar el método del voladizo, son aplicables las siguientes hipótesis a un marco empotrado en su base.

1. Se coloca una articulación en el centro de cada trabe ya que éste se supone un punto de momento cero.
2. Se coloca una articulación en el centro de cada columna ya que supone que éste es un punto de momento cero.
3. El *esfuerzo* axial en una columna es proporcional a su distancia desde el centroide de las áreas de las secciones transversales de las columnas en un nivel de piso dado. Como el esfuerzo es igual a fuerza por área, entonces en el caso especial de *columnas con áreas transversales iguales*, la *fuerza* en una columna es también proporcional a su distancia desde el centroide de las áreas de las columnas.

Estas tres hipótesis reducen el marco a uno que es estable y estáticamente determinado.

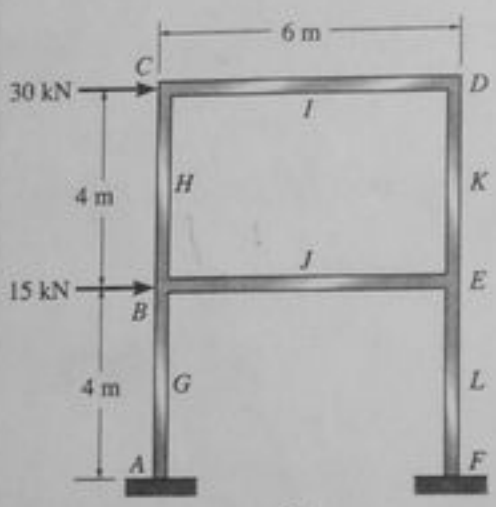
Los siguientes ejemplos ilustran cómo aplicar el método del voladizo al análisis de un marco de edificio.



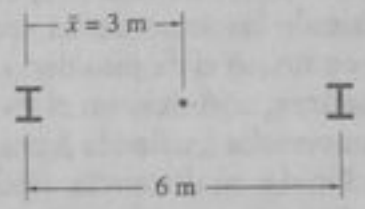
La estructura de este edificio tiene conexiones rígidas y sin embargo, el proyectista empalmó las trabes en sus puntos medios. Un análisis por carga lateral puede efectuarse (aproximadamente) usando el método del voladizo. *(Peter Vandermark/Stock, Boston.)*

Ejemplo 7–7

Determine (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco mostrado en la figura 7–16*a*. Suponga que las columnas tienen áreas transversales iguales. Use para el análisis el método del voladizo.



(a)



(b)

Solución

Primero se insertan articulaciones en los puntos medios de las columnas y trabes. Las posiciones de esos puntos se indican con las letras G a la L en la figura 7–16*a*. El centroide de las áreas transversales puede determinarse por inspección, figura 7–16*b*, o analíticamente como sigue:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} = \frac{0(A) + 6(A)}{A + A} = 3 \text{ m}$$

La fuerza axial en cada columna es entonces proporcional a su distancia a este punto. Una sección por las articulaciones H y K en el piso superior da el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 7–16c. Note que la columna a la izquierda del centroide debe estar a tensión y la situada a la derecha a compresión. Esto es necesario para contrarrestar el momento causado por la fuerza de 30 kN. Sumando momentos respecto al eje neutro, tenemos

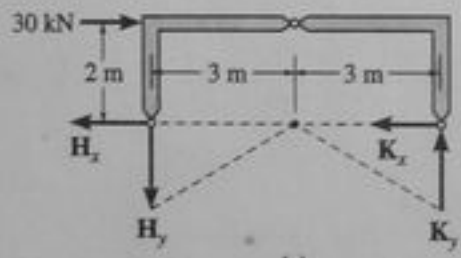
$$\curvearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad 30(2) - 3H_y - 3K_y = 0$$

Las incógnitas pueden relacionarse por triángulos semejantes, figura 7–16c, esto es,

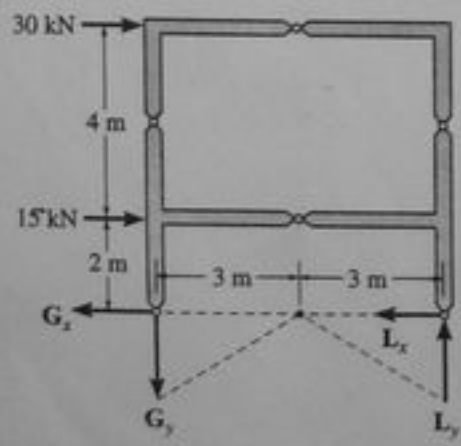
$$\frac{H_y}{3} = \frac{K_y}{3} \quad \text{o} \quad H_y = K_y$$

Entonces,

$$H_y = K_y = 10 \text{ kN}$$



(c)



(d)

Fig. 7–16

De manera similar, usando una sección del marco por las articulaciones en G y L, figura 7–16*d*, tenemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M = 0; \qquad 30(6) + 15(2) - 3G_y - 3L_y = 0$$

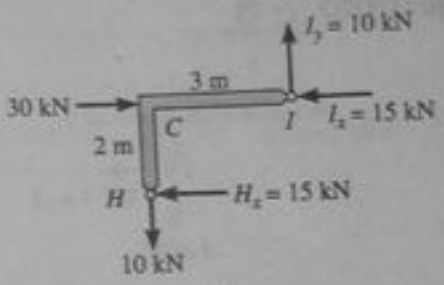
Como

$$\frac{G_y}{3} = \frac{L_y}{3} \quad \text{o} \quad G_y = L_y$$

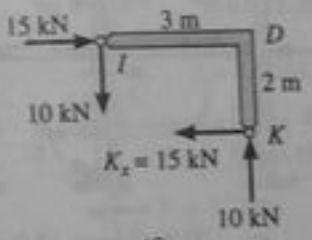
Entonces,

$$G_y = L_y = 35\ \text{kN}$$

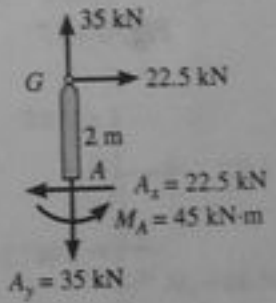
Cada parte del marco puede ahora analizarse usando los resultados anteriores. Igual que en los ejemplos 7–5 y 7–6, comenzamos en la esquina superior donde se aplica la carga, esto es, en el segmento *HCI*, figura 7–16*a*. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, $\Sigma M_I = 0$, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, se obtienen los resultados para H_x, I_x e I_y mostrados sobre el diagrama de cuerpo libre en la figura 7–16*e*. Usando esos resultados, se analizan los segmentos *IDK*, figura 7–16*f*; *HJG*, figura 7–16*g*; *KJL*, figura 7–16*h*; y finalmente las porciones inferiores de las columnas, figura 7–16*i*.

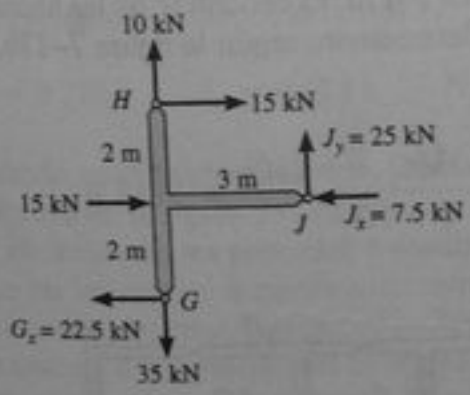


(e)

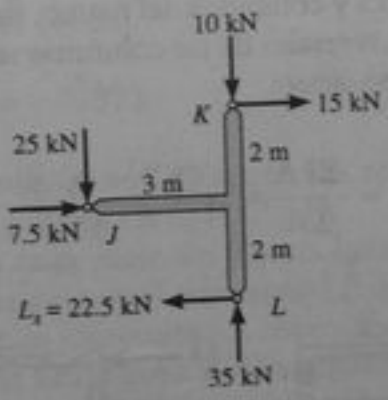


(f)

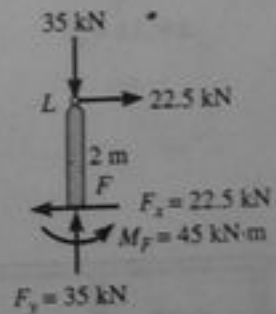




(g)



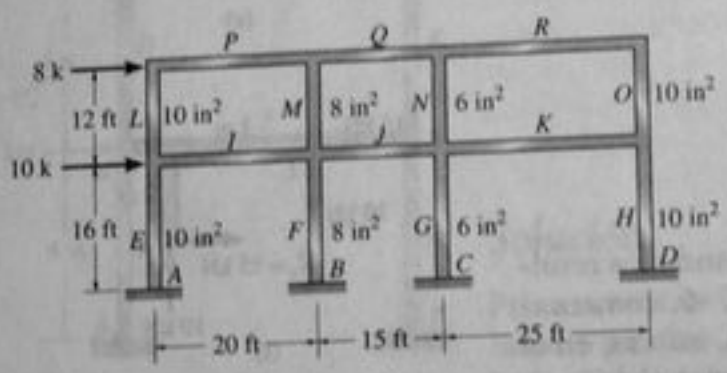
(h)



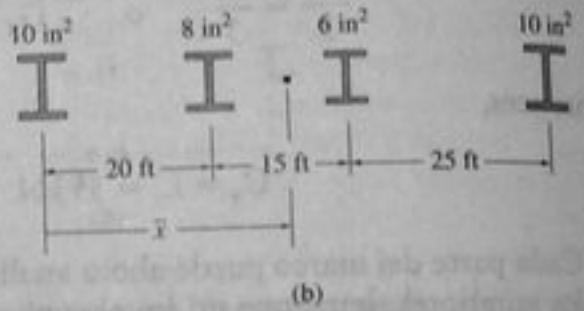
(i)

Ejemplo 7–8

Muestre cómo determinar (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco mostrado en la figura 7–17*a*. Suponiendo que las columnas tienen las áreas transversales mostradas en la figura 7–17*b*, muestre cómo usar en el análisis el método del voladizo.



(a)



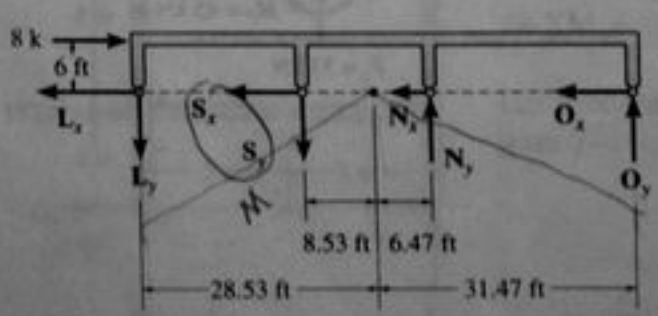
(b)

Fig. 7–17

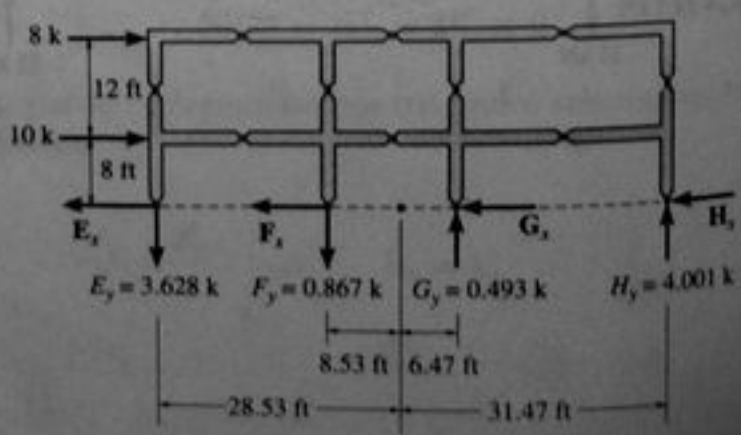
Solución

Se supone primero que existen articulaciones en los centros de las trabes y columnas del marco, figura 7–17*a*. El centroide de las áreas transversales de las columnas se determinan, según la figura 7–17*b*, como sigue:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} = \frac{0(10) + 20(8) + 35(6) + 60(10)}{10 + 8 + 6 + 10} = 28.53 \text{ ft}$$



(c)



(d)

En este caso, las columnas tienen áreas transversales diferentes; el *esfuerzo axial* en una columna es proporcional a su distancia al eje neutro, localizado en $\bar{x} = 28.53$ ft. Una sección por las articulaciones en *L*, *S*, *N*, *O* da el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 7–17*c*. Note que las columnas a la izquierda del centroide están sometidas a tensión y las situadas a la derecha están sometidas a compresión. ¿Por qué? Sumando momentos respecto al eje neutro, tenemos

$$\zeta+\Sigma M = 0; \quad 8(6) - L_y(28.53) - S_y(8.53) - N_y(6.47) - O_y(31.47) = 0 \quad (1)$$

Como cualquier esfuerzo σ en las columnas es proporcional a su distancia al eje neutro, podemos relacionar los esfuerzos por medio de triángulos semejantes. Expresando las relaciones en términos de la fuerza L_y, tenemos

$$\sigma_S = \frac{8.53}{28.53}\sigma_L; \quad \frac{S_y}{(8)} = \frac{8.53}{28.53}\frac{L_y}{(10)} \quad S_y = 0.239L_y \quad (2)$$

$$\sigma_N = \frac{6.47}{28.53}\sigma_L; \quad \frac{N_y}{(6)} = \frac{6.47}{28.53}\frac{L_y}{(10)} \quad N_y = 0.136L_y \quad (3)$$

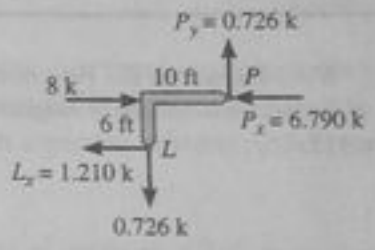
$$\sigma_O = \frac{31.47}{28.53}\sigma_L; \quad \frac{O_y}{(10)} = \frac{31.47}{28.53}\frac{L_y}{(10)} \quad O_y = 1.103L_y \quad (4)$$

La resolución de las ecuaciones (1) a la (4) da

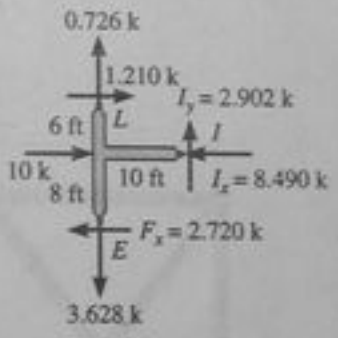
$$L_y = 0.726 \text{ k} \quad S_y = 0.173 \text{ k} \quad N_y = 0.0987 \text{ k} \quad O_y = 0.800 \text{ k}$$

Usando este mismo método, demuestre que se obtienen los resultados en la figura 7–17*d* para las columnas en *E*, *F*, *G* y *H*.

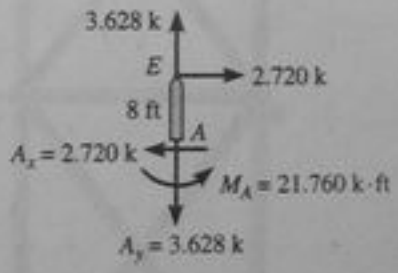
Podemos ahora proceder a analizar cada parte del marco. Igual que en los ejemplos previos, comenzamos con el segmento *LP* de la esquina superior, figura 7–17*e*. Usando los resultados obtenidos, se calcula a continuación el segmento *LEI*, figura 7–17*f*; seguido por el segmento *EA*, figura 7–17*g*. Se puede continuar el análisis de los otros segmentos según la secuencia *PQS*, *SJFI*, *FB*, etc.



(e)



(f)



(g)

BIBLIOGRAFÍA

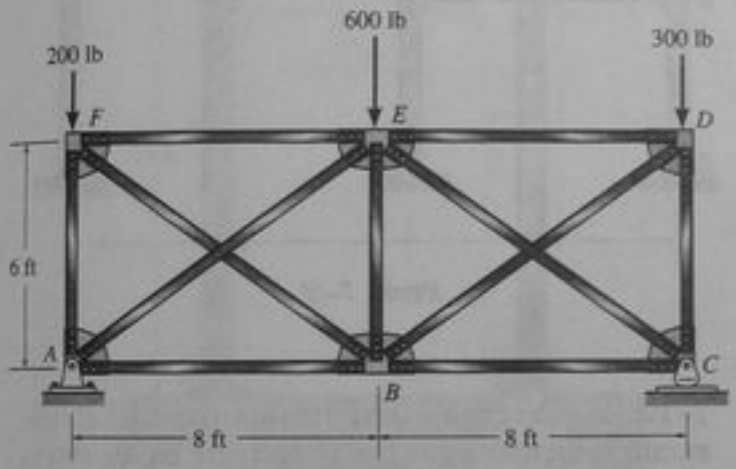
Smith, A., "Wind Stresses in the Frames of Office Buildings," *Journal of the Western Society of Engineers*, Vol. 20, No. 4, 1915, p. 341.

Rascacielos en Chicago, Illinois.

PROBLEMAS

7–1. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar tanto tensión como compresión.

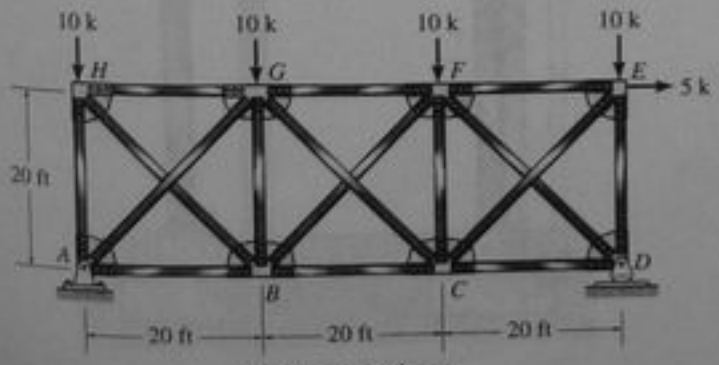
7–2. Resuelva el problema 7–1 suponiendo que las diagonales no pueden soportar fuerzas de compresión.



Probs. 7–1/7–2

7–3. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar tanto tensión como compresión.

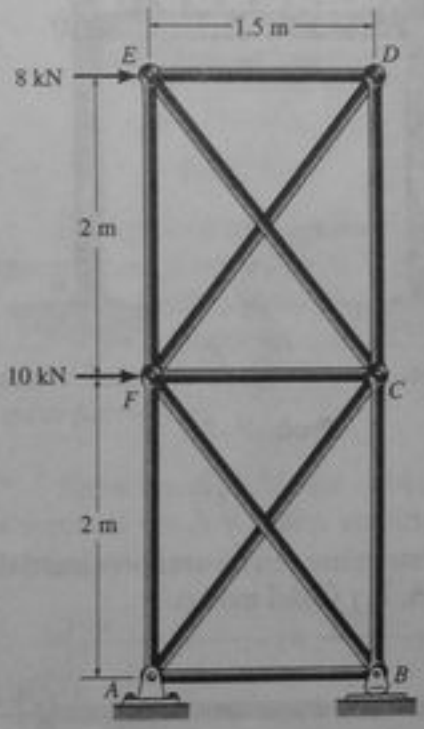
***7–4.** Resuelva el problema 7–3 suponiendo que las diagonales no pueden soportar fuerzas de compresión.



Probs. 7–3/7–4

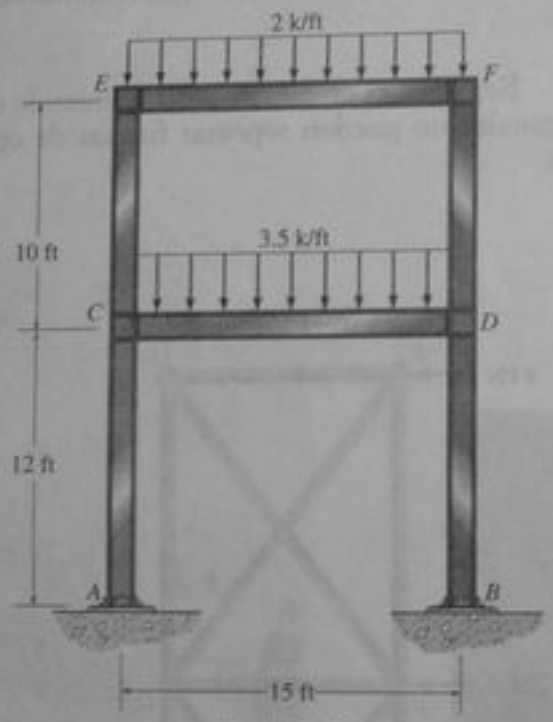
7–5. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar tanto tensión como compresión.

7–6. Resuelva el problema 7–5 suponiendo que las diagonales no pueden soportar fuerzas de compresión.



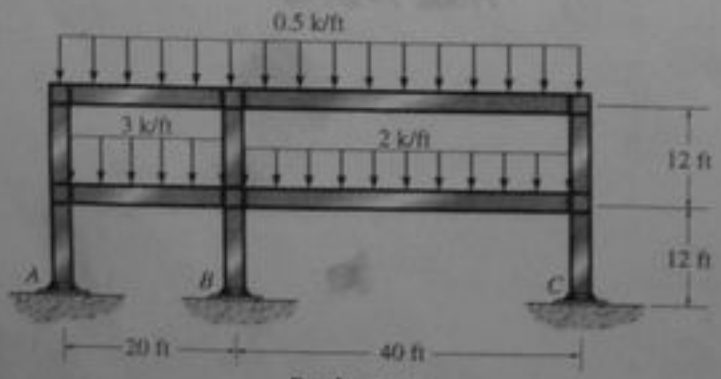
Probs. 7–5/7–6

7–7. Determine (en forma aproximada) las reacciones en *A* y *B* debido a la carga vertical uniforme que actúa sobre el marco.



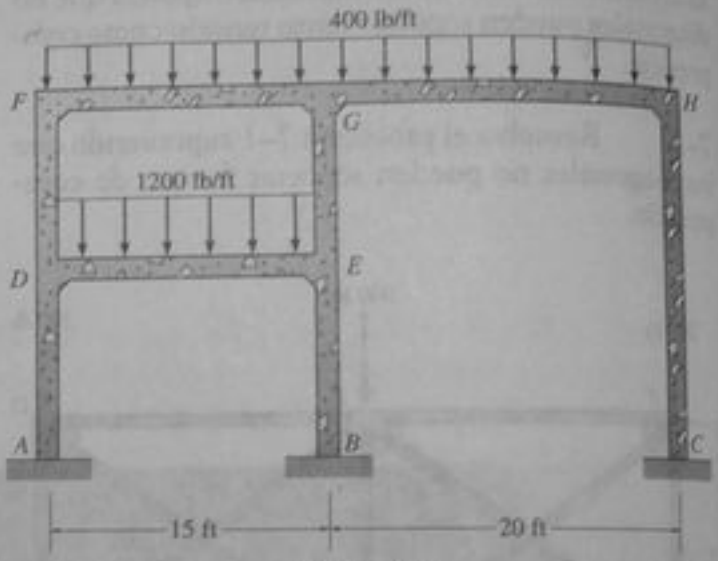
Prob. 7–7

***7–8.** Determine (en forma aproximada) las reacciones en *A*, *B* y *C* del marco.



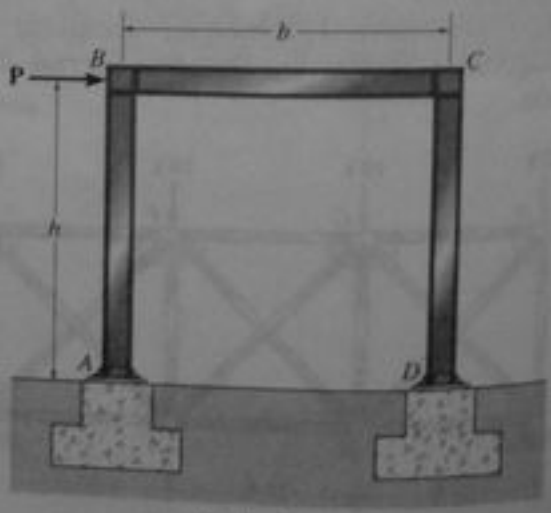
Prob. 7–8

7–9. Determine (en forma aproximada) las reacciones en *A*, *B* y *C* del marco.



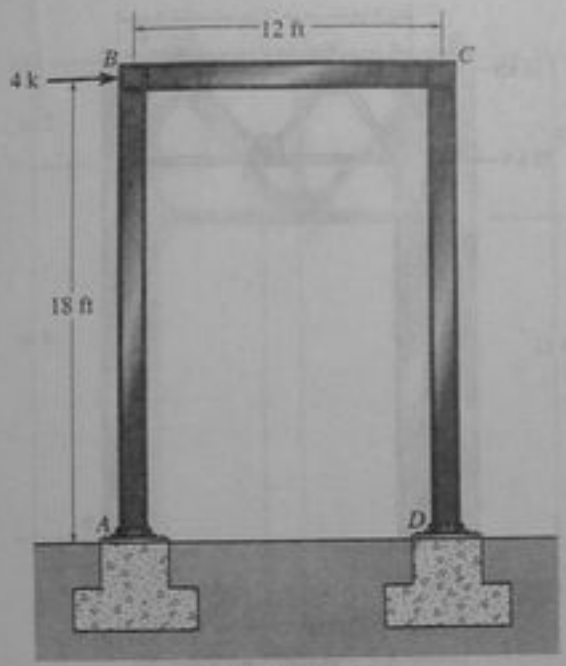
Prob. 7–9

7–10. Determine (en forma aproximada) el momento flexionante y la fuerza cortante en los extremos de cada miembro del marco. Suponga que los soportes en *A* y *D* están parcialmente empotrados, de manera que un punto de inflexión se encuentra a *h*/3 de la base de cada columna.



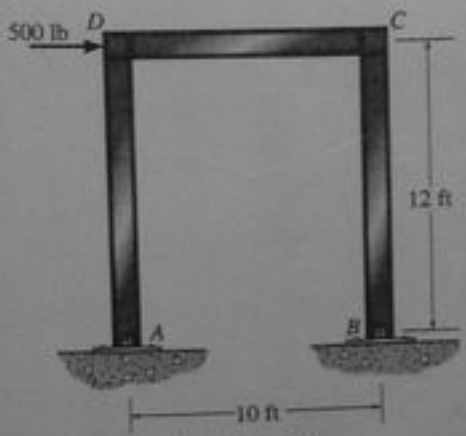
Prob. 7–10

7–11. Determine (en forma aproximada) el momento flexionante y la fuerza cortante en los extremos de cada miembro del marco. Suponga que los soportes en *A* y *D* están (a) articulados, (b) empotrados y (c) parcialmente empotrados de manera que el punto de inflexión de las columnas esté localizado a $h/3 = 6$ ft desde abajo en *A* y *D*.



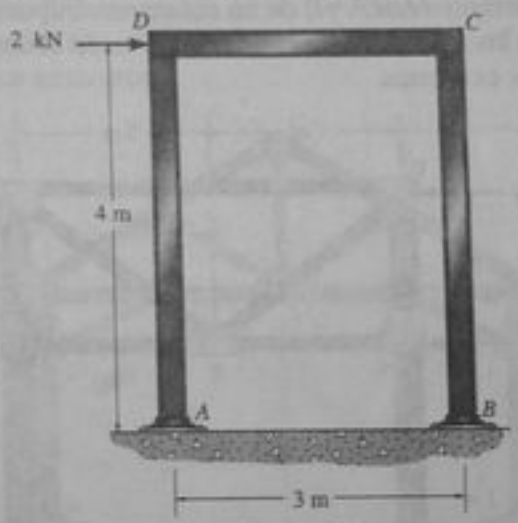
Prob. 7–11

***7–12.** Determine (en forma aproximada) el momento flexionante en los nudos *D* y *C*. Suponga que los soportes en *A* y *B* son pasadores.



Prob. 7–12

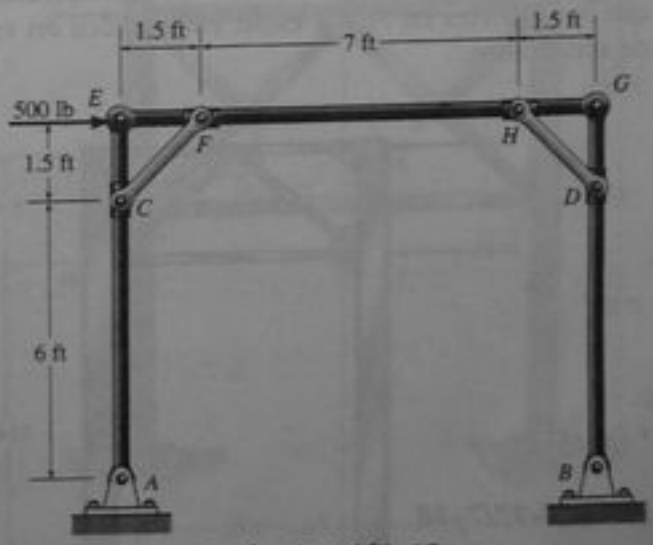
7–13. Determine (en forma aproximada) el momento flexionante en los nudos *C* y *D*. Suponga que los soportes en *A* y *B* están empotrados.



Prob. 7–13

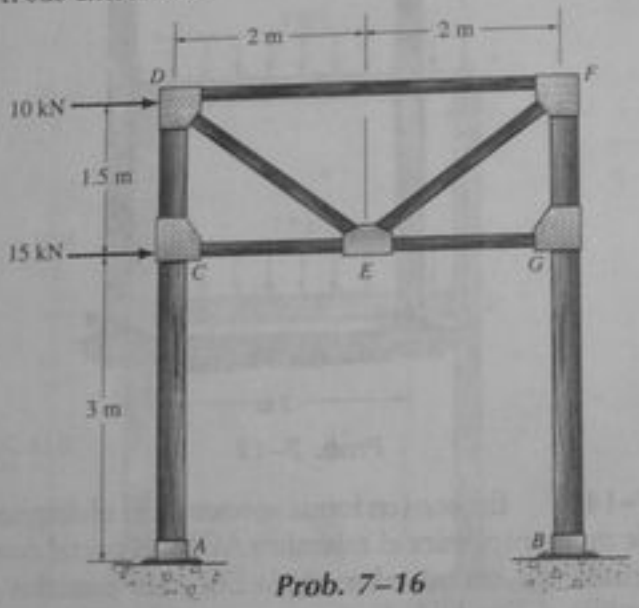
7–14. Esboce (en forma aproximada) el diagrama de momentos para el miembro *ACE* del portal construido con un miembro *rígido* *EG* y los puntales de rodilla *CF* y *DH*. Suponga que todos los puntos de conexión son pasadores. Determine también la fuerza en el puntal *CF*.

7–15. Resuelva el problema 7–14 considerando que los soportes en *A* y *B* son empotramientos en vez de articulaciones.



Probs. 7–14/7–15

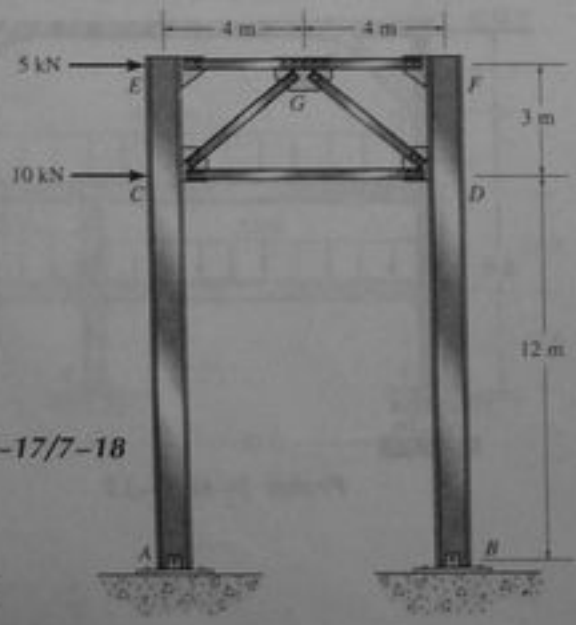
*7–16. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura en el marco mostrado. Calcule también las reacciones en los empotramientos A y B de las columnas. Suponga que todos los miembros de la armadura están articulados en sus extremos.



Prob. 7–16

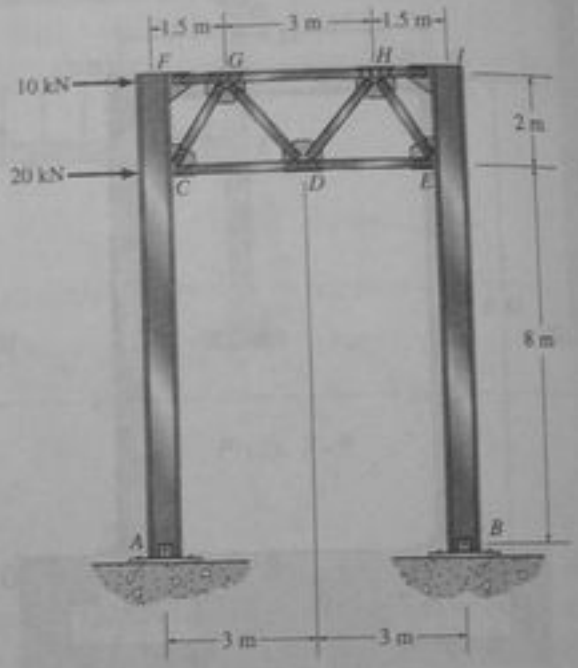
7–17. Esboce el diagrama de momentos para la columna ACE del marco. Suponga que todos los puntos de conexión son pasadores. Determine también la fuerza en los miembros EG, CG y CD de la armadura.

7–18. Resuelva el problema 7–17 considerando que los soportes en A y B están empotrados en vez de articulados.



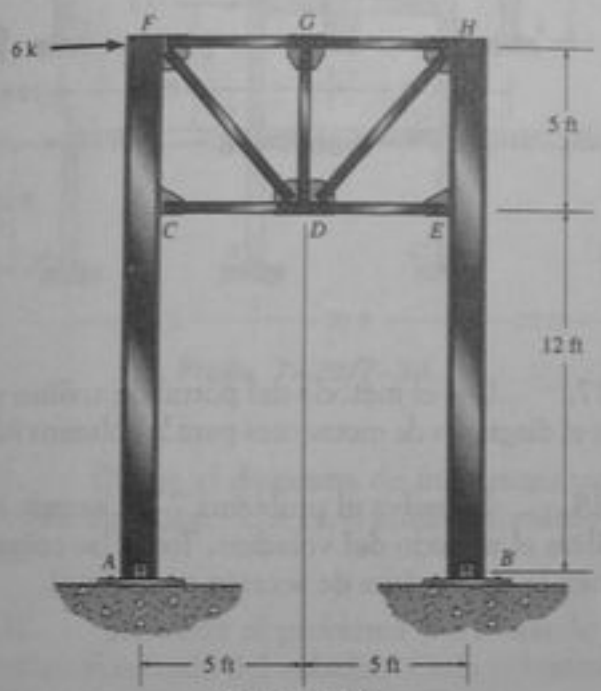
Probs. 7–17/7–18

7–19. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura del marco mostrado. Determine también las reacciones en los soportes A y B de las columnas. Suponga que todos los miembros de la armadura y las columnas están articulados en sus extremos.



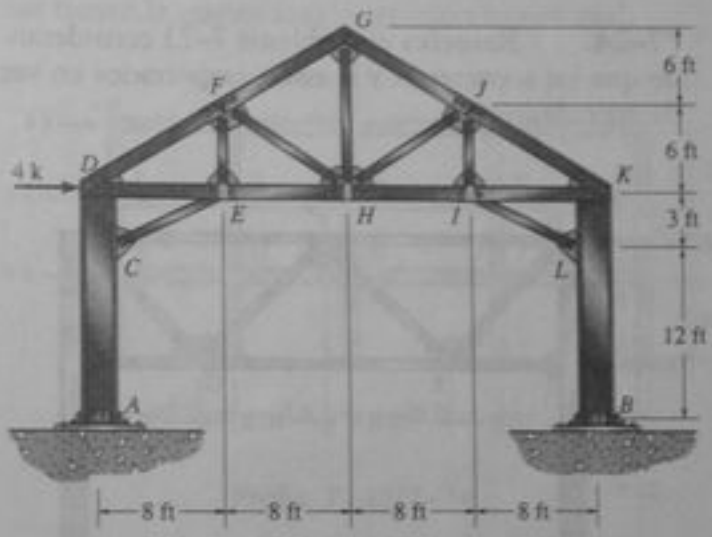
Prob. 7–19

*7–20. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura del marco mostrado. Determine también las reacciones en los soportes A y B de las columnas. Suponga que todos los miembros y las columnas están articulados en sus extremos.



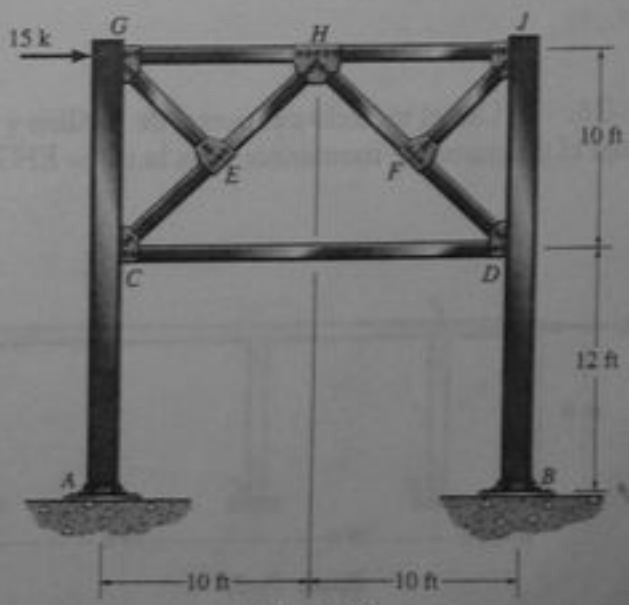
Prob. 7–20

7–21. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura del marco mostrado. Calcule también las reacciones en los soportes A y B empotrados de las columnas. Suponga que todos los miembros de la armadura están articulados en sus extremos.



Prob. 7–21

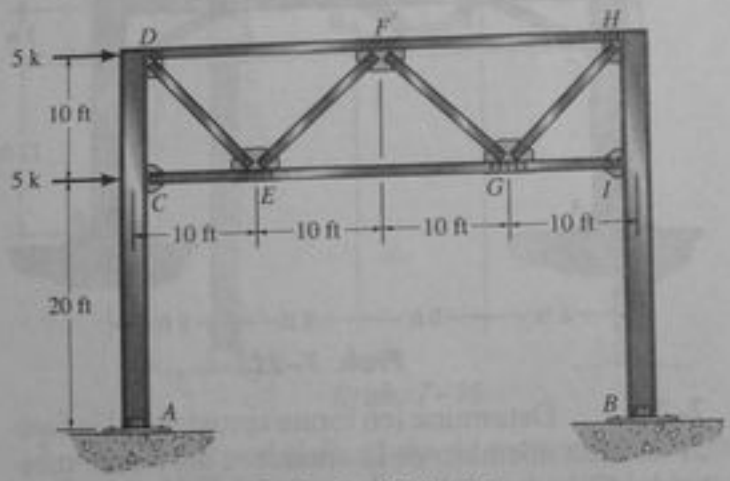
7–22. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura del marco mostrado. Calcule también las reacciones en los soportes empotrados A y B de las columnas. Suponga que todos los miembros de la armadura están articulados en sus extremos.



Prob. 7–22

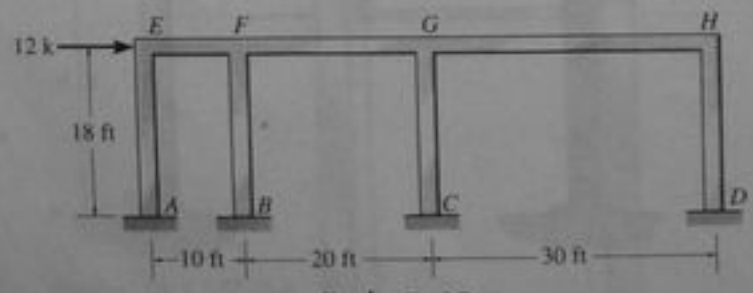
7–23. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada miembro de la armadura Warren del marco mostrado. Determine también las reacciones en los soportes A y B de las columnas. Suponga que todos los miembros de la armadura y las columnas están articulados en sus extremos.

***7–24.** Resuelva el problema 7–23 considerando que los soportes A y B están empotrados en vez de articulados.



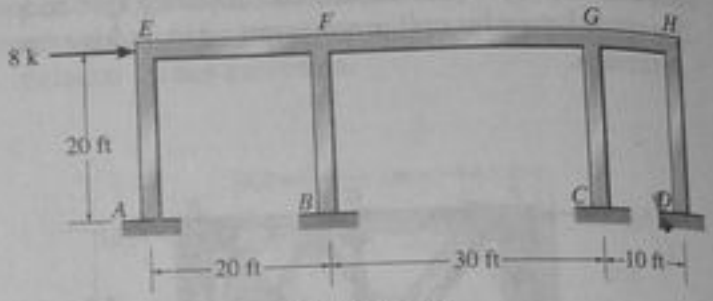
Probs. 7–23/7–24

7–25. Use el método del portal de análisis y dibuje el diagrama de momentos para la trabe $EFGH$.



Prob. 7–25

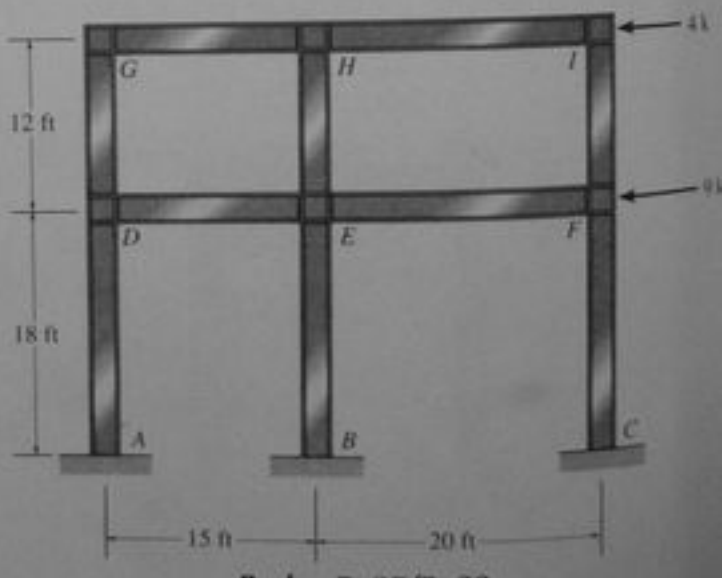
7–26. Use el método del portal de análisis y dibuje el diagrama de momentos para la trabe $EFGH$.



Prob. 7–26

7–27. Use el método del portal de análisis y dibuje el diagrama de momentos para la columna ADG.

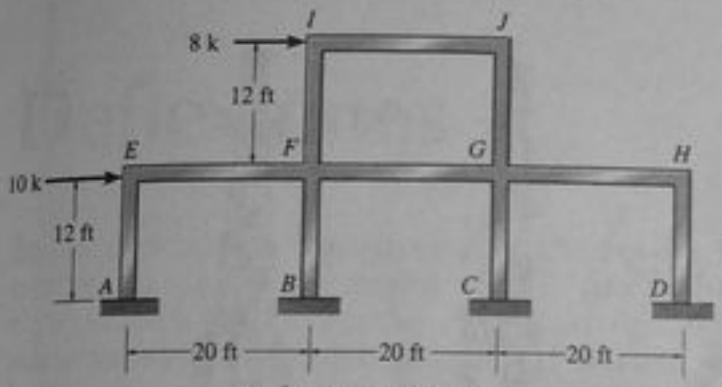
7–28. Resuelva el problema 7–27 usando en el análisis el método del voladizo. Todas las columnas tienen la misma área de sección transversal.



Probs. 7–27/7–28

7–29. Dibuje el diagrama de momentos para la trabe *EFGH*. Use para el análisis el método del portal.

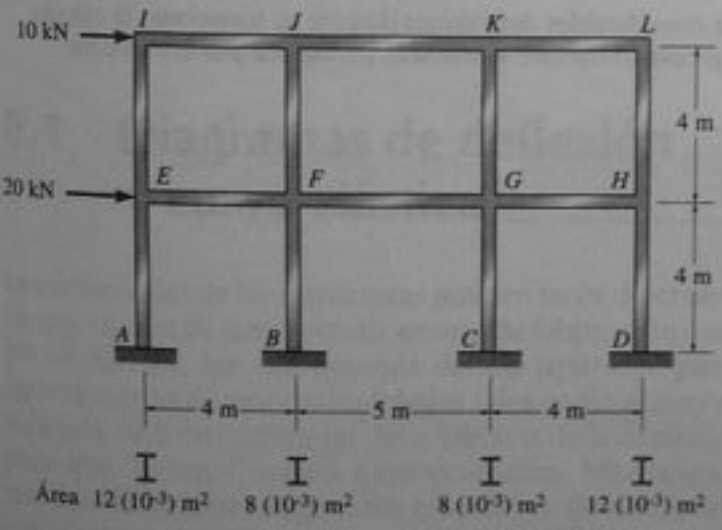
7–30. Resuelva el problema 7–29 usando en el análisis el método del voladizo. Cada columna tiene la misma área de sección transversal.



Probs. 7–29/7–30

7–31. Dibuje el diagrama de momentos para la trabe *IJKL* del marco. Use en el análisis el método del portal.

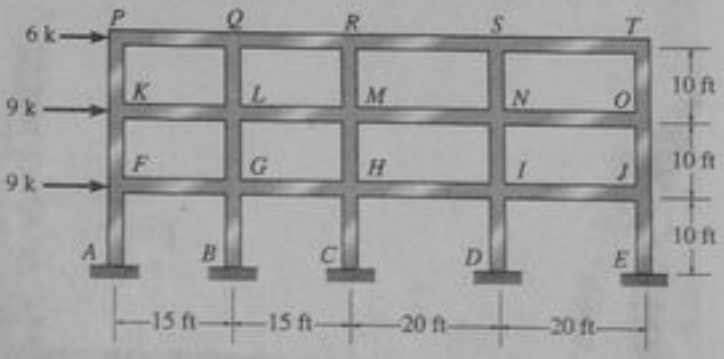
***7–32.** Resuelva el problema 7–31 usando para el análisis el método del voladizo. Cada columna tiene el área de sección transversal indicada.



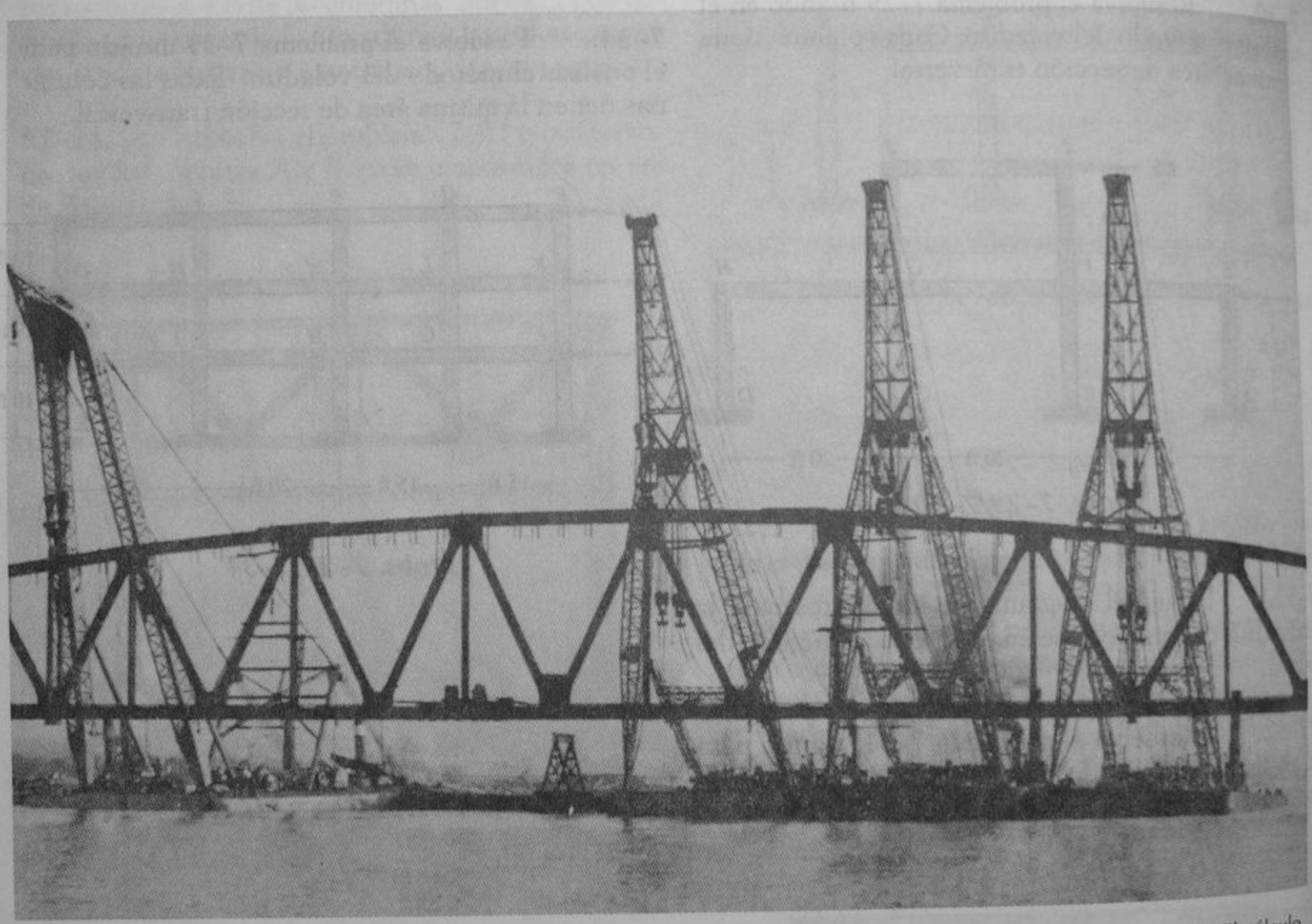
Probs. 7–31/7–32

7–33. Dibuje el diagrama de momentos para la trabe *PQRST* y la columna *BGLQ* del marco. Use en el análisis el método del portal.

7–34. Resuelva el problema 7–33 usando para el análisis el método del voladizo. Todas las columnas tienen la misma área de sección transversal.



Probs. 7–33/7–34



Una estructura como esta armadura puede quedar sometida a considerables deflexiones durante su transporte. El cálculo de deflexiones debe efectuarse para garantizar un soporte apropiado durante el tránsito. (*Fotografía por cortesía del American Institute of Steel Construction.*)

8

Deflexiones

En este capítulo determinaremos las deflexiones elásticas de una estructura usando métodos geométricos y de energía. Se verá también el método de la doble integración. Los métodos geométricos que consideraremos incluyen los teoremas de área-momento y el método de la viga conjugada; los de energía se basan en el trabajo virtual y en el teorema de Castigliano. Cada uno de esos métodos tiene ventajas y desventajas particulares que se analizarán cuando sean presentados.

8.1 Diagramas de deflexión y curva elástica

Las deflexiones de las estructuras pueden tener diversas fuentes como cargas, efectos de temperatura, errores de fabricación o asentamientos. En el diseño, las deflexiones deben limitarse para impedir el agrietamiento de materiales frágiles tales como el concreto o el yeso. Además, una estructura no debe vibrar o deflexionarse severamente para que "parezca" segura a sus ocupantes. Más importante aún, es que las deflexiones en puntos específicos de una estructura deben calcularse si se va a analizar una estructura estáticamente indeterminada.

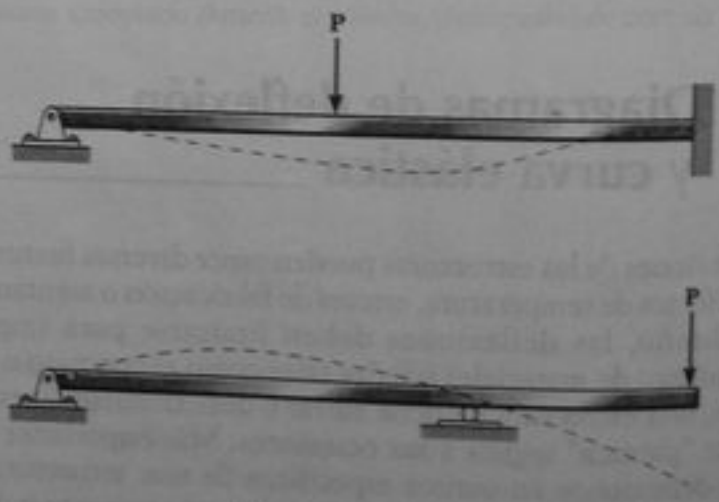
8

El análisis de deflexiones por considerarse en este texto es aplicable sólo a estructuras hechas de un material que tenga respuesta *elástico-lineal*. En consecuencia, una estructura sometida a cargas retornará a su posición original no deformada después de que se retiren las cargas. En la mayor parte de los casos la deflexión de una estructura es causada por cargas internas como la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante. En *vigas* y *marcos* las deflexiones mayores son causadas por *flexión interna* mientras que las deflexiones de una *armadura* son causadas por *fuerzas axiales internas*.

Antes de calcular la pendiente o el desplazamiento de un punto de una viga o marco, es conveniente esbozar la forma de la estructura cargada para visualizar los resultados calculados y de esa manera verificarlos parcialmente. Este diagrama de deflexión representa la *curva elástica* de los puntos que representan los centroides de las secciones transversales a lo largo de cada uno de los miembros. En un gran número de problemas, la curva elástica puede esbozarse sin mucha dificultad. Sin embargo, al hacerlo es necesario conocer las restricciones respecto a pendiente o desplazamiento que se presentan en un soporte o conexión. Con referencia a la tabla 8–1, los soportes que *resisten una fuerza*, como en el caso de un pasador, *restringen los desplazamientos*; aquellos que *resisten un momento*, como un empotramiento, *restringen las rotaciones*. Nótese también que los miembros de una estructura que están conectados rígidamente (4) ocasionan que el nudo haga girar a los miembros la misma cantidad, θ, cuando la estructura esta cargada. Por otra parte, si se usa una conexión de pasador en el nudo, los miembros tendrán cada uno una *pendiente diferente* o rotación diferente en el pasador, ya que un pasador no puede soportar un momento (5). Usando estas restricciones, se muestran en la figura 8–1 ejemplos típicos de vigas y marcos deflexionados, esbozados a una escala muy exagerada.

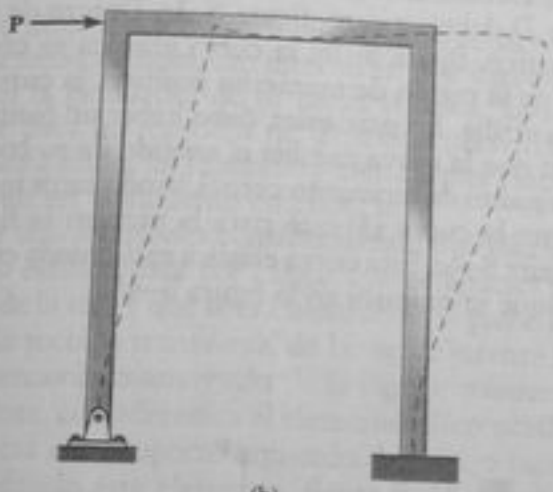
Tabla 8–1

(1)	$\Delta = 0$ rodillo o balancín
(2)	$\Delta = 0$ pasador
(3)	$\Delta = 0$ $\theta = 0$ empotramiento
(4)	nudo rígido
(5)	nudo articulado

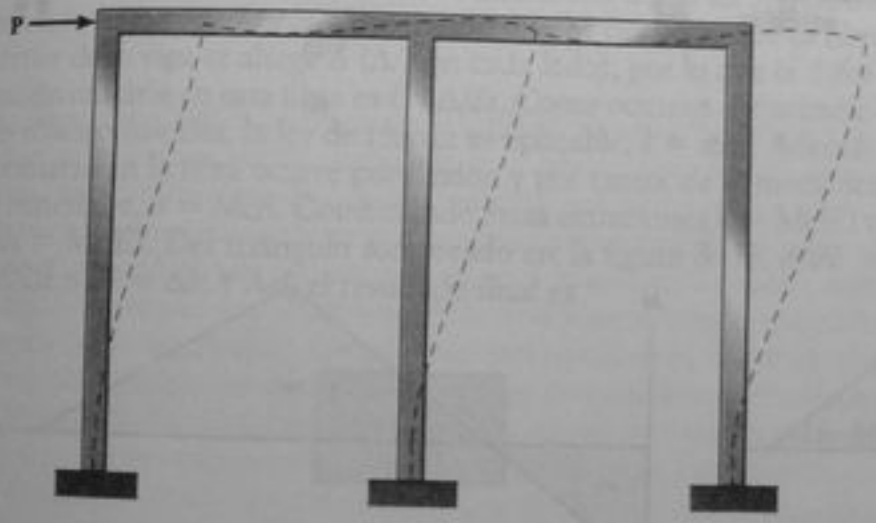


(a)

Fig. 8–1



(b)



(c)

momento positivo, concavidad hacia arriba

(a)

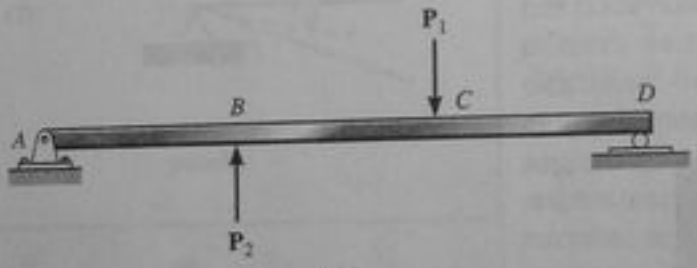
momento negativo, concavidad hacia abajo

(b)

Fig. 8–2

Si resulta difícil esbozar la curva elástica, se sugiere dibujar primero el diagrama de momentos para la viga o marco. De acuerdo con nuestra convención de momentos establecida en el capítulo 4, un *momento positivo* tiende a flexionar una viga o miembro horizontal con la *concavidad hacia arriba*, figura 8–2*a*. Igualmente, un *momento negativo* tiende a flexionar la viga o miembro con la *concavidad hacia abajo*, figura 8–2*b*. Por lo tanto, si se conoce el diagrama de momentos, será fácil trazar la curva elástica. Por ejemplo, considere la viga

en la figura 8–3*a* con su diagrama de momentos asociado mostrado en la figura 8–3*b*. Debido al soporte de pasador y rodillo, el desplazamiento en *A* y *D* debe ser cero, figura 8–3*c*. Dentro de la región de momento negativo, figura 8–3*b*, la curva elástica es cóncava hacia abajo; dentro de la región de momento positivo, la curva elástica es cóncava hacia arriba. En particular, debe haber un *punto de inflexión* en el punto en que la curva cambia el sentido de su concavidad, ya que éste es un punto de momento cero. Usando estos mismos principios, note cómo la curva elástica para la viga en la figura 8–4*a* se dibujó en la figura 8–4*c*. Esta curva elástica está basada en su diagrama de momentos que se muestra en la figura 8–4*b*.



viga

(a)

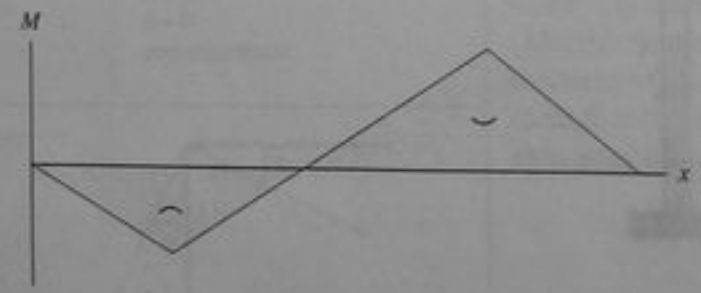
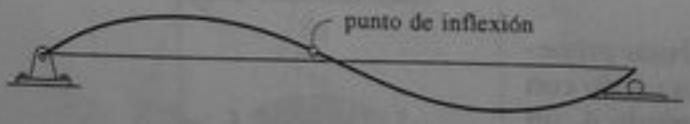


diagrama de momento

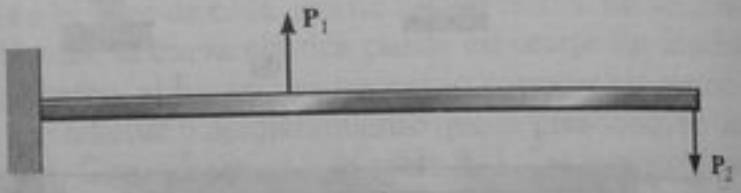
(b)



curva elástica

(c)

Fig. 8–3



viga

(a)

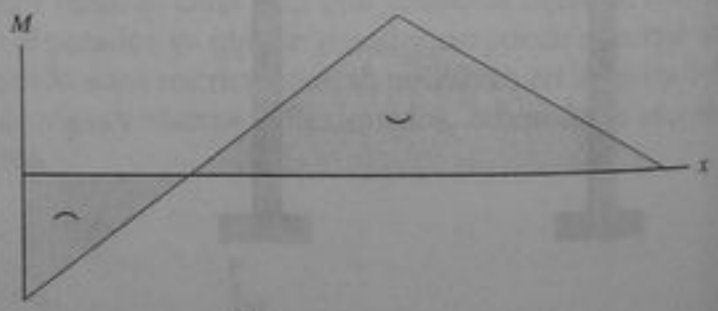
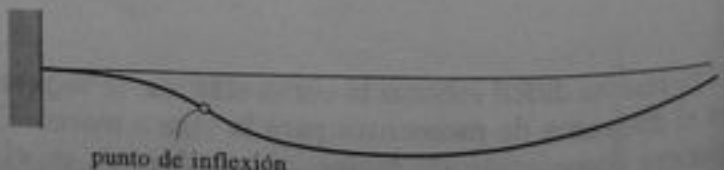


diagrama de momento

(b)



curva elástica

(c)

Fig. 8–4

8.2 Teoría de la viga elástica

En esta sección desarrollaremos dos importantes ecuaciones diferenciales que relacionan el momento interno en una viga con el desplazamiento y con la pendiente de su curva elástica. Esas ecuaciones forman la base para los métodos de deflexión presentados en este capítulo y, por esta razón, las hipótesis y limitaciones empleadas en su derivación deben ser claramente entendidas.

Para obtener esas relaciones consideraremos una *viga* inicialmente recta, *deformada elásticamente* por cargas que se aplican perpendicularmente al eje de la viga y que se encuentran en el plano longitudinal de simetría de la sección transversal de la viga. Durante la deflexión de la viga, *las secciones transversales de la viga permanecerán planas.** Con esto en mente, consideremos el elemento diferencial dx localizado a una distancia x del soporte izquierdo de la viga mostrada en la figura 8–5*a*. Aislando este elemento, figura 8–5*b*, se ve que el momento interno M de la viga deforma al elemento en forma tal que las tangentes a cada lado del elemento se intersecan según un ángulo $d\theta$. Podemos relacionar M con $d\theta$ notando que M ocasiona que la fibra inferior de la viga se alarge Δ ($\Delta/2$ en cada lado), por lo que la deformación unitaria en esta fibra es $\epsilon = \Delta/dx$. Como ocurren deformaciones elástico-lineales, la ley de Hooke es aplicable, $\epsilon = \sigma/E$. Además, el esfuerzo en la fibra ocurre por flexión y por tanto, de la mecánica de materiales, $\sigma = Mc/I$. Combinando estas ecuaciones $\epsilon = Mc/EI$ o $\Delta/dx = Mc/EI$. Del triángulo sombreado en la figura 8–5*b*, $d\Delta/2 = (d\Delta/2)c$ o $d\theta = \Delta/c$.† Así, el resultado final es

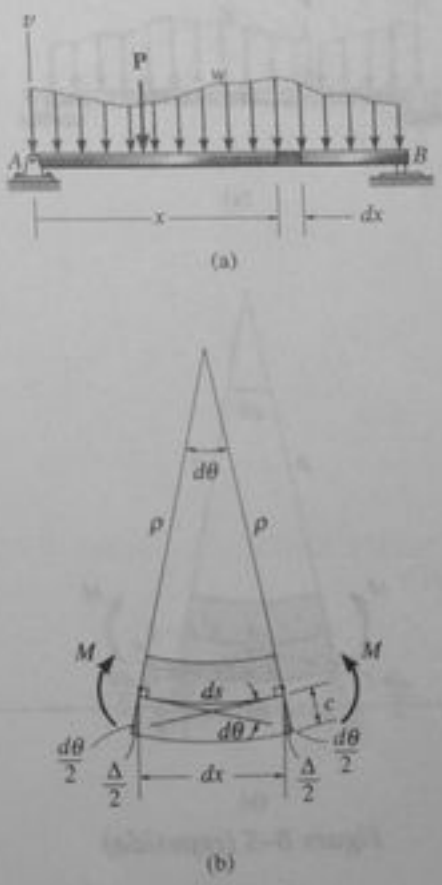


Fig. 8–5

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \tag{8–1}$$

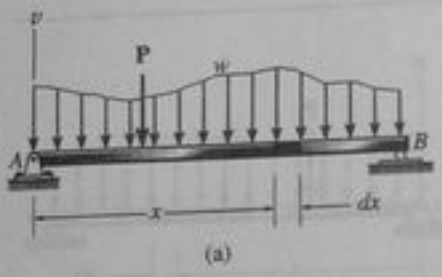
donde

E = módulo de elasticidad del material
I = momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro

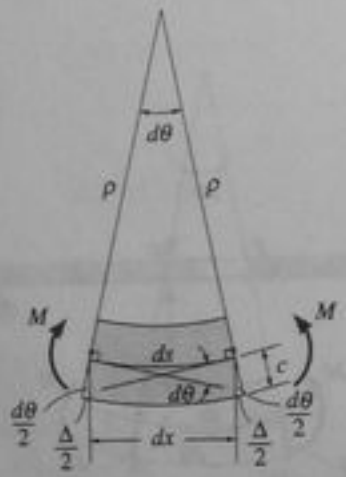
Al producto EI se le llama *rigidez por flexión* y es siempre una cantidad positiva.

*Este importante concepto se basa estrictamente en la geometría de deformación y se le conoce como la hipótesis de Euler-Bernoulli.

†Como la distorsión es pequeña, hemos usado aquí $s = \theta r$, donde s es el arco de un círculo inscrito por el barrido angular θ del radio r.



(a)



(b)

Figura 8–5 (repetida)

Si el radio de curvatura ρ de la curva elástica en x va a determinarse, entonces de la figura 8–5*b*, $\rho\, d\theta = dx$, por lo que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{8–2}$$

Si escogemos el eje v como positivo hacia arriba, figura 8–5*a* y si podemos expresar la curvatura $(1/\rho)$ en términos de x y v, podemos entonces determinar la curva elástica de la viga. En la mayoría de los libros de cálculo se demuestra que la relación de curvatura es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} \tag{8–3}$$

Esta ecuación representa una ecuación diferencial de segundo orden no lineal. Su solución, $v = f(x)$, da la forma exacta de la curva elástica, suponiendo desde luego que las deflexiones en la viga ocurren sólo por flexión. Para facilitar la solución de un gran número de problemas, la ecuación 8–3 puede modificarse por medio de una simplificación importante. Como se ha supuesto una respuesta elástica, la pendiente de la curva elástica, dv/dx, será *muy pequeña* y, en consecuencia, su cuadrado será insignificante respecto a la unidad. Por lo tanto, la curvatura puede aproximarse por $1/\rho = d^2v/dx^2$. Usando esta simplificación, la ecuación 8–3 puede escribirse como

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{8–4}$$

Debe observarse que al suponer $dv/dx = 0$, la longitud original del eje de la viga y el *arco* de su curva elástica serán aproximadamente iguales. En otras palabras, ds en la figura 8–5*b* es aproximadamente igual a dx, ya que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \sqrt{1 + (dv/dx)^2}\, dx = dx$$

Este resultado implica que los puntos sobre la línea elástica se desplazarán sólo vertical y no horizontalmente.

Una vez que M se ha expresado como función de la posición x, integraciones sucesivas de la ecuación 8–4 darán la pendiente de la viga, $\theta = dv/dx = \int M/EI\, dx$ (ecuación 8–1), y la ecuación de la curva elástica, $v = f(x) = \iint M/EI\, dx$, respectivamente. En la sección siguiente mostraremos cómo se aplica este método de integración. Sin embargo, los resultados de un análisis semejante para algunas cargas comunes en vigas encontradas a menudo en el análisis estructural, se dan en la tabla de una de las páginas suplementarias de este libro. Se encuentran tabuladas también la pendiente y el desplazamiento en puntos críticos de la viga. Está claro que ninguna tabla podrá dar todos los casos diferentes de carga y geometría encontrados en la práctica. Cuando no se dispone de una tabla o ésta es incompleta, el desplazamiento o pendiente de un punto específico sobre una viga o marco puede determinarse usando el método de integración o alguno de los otros métodos que se verán en este capítulo. Sin embargo, todos estos métodos y otros parecidos a ellos, se formulan a partir de las ecuaciones 8–1 y 8–4. Estos métodos se limitan por tanto a problemas que implican deflexiones pequeñas causadas sólo por flexión elástica, como queda implicado por las hipótesis y limitaciones dadas anteriormente.

8.3 El método de la doble integración

Como se estableció en la sección anterior, podemos determinar la ecuación de la curva elástica por integración directa de la ecuación 8–4 ($d^2v/dx^2 = M/EI$). La solución de esta ecuación requiere de dos integraciones sucesivas para obtener la deflexión v de la curva elástica. En cada integración es necesario introducir una "constante de integración" y luego encontrar las constantes para obtener una solución única para un problema particular. Recuerde de la sección 4–2 que si la carga sobre una viga es discontinua, esto es, que consiste en una serie de cargas distribuidas y concentradas, deberán formularse varias funciones para el momento interno, cada una válida dentro de la región entre las discontinuidades. Por ejemplo, considere la viga mostrada en la figura 8–6. El momento interno en las regiones AB, BC y CD debe escribirse en términos de las coordenadas x_1, x_2 y x_3. Una vez integradas esas funciones por medio de la aplicación de la ecuación 8–4 y determinadas las constantes de integración, las funciones darán la pendiente y la deflexión (curva elástica) para cada región de la viga para la que son válidas.

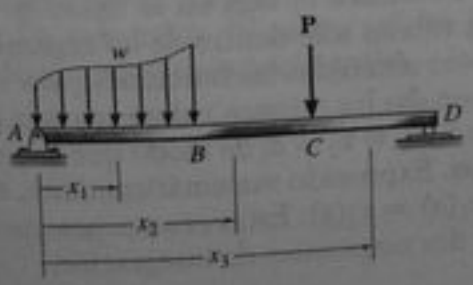
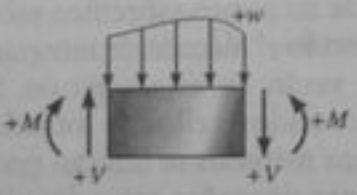


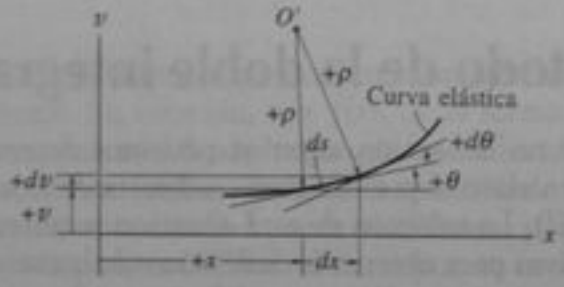
Fig. 8–6

Convención de signos

Al aplicar la ecuación 8–4, es importante usar el signo apropiado para M tal como se estableció en la convención de signos usada en la derivación de esta ecuación, figura 8–7*a*. Recuerde que una deflexión positiva v es hacia arriba y en consecuencia, el ángulo positivo θ de la pendiente se mide en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje x. La explicación de esto se muestra en la figura 8–7*b*. Aquí, incrementos positivos dx y dv en x y v generan un incremento $d\theta$ que es contrario a las agujas del reloj. Además, como el ángulo de la pendiente θ es muy pequeño, su valor en radianes puede determinarse directamente a partir de $\theta \approx \tan\theta = dv/dx$.



(a)



(b)

Fig. 8–7

Condiciones de frontera y continuidad

Las constantes de integración se determinan evaluando las funciones para la pendiente o el desplazamiento en un punto particular sobre la viga donde se conoce el valor de la función. Esos valores se llaman *condiciones de frontera*. Por ejemplo, si la viga esta soportada por un rodillo o un pasador entonces se requiere que el desplazamiento sea cero en esos puntos. En un empotramiento, la pendiente y el desplazamiento ambos son también cero.

Si no puede usarse una sola coordenada x para expresar la ecuación de la pendiente o la de la curva elástica de la viga, deben entonces usarse condiciones de continuidad para evaluar algunas de las constantes de integración. Considere la viga en la figura 8–8. Aquí, las coordenadas x_1 y x_2 son válidas sólo dentro de las regiones AB y BC, respectivamente. Una vez obtenidas las funciones para la pendiente y la deflexión, ellas deben dar los mismos valores para la pendiente y la deflexión en el punto B, $x_1 = x_2 = a$, de modo que la curva elástica sea físicamente continua. Expresado matemáticamente, esto requiere que $\theta_1(a) = \theta_2(a)$ y $v_1(a) = v_2(a)$. Estas ecuaciones pueden entonces usarse para evaluar dos constantes de integración.

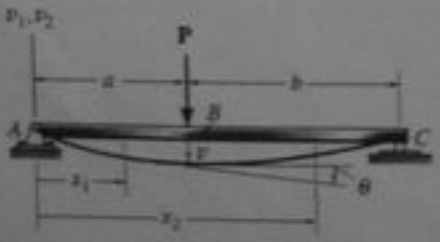


Fig. 8–8

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para determinar la pendiente y deflexión de una viga (o árbol) usando el método de la doble integración. Debe quedar claro que este método es apropiado sólo para *deflexiones elásticas* tales que la pendiente de la viga sea muy pequeña. Además, el método considera *sólo deflexiones debidas a flexión*. La deflexión adicional debida al cortante representa sólo un pequeño porcentaje de la deflexión por flexión, por lo que generalmente se desprecia en la práctica de ingeniería.

Curva elástica. Trace en forma amplificada la curva elástica de la viga. Recuerde que la pendiente y el desplazamiento equivalen a cero en los empotramientos, y que en los pasadores y soportes de rodillo el desplazamiento es cero.

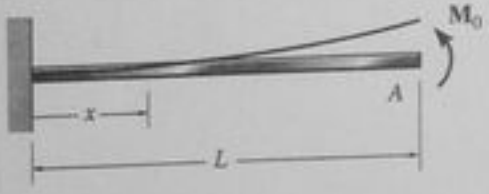
Establezca los ejes coordendos x y v. El eje x debe ser paralelo a la viga no deflexionada, con origen en el lado izquierdo de la viga y con sentido positivo hacia la derecha. Si están presentes varias cargas discontinuas, establezca coordenadas x que sean válidas para cada región de la viga entre las discontinuidades. En todos los casos, el eje positivo v asociado debe estar dirigido hacia arriba.

Función de carga o momento. Para cada región en que se tiene una coordenada x, exprese el momento interno M en función de x. En particular, suponga *siempre* que M actúa en sentido positivo al aplicar la ecuación de equilibrio por momento para determinar $M = f(x)$.

Pendiente y curva elástica. Con la condición de que EI sea constante, aplique la ecuación de momento $EId^2v/dx^2 = M(x)$, que requiere dos integraciones. Para cada integración es importante incluir una constante de integración. Las constantes se evalúan usando las condiciones de frontera para los soportes y las condiciones de continuidad aplicables a pendientes y desplazamientos en puntos donde confluyen dos funciones. Una vez evaluadas y sustituidas las constantes en las ecuaciones de pendiente y deflexión, la pendiente y el desplazamiento en *puntos específicos* sobre la curva elástica pueden determinarse. Los valores numéricos obtenidos pueden verificarse gráficamente comparándolos con el esbozo de la curva elástica. Advierta que valores *positivos* para la *pendiente* indican que ésta es *en sentido contrario a las manecillas del reloj* y *valores positivos para el desplazamiento*, indican que éste es *hacia arriba*.

Ejemplo 8–1

La viga en voladizo ilustrada en la figura 8–9*a* está sometida a un momento concentrado M_0 en su extremo libre. Determine la ecuación de la curva elástica. *EI* es constante.



(a)

(b)

Fig. 8–9

Solución

Curva elástica. La carga tiende a deflexionar la viga como se muestra en la figura 8–9*a*. Por inspección, el momento interno puede representarse en toda la viga usando una sola coordenada x.

Función momento. Del diagrama de cuerpo libre, con **M** actuando en *sentido positivo*, figura 8–9*b*, tenemos

$$M = M_0$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 8–4 e integrando dos veces se obtiene

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_0 \tag{1}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = M_0x + C_1 \tag{2}$$

$$EI\,v = \frac{M_0x^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Usando las condiciones de frontera $dv/dx = 0$ en $x = 0$ y $v = 0$ en $x = 0$, entonces $C_1 = C_2 = 0$. Sustituyendo esos resultados en las ecuaciones (2) y (3) con $\theta = dv/dx$, obtenemos

$$\theta = \frac{M_0x}{EI}$$

$$v = \frac{M_0x^2}{2EI} \qquad \textit{Resp.}$$

La pendiente y desplazamiento máximos ocurren en $A(x = L)$ y son

$$\theta_A = \frac{M_0 L}{EI} \tag{4}$$

$$v_A = \frac{M_0 L^2}{2EI} \tag{5}$$

El resultado *positivo* para θ_A indica una rotación *en sentido contrario a las manecillas del reloj* y el resultado *positivo* para v_A indica que v_A está dirigida *hacia arriba*. Esto concuerda con el resultado esbozado en la figura 8–9*a*.

Para tener una idea sobre la *magnitud* real de la pendiente y el desplazamiento en el extremo A, consideremos que la viga en la figura 8–9*a* tiene una longitud de 12 ft, que soporta un momento concentrado de 15 k · ft y está hecha de acero con $E_{acero} = 29(10^3)$ ksi. Si esta viga se diseñase *sin* un factor de seguridad suponiendo que el esfuerzo normal permisible es igual al esfuerzo de fluencia $\sigma_{perm} = 36$ ksi, entonces una W18 × 35 sería adecuada ($I = 510$ in^4). De las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

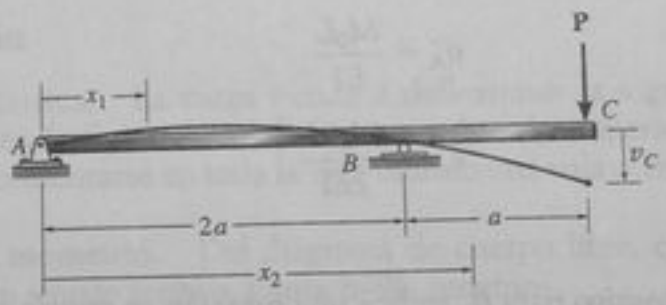
$$\theta_A = \frac{15 \text{ k} \cdot \text{ft}(12 \text{ in./ft})(12 \text{ ft})(12 \text{ in./ft})}{29(10^3) \text{ k/in}^2(510 \text{ in}^4)} = 0.00175 \text{ rad}$$

$$v_A = \frac{15 \text{ k} \cdot \text{ft}(12 \text{ in./ft})(12 \text{ ft})^2(12 \text{ in./1 ft})^2}{2(29(10^3) \text{ k/in}^2)(510 \text{ in}^4)} = 0.126 \text{ in.}$$

Como $\theta_A^2 = 3.07(10^{-6})$ rad$^2 \ll 1$, se justifica el uso de la ecuación 8–4 en vez de la más exacta 8–3 para el cálculo de deflexiones en vigas. Además, como esta aplicación numérica es para una *viga en voladizo*, obtuvimos *valores mayores* para θ y v que los que habríamos obtenido si la viga hubiese estado soportada por pasadores, rodillos u otros soportes rígidos.

Ejemplo 8–2

La viga en la figura 8–10*a* está sometida a una carga P en su extremo libre. Determine el desplazamiento en C. *EI* es constante.

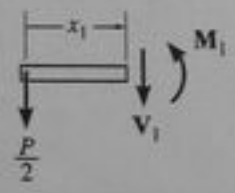


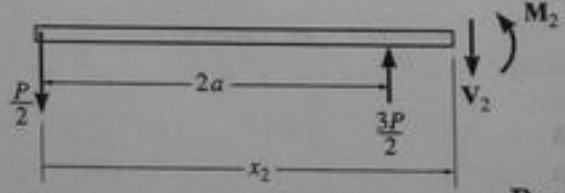
(a)

Fig. 8–10

Solución

Curva elástica. La viga asume la forma mostrada en la figura 8–10*a*. Debido a la carga presente, deben considerarse dos coordenadas *x*.





(b)

Funciones momento. Usando los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 8–10*b*, tenemos

$$M_1 = -\frac{P}{2}x_1 \qquad 0 \le x_1 \le 2a$$

$$M_2 = -\frac{P}{2}x_2 + \frac{3P}{2}(x_2 - 2a)$$

$$= Px_2 - 3Pa \qquad 2a \le x_2 \le 3a$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 8–4,

para x_1, $$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -\frac{P}{2}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4}x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIv_1 = -\frac{P}{12}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

Para x_2,
$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = Px_2 - 3Pa$$
$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{P}{2}x_2^2 - 3Pax_2 + C_3 \quad (3)$$
$$EIv_2 = \frac{P}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}Pax_2^2 + C_3x_2 + C_4 \quad (4)$$

Las *cuatro* constantes de integración se determinan usando *tres* condiciones de frontera, esto es, $v_1 = 0$ en $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ en $x_1 = 2a$ y $v_2 = 0$ en $x_2 = 2a$, más *una* ecuación de continuidad. La continuidad de la pendiente en el rodillo requiere que $dv_1/dx_1 = dv_2/dx_2$ en $x_1 = x_2 = 2a$. Note que la continuidad del desplazamiento en B ha sido indirectamente considerada en las condiciones de frontera, ya que $v_1 = v_2 = 0$ en $x_1 = x_2 = 2a$. Aplicando esas cuatro condiciones, se obtiene

$v_1 = 0$ en $x_1 = 0$; $\quad 0 = 0 + 0 + C_2$

$v_1 = 0$ en $x_1 = 2a$; $\quad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$

$v_2 = 0$ en $x_2 = 2a$; $\quad 0 = \frac{P}{6}(2a)^3 - \frac{3}{2}Pa(2a)^2 + C_3(2a) + C_4$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2}; -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = \frac{P}{2}(2a)^2 - 3Pa(2a) + C_3$$

Resolviéndolas, se obtiene

$$C_1 = \frac{Pa^2}{3} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{10}{3}Pa^2 \qquad C_4 = -2Pa^3$$

Sustituyendo C_3 y C_4 en la ecuación (4), resulta

$$v_2 = \frac{P}{6EI}x_2^3 - \frac{3}{2}\frac{Pa}{EI}x_2^2 + \frac{10Pa^2}{3EI}x_2 - \frac{2Pa^3}{EI}$$

El desplazamiento en C se determina haciendo $x_2 = 3a$. Obtenemos

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI} \qquad \textit{Resp.}$$

Teoremas de área-momento

Las ideas iniciales para los dos teoremas de área-momento fueron desarrolladas por Otto Mohr y luego establecidas formalmente por Charles E. Greene en 1872. Estos teoremas proporcionan una técnica semigráfica para determinar la pendiente de la curva elástica así como su deflexión debida a flexión. Son de gran utilidad cuando se usan para resolver problemas de vigas, especialmente aquellas sometidas a una serie de cargas concentradas o que tienen segmentos con diferentes momentos de inercia. Para desarrollar esos teoremas, nos referiremos a la viga en la figura 8–11*a*. Si dibujamos el diagrama de momentos para la viga y luego lo dividimos entre su rigidez por flexión *EI*, obtenemos el "diagrama *M/EI*" mostrado en la figura 8–11*b*. En la ecuación 8–1, se establece que el cambio $d\theta$ en la pendiente de las tangentes a cada lado del elemento dx es igual al área sombreada oscura bajo el diagrama *M/EI*. Integrando del punto *A* sobre la curva elástica al punto *B*, figura 8–11*c*, tenemos

$$d\theta = \left(\frac{M}{EI}\right) dx$$

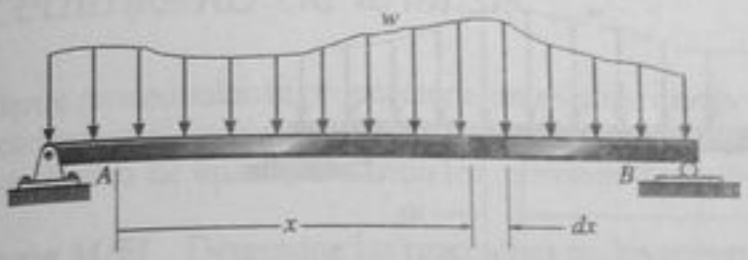
$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}\, dx \tag{8–5}$$

Esta ecuación es la formulación matemática del primer teorema de área-momento.

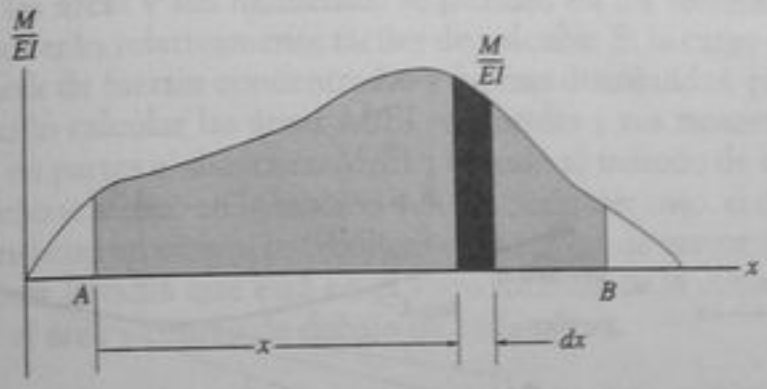
Teorema 1: El cambio en la pendiente entre dos puntos cualquiera sobre la curva elástica es igual al área del diagrama *M/EI* entre esos dos puntos.

La notación $\theta_{B/A}$ se refiere al ángulo de la tangente en *B* medido respecto a la tangente en *A*. De la demostración debe quedar claro que la pendiente de *A* a *B crece* si el área del diagrama *M/EI* es *positiva*, figura 8–11*c*. Inversamente, si esta área es *negativa*, o sea que se encuentra debajo del eje *x*, la pendiente *decrece*. De acuerdo con las dimensiones de la ecuación 8–5, $\theta_{B/A}$ se mide en radianes.

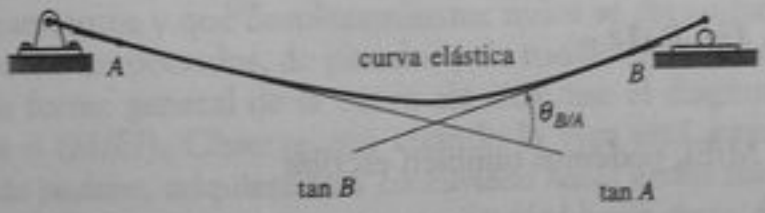
El segundo teorema de área-momento se basa en la desviación relativa de *tangentes* a la curva elástica. En la figura 8–12*c* se muestra una vista amplificada de la *desviación vertical dt* de las tangentes a cada lado del elemento diferencial dx. Esta desviación se mide a lo largo de una línea vertical que pasa por el punto *A*. Usando la fórmula del arco circular $s = \theta r$, donde *r* es de longitud *x*, podemos escribir



(a)



(b)



(c)

Fig. 8–11

$dt = x\,d\theta$. Esta aproximación es en realidad bastante exacta ya que la pendiente de la curva elástica y su deflexión son muy pequeñas. Usando la ecuación 8–1, $d\theta = (M/EI)\,dx$, la desviación de la tangente en A respecto a la tangente en B puede encontrarse por integración, en cuyo caso

$$t_{A/B} = \int_A^B x\frac{M}{EI}\,dx \tag{8–6}$$

Recuerde de la estática que el centroide de un área se determina con la expresión $\bar{x}\int dA = \int x\,dA$. Como $\int M/EI\,dx$ representa un área del

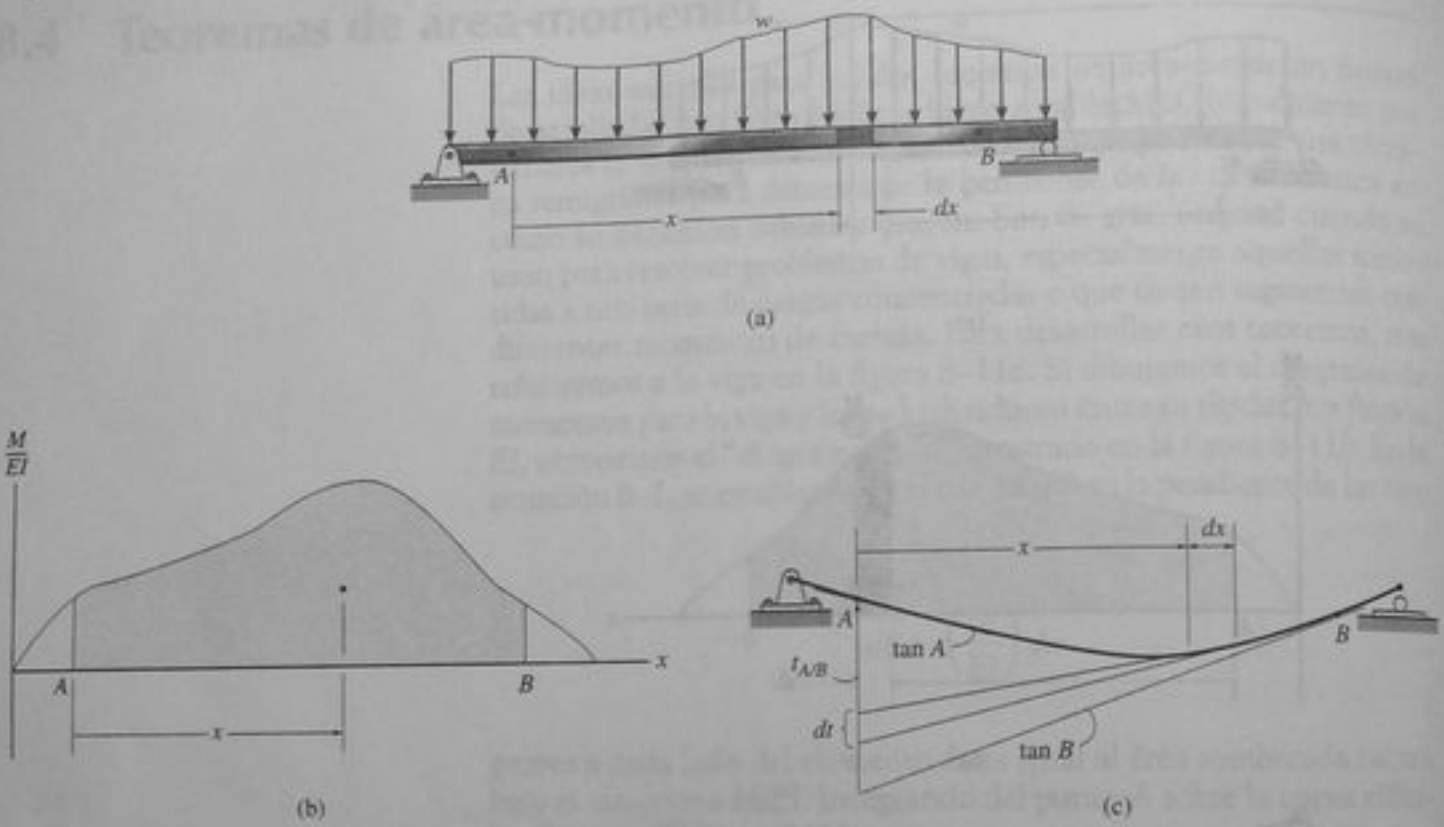


Fig. 8–12

diagrama M/*EI*, podemos también escribir

$$t_{A/B} = \bar{x} \int_A^B \frac{M}{EI}\, dx \tag{8–7}$$

donde $\bar{x}$ es la distancia del eje vertical que pasa por *A* al *centroide* del área entre *A* y *B*, figura 8–12*b*. El segundo teorema de área-momento puede enunciarse de la siguiente manera:

> **Teorema 2: La desviación de la tangente en un punto (*A*) sobre la curva elástica con respecto a la tangente prolongada desde otro punto (*B*) es igual al "momento" del área bajo el diagrama M/*EI* entre los dos puntos (*A* y *B*). Este momento se calcula respecto al punto *A* (el punto sobre la curva elástica), donde la desviación $t_{A/B}$ va a determinarse.**

Si se calcula el momento de un área M/*EI* positiva de *A* a *B*, como en la figura 8–12*b*, esto implica que la tangente en el punto *A* está *arriba* de la tangente a la curva prolongada desde el punto *B*, figura 8–12*c*. Similarmente, áreas M/*EI* *negativas* implican que la tangente en *A* está *abajo* de la tangente prolongada desde *B*.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar el desplazamiento y la pendiente en un punto sobre la curva elástica de una viga usando los teoremas de área-momento.

Diagrama M/EI Determine las reacciones en los soportes y dibuje el diagrama *M/EI* de la viga. Si la viga está cargada con fuerzas concentradas, el diagrama *M/EI* consistirá en una serie de segmentos rectos y las áreas y sus momentos requeridos en los teoremas área-momento serán relativamente fáciles de calcular. Si la carga consiste en una *serie* de fuerzas concentradas y fuerzas distribuidas, puede ser más sencillo calcular las áreas *M/EI* requeridas y sus momentos, dibujando en partes el diagrama *M/EI* y usando el método de superposición como se indicó en la sección 4.5. En cualquier caso, el diagrama *M/EI* consistirá en curvas parabólicas o en curvas de mayor orden; se sugiere usar la tabla que está en el forro interior de la cubierta para localizar el área y centroide debajo de cada curva.

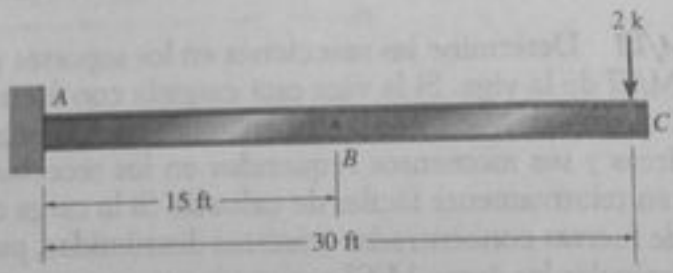
Curva elástica Dibuje en forma exagerada la curva elástica de la viga. Recuerde que puntos de pendiente nula se presentan en los empotramientos y que desplazamientos nulos se presentan en todos los soportes empotrados, de pasador y de rodillo. Si resulta difícil dibujar la forma general de la curva elástica, use el diagrama de momentos o (*M/EI*). Observe que cuando la viga está sometida a un *momento positivo*, adquiere una *concavidad hacia arriba* mientras que un *momento negativo* provoca una *concavidad hacia abajo*. Además, se presenta un punto de inflexión o cambio en la curvatura cuando el momento en la viga (o *M/EI*) es cero.

Debe indicarse sobre la curva el desplazamiento y pendiente por determinarse. Dibuje tangentes prolongadas sobre la curva en este punto y también *en los soportes*. Como los teoremas de área-momento se aplican sólo entre dos tangentes, deberá ponerse atención a qué tangentes deben utilizarse para determinar la pendiente o el desplazamiento.

Teoremas de área-momento Aplique el teorema 1 para determinar el ángulo entre dos tangentes y el teorema 2 para determinar las desviaciones tangenciales entre esas tangentes. Recuerde que el teorema 2, en general, *no dará* el desplazamiento de un punto sobre la curva elástica. Al aplicarse correctamente, sólo dará la distancia vertical o desviación de una tangente en el punto *A* respecto a la tangente en *B*. Después de aplicar el teorema 1 o el teorema 2, el signo algebraico de la respuesta puede verificarse con base en el ángulo de desviación indicado sobre la curva elástica.

Ejemplo 8–3

Determine la pendiente en los puntos B y C de la viga mostrada en la figura 8–13*a*. Considere $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 600$ in^4.

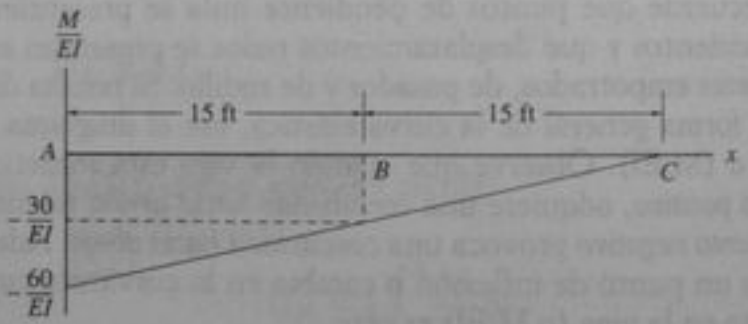


(a)

Fig. 8–13

Solución

Diagrama *M/EI*. Este diagrama se muestra en la figura 8–13*b*. Es más fácil resolver el problema en términos de *EI* y sustituir los datos numéricos como último paso.



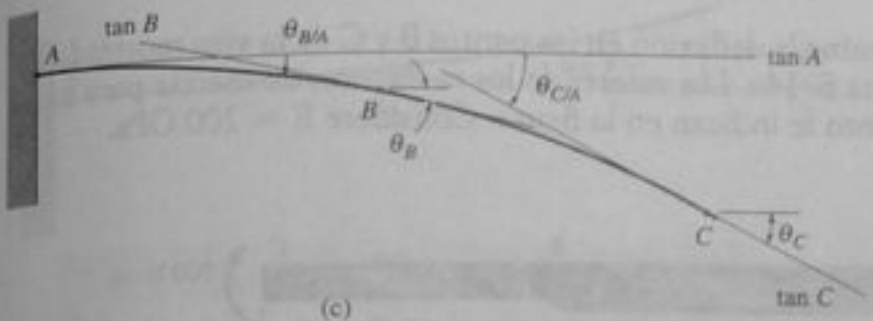
(b)

Curva elástica. La carga de 2 k ocasiona que la viga se deflexione como se muestra en la figura 8–13c. (La viga asume una concavidad hacia abajo por ser *M/EI* negativa.) Note el lector que la tangente en A es *siempre horizontal*. Las tangentes en B y C también se indican. Tenemos que encontrar θ_B y θ_C. Observe, también, que por construcción, el ángulo entre tan A y tan B, esto es, $\theta_{B/A}$, es equivalente a θ_B.

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

También,

$$\theta_C = \theta_{C/A}$$



Teorema de área-momento. De acuerdo con el teorema 1, $\theta_{B/A}$ es igual al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y B; esto es,

$$\theta_B = \theta_{B/A} = -\left(\frac{30\ \text{k}\cdot\text{ft}}{EI}\right)(15\ \text{ft}) - \frac{1}{2}\left(\frac{60\ \text{k}\cdot\text{ft}}{EI} - \frac{30\ \text{k}\cdot\text{ft}}{EI}\right)(15\ \text{ft})$$
$$= -\frac{675\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

Sustituyendo los datos numéricos para E e I, obtenemos

$$\theta_B = \frac{-675\ \text{k}\cdot\text{ft}^2(144\ \text{in}^2/1\ \text{ft}^2)}{(29(10^3)\ \text{k/in}^2)(600\ \text{in}^4)}$$
$$= -0.00559\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

El *signo negativo* indica que la pendiente en B *disminuye* respecto al valor en A.

De manera similar, el área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y C es igual a $\theta_{C/A}$. Tenemos

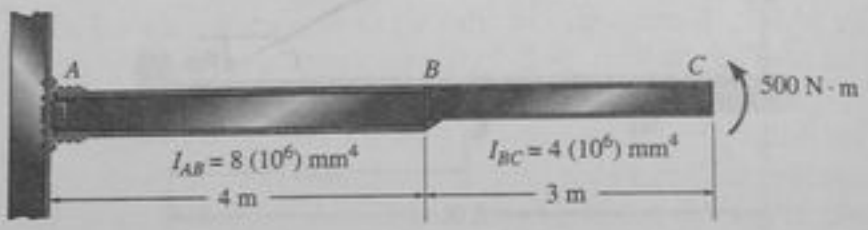
$$\theta_C = \theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{60\ \text{k}\cdot\text{ft}}{EI}\right)(30\ \text{ft}) = -\frac{900\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos para EI, y convirtiendo pies a pulgadas, tenemos

$$\theta_C = \frac{-900\ \text{k}\cdot\text{ft}^2(144\ \text{in}^2/\text{ft}^2)}{29(10^3)\ \text{k/in}^2(600\ \text{in}^4)}$$
$$= -0.00745\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 8–4

Determine la deflexión en los puntos B y C de la viga mostrada en la figura 8–14*a*. Los valores de los momentos de inercia para cada segmento se indican en la figura. Considere E = 200 GPa.

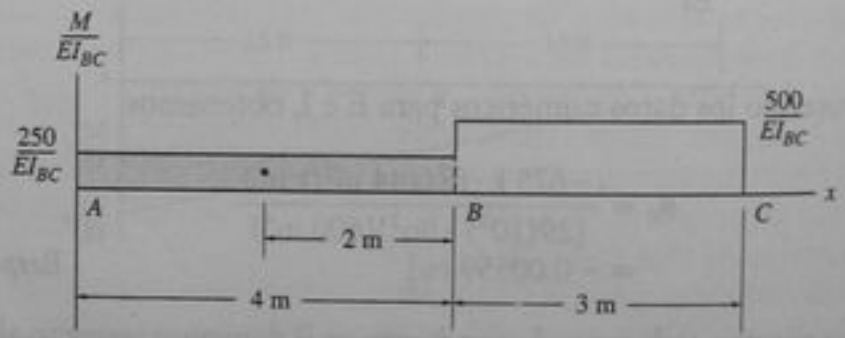


(a)

Fig. 8–14

Solución

Diagrama *M/EI*. Por inspección, el diagrama de momento para la viga es un rectángulo (véase la figura 4–12.) Aquí construiremos el diagrama *M/EI* relativo a I_{BC}, tomando en cuenta que $I_{AB} = 2I_{BC}$, figura 8–14*b*. Los valores numéricos para EI_{BC} se sustituirán como paso último.



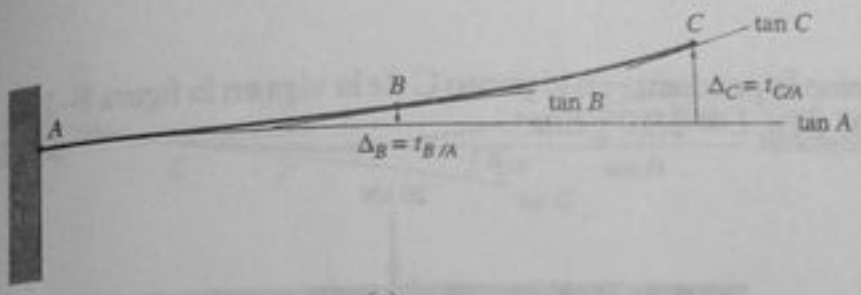
(b)

Curva elástica. El momento concentrado en C ocasiona que la viga se deflexione como se muestra en la figura 8–14c. Se indican las tangentes en A, B y C. Tenemos que encontrar Δ_B y Δ_C. Estos desplazamientos pueden relacionarse directamente con las desviaciones entre las tangentes, de manera que por la construcción Δ_B es igual a la desviación de tan B desde tan A; esto es,

$$\Delta_B = t_{B/A}$$

También,

$$\Delta_C = t_{C/A}$$



(c)

Teorema de área-momento. De acuerdo con el teorema 2, $t_{B/A}$ es igual al momento del diagrama M/EI_{BC} entre A y B calculado con respecto al punto B, ya que éste es el punto donde se va a determinar la desviación tangencial. De la figura 8–14*b*,

$$\Delta_B = t_{B/A} = \left[\frac{250\ \text{N}\cdot\text{m}}{EI_{BC}}(4\ \text{m})\right](2\ \text{m}) = \frac{2000\ \text{N}\cdot\text{m}^3}{EI_{BC}}$$

Sustituyendo los datos numéricos se obtiene

$$\Delta_B = \frac{2000\ \text{N}\cdot\text{m}^3}{[200(10^9)\ \text{N/m}^2][4(10^6)\ \text{mm}^4(1\ \text{m}^4/(10^3)^4\ \text{mm}^4)]}$$
$$= 0.0025\ \text{m} = 2.5\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Igualmente, para $t_{C/A}$ debemos calcular el momento de todo el diagrama M/EI_{BC}, de A a C, respecto al punto C. Tenemos

$$\Delta_C = t_{C/A} = \left[\frac{250\ \text{N}\cdot\text{m}}{EI_{BC}}(4\ \text{m})\right](5\ \text{m}) + \left[\frac{500\ \text{N}\cdot\text{m}}{EI_{BC}}(3\ \text{m})\right](1.5\ \text{m})$$
$$= \frac{7250\ \text{N}\cdot\text{m}^3}{EI_{BC}}$$

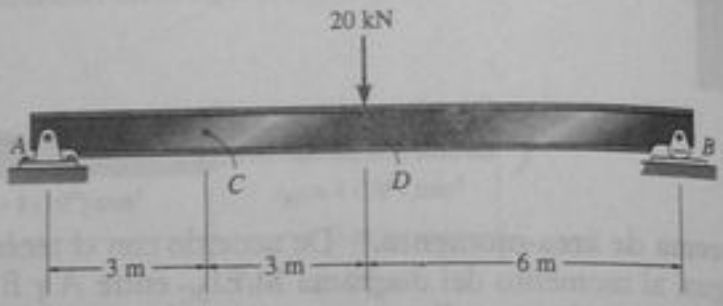
o

$$\Delta_C = \frac{7250\ \text{N}\cdot\text{m}^3}{[200(10^9)\ \text{N/m}^2][4(10^6)(10^{-12})\ \text{m}^4]}$$
$$= 0.00906\ \text{m} = 9.06\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Como ambas respuestas son *positivas*, indican que los puntos B y C se hallan *arriba* de la tangente en A.

Ejemplo 8–5

Determine la pendiente en el punto C de la viga en la figura 8–15a. $E = 200$ GPa, $I = 6(10^6)$ mm^4.

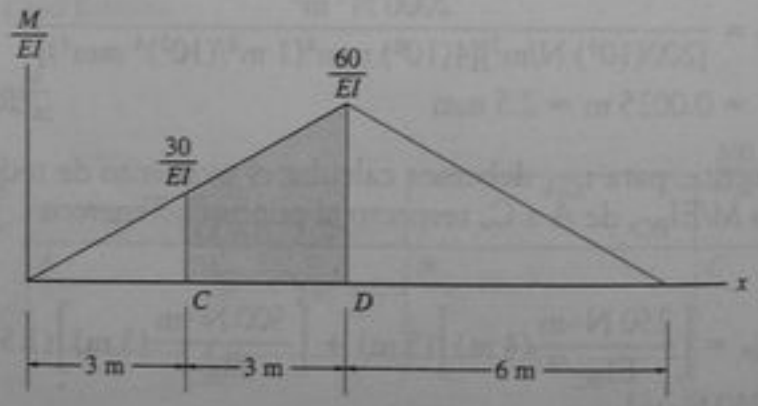


(a)

Fig. 8–15

Solución

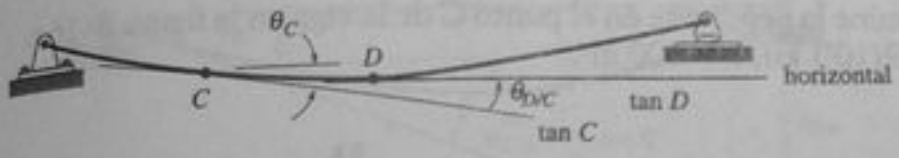
Diagrama M/EI. Figura 8–15*b*.



(b)

Curva elástica. Como la carga se aplica simétricamente a la viga, la curva elástica es simétrica, como se muestra en la figura 8–15*c*. Tenemos que encontrar θ_C. Esto puede hacerse fácilmente ya que la tangente en D es *horizontal* y por tanto, por construcción, el ángulo $\theta_{D/C}$ entre tan C y tan D es igual a θ_C; esto es,

$$\theta_C = \theta_{D/C}$$



(c)

Teorema de área-momento. De acuerdo con el teorema 1, $\theta_{D/C}$ es igual al área sombreada bajo el diagrama M/EI entre los puntos C y D. Tenemos

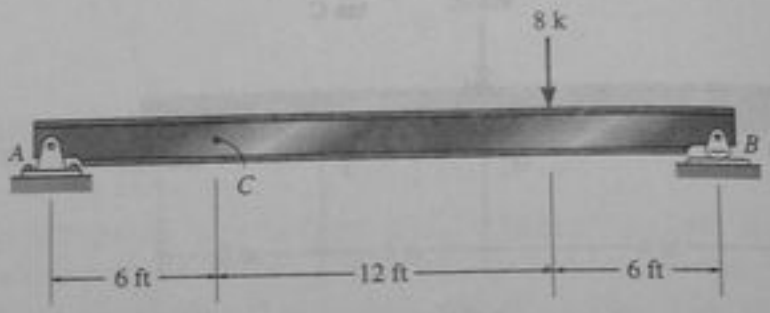
$$\theta_C = \theta_{D/C} = 3\text{ m}\left(\frac{30\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right) + \frac{1}{2}(3\text{ m})\left(\frac{60\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI} - \frac{30\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)$$
$$= \frac{135\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

Entonces,

$$\theta_C = \frac{135\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{[200(10^6)\text{ kN/m}^2][6(10^6)(10^{-12})\text{ m}^4]} = 0.112\text{ rad}\quad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 8–6

Determine la pendiente en el punto C de la viga en la figura 8–16a. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 600$ in^4.

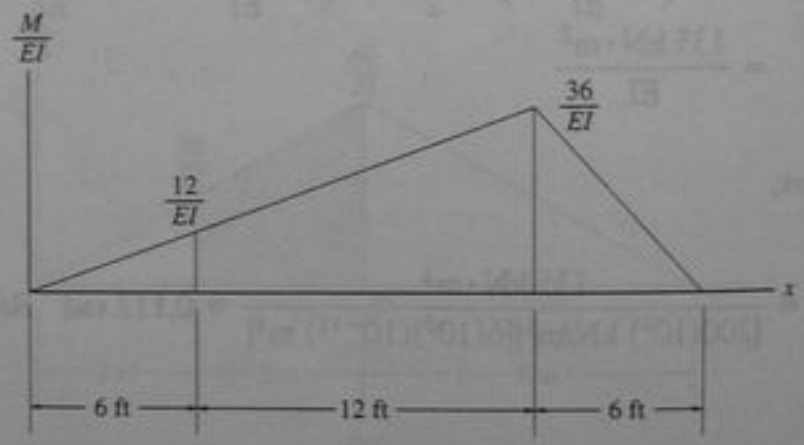


(a)

Fig. 8–16

Solución

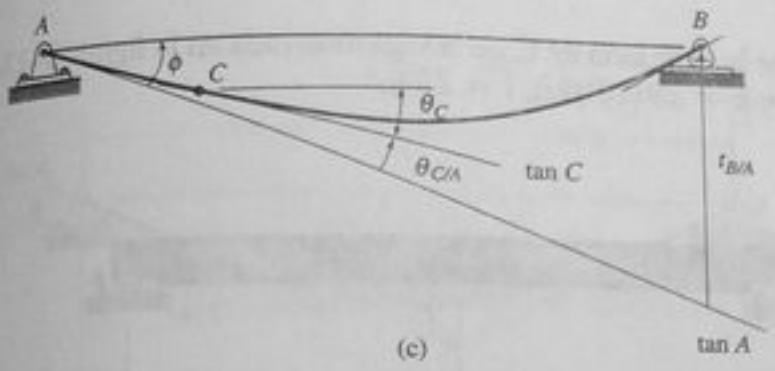
Diagrama M/EI. Figura 8–16b.



(b)

Curva elástica. La curva elástica se muestra en la figura 8–16c. Queremos encontrar θ_C. El ángulo $\theta_{C/A}$ es el ángulo entre las tangentes en A y C. El ángulo ϕ en la figura 8–16c puede encontrarse usando $\phi = t_{B/A}/L_{AB}$. Esta ecuación es válida ya que $t_{B/A}$ es muy pequeña y puede aproximarse por la longitud de un arco circular definido por un radio de $L_{AB} = 24$ ft y un barrido de ϕ. (Recuerde que $s = \theta r$.) De la geometría de la figura 8–16c, tenemos

$$\theta_C = \phi - \theta_{C/A} = \frac{t_{B/A}}{24} - \theta_{C/A} \qquad (1)$$



(c)

Teoremas de área-momento. Usando el teorema 1, $\theta_{C/A}$ es equivalente al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y C; esto es,

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2}(6\text{ ft})\left(\frac{12\text{ k}\cdot\text{ft}}{EI}\right) = \frac{36\text{ k}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

Aplicando el teorema 2, $t_{B/A}$ es equivalente al momento del área bajo el diagrama M/EI entre B y A respecto al punto B, ya que éste es el punto donde va a determinarse la desviación tangencial. Tenemos

$$\begin{aligned} t_{B/A} &= \left[6\text{ ft} + \frac{1}{3}(18\text{ ft})\right]\left[\frac{1}{2}(18\text{ ft})\left(\frac{36\text{ k}\cdot\text{ft}}{EI}\right)\right] \\ &\quad + \frac{2}{3}(6\text{ ft})\left[\frac{1}{2}(6\text{ ft})\left(\frac{36\text{ k}\cdot\text{ft}}{EI}\right)\right] \\ &= \frac{4320\text{ k}\cdot\text{ft}^3}{EI} \end{aligned}$$

Sustituyendo esos resultados en la ecuación (1), tenemos

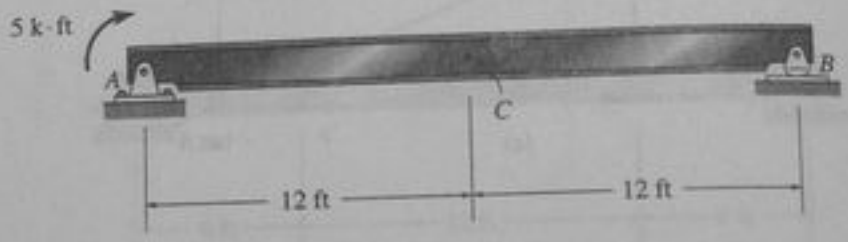
$$\theta_C = \frac{4320\text{ k}\cdot\text{ft}^3}{(24\text{ ft})\,EI} - \frac{36\text{ k}\cdot\text{ft}^2}{EI} = \frac{144\text{ k}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{144\text{ k}\cdot\text{ft}^2}{29(10^3)\text{ k/in}^2(144\text{ in}^2/\text{ft}^2)600\text{ in}^4(\text{ft}^4/(12)^4\text{ in}^4)} \\ &= 0.00119\text{ rad} \end{aligned}$$ *Resp.*

Ejemplo 8–7

Determine la deflexión en C de la viga mostrada en la figura 8–17a. Considere $E = 29(10^3)$ksi, $I = 21$ in^4.

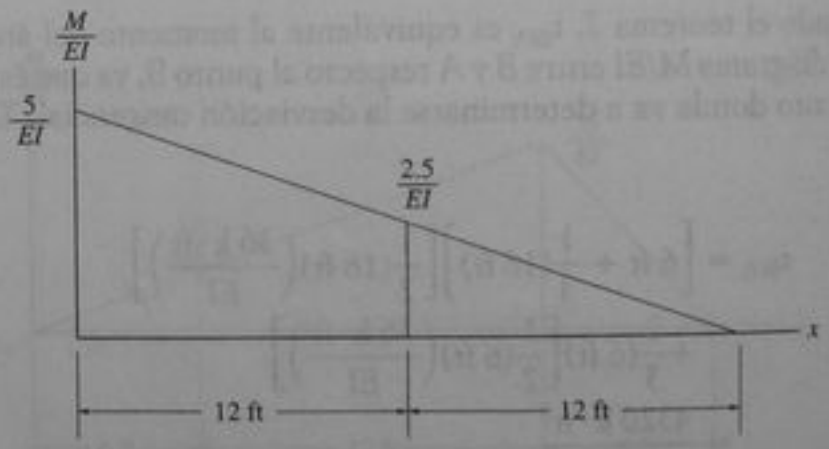


(a)

Fig. 8–17

Solución

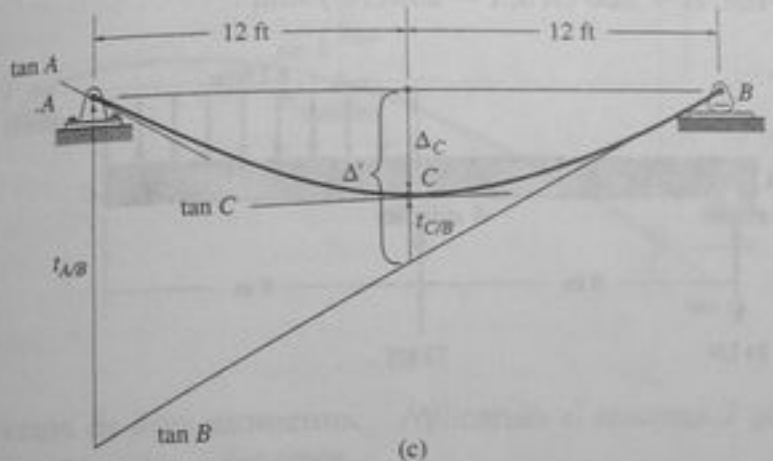
Diagrama M/EI. Figura 8–17*b*.



(b)

Curva elástica. Aquí queremos encontrar Δ_C, figura 8–17c. Nótese que ésta *no* es la deflexión máxima de la viga, ya que la carga y por consiguiente la curva elástica son *no simétricas*. En la figura 8–17c también se indican las tangentes en A, B y C. Nótese que si $t_{A/B}$ se determina, entonces Δ' puede encontrarse por triángulos proporcionales, esto es, $\Delta'/12 = t_{A/B}/24$ o $\Delta' = t_{A/B}/2$. De la construcción en la figura 8–17c, tenemos

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \qquad (1)$$



(c)

Teorema de área-momento. Aplicando el teorema 2 para determinar $t_{A/B}$ y $t_{C/B}$, tenemos

$$t_{A/B} = \left[\frac{1}{3}(24\text{ ft})\right]\left[\frac{1}{2}(24\text{ ft})\left(\frac{5\text{ k}\cdot\text{ft}}{EI}\right)\right] = \frac{480\text{ k}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

$$t_{C/B} = \left[\frac{1}{3}(12\text{ ft})\right]\left[\frac{1}{2}(12\text{ ft})\left(\frac{2.5\text{ k}\cdot\text{ft}}{EI}\right)\right] = \frac{60\text{ k}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1), resulta

$$\Delta_C = \frac{1}{2}\left(\frac{480\text{ k}\cdot\text{ft}^3}{EI}\right) - \frac{60\text{ k}\cdot\text{ft}^3}{EI} = \frac{180\text{ k}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

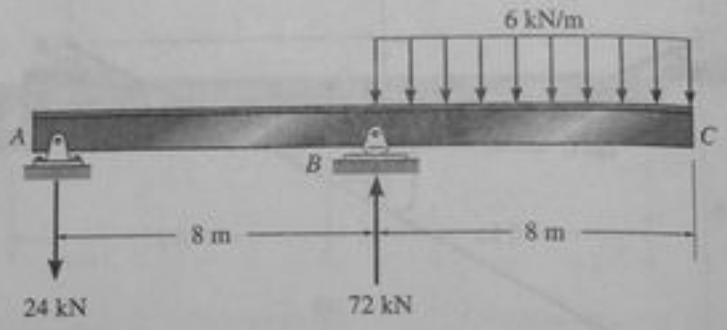
En unidades de kips y pulgadas, tenemos

$$\Delta_C = \frac{180\text{ k}\cdot\text{ft}^3(1728\text{ in}^3/\text{ft}^3)}{(29(10^3)\text{ k/in}^2)(21\text{ in}^4)}$$

$$= 0.511\text{ in.}$$ **Resp.**

Ejemplo 8–8

Determine la deflexión en el punto C de la viga mostrada en la figura 8–18*a*. $E = 200$ GPa, $I = 250(10^6)$ mm^4.

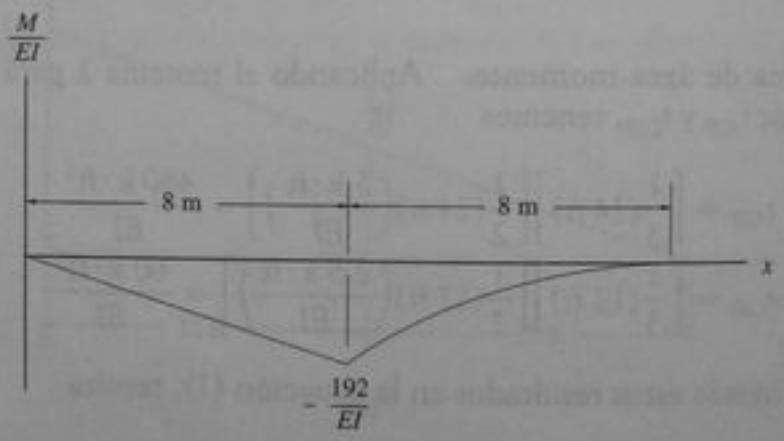


(a)

Fig. 8–18

Solución

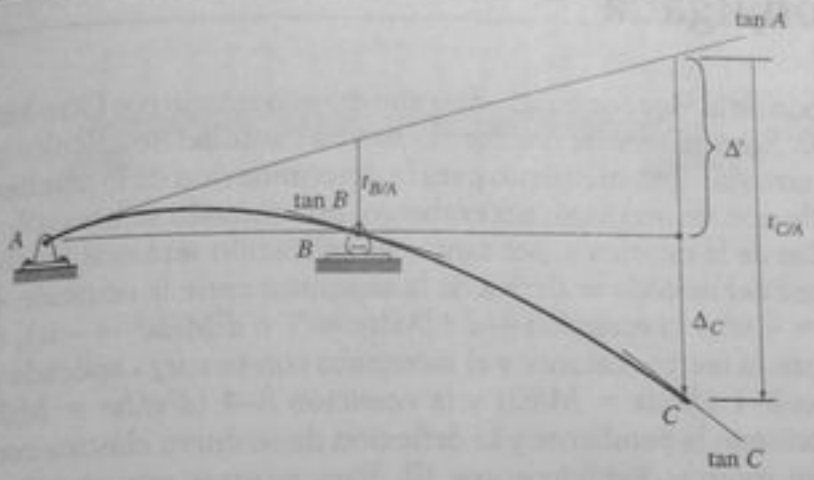
Diagrama *M/EI*. Como se muestra en la figura 8–18*b*, este diagrama consiste en segmentos triangulares y parabólicos.



(b)

Curva elástica. La carga ocasiona que la viga se deforme como se muestra en la figura 8–18*c*. Queremos encontrar Δ_C. Si trazamos tangentes por A, B y C, vemos que $\Delta_C = t_{C/A} - \Delta'$. Sin embargo, Δ' puede relacionarse con $t_{B/A}$ por triángulos semejantes, esto es, $\Delta'/16 = t_{B/A}/8$ o $\Delta' = 2t_{B/A}$. Por lo tanto,

$$\Delta_C = t_{C/A} - 2t_{B/A} \qquad (1)$$



(c)

Teorema de área-momento. Aplicando el teorema 2 para determinar $t_{C/A}$ y $t_{B/A}$, tenemos

$$t_{C/A} = \left[\frac{3}{4}(8\text{ m})\right]\left[\frac{1}{3}(8\text{ m})\left(-\frac{192\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] + \left[\frac{1}{3}(8\text{ m}) + 8\text{ m}\right]\left[\frac{1}{2}(8\text{ m})\left(-\frac{192\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right]$$

$$= -\frac{11\,264\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$t_{B/A} = \left[\frac{1}{3}(8\text{ m})\right]\left[\frac{1}{2}(8\text{ m})\left(-\frac{192\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] = -\frac{2048\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

¿Por qué son estos términos negativos? Sustituyendo los resultados en la ecuación (1) se obtiene

$$\Delta_C = -\frac{11\,264\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} - 2\left(-\frac{2048\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\right)$$

$$= -\frac{7168\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

Entonces,

$$\Delta_C = \frac{-7168\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{[200(10^6)\text{ kN/m}^2][250(10^6)(10^{-12})\text{ m}^4]}$$

$$= 0.143\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

8.5 Método de la viga conjugada

El método de la viga conjugada fue primero presentado por Otto Mohr en 1860. Esencialmente, requiere la misma cantidad de cálculos que los teoremas de área-momento para la determinación de la pendiente o la deflexión de una viga; sin embargo, este método se basa sólo en principios de la estática y, por tanto, su aplicación será más familiar.

La base del método se deriva de la *semejanza* entre la ecuación 4–1 ($dV/dx = -w$) y la ecuación 4–2 ($dM/dx = V$ o $d^2M/dx^2 = -w$), que relacionan la fuerza cortante y el momento con su carga aplicada y la ecuación 8–1 ($d\theta/dx = M/EI$) y la ecuación 8–4 ($d^2v/dx^2 = M/EI$), que relacionan la pendiente y la deflexión de su curva elástica con el momento interno dividido entre EI. Para mostrar esta semejanza, podemos escribir estas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = -w$$

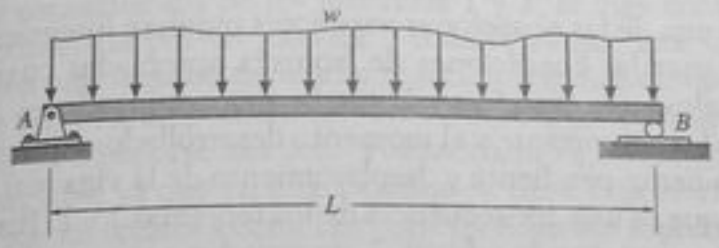
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

O integrando,

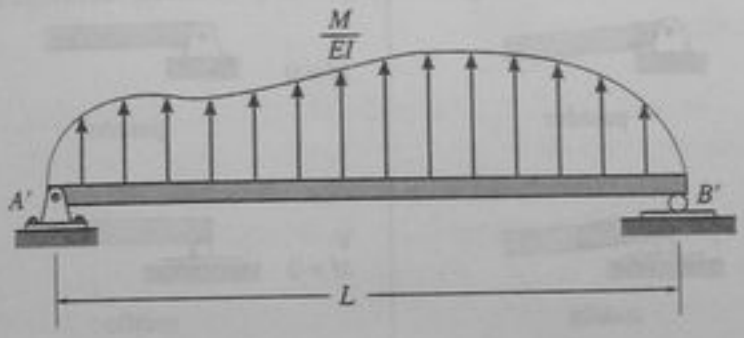
$$V = -\int w\,dx \qquad M = \int\left[-\int w\,dx\right]dx$$

$$\theta = \int\left(\frac{M}{EI}\right)dx \qquad v = \int\left[\int\left(\frac{M}{EI}\right)dx\right]dx$$

Aquí, la *fuerza cortante* V se compara con la *pendiente* θ, el *momento* M se compara con el *desplazamiento* v y la *carga externa* w se compara con el diagrama M/EI. Para hacer uso de esta comparación, consideraremos ahora una viga con la misma longitud que la viga real, a la que llamaremos "viga conjugada". Ejemplos de una viga real y una viga conjugada se muestran en la figura 8–19. La viga conjugada está "cargada" con el diagrama M/EI para que sea conforme con la carga w



viga real



viga conjugada

Fig. 8–19

sobre la viga real. Como se indicó arriba, podemos entonces establecer dos teoremas relativos a la viga conjugada; éstos son:

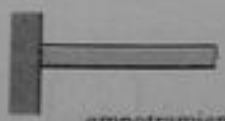
Teorema 1: La pendiente en un punto en la viga real es igual a la fuerza cortante en el punto correspondiente en la viga conjugada.

Teorema 2: El desplazamiento de un punto en la viga real es igual al momento en el punto correspondiente en la viga conjugada.

Soportes de la viga conjugada

Como cada una de las ecuaciones anteriores requiere integración, es importante usar las condiciones de frontera apropiadas cuando se integre. Igualmente, cuando se dibuje la viga conjugada, es importante que la fuerza cortante y el momento desarrollados equivalgan a la correspondiente pendiente y desplazamiento de la viga real en sus soportes, lo que es una consecuencia de los teoremas 1 y 2. Por ejemplo, como se muestra en la tabla 8–2, un pasador o soporte de rodillo

Tabla 8-2

Viga real	Viga conjugada
1) θ $\Delta = 0$ pasador	V $M = 0$ pasador
2) θ $\Delta = 0$ rodillo	V $M = 0$ rodillo
3) $\theta = 0$ $\Delta = 0$ empotramiento	$V = 0$ $M = 0$ libre
4) θ Δ libre	V M  empotramiento
5) θ $\Delta = 0$ pasador interno	V $M = 0$ articulación
6) θ $\Delta = 0$ rodillo interno	V $M = 0$ articulación
7) θ Δ articulación	V M rodillo

proporciona *cero desplazamiento* pero la viga tiene ahí una pendiente. Como consecuencia de los teoremas 1 y 2, la viga conjugada debe estar soportada por un pasador o rodillo, ya que este soporte tiene *momento cero* aunque tiene una reacción o fuerza cortante. Cuando la viga real está empotrada (3), tanto la pendiente como el desplazamiento en el soporte son cero. Por tanto, la viga conjugada tiene un extremo libre ya que en este extremo se tiene una fuerza cortante y un momento iguales a cero. Los correspondientes soportes reales y de viga conjugada para otros casos se dan en la tabla. Ejemplos de vigas reales y conjugadas se muestran en la figura 8–20. Nótese que, como regla general, despreciando la fuerza axial, las vigas reales estáticamente determinadas tienen vigas conjugadas estáticamente determinadas; y que las vigas reales estáticamente indeterminadas, como en el último caso en la figura 8–20, tienen vigas conjugadas inestables. En estos casos, la carga M/EI proporcionará el necesario "equilibrio" para mantener estable a la viga conjugada.

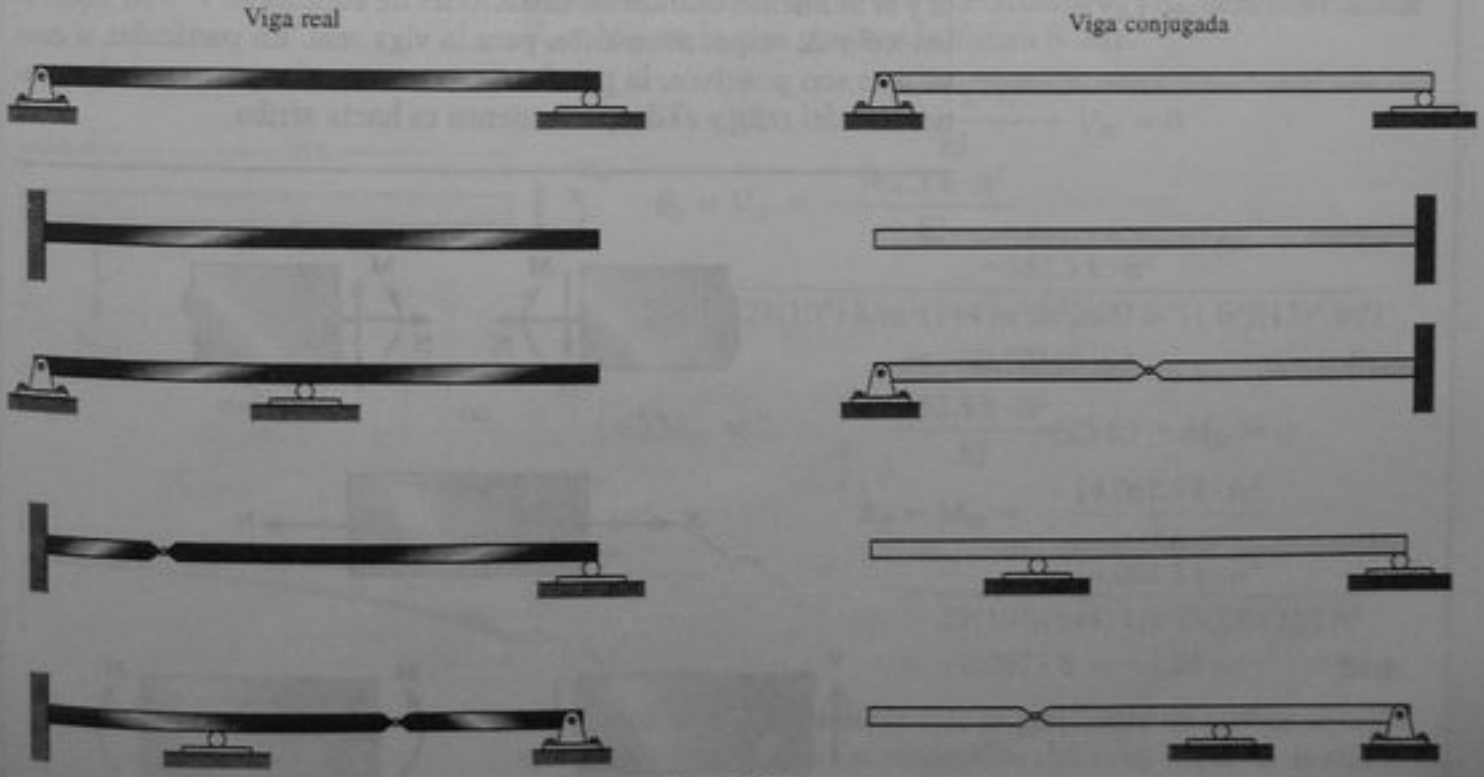


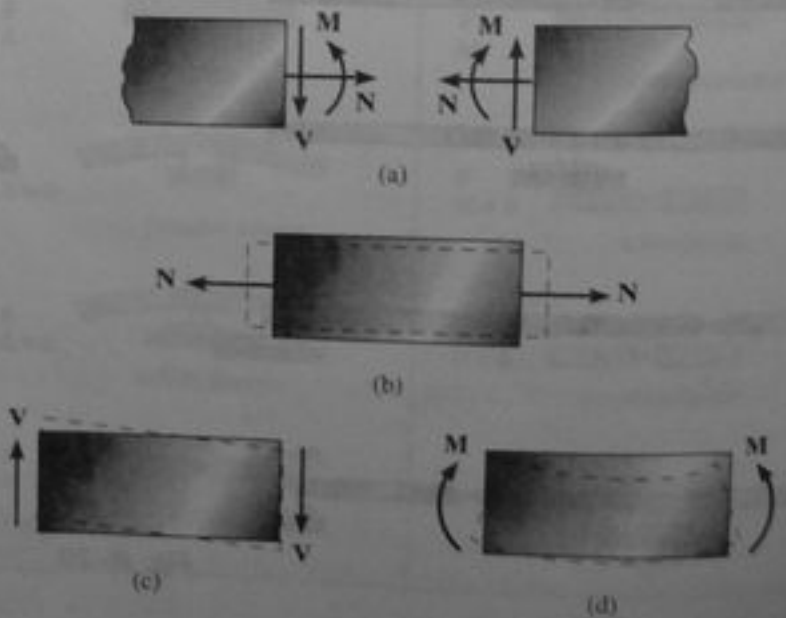
Fig. 8–20

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar el desplazamiento y la pendiente en un punto sobre la curva elástica de una viga usando el método de la viga conjugada.

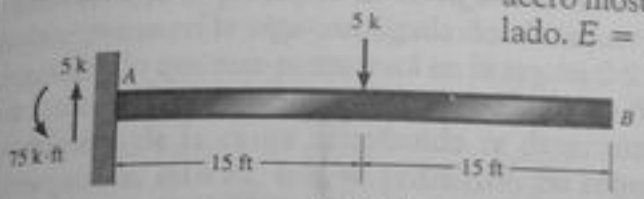
Viga conjugada Dibuje la viga conjugada para la viga real. Esta viga tiene la misma longitud que la viga real y los correspondientes soportes de acuerdo con la tabla 8–2. En general, recuerde que si el soporte real permite una *pendiente*, el soporte conjugado debe poder desarrollar una *fuerza cortante*; y que si el soporte real permite un *desplazamiento*, el soporte conjugado debe poder desarrollar un *momento*. La viga conjugada se carga con el diagrama M/EI de la viga real. Se supone que esta carga está *distribuida* sobre la viga conjugada y está dirigida *hacia arriba* cuando M/EI es *positivo* y *hacia abajo* cuando M/EI es *negativo*.

Equilibrio Usando las ecuaciones de equilibrio, determine las reacciones en los soportes de la viga conjugada. Luego seccione la viga conjugada en el punto en que deben determinarse la pendiente θ y el desplazamiento Δ de la viga real. En la sección, muestre la fuerza cortante V' y el momento M' desconocidos que actúan en sus sentidos positivos (véase la figura 4–1, abajo.) Determine la fuerza cortante y el momento usando las ecuaciones de equilibrio. V' y M' equivalen a θ y Δ, respectivamente, para la viga real. En particular, si esos valores son positivos, la pendiente es en sentido contrario a las manecillas del reloj y el desplazamiento es hacia arriba.



Ejemplo 8–9

Determine la pendiente y la deflexión en el punto B de la viga de acero mostrada en la figura 8–21*a*. Las reacciones ya se han calculado. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 800$ in^4.

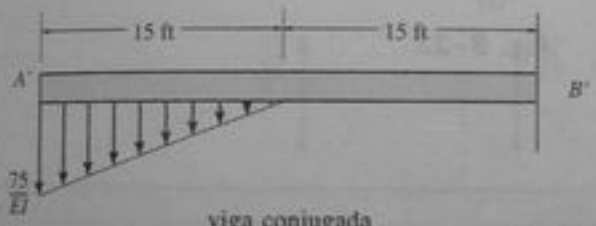


viga real

(a)

Solución

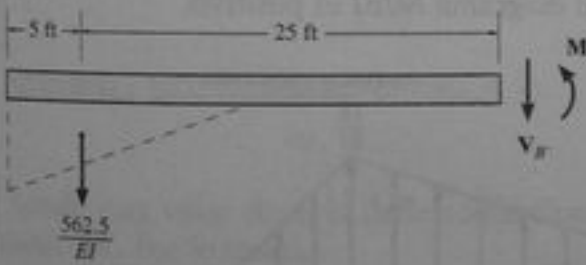
Viga conjugada. La viga conjugada se muestra en la figura 8–21*b*. Los soportes en A' y B' corresponden a los soportes en A y B sobre la viga real, tabla 8–2. Es importante entender por qué es esto así. El diagrama de M/EI es *negativo*, por lo que la carga distribuida actúa hacia *abajo*.



viga conjugada

(b)

Equilibrio. Dado que se desea determinar θ_B y Δ_B, debemos calcular $V_{B'}$ y M_B, en la viga conjugada, figura 8–21*c*.



reacciones

(c)

$$+\downarrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{562.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI} + V_{B'} = 0$$

$$\theta_B = V_{B'} = -\frac{562.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

$$= \frac{-562.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{29(10^3)\ \text{k/in}^2(144\ \text{in}^2/\text{ft}^2)800\ \text{in}^4(1\ \text{ft}^4/(12)^4\ \text{in}^4)}$$

$$= -0.00349\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{B'} = 0; \qquad \frac{562.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI}(25\ \text{ft}) + M_{B'} = 0$$

$$\Delta_B = M_{B'} = -\frac{14{,}062.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

$$= \frac{-14{,}062.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{29(10^3)(144)\ \text{k/ft}^2[800/(12)^4]\ \text{ft}^4}$$

$$= -0.0873\ \text{ft} = -1.05\ \text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

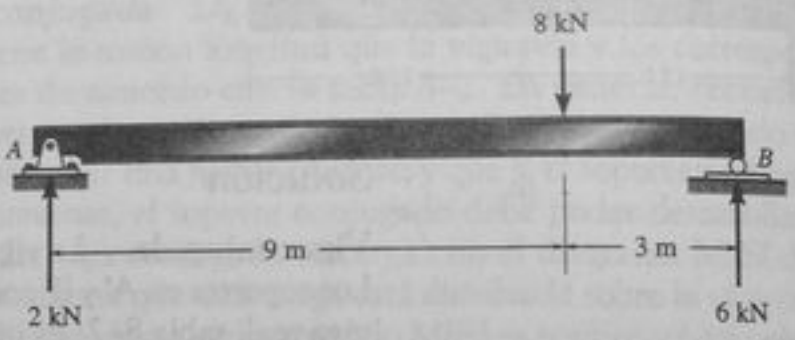
(d)

Los signos negativos indican que la pendiente de la viga se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj y que el desplazamiento es hacia abajo, figura 8–21*d*.

Fig. 8–21

Ejemplo 8–10

Determine la deflexión máxima de la viga de acero mostrada en la figura 8–22*a*. Las reacciones ya se han calculado. $E = 200$ GPa, $I = 60(10^6)$ mm^4.



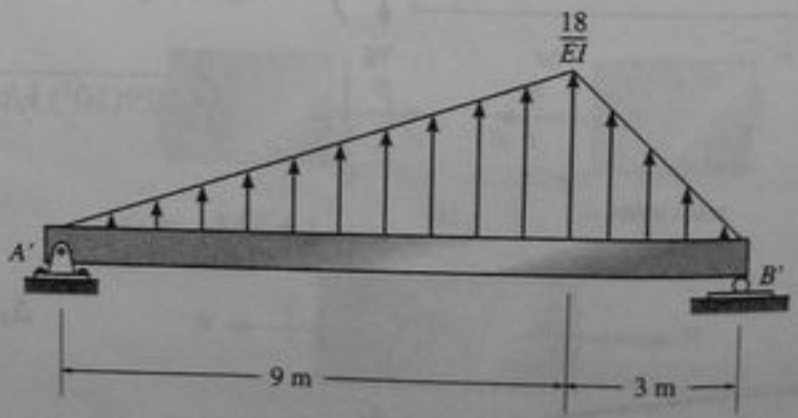
viga real

(a)

Fig. 8–22

Solución

Viga conjugada. La viga conjugada cargada con el diagrama *M/EI* se muestra en la figura 8–22*b*. Aquí, la carga distribuida actúa hacia arriba, ya que el diagrama *M/EI* es pósitivo.



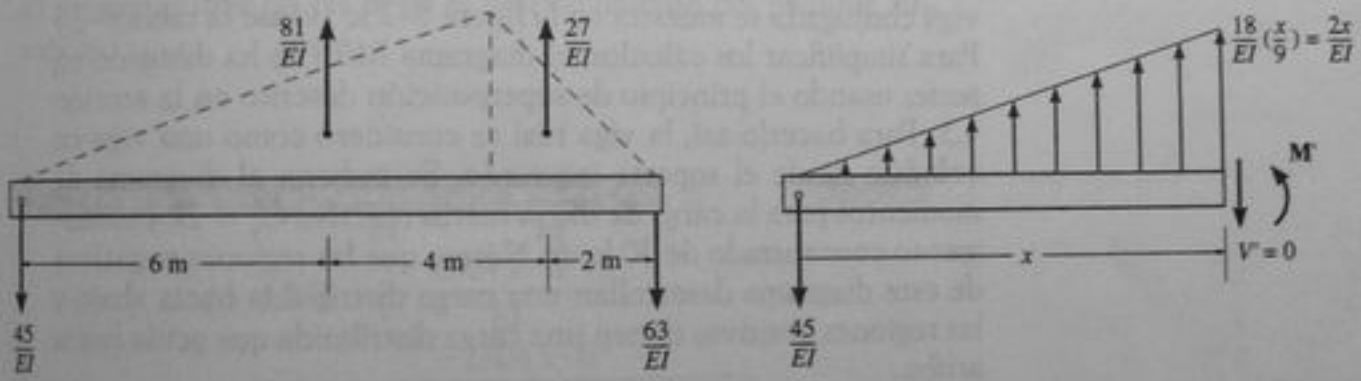
viga conjugada

(b)

Equilibrio. Se determinan primero las reacciones externas sobre la viga conjugada y se indican sobre el diagrama de cuerpo libre en la figura 8–22*c*. La *deflexión máxima* de la viga real ocurre en el punto en que la *pendiente* de la viga es *cero*. Esto corresponde al mismo punto en la viga conjugada donde la *fuerza cortante* es *cero*. Suponiendo que este punto está en la región $0 \le x < 9$ m desde A', podemos aislar la sección mostrada en la figura 8–22*d*. Nótese que el máximo de la carga distribuida se determinó por triángulos semejantes, esto es, $w/x = (18/EI)/9$. Se requiere que $V' = 0$, por lo que

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -\frac{45}{EI} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{EI}\right)x = 0$$

$$x = 6.71 \text{ m} \qquad (0 \le x < 9 \text{ m}) \text{ OK}$$



reacciones externas

(c)

reacciones internas

(d)

Usando este valor de x, la deflexión máxima corresponde al momento M'. Por lo tanto,

$$\curvearrowleft +\Sigma M = 0; \; -\frac{45}{EI}(6.71) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2(6.71)}{EI}\right)6.71\right]\frac{1}{3}(6.71) - M' = 0$$

$$\Delta_{max} = M' = -\frac{201.2 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{-201.2 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][60(10^6) \text{ mm}^4(1 \text{ m}^4/(10^3)^4 \text{ mm}^4)]}$$

$$= -0.0168 \text{ m} = -16.8 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.

Ejemplo 8–11

Determine el desplazamiento del pasador en B y la pendiente de cada segmento de viga conectado al pasador para la viga de acero mostrada en la figura 8–23*a*. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 30$ in^4.

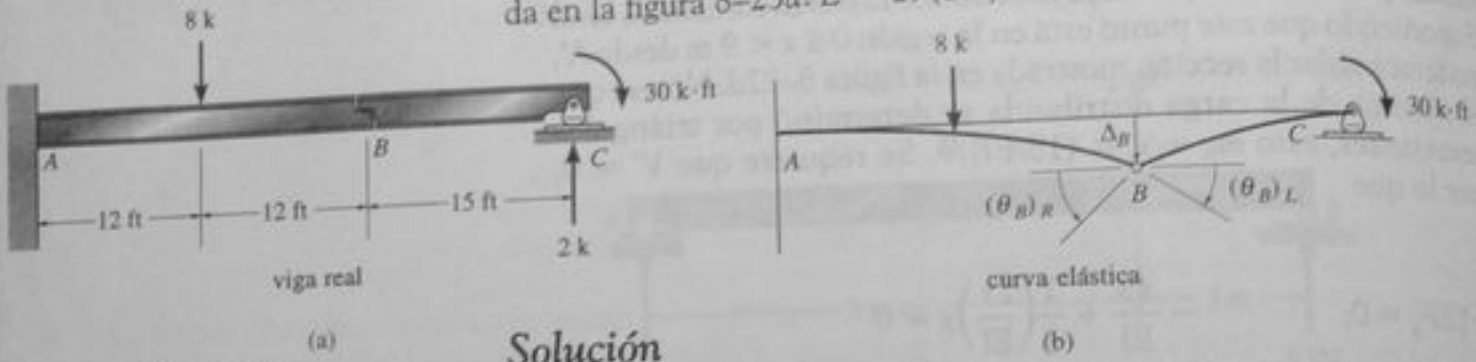
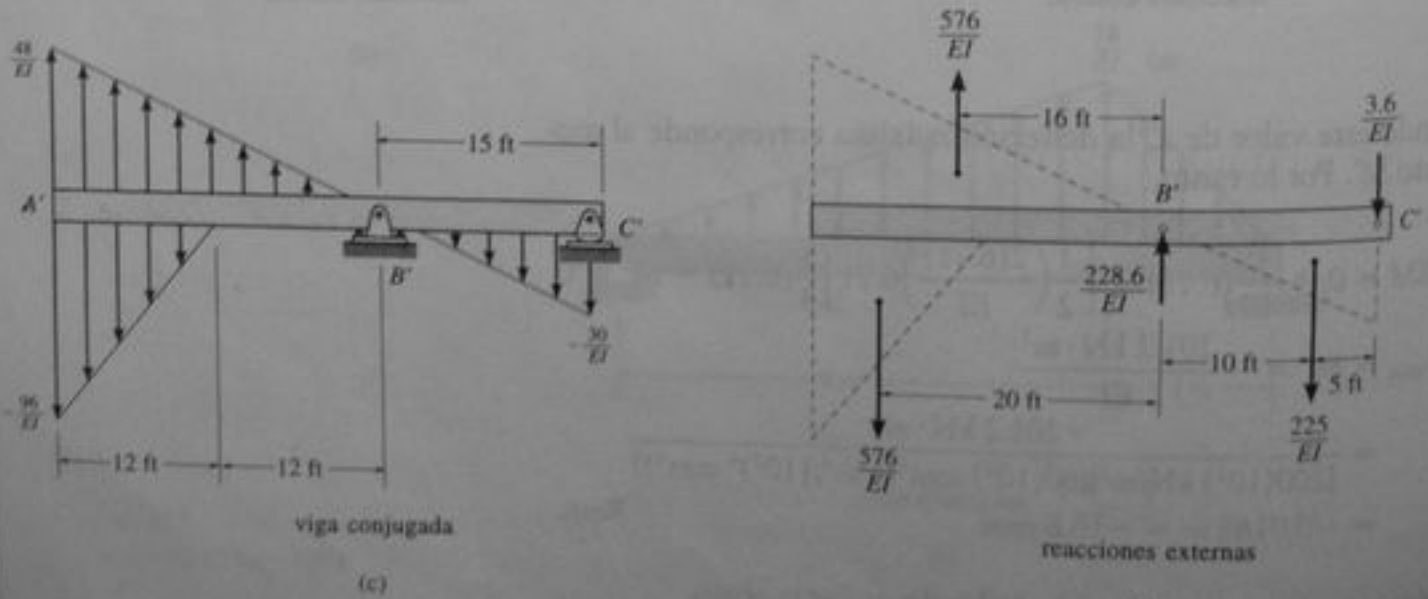


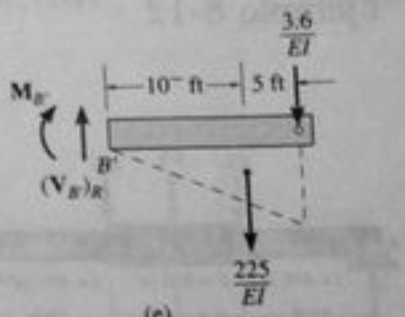
Fig. 8–23

Solución

Viga conjugada. La curva elástica de la viga se muestra en la figura 8–23*b* para identificar el desplazamiento desconocido Δ_B y las pendientes $(\theta_B)_L$ y $(\theta_B)_R$ a la izquierda y derecha del pasador. La viga conjugada se muestra en la figura 8–23*c* (véase la tabla 8–2.) Para simplificar los cálculos, el diagrama *M/EI* se ha dibujado en *partes* usando el principio de superposición descrito en la sección 4.5. Para hacerlo así, la viga real se consideró como una viga en voladizo desde el soporte izquierdo. Se indican el diagrama de momentos para la carga de 8k, la fuerza reactiva $C_y = 2$k y el momento concentrado de 30 k · ft. Nótese que las regiones negativas de este diagrama desarrollan una carga distribuida hacia abajo y las regiones positivas tienen una carga distribuida que actúa hacia arriba.



Equilibrio. Las reacciones externas en B' y C' se calculan primero y los resultados se indican en la figura 8–23*d*. Para determinar $(\theta_B)_R$, la viga conjugada se secciona justo a la *derecha* de B' y se calcula la fuerza cortante $(V_{B'})_R$, figura 8–23*e*. Así,



(e)

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad (V_{B'})_R - \frac{225}{EI} - \frac{3.6}{EI} = 0$$

$$(\theta_B)_R = (V_{B'})_R = \frac{228.6\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

$$= \frac{228.6\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{[29(10^3)(144)\ \text{k/ft}^2][30/(12)^4]\ \text{ft}^4}$$

$$= 0.0378\ \text{rad} \qquad \textbf{Resp.}$$

El momento interno en B' da el desplazamiento del pasador. Entonces,

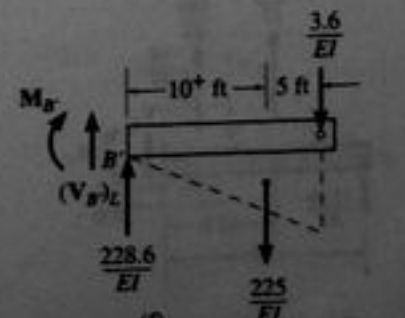
$$\curvearrowright+\Sigma M_{B'} = 0; \qquad M_{B'} + \frac{225}{EI}(10) + \frac{3.6}{EI}(15) = 0$$

$$\Delta_B = M_{B'} = -\frac{2304\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

$$= \frac{-2304\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{[29(10^3)(144)\ \text{k/ft}^2][30/(12)^4]\ \text{ft}^4}$$

$$= -0.381\ \text{ft} = -4.58\ \text{in.} \qquad \textbf{Resp.}$$

La pendiente $(\theta_B)_L$ puede encontrarse de una sección de viga justo a la *izquierda* de B', figura 8–23*f*. Así,



(f)

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad (V_{B'})_L + \frac{228.6}{EI} - \frac{225}{EI} - \frac{3.6}{EI} = 0$$

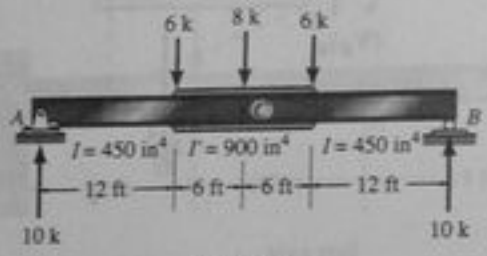
$$(\theta_B)_L = (V_{B'})_L = 0 \qquad \textbf{Resp.}$$

Está claro que $\Delta_B = M_{B'}$, pues este segmento es el mismo previamente considerado, ya que los brazos de momento son sólo ligeramente diferentes en las figuras 8–23*e* y *f*.

Fig. 8–23e,f

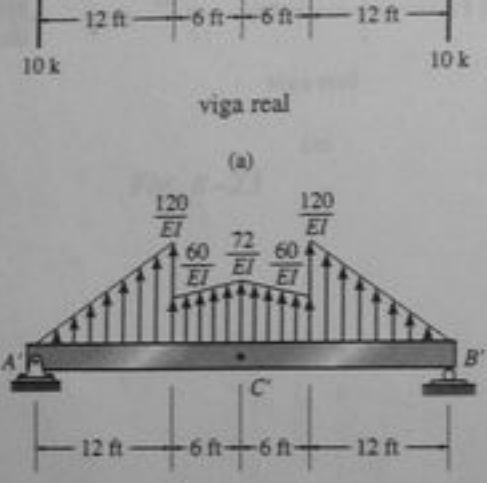
Ejemplo 8-12

La trabe de la figura 8–24*a* está hecha con una viga continua reforzada en su porción central con cubreplacas que incrementan el momento de inercia. Los segmentos extremos de 12 ft tienen un momento de inercia de $I = 450\ \text{in}^4$ y la porción central tiene un momento de inercia de $I' = 900\ \text{in}^4$. Determine su deflexión en el centro del claro C. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. Las reacciones ya se han calculado.



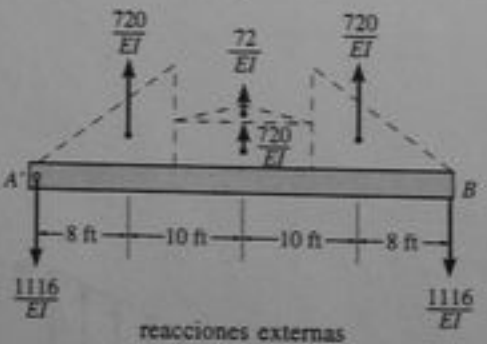
viga real

(a)



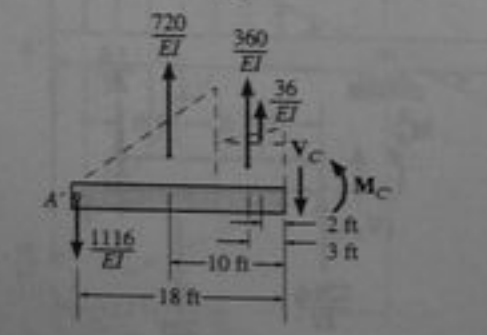
viga conjugada

(c)



reacciones externas

(d)



reacciones internas

(e)

Fig. 8–24

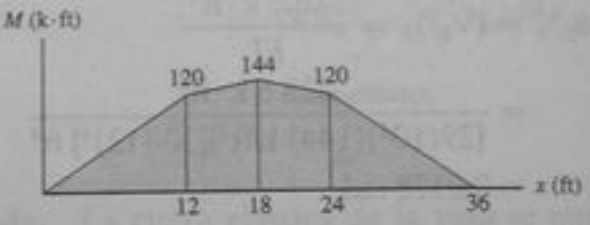


diagrama de momentos

(b)

Solución

Viga conjugada. Se determina primero el diagrama de momentos de la trabe, figura 8–24*b*. Como $I' = 2I$, para simplificar, expresamos la carga sobre la viga conjugada en términos de la constante EI como se muestra en la figura 8–24*c*.

Equilibrio. Las reacciones sobre la viga conjugada pueden calcularse aprovechando la simetría de las cargas o usando las ecuaciones de equilibrio. Los resultados se muestran en la figura 8–24*d*. Como va a determinarse la deflexión en C, debemos calcular el momento interno en C'. Usando el método de las secciones, aislamos el segmento A'C' y determinamos las resultantes de las cargas distribuidas y sus posiciones, figura 8–24*e*. Así entonces,

$$\downarrow + \Sigma M_{C'} = 0; \frac{1116}{EI}(18) - \frac{720}{EI}(10) - \frac{360}{EI}(3) - \frac{36}{EI}(2) + M_{C'} = 0$$

$$M_{C'} = -\frac{11{,}736\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

Sustituyendo los datos numéricos para EI y convirtiendo las unidades, tenemos

$$\Delta_C = M_{C'} = -\frac{11{,}736\ \text{k}\cdot\text{ft}^3(1728\ \text{in}^3/\text{ft}^3)}{29(10^3)\ \text{k/in}^2(450\ \text{in}^4)} = -1.55\ \text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.

8.6 Trabajo externo y energía de deformación

Los métodos semigráficos presentados en las secciones anteriores son muy efectivos para encontrar los desplazamientos y pendientes en puntos de *vigas* sometidas a cargas relativamente sencillas. Para cargas más complicadas o para estructuras como armaduras y marcos, se sugiere usar métodos de energía para los cálculos. La mayoría de los métodos de energía se basan en el *principio de la conservación de la energía*, que establece que el trabajo U_e hecho por todas las fuerzas externas que actúan sobre una estructura, se transforma en trabajo interno de energía de deformación U_i, que se desarrolla cuando la estructura se deforma. Si no se excede el límite elástico del material, la *energía de deformación elástica* llevará la estructura a su estado no deformado cuando las cargas se retiren. El principio de la conservación de la energía puede, por lo tanto, enunciarse matemáticamente como

$$U_e = U_i \tag{8–8}$$

Antes de desarrollar cualquiera de los métodos de energía basados en este principio, determinaremos primero el trabajo externo y la energía de deformación causada por una fuerza o un momento. Las formulaciones que presentaremos proporcionarán una base para entender los métodos de trabajo y energía que veremos en el resto de este capítulo.

Trabajo externo; fuerza

Cuando una fuerza **F** sufre un desplazamiento dx en la *misma dirección* que la fuerza, el trabajo hecho es $dU_e = F\,dx$. Si el desplazamiento total es x, el trabajo es

$$U_e = \int_0^x F\,dx \tag{8–9}$$

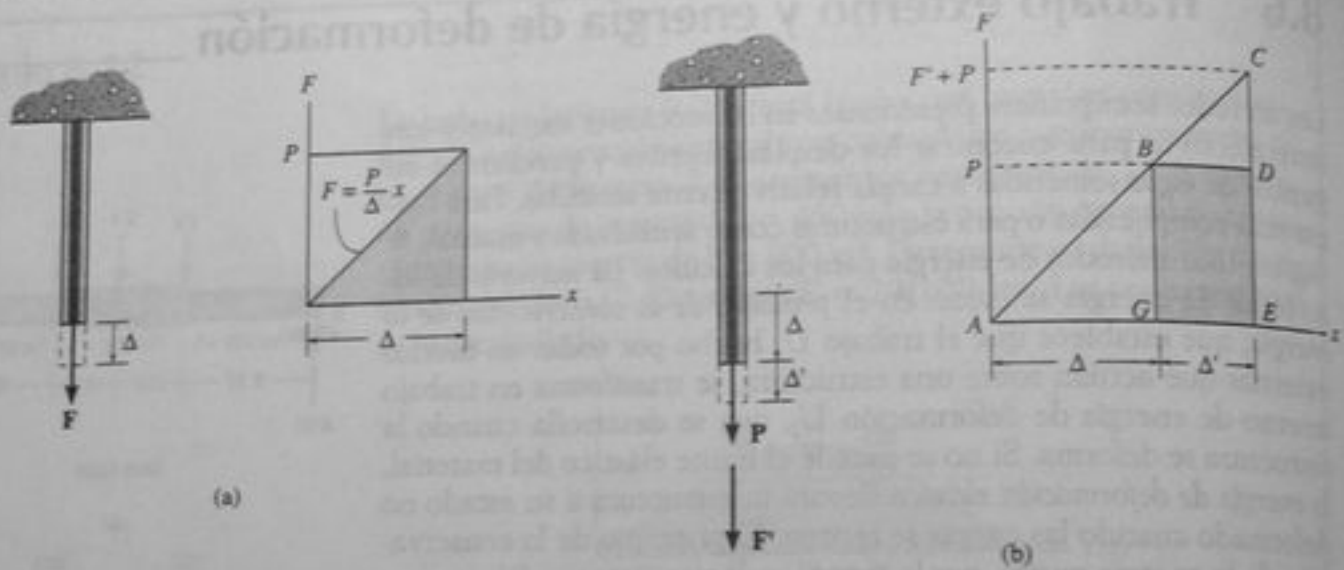


Fig. 8–25

Considere ahora el efecto causado por una fuerza axial aplicada al extremo de una barra como la mostrada en la figura 8–25*a*. Conforme la magnitud de **F** es incrementada *gradualmente* desde cero hasta un valor límite $F = P$, la deflexión final de la barra resulta ser Δ. Si el material tiene una respuesta elástica lineal, entonces $F = (P/\Delta)x$. Sustituyendo en la ecuación 8–9 e integrando de 0 a Δ, obtenemos

$$U_e = \tfrac{1}{2}P\Delta \tag{8–10}$$

que representa el *área triangular* sombreada.

Podemos también concluir de esta ecuación que conforme se aplica de manera gradual una fuerza a la barra, su magnitud crece linealmente de cero a un valor P. En consecuencia, el trabajo hecho es igual a la *magnitud promedio de la fuerza* $(P/2)$ multiplicada por el desplazamiento total (Δ).

Suponga que **P** ya está aplicada a la barra y que ahora se aplica *otra fuerza* **F'**, de manera que la barra se deflexiona una distancia adicional Δ', figura 8–25*b*. El trabajo hecho por **P** (no por **F'**) cuando la barra sufre la deflexión adicional Δ' es entonces

$$U_e = P\Delta' \tag{8–11}$$

Aquí, el trabajo representa el *área rectangular* sombreada en la figura 8–25*b*. En este caso, **P** no cambia su magnitud ya que Δ' es causada sólo por **F'**. Por tanto, el trabajo es simplemente la magnitud de la fuerza (P) multiplicada por el desplazamiento (Δ').

En resumen, cuando una fuerza P se aplica a la barra, seguida por la aplicación de la fuerza F', el trabajo total hecho por ambas fuerzas se representa por el área triangular *ACE* en la figura 8–25*b*. El área triangular *ABG* representa el trabajo de P causado por su desplazamiento Δ, el área triangular *BCD* representa el trabajo de F', ya que esta fuerza causa un desplazamiento Δ' y, por último, el área rectangular sombreada *BDEG* representa el trabajo adicional hecho por P cuando se desplaza la distancia Δ' causada por F'.

Trabajo externo; momento

El trabajo de un momento se define como el producto de la magnitud del momento **M** y el ángulo $d\theta$ a través del cual gira, esto es, $dU = M\,d\theta$, figura 8–26. Si el ángulo total de rotación es θ radianes, el trabajo es

$$U_e = \int_0^\theta M\,d\theta \tag{8–12}$$

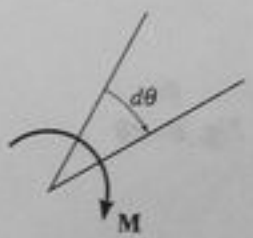


Fig. 8–26

Como en el caso de una fuerza, si el momento se aplica *gradualmente* a una estructura, desde cero hasta M, el trabajo es entonces

$$U_e = \tfrac{1}{2}M\theta \tag{8–13}$$

Sin embargo, si el momento está ya aplicado a la estructura y otra carga la deforma adicionalmente en un ángulo θ', entonces **M** gira θ' y el trabajo es

$$U_e' = M\theta' \tag{8–14}$$

Energía de deformación; fuerza axial

Cuando una fuerza axial **S** se aplica gradualmente a la barra en la figura 8–27, el material se deformará en forma tal que el *trabajo externo* hecho por **S** se convertirá en *energía de deformación* que se almacena en la barra (ecuación 8–8). Si el material es *elástico lineal*, la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, es aplicable y si la barra tiene una sección transversal constante de área *A* y longitud *L*, el esfuerzo final será $\sigma = N/A$ y la deformación final será $\epsilon = \Delta/L$. En consecuencia, $N/A = E(\Delta/L)$ y la deflexión final es

$$\Delta = \frac{NL}{AE} \tag{8–15}$$

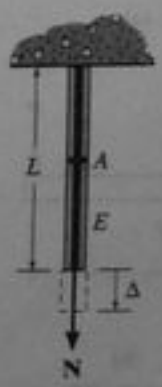


Fig. 8–27

Sustituyendo en la ecuación 8–10, con $P = N$, la energía de deformación en la barra es por tanto

$$U_i = \frac{N^2L}{2AE} \tag{8–16}$$

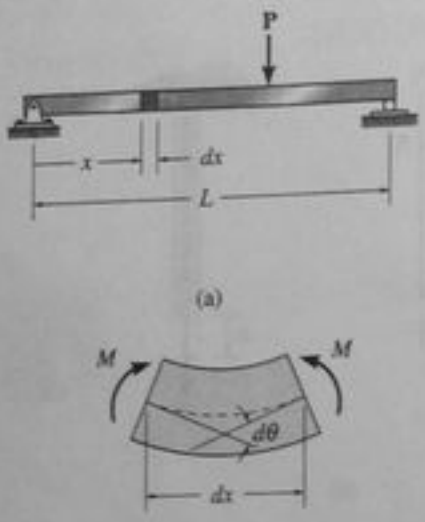


Fig. 8–28

Energía de deformación; flexión

Considere la viga mostrada en la figura 8–28*a*, que es deformada por la carga *gradualmente* aplicada **P**. Esta fuerza genera un momento interno **M** en la viga en una sección localizada a una distancia x del soporte izquierdo. La rotación resultante del elemento diferencial *dx*, figura 8–28*b*, puede encontrarse a partir de la ecuación 8–1, esto es, $d\theta = (M/EI)\,dx$. Entonces, con base en el principio de la conservación de la energía, la energía de deformación o trabajo almacenado en el elemento, se determina con la ecuación 8–13 ya que el momento interno se desarrolla gradualmente. Por tanto,

$$dU_i = \frac{M^2\,dx}{2EI} \tag{8–17}$$

La energía de deformación para la viga se determina integrando este resultado sobre toda la longitud de la viga. El resultado es

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \tag{8–18}$$

8.7 Principio del trabajo y de la energía

Ahora que hemos formulado el trabajo y la energía de deformación para una fuerza y un momento, ilustraremos cómo la conservación de la energía o el principio del trabajo y la energía pueden aplicarse para determinar el desplazamiento en un punto sobre una estructura. Para hacer esto, consideremos la determinación del desplazamiento Δ en el punto en que se aplica la fuerza **P** a la viga en voladizo en la figura 8–29*a*. Se requiere que $U_e = U_i$. De la ecuación 8–10, el trabajo externo es $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$. Para obtener la energía de deformación resultante, debemos determinar primero el momento interno como función de la posición x en la viga y luego aplicar la ecuación 8–18. En este caso $M = -Px$, figura 8–29*b*, de manera que

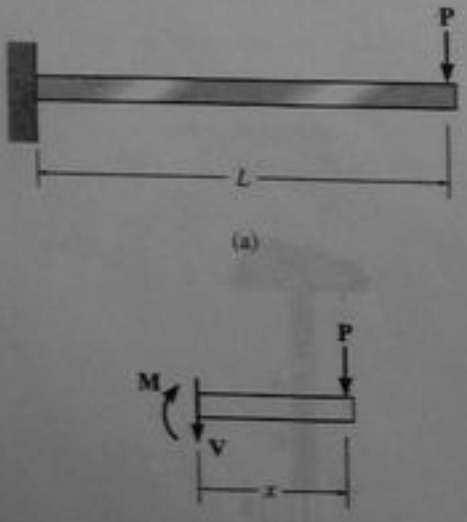


Fig. 8–29

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2\,dx}{2EI} = \frac{1}{6}\frac{P^2L^3}{EI}$$

Igualando el trabajo externo a la energía de deformación interna y despejando el desplazamiento desconocido Δ, tenemos

$$U_e = U_i$$
$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{1}{6}\frac{P^2L^3}{EI}$$
$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

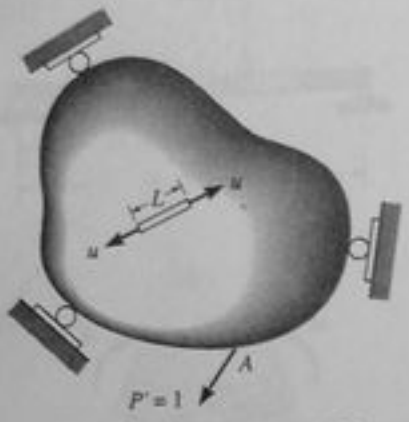
Aunque la solución aquí es bastante directa, la aplicación de este método se limita a sólo unos cuantos problemas selectos. Se observará que sólo *una carga* puede aplicarse a la estructura, ya que si se aplica más de una carga, se tendrá un desplazamiento desconocido bajo cada carga y sólo es posible escribir *una* ecuación de "trabajo" para la viga. Además, *sólo el desplazamiento bajo la carga puede obtenerse*, ya que el trabajo externo depende de la fuerza y de su correspondiente desplazamiento. Una manera de darle la vuelta a esas limitaciones es usar el método del trabajo virtual o el teorema de Castigliano, que se explicarán en las secciones que siguen a continuación.

8.8 Principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual, igual que otros métodos de análisis de energía, se basa en la conservación de la energía en la estructura, $U_e = U_i$ (ecuación 8–8). Este método fue desarrollado por John Bernoulli en 1717 y se le llama a veces método de la carga unitaria. Proporciona un medio general para obtener el desplazamiento y la pendiente en un punto sobre una estructura, ya sea ésta una viga, un marco o una armadura.

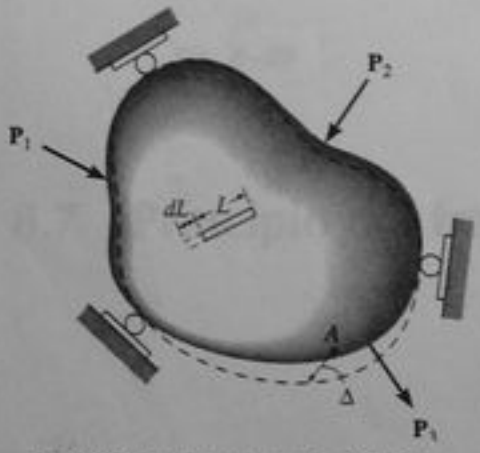
Antes de desarrollar el principio del trabajo virtual, es necesario hacer algunas consideraciones generales respecto al principio del trabajo y la energía, el cual se explicó en la sección anterior. Si consideramos una estructura deformable de cualquier forma o tamaño y le aplicamos una serie de *cargas externas* **P**, esto generará *cargas internas* **u** en puntos de la estructura. *Es necesario que las cargas externas e internas queden relacionadas por las ecuaciones de equilibrio*. Como consecuencia de esas cargas, ocurrirán desplazamientos externos Δ bajo las cargas **P** y desplazamientos internos δ en cada punto de carga interna **u**. En general, *esos desplazamientos no tienen que ser elásticos* y ellos pueden no estar relacionados con las cargas; sin embargo, *los desplazamientos externos e internos deben estar relacionados entre sí por la compatibilidad de los desplazamientos*. En otras palabras, si se conocen los desplazamientos externos, los correspondientes desplazamientos internos quedan definidos unívocamente. En general, el principio del trabajo y la energía establece:

$$\underbrace{\Sigma P\Delta}_{\substack{\text{Trabajo de las}\\ \text{cargas externas}}} = \underbrace{\Sigma u\delta}_{\substack{\text{Trabajo de las}\\ \text{cargas internas}}} \qquad (8\text{–}19)$$



Aplique primero la carga virtual P'

(a)



Luego aplique las cargas reales P_1, P_2, P_3

(b)

Fig. 8–30

Con base en este concepto, desarrollaremos ahora el principio del trabajo virtual de manera que pueda ser utilizado para determinar el *desplazamiento* de un punto sobre una estructura. Para ello, consideremos que la estructura (o cuerpo) sea de forma arbitraria, como se muestra en la figura 8–30*b*.* Supongamos que se requiere determinar el desplazamiento Δ del punto A sobre el cuerpo causado por las "cargas reales" $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$. Supondremos que esas cargas no ocasionan movimientos de los soportes, pero que en general pueden deformar el material *más allá del límite elástico*. Como ninguna carga externa actúa sobre el punto A del cuerpo y en la dirección de Δ, el desplazamiento Δ puede determinarse colocando *primero* sobre el cuerpo una *carga "virtual"* tal que esta fuerza $\mathbf{P}'$ actúe en la *misma dirección* que Δ, figura 8–30*a*. Por conveniencia, cosa que después será evidente, escogeremos una magnitud "unitaria" para $\mathbf{P}'$, esto es, $P' = 1$. Se usa el término "virtual" para describir la carga *ya que es imaginaria* y *realmente no existe como parte de la carga real*. Sin embargo, la carga unitaria ($\mathbf{P}'$) genera una carga interna virtual $\mathbf{u}$ en un elemento representativo o fibra del cuerpo, como se muestra en la figura 8–30*a*. Se requiere aquí que $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{u}$ estén relacionados por las ecuaciones de equilibrio. Como resultado de esas cargas, el cuerpo y el elemento experimentarán un desplazamiento virtual debido a la carga $\mathbf{P}'$, aunque no nos interesará su magnitud. Una vez que se aplican las cargas virtuales y *que* el cuerpo está sometido a las *cargas reales* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$, figura 8–30*b*, el punto A se desplaza una distancia Δ, ocasionando que el elemento se deforme dL. Como consecuencia de esto, la fuerza virtual externa $\mathbf{P}'$ y la carga virtual interna $\mathbf{u}$ "viajan a lo largo" de Δ y dL, respectivamente, y efectúan por tanto un *trabajo virtual externo* de $1 \cdot \Delta$ sobre el cuerpo y un trabajo virtual interno de $u \cdot dL$ sobre el elemento. Como el trabajo virtual externo es igual al trabajo virtual interno ejercido sobre todos los elementos del cuerpo, podemos escribir la ecuación del trabajo virtual como

$$\underbrace{1}_{\text{cargas virtuales}} \cdot \Delta = \sum \underbrace{u}_{\text{desplazamientos reales}} \cdot dL \tag{8–20}$$

donde

$P' = 1$ = carga unitaria virtual externa que actúa en la dirección de Δ
u = carga virtual interna que actúa sobre el elemento en la dirección de dL
Δ = desplazamiento externo causado por las cargas reales
dL = deformación interna del elemento causada por las cargas reales

*Esta forma arbitraria representará luego una armadura, viga o marco específico.

Escogiendo $P' = 1$, puede verse que la solución para Δ se obtiene directamente, ya que $\Delta = \Sigma u\, dL$.

De manera similar, si el desplazamiento rotacional o pendiente de la tangente en un punto sobre una estructura debe determinarse, se aplicará un *momento concentrado* virtual M' de magnitud "unitaria" en el punto. En consecuencia, este momento concentrado genera una carga virtual $\mathbf{u}_\theta$ en uno de los elementos del cuerpo. Suponiendo que las cargas reales deforman el elemento una magnitud dL, la rotación θ puede encontrarse a partir de la ecuación del trabajo virtual

$$1 \cdot \theta = \Sigma u_\theta \cdot dL \qquad (8\text{–}21)$$

(cargas virtuales; desplazamientos reales)

donde

M'= 1 = momento concentrado virtual externo que actúa en la dirección de θ
u_θ = carga virtual interna que actúa sobre un elemento en la dirección de dL
θ = desplazamiento rotacional externo o pendiente en radianes causado por las cargas reales
dL= deformación interna del elemento causado por las cargas reales

A este método para la aplicación del principio del trabajo virtual se le llama a menudo *método de las fuerzas virtuales* ya que se aplica una fuerza virtual para el cálculo de un *desplazamiento real*. La ecuación del trabajo virtual en este caso representa un *requisito de compatibilidad* para la estructura. Aunque no es importante aquí, observe que podemos también aplicar el principio del trabajo virtual como un *método de desplazamientos virtuales*. En este caso, se imponen desplazamientos virtuales sobre la estructura mientras que está sometida a cargas reales. Este método puede usarse para determinar una fuerza sobre una estructura o en su interior,* de manera que la ecuación del trabajo virtual se expresa entonces como un *requisito de equilibrio*.

*Se usó de esta manera en la sección 6.3 con referencia al principio de Müller-Breslau.

8.9 Método del trabajo virtual: armaduras

Cargas externas

Podemos usar la ecuación 8–20 para determinar el desplazamiento Δ del nudo de una armadura cuando está sometida a una carga. Por ejemplo, considere el nudo A en la figura 8–31. Un elemento típico de la "armadura" sería uno de sus *miembros* que tuviese una longitud L. Si la carga aplicada genera una respuesta *elástica lineal* del material, dL en la ecuación 8–20 se determina con $\Delta L = NL/AE$, donde N es la fuerza normal o axial en el miembro, causada por las cargas. La ecuación del trabajo virtual para una armadura es entonces

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \tag{8–22}$$

donde

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre el nudo de la armadura en la dirección estipulada para Δ
n = fuerza normal virtual interna en el miembro de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa
Δ = desplazamiento externo del nudo causado por las cargas reales sobre la armadura
N = fuerza normal interna en el miembro de una armadura causada por las cargas reales
L = longitud de un miembro
A = área de la sección transversal de un miembro
E = módulo de elasticidad de un miembro

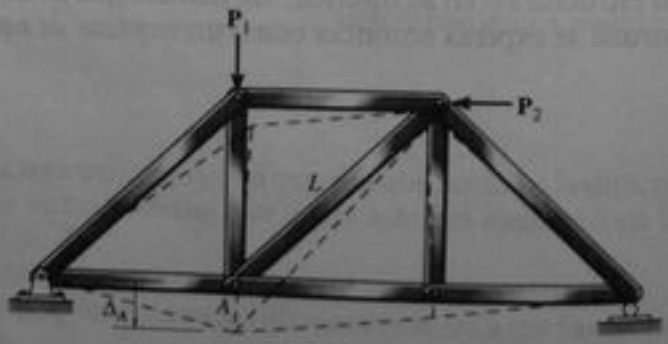


Fig. 8–31

La formulación de esta ecuación se obtiene en forma natural del desarrollo expuesto en la sección 8.8. Aquí, la carga unitaria virtual externa genera fuerzas virtuales internas **n** en cada uno de los miembros de la armadura. Las cargas reales ocasionan entonces que el nudo de la armadura se desplace una distancia Δ en la misma dirección que la carga unitaria virtual y que cada miembro se desplace NL/AE en igual dirección que su respectiva fuerza **n**. En consecuencia, el trabajo virtual externo $1 \cdot \Delta$ es igual al trabajo virtual interno o a la energía de deformación interna (virtual) almacenada en *todos* los miembros de la armadura, esto es, $\Sigma nNL/AE$.

Temperatura

En algunos casos, los miembros de armaduras pueden cambiar su longitud debido a cambios de temperatura. Si α es el coeficiente de dilatación térmica para un miembro y ΔT es el cambio en su temperatura, el cambio en longitud de un miembro es $\Delta L = \alpha \Delta T L$. Por lo tanto, podemos determinar el desplazamiento de un nudo específico de una armadura debido a este cambio de temperatura a partir de la ecuación 8–20, escrita como

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n \alpha \Delta T L \tag{8–23}$$

donde

$1 =$ carga unitaria virtual externa que actúa sobre el nudo de la armadura en la dirección estipulada para Δ
$n =$ fuerza normal virtual interna en un miembro de armadura causada por la carga unitaria virtual externa
$\Delta =$ desplazamiento externo del nudo causado por el cambio de temperatura
$\alpha =$ coeficiente de dilatación térmica del miembro
$\Delta T =$ cambio en temperatura del miembro
$L =$ longitud del miembro

Errores de fabricación y combeo

En ocasiones pueden ocurrir errores de fabricación en las longitudes de los miembros de una armadura. También, en algunos casos, los miembros de armaduras deben fabricarse ligeramente más o menos largos para combar la armadura. Suele procederse así con una armadura de puente para que la cuerda inferior quede desplazada hacia arriba en una cantidad equivalente a la deflexión hacia abajo de la cuerda cuando esté sometida al peso propio total del puente. Si un miembro de una armadura es más corto o más largo que su longitud

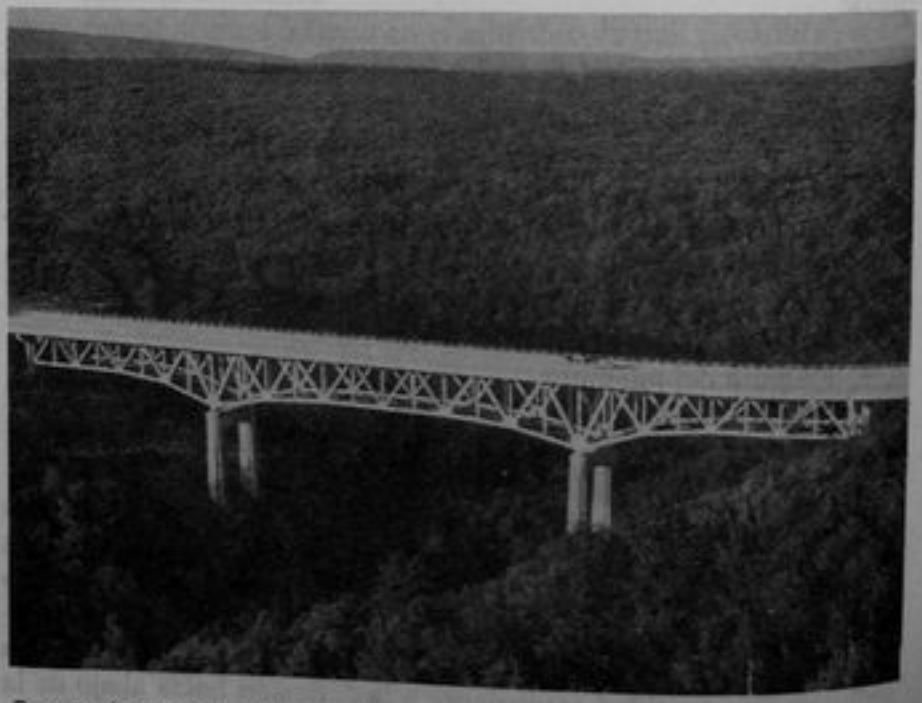
estipulada, el desplazamiento de un nudo de la armadura respecto a su posición estipulada puede determinarse por aplicación directa de la ecuación 8–20, expresada como

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n \, \Delta L \tag{8–24}$$

donde

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre el nudo de una armadura en la dirección estipulada para Δ
n = fuerza normal virtual interna en un miembro de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa
Δ = desplazamiento externo de un nudo causado por errores de fabricación
ΔL = diferencia en longitud del miembro respecto a su tamaño estipulado causada por un error de fabricación

Una combinación de los segundos miembros de las ecuaciones 8–22 a la 8–24 será necesaria si actúan cargas externas sobre la armadura y algunos de sus miembros sufren cambios térmicos, o si han sido fabricados con dimensiones erróneas.



Puente de armadura Hawk Falls en Pennsylvania. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento puede usarse para determinar el desplazamiento de cualquier nudo de una armadura usando el método del trabajo virtual.

***Fuerzas virtuales* u** Coloque la carga unitaria sobre la armadura en el nudo donde debe determinarse el desplazamiento. La carga debe dirigirse a lo largo de la línea de acción del desplazamiento. Con la carga unitaria así situada y todas las cargas reales *retiradas* de la armadura, use el método de las juntas o el método de las secciones para calcular la fuerza interna **u** en cada miembro de la armadura. Suponga que las fuerzas de tensión son positivas y las fuerzas de compresión, negativas.

***Fuerzas reales* N** Use el método de las secciones o el método de los nudos para determinar las fuerzas **N** en cada miembro. Esas fuerzas son causadas sólo por las cargas reales que actúan sobre la armadura. Nuevamente, suponga que las fuerzas de tensión son positivas y las fuerzas de compresión, negativas.

Ecuación del trabajo virtual Aplique la ecuación del trabajo virtual para determinar el desplazamiento buscado. Es importante retener el signo algebraico de cada una de las correspondientes fuerzas **n** y **N** al sustituir estos términos en la ecuación. Si la suma resultante $\Sigma nNL/AE$ es positiva, el desplazamiento Δ tiene la misma dirección que la carga unitaria. Si se obtiene un valor negativo, Δ es opuesta a la carga unitaria.

De manera similar, al aplicar $1 \cdot \Delta = \Sigma n\alpha \Delta T L$ observe que si cualquiera de los miembros sufre un *incremento de temperatura*, ΔT será *positiva*, mientras que un *decremento de temperatura* dará un valor *negativo* para ΔT. Igualmente, para $1 \cdot \Delta = \Sigma n \Delta L$, cuando un error de fabricación *incrementa la longitud* de un miembro, ΔL es *positiva*, mientras que un *decremento en la longitud*, la hace *negativa*.

Al aplicar cualquier fórmula, debe ponerse atención a las unidades de cada cantidad numérica. En particular, a la carga virtual unitaria puede asignársele cualquier unidad arbitraria (lb, kip, N, etc.), ya que las fuerzas **n** tendrán las *mismas unidades* y en consecuencia las unidades de la carga virtual unitaria y las de las fuerzas **n** se cancelarán en ambos lados de la ecuación.

Ejemplo 8–13

Determine el desplazamiento vertical del nudo C de la armadura de acero mostrada en la figura 8–32*a*. El área de la sección transversal de cada miembro es $A = 0.5$ in^2 y $E = 29(10^3)$ ksi.

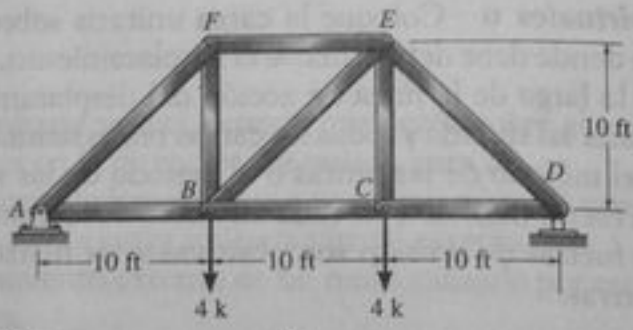
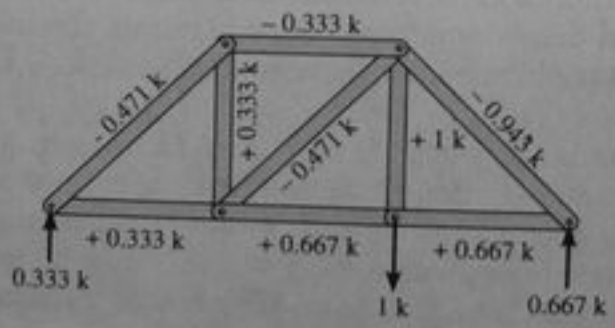


Fig. 8–32 (a)

Solución

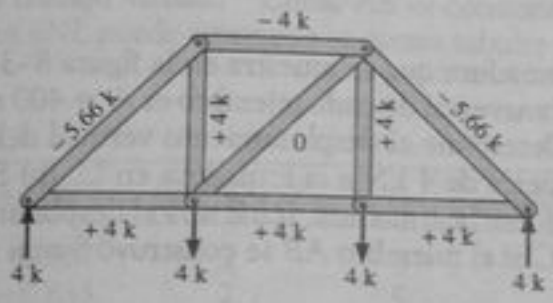
Fuerzas virtuales n. Se coloca sólo una carga vertical de 1 k en el nudo C y se calcula la fuerza en cada miembro usando el método de los nudos. Los resultados de este análisis se muestran en la figura 8–32*b*. Recuerde que los números positivos indican fuerzas de tensión y los números negativos fuerzas de compresión.



fuerzas virtuales **n**

(b)

Fuerzas reales N. Las fuerzas reales en los miembros se calculan usando el método de los nudos. Los resultados de este análisis se muestran en la figura 8–32*c*.



fuerzas reales N

(c)

Ecuación del trabajo virtual. Al arreglar los datos en forma tabular obtenemos

Miembro	n (k)	N (k)	L (ft)	nNL (k²·ft)
AB	0.333	4	10	13.33
BC	0.667	4	10	26.67
CD	0.667	4	10	26.67
DE	−0.943	−5.66	14.14	75.47
FE	−0.333	−4	10	13.33
EB	−0.471	0	14.14	0
BF	0.333	4	10	13.33
AF	−0.471	−5.66	14.14	37.70
CE	1	4	10	40
				Σ246.50

Así entonces,

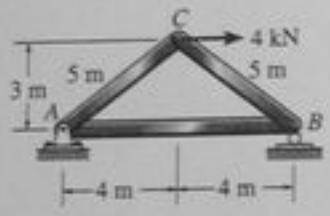
$$1\,\text{k}\cdot\Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{246.50\,\text{k}^2\cdot\text{ft}}{AE}$$

Convirtiendo las unidades de longitud de miembros a pulgadas y sustituyendo los valores numéricos de A y E, resulta

$$1\,\text{k}\cdot\Delta_{C_v} = \frac{(246.50\,\text{k}^2\cdot\text{ft})(12\,\text{in./ft})}{(0.5\,\text{in}^2)(29(10^3)\,\text{k/in}^2)}$$

$$\Delta_{C_v} = 0.204\,\text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 8–14



(a)

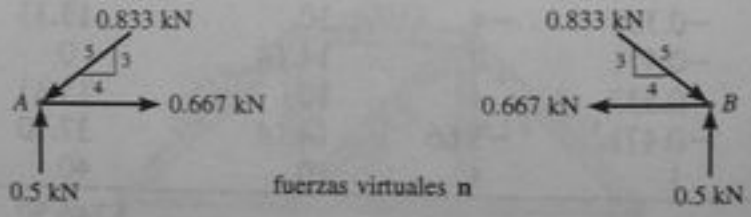
Fig. 8–33

Considere la armadura que se muestra en la figura 8–33*a*. El área de la sección transversal de cada miembro es $A = 400\ mm^2$ y $E = 200\ GPa$. (a) Determine el desplazamiento vertical del nudo C si se aplica una fuerza de 4 kN a la armadura en C. (b) Si no actúa ninguna carga sobre la armadura, ¿cuál será el desplazamiento vertical del nudo C si el miembro *AB* se construyó 5 mm más corto?

Solución

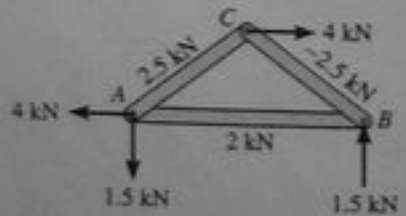
Parte (a)

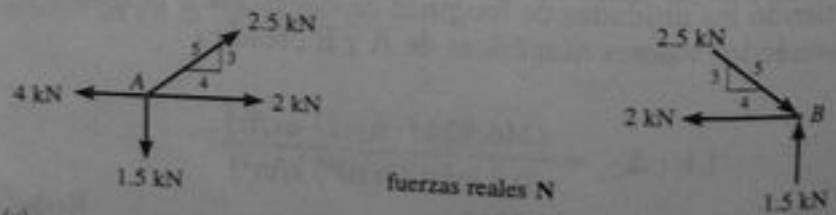
Fuerzas virtuales n. Como debe determinarse el *desplazamiento vertical* del nudo C, aplicamos una fuerza virtual de 1 kN en C en dirección vertical. Note que las unidades de esta fuerza son las *mismas* que las de la carga real. Las reacciones en los soportes A y B ya han sido calculadas y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la armadura, figura 8–33*b*. La fuerza **n** en cada miembro se determina por el método de los nudos como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de los nudos A y B. Los resultados se indican sobre el diagrama de cuerpo libre de la armadura; un número positivo indica tensión y uno negativo indica compresión.



(b)

Fuerzas reales N. Las reacciones en los soportes A y B causadas por la carga real de 4 kN se muestran en el diagrama de cuerpo libre en la figura 8–33c. También se muestra el análisis de los nudos A y B con los resultados mostrados sobre el diagrama de cuerpo libre de la armadura.





(c)

Ecuación del trabajo virtual. Como AE es constante, cada uno de los términos nNL puede arreglarse en forma tabular y calcularse.

Miembro	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN^2 · m)
AB	0.667	2	8	10.67
AC	−0.833	2.5	5	−10.41
CB	−0.833	−2.5	5	10.41
				Σ10.67

Entonces,

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{10.67\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

Sustituyendo los valores $A = 400\ \text{mm}^2 = 400(10^{-6})\ \text{m}^2$, $E = 200\ \text{GPa} = 200(10^6)\ \text{kN/m}^2$, tenemos

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{C_v} = \frac{10.67\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}}{400(10^{-6})\ \text{m}^2(200(10^6)\ \text{kN/m}^2)}$$

$$\Delta_{C_v} = 0.000133\ \text{m} = 0.133\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). Aquí debemos aplicar la ecuación 8–33. Como el desplazamiento vertical de C debe determinarse, podemos usar los resultados de la figura 8–33*b*. Sólo el miembro AB sufre una deformación de $\Delta L = -0.005$ m. Entonces,

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n\, \Delta L$$

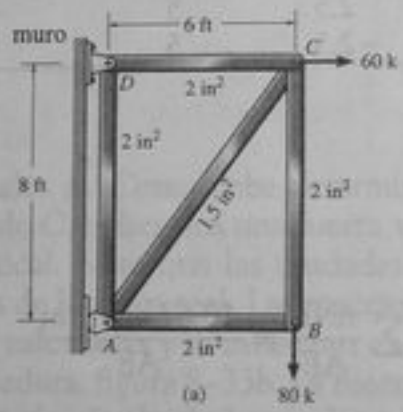
$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{C_v} = (0.667\ \text{kN})(-0.005\ \text{m})$$

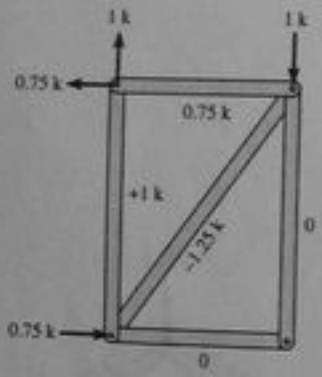
$$\Delta_{C_v} = -0.00333\ \text{m} = -3.33\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que el nudo C se desplaza *hacia arriba*, en sentido opuesto al de la carga vertical de 1 kN. Nótese que si se toman en cuenta la carga de 4 kN y el error de fabricación juntos, el desplazamiento resultante es entonces $\Delta_{C_v} = 0.13 - 3.33 = -3.20$ mm (hacia arriba).

Ejemplo 8–15

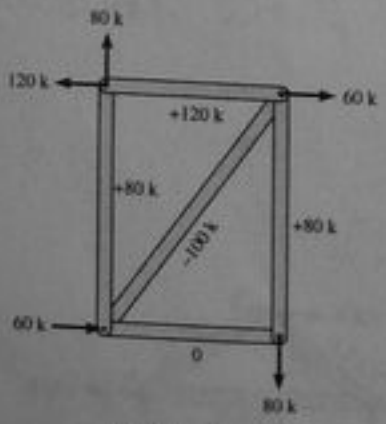
Determine el desplazamiento vertical del nudo C de la armadura de acero mostrada en la figura 8–34*a*. Debido al calor radiado por el muro, el miembro *AD* está sometido a un *incremento* de temperatura de $\Delta T = +120°F$. Considere $\alpha = 0.6(10^{-5})/°F$ y $E = 29(10^3)$ ksi. El área de la sección transversal de cada miembro se indica en la figura.





fuerzas virtuales **n**

(a)



fuerzas reales **N**

(c)

Solución

Fuerzas virtuales n. Se aplica una carga *vertical* de 1 k a la armadura en el nudo C y se calculan las fuerzas en cada miembro, figura 8–34*b*.

Fuerzas reales N. Como las fuerzas **n** en los miembros *AB* y *BC* son cero, las fuerzas **N** en esos miembros *no* tienen que ser calculadas. ¿Por qué? No obstante, mostramos el análisis de fuerzas reales completo en la figura 8–34c.

Ecuación del trabajo virtual. Tanto las cargas como la temperatura determinan la deformación; por tanto, se combinan las ecuaciones 8–22 y 8–23. En unidades de kips y pulgadas, tenemos

$$1 \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} + \Sigma n\alpha \Delta T L$$

$$= \frac{(0.75)(120)(6)(12)}{2[29(10^3)]} + \frac{(1)(80)(8)(12)}{2[29(10^3)]} + \frac{(-1.25)(-100)(10)(12)}{1.5[29(10^3)]} + (1)[0.6(10^{-5})](120)(8)(12)$$

$$\Delta_{C_v} = 0.658 \text{ in.} \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 8–34

8.10 Método del trabajo virtual: vigas y marcos

Las ecuaciones del trabajo virtual desarrolladas en la sección 8.8 pueden también aplicarse a problemas de deflexiones en vigas y marcos. Como las deformaciones debidas a *flexión* son la *causa principal* de las deflexiones en marcos, analizaremos primero sus efectos. Las deflexiones debidas a fuerza cortante, fuerza axial, torsión y temperatura se considerarán en la sección 8.11.

El principio del trabajo virtual, o más exactamente, el método de la fuerza virtual, puede formularse para las deflexiones en vigas y marcos considerando la viga mostrada en la figura 8–35*a*. Aquí, el desplazamiento Δ del punto A debe ser determinado. Para calcular Δ se coloca una carga unitaria virtual que actúe en la dirección de Δ sobre la viga en A y se determina el *momento virtual interno* $\mathbf{m}$ por el método de las secciones en una posición x arbitraria medida desde el soporte izquierdo, figura 8–35*b*. Cuando las cargas reales actúan sobre la viga, figura 8–35*a*, el punto A se desplaza Δ. Si estas cargas generan una respuesta *elástica lineal* del material, entonces, de la ecuación 8–1, el elemento dx se deforma o gira $d\theta = (M/EI)dx$.* Aquí, M es el momento interno en x causado por las cargas reales. En consecuencia, el *trabajo virtual externo* hecho por la carga unitaria es $1 \cdot \Delta$ y el *trabajo*

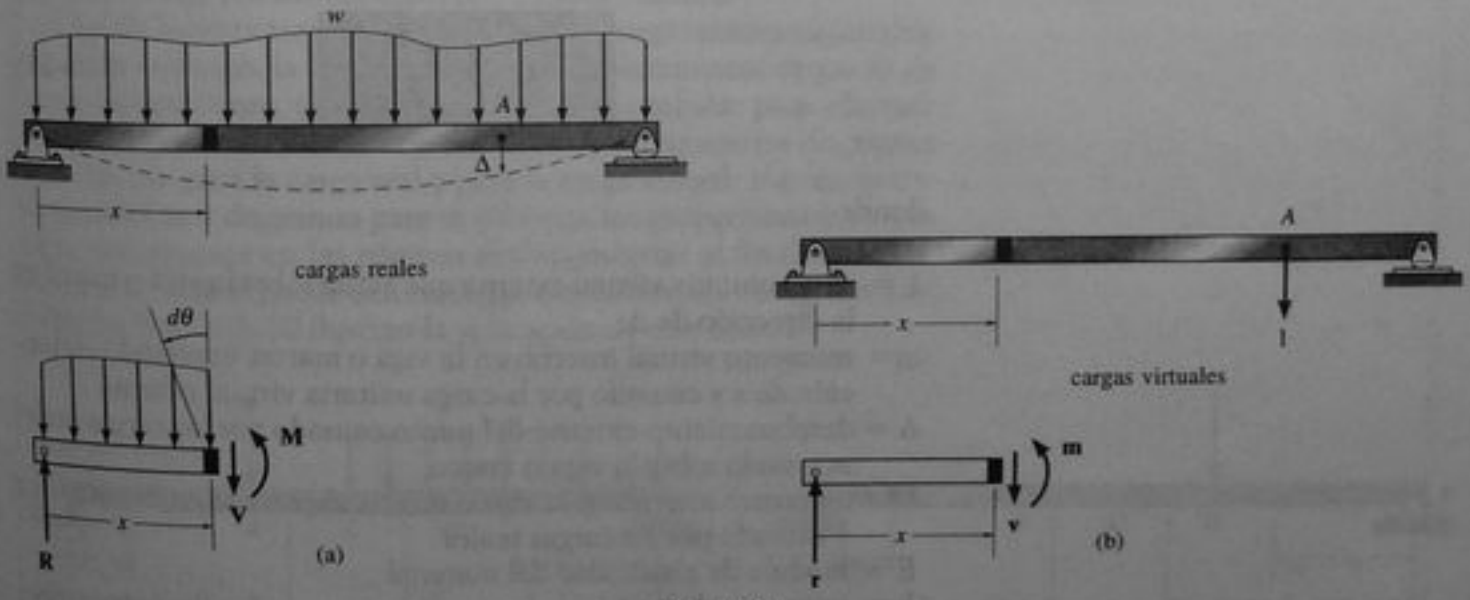


Fig. 8–35

*Recuerde que si el material se deforma más allá de su límite elástico, el principio del trabajo virtual aún es aplicable, aunque en este caso debe usarse un análisis plástico o no lineal.

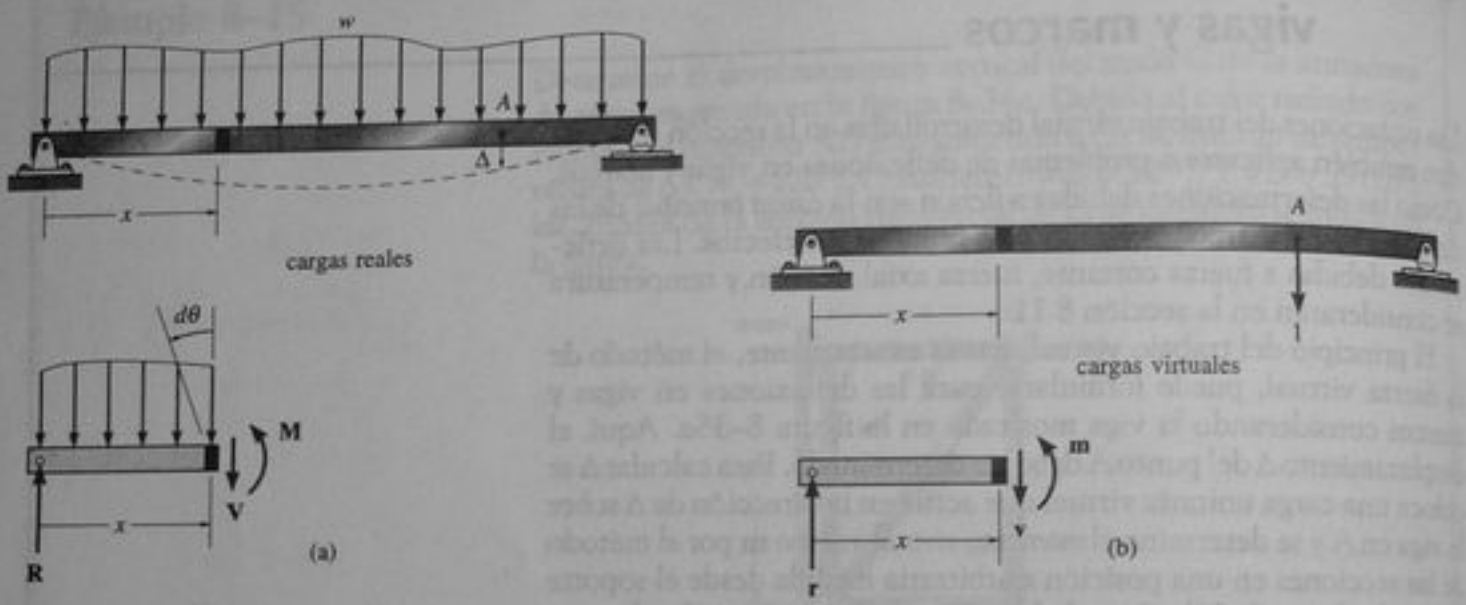


Figura 8–35 (repetida)

virtual interno hecho por el momento **m** es $m\,d\theta = m(M/EI)dx$. Para sumar los efectos sobre todos los elementos dx a lo largo de la viga se requiere una integración, por lo que la ecuación 8–20 se convierte en

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx \tag{8–25}$$

donde

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre la viga o marco en la dirección de Δ
m = momento virtual interno en la viga o marco, expresado en función de x y causado por la carga unitaria virtual externa
Δ = desplazamiento externo del punto causado por las cargas reales actuando sobre la viga o marco
M = momento interno en la viga o marco, expresado en función de x y causado por las cargas reales
E = módulo de elasticidad del material
I = momento de inercia de la sección transversal, calculado respecto al eje neutro

De manera similar, si debe determinarse la rotación de la tangente o ángulo θ de la pendiente en un punto sobre la curva elástica de la viga, se aplica un momento concentrado unitario en el punto, y se

viga, se aplica un momento concentrado unitario en el punto, y se determinan los correspondientes momentos m_θ internos. Como el trabajo del momento concentrado unitario es $1 \cdot \theta$, se tiene entonces

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}\, dx \tag{8–26}$$

Al aplicar las ecuaciones 8–25 y 8–26 es importante ver claramente que las integrales definidas en el lado derecho representan realmente la cantidad de energía de deformación virtual *almacenada* en la viga. Si fuerzas o momentos concentrados actúan sobre la viga o si la carga distribuida es discontinua, no basta con efectuar una sola integración a lo largo de toda la viga; deberán escogerse varias coordenadas x dentro de regiones que no tengan discontinuidades de carga. No es necesario que cada x tenga el mismo origen; sin embargo, la x seleccionada para determinar el momento real M en una región particular debe ser la *misma* x usada para determinar el momento virtual m o m_θ dentro de la misma región. Por ejemplo, considere la viga mostrada en la figura 8–36. Para determinar el desplazamiento en D, deben considerarse cuatro regiones de la viga y, por tanto, cuatro integrales de la forma $\int(mM/EI)\, dx$ deberán ser evaluadas. Podemos usar x_1 para determinar la energía de deformación en la región AB, x_2 para la región BC, x_3 para la región DE y x_4 para la región DC. En todo caso, debe escogerse cada coordenada x de manera que tanto $\mathbf{M}$ como $\mathbf{m}$ (o $\mathbf{m}_\theta$) puedan formularse en forma sencilla.

Cuando la estructura está sometida a una carga relativamente simple y, sin embargo, la solución para un desplazamiento requiere de varias integraciones, puede usarse un *método tabular* para efectuar esas integraciones. Para hacerlo así, se dibujan primero los diagramas de momento para la carga real y para la carga virtual. Haciendo corresponder esos diagramas para m y M con los proporcionados en la tabla que aparece en las páginas suplementarias al final del libro, la integral $\int mM\, dx$ puede determinarse con la fórmula apropiada. Los ejemplos 8–17 y 8–20 ilustran la aplicación de este método.

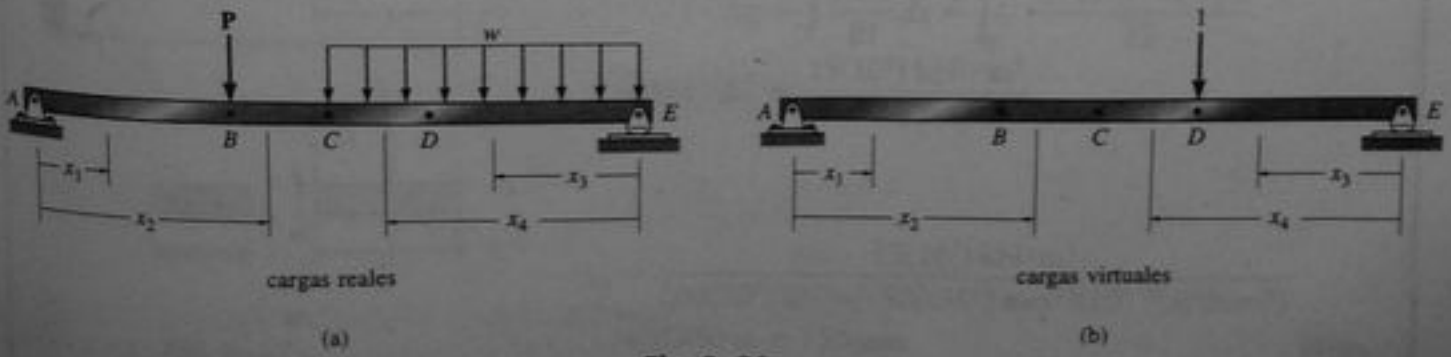


Fig. 8–36

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento puede usarse para determinar el desplazamiento y/o la pendiente en un punto sobre una curva elástica de una viga o marco usando el método del trabajo virtual.

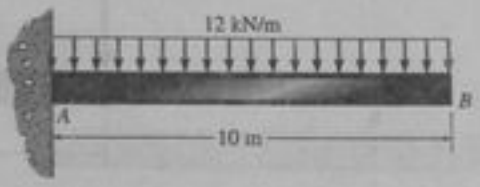
Momentos virtuales m o m_θ Coloque una *carga unitaria* sobre la viga o marco en el punto y en la dirección del *desplazamiento* buscado. Si va a determinarse la *pendiente*, coloque un *momento concentrado* unitario en ese punto. Establezca coordenadas x apropiadas que sean válidas dentro de las regiones de la viga o marco donde no haya discontinuidad de carga real o virtual. Con las cargas virtuales así colocadas y todas las cargas reales *retiradas* de la viga o marco, calcule el momento interno m o m_θ en función de cada coordenada x. En cada caso, suponga m o m_θ positivas, y que actúan en el sentido convencional indicado en la figura 4–1.

Momentos reales Con las *mismas* coordenadas x establecidas para m o m_θ, determine los momentos internos M causados sólo por las cargas reales. Como se supuso m o m_θ *positivos* que actúan en dirección convencional, *es importante que un* M *positivo* actúe en esta *misma* dirección. Ello es necesario ya que el trabajo interno positivo o negativo depende del sentido direccional de la carga (definido por $\pm$ m o $\pm$ m_θ) y del desplazamiento (definido por $\pm$ M $d\theta/EI$).

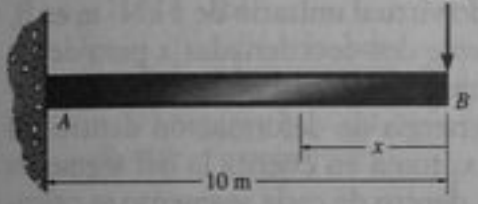
Ecuación del trabajo virtual Aplique la ecuación del trabajo virtual para determinar el desplazamiento Δ o la rotación θ requeridos. Es importante retener el signo algebraico de cada integral calculada dentro de su región especificada. Si la suma algebraica de todas las integrales para la viga entera o marco es positiva, Δ o θ tendrá el mismo sentido que el de la carga unitaria o momento concentrado unitario, respectivamente. Si se obtiene un valor negativo, la dirección de Δ o de θ, será opuesta al de la carga unitaria o momento concentrado unitario.

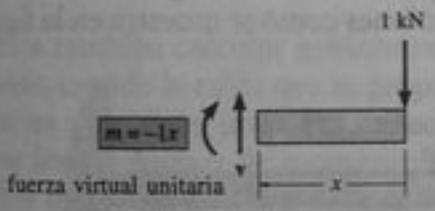
Ejemplo 8–16

Determine el desplazamiento del punto B de la viga de acero mostrada en la figura 8–37*a*. Considere $E = 200$ GPa, $I = 500(10^6)$ mm^4.

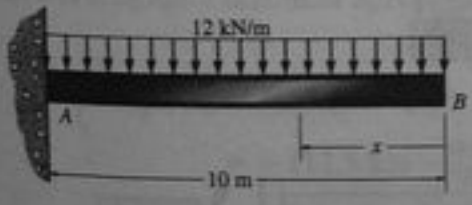


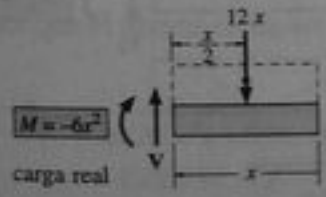
(a)





(b)





(c)

Fig. 8–37

Solución

Momento virtual *m*. El desplazamiento vertical del punto B se obtiene colocando una carga virtual unitaria de 1 kN en B, figura 8–37*b*. Por inspección, no hay discontinuidades de carga, ni real ni virtual, sobre la viga. Se puede entonces usar una *sola* coordenada x para determinar la energía virtual de deformación. Esta coordenada se seleccionará con su origen en B, ya que las reacciones en A no tienen que ser determinadas para encontrar los momentos internos m y M. Usando el método de las secciones, el momento interno m se formula como se muestra en la figura 8–37*b*.

Momento real M. Usando la *misma* coordenada x, el momento interno M se formula como se muestra en la figura 8–37*c*.

Ecuación del trabajo virtual. El desplazamiento vertical de B es entonces

$$1 \cdot \Delta_B = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{10} \frac{(-1x)(-6x^2)\,dx}{EI}$$

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_B = \frac{15(10^3)\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

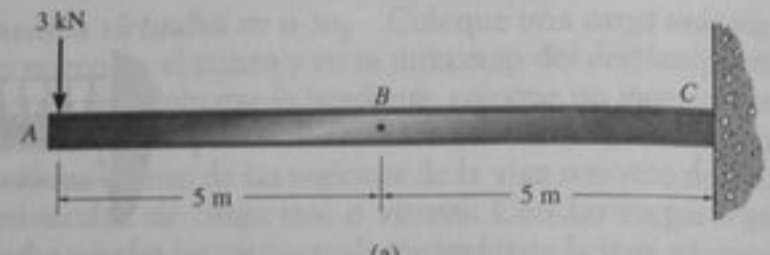
o

$$\Delta_B = \frac{15(10^3)\ \text{kN} \cdot \text{m}^3}{200(10^6)\ \text{kN/m}^2(500(10^6)\ \text{mm}^4)(10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= 0.150\ \text{m} = 150\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 8–17

Determine la pendiente θ en el punto B de la viga de acero mostrada en la figura 8–38*a*. Considere $E = 200$ GPa, $I = 60(10^6)$ mm^4.

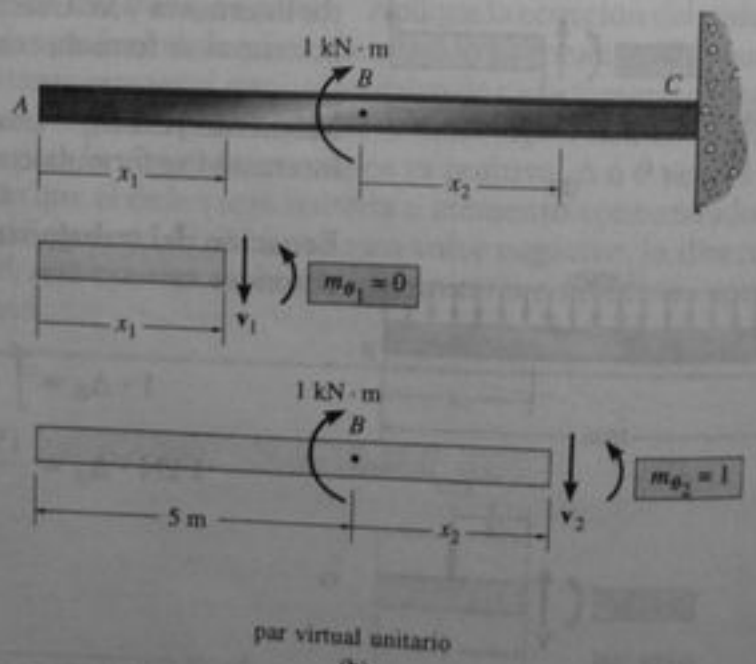


(a)

Fig. 8–38

Solución

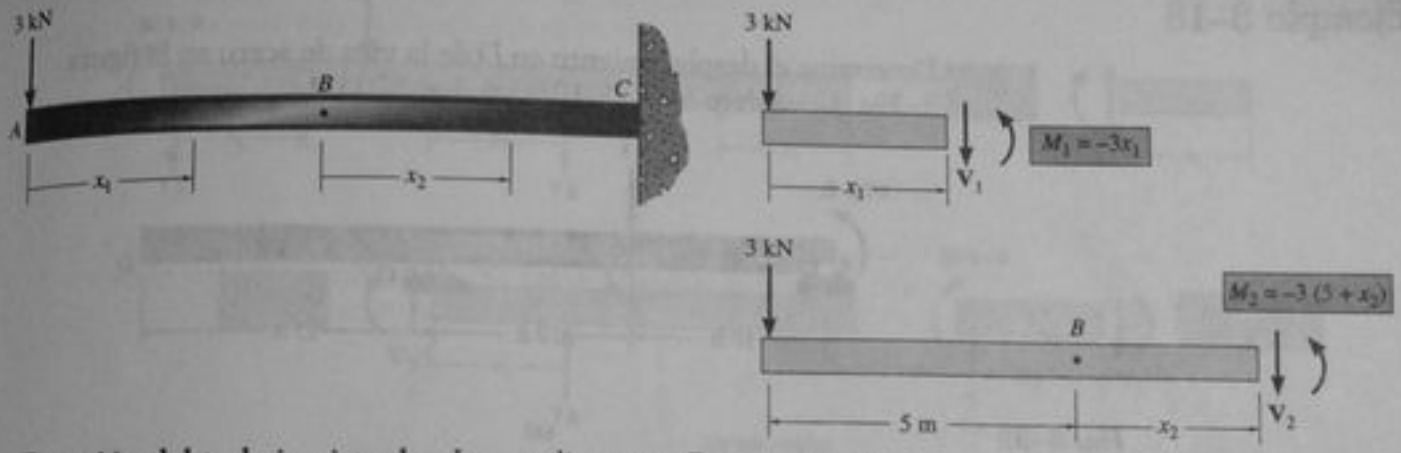
Momentos virtuales m_θ. La pendiente en B se determina colocando un momento concentrado virtual unitario de 1 kN · m en B, figura 8–38*b*. Deben seleccionarse dos coordenadas x para determinar la energía total de deformación virtual en la viga. La coordenada x_1 toma en cuenta la energía de deformación dentro del segmento AB y la coordenada x_2 toma en cuenta la del segmento BC. Los momentos internos m_θ dentro de cada segmento se calculan usando el método de las secciones como se muestra en la figura 8–38*b*.



par virtual unitario

(b)

Momentos reales M. Usando las *mismas* coordenadas x_1 y x_2, los momentos internos M se calculan como se muestra en la figura 8–38*c*.



carga real

(c)

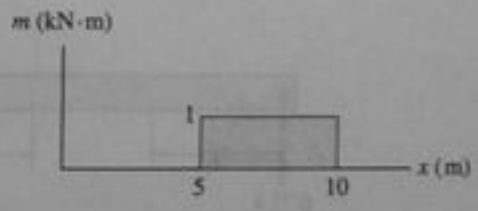
Ecuación del trabajo virtual. La pendiente en B es entonces

$$1 \cdot \theta_B = \int \frac{m_\theta M}{EI}\, dx$$

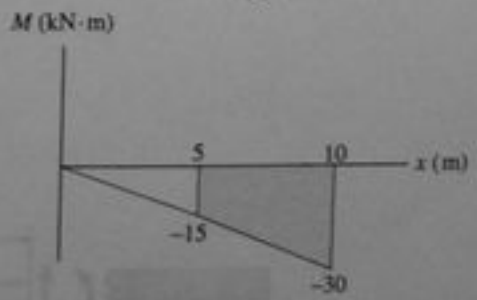
$$= \int_0^5 \frac{(0)(-3x_1)\, dx_1}{EI} + \int_0^5 \frac{(1)[-3(5 + x_2)]\, dx_2}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{-112.5\ \text{kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \qquad (1)$$

Podemos también calcular gráficamente el valor de las integrales $\int m_\theta M dx$, usando la tabla que se proporciona en las páginas suplementarias al final del libro. Para hacerlo así, es necesario primero dibujar los diagramas de momento para las vigas en las figuras 8–38*b* y 8–38*c*. Éstos se muestran en las figuras 8–38*d* y 8–38*e*, respectivamente. Como no hay momento m para $0 \le x < 5$, usamos sólo las áreas rectangular y trapezoidal para evaluar la integral. Del renglón y columna apropiados de la tabla, tenemos



(d)



(e)

$$\int_5^{10} m_\theta M\, dx = \tfrac{1}{2} m(M_1 + M_2)L = \tfrac{1}{2}(1)(-15 - 30)5$$

$$= -112.5\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}^3$$

El mismo valor que el determinado en la ecuación (1). Entonces,

$$(1\ \text{kN} \cdot \text{m}) \cdot \theta_B = \frac{-112.5\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}^2}{200(10^6)\ \text{kN/m}^2[60(10^6)\ \text{mm}^4](10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= -0.00938\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

El *signo negativo* indica que θ_B es *opuesto* en sentido al momento concentrado virtual que se muestra en la figura 8–38*b*.

Ejemplo 8–18

Determine el desplazamiento en D de la viga de acero en la figura 8–39*a*. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 800$ in^4.

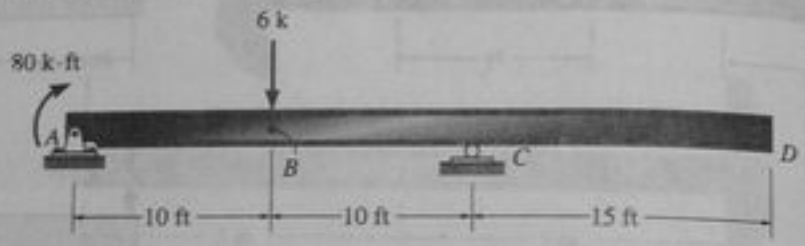
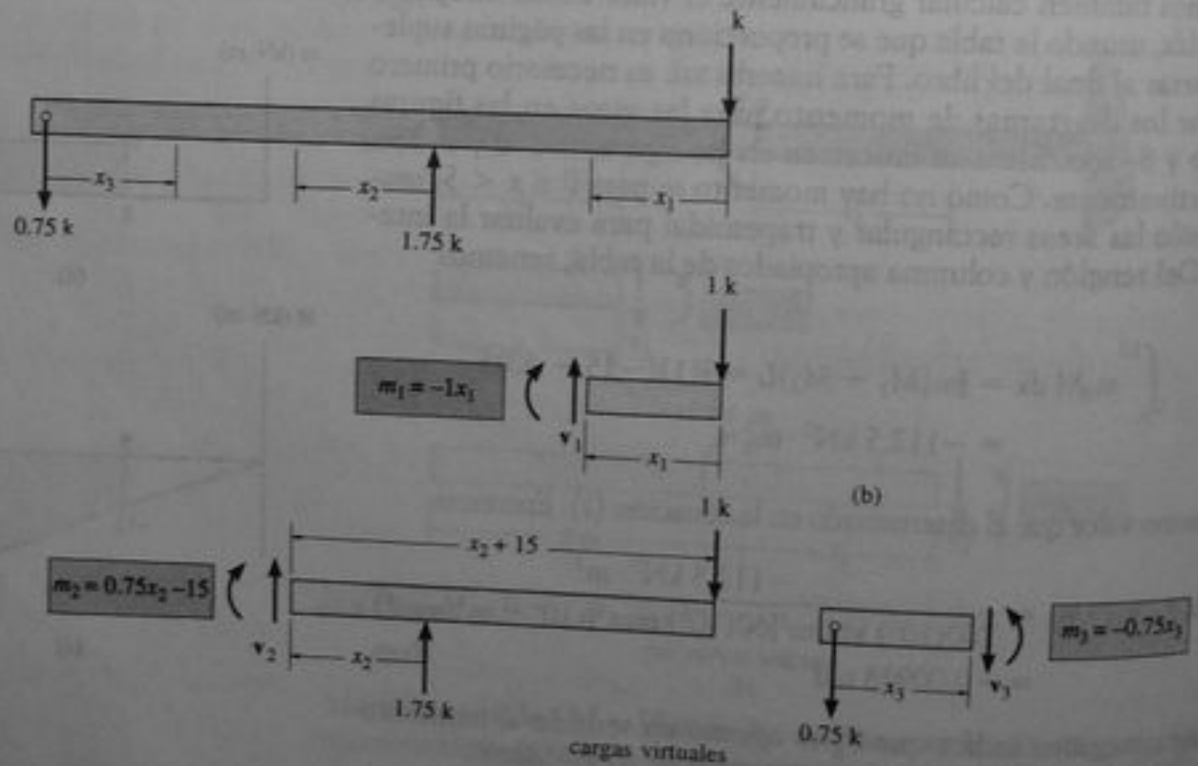
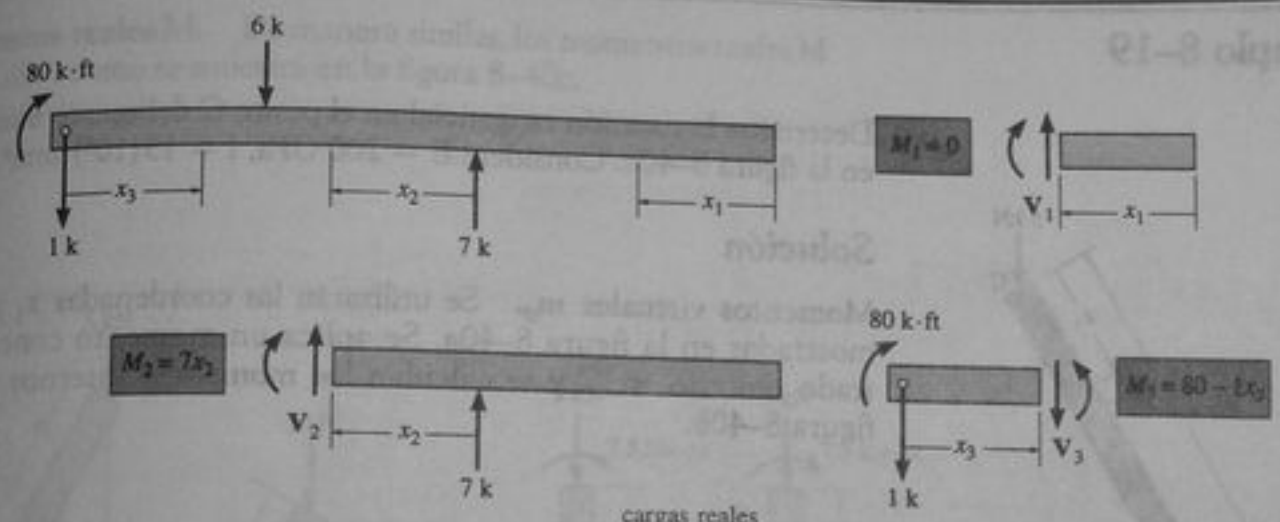


Fig. 8–39 (a)

Solución

Momentos virtuales *m*. La viga se somete a una carga virtual unitaria en D como se muestra en la figura 8–39*b*. Por inspección, *tres coordenadas*, x_1, x_2 y x_3, deben usarse para cubrir todas las regiones de la viga. Nótese que esas coordenadas cubren regiones donde ninguna discontinuidad ocurre, ni por carga real ni por carga virtual. Los momentos internos m han sido calculados en la figura 8–39*b* usando el método de las secciones.





cargas reales

(c)

Momentos reales M. Las reacciones sobre la viga se calculan primero y luego, mediante las *mismas* coordenadas x usadas para m, se determinan los momentos internos M, como se muestra en la figura 8–39c.

Ecuación del trabajo virtual. Si aplicamos la ecuación del trabajo virtual a la viga mediante los datos en las figuras 8–39b y 8–39c, tenemos

$$1 \cdot \Delta_D = \int \frac{mM}{EI}\,dx$$

$$= \int_0^{15} \frac{(-1x_1)(0)\,dx_1}{EI} + \int_0^{10} \frac{(0.75x_2 - 15)(7x_2)\,dx_2}{EI} + \int_0^{10} \frac{(-0.75x_3)(80 - 1x_3)\,dx_3}{EI}$$

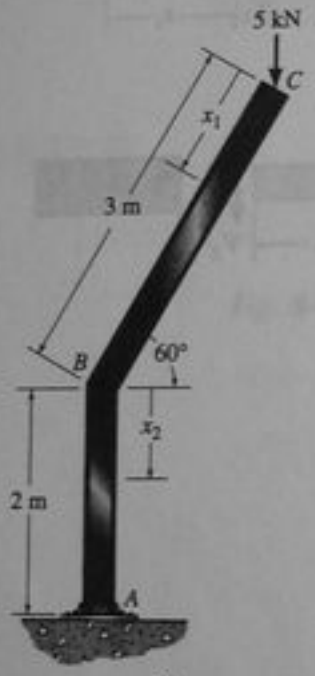
$$\Delta_D = \frac{0}{EI} - \frac{3500}{EI} - \frac{2750}{EI} = -\frac{6250\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

$$\Delta_D = \frac{-6250\ \text{k}\cdot\text{ft}^3(12)^3\ \text{in}^3/\text{ft}^3}{29(10^3)\ \text{k/in}^2(800\ \text{in}^4)} = -0.466\ \text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que el desplazamiento es hacia arriba, opuesto al sentido de la carga unitaria, figura 8–39b. Nótese también que m_1 no tuvo realmente que calcularse ya que $M_1 = 0$.

Ejemplo 8–19

Determine la rotación tangencial en el punto C del marco mostrado en la figura 8–40*a*. Considere $E = 200$ GPa, $I = 15(10^6)$ mm^4.

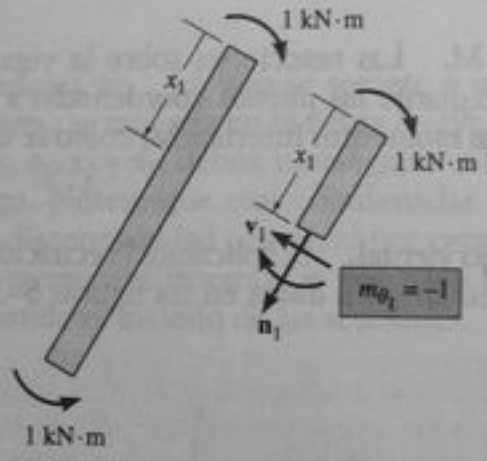


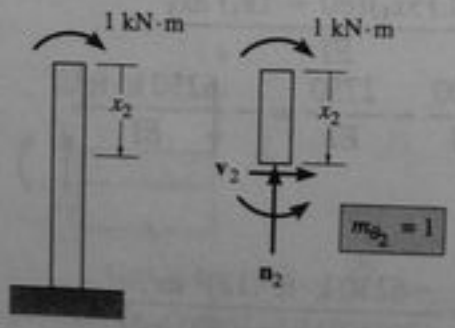
(a)

Fig. 8–40

Solución

Momentos virtuales m_θ. Se utilizarán las coordenadas x_1 y x_2 mostradas en la figura 8–40*a*. Se aplica un momento concentrado unitario en C y se calculan los momentos internos m_θ, figura 8–40*b*.

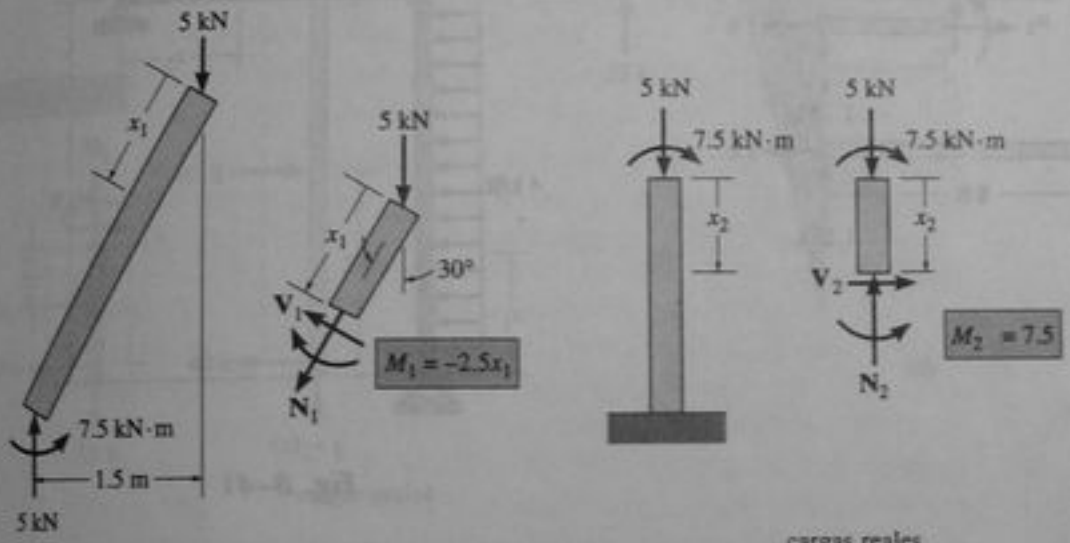




cargas virtuales

(b)

Momentos reales M. De manera similar, los momentos reales M se calculan como se muestra en la figura 8–40c.



(c)

Ecuación del trabajo virtual. Mediante los datos en las figuras 8–40b y 8–40c, tenemos

$$1 \cdot \theta_C = \int \frac{m_\theta M}{EI}\,dx = \int_0^3 \frac{(-1)(-2.5x_1)\,dx_1}{EI} + \int_0^2 \frac{(1)(7.5)\,dx_2}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{11.25}{EI} + \frac{15}{EI} = \frac{26.25\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

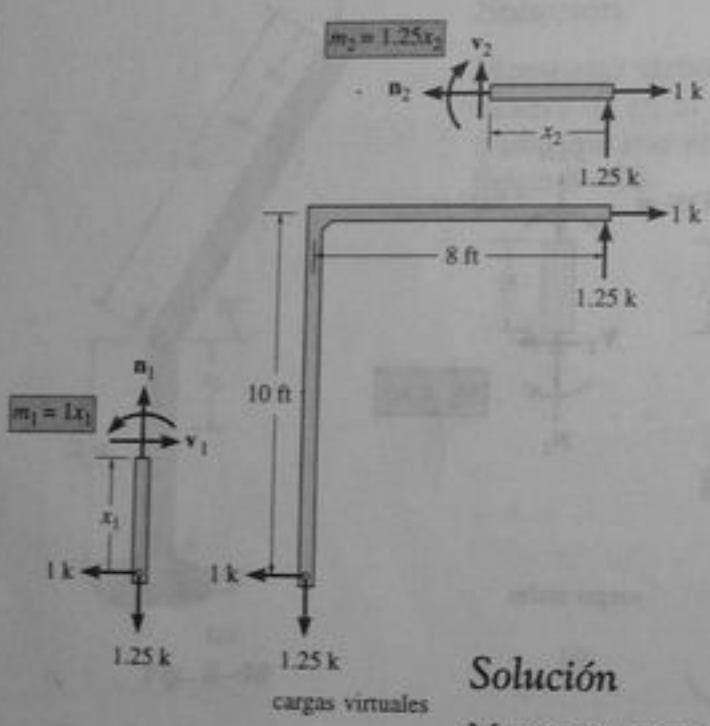
o

$$\theta_C = \frac{26.25\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{200(10^6)\ \text{kN/m}^2[15(10^6)\ \text{mm}^4](10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)}$$

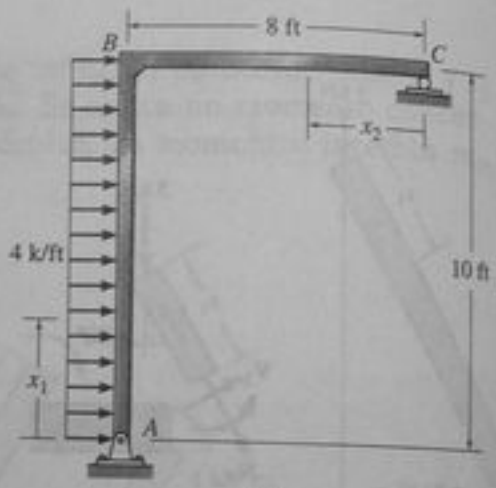
$$= 0.00875\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 8–20

Determine el desplazamiento horizontal del punto C en el marco mostrado en la figura 8–41*a*. Considere $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 600$ in^4 para ambos miembros.



(b)



(a)

Fig. 8–41

Solución

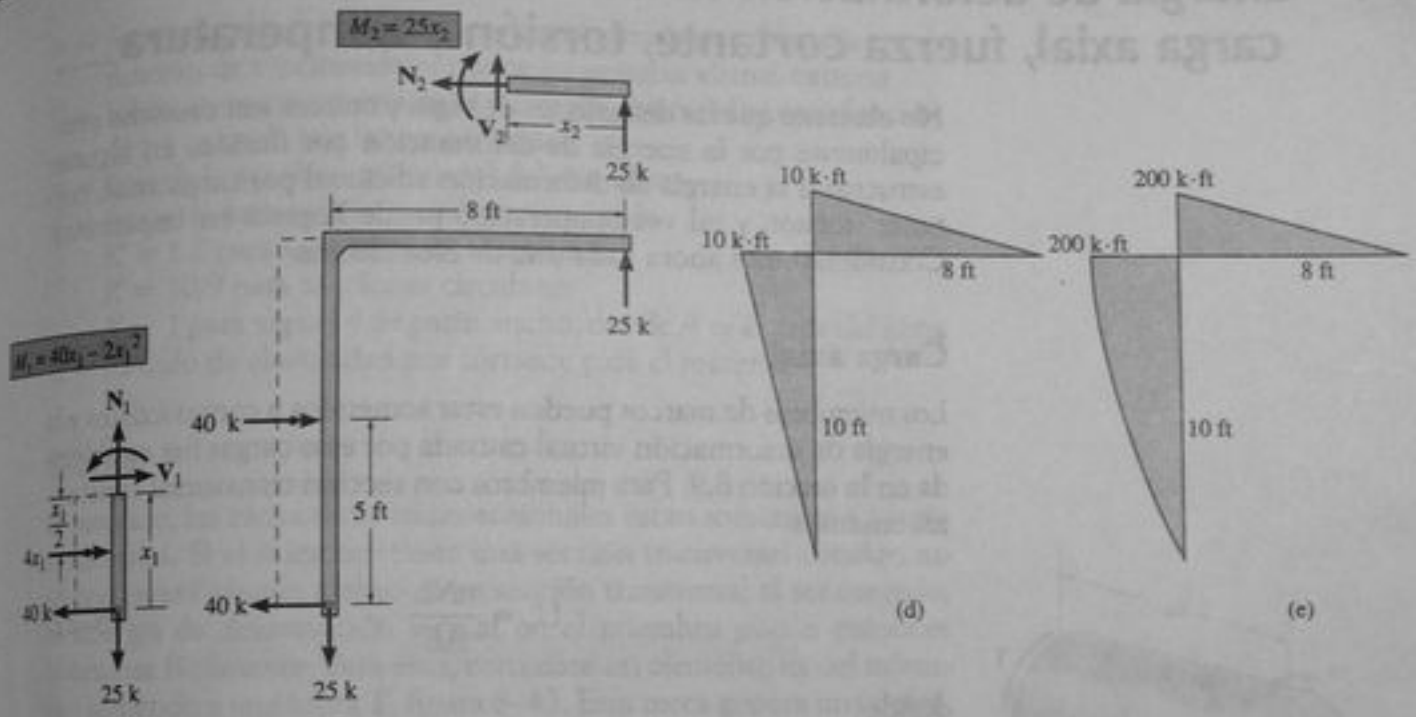
Momentos virtuales *m*. Por conveniencia, se usarán las coordenadas x_1 y x_2 que se muestran en la figura 8–41*a*. Se aplica una carga unitaria *horizontal* en C, figura 8–41*b*. ¿Por qué? Se calculan y muestran las reacciones en los soportes así como los momentos virtuales internos.

Momentos reales M. De manera similar, se calculan y muestran en la figura 8–41*c* las reacciones en los soportes así como los momentos reales.

Ecuación del trabajo virtual. Mediante los datos en las figuras 8–41*b* y 8–41*c*, tenemos

$$1 \cdot \Delta_{C_h} = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{10} \frac{(1x_1)(40x_1 - 2x_1^2)\,dx_1}{EI} + \int_0^{8} \frac{(1.25x_2)(25x_2)\,dx_2}{EI}$$

$$\Delta_{C_h} = \frac{8333.3}{EI} + \frac{5333.3}{EI} = \frac{13{,}666.7\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI} \qquad (1)$$



Si se desea, las integrales $\int mM\,dx$ también pueden evaluarse gráficamente mediante la tabla que aparece en las páginas suplementaria al final del libro. Los diagramas de momento para el marco en las figuras 8–41*b* y 8–41*c* se muestran en las figuras 8–41*d* y 8–41*e*, respectivamente. Así, entonces,

$$\int mM\,dx = \tfrac{5}{12}(10)(200)(10) + \tfrac{1}{3}(10)(200)(8)$$
$$= 8333.3 + 5333.3 = 13{,}666.7\ \text{k}^2\cdot\text{ft}^3$$

Éste es el mismo valor que el calculado en la ecuación (1). Entonces,

$$\Delta_{C_x} = \frac{13{,}666.7\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{[29(10^3)\text{k/in}^2((12)^2\ \text{in}^2/\text{ft}^2)][600\ \text{in}^4(\text{ft}^4/(12)^4\ \text{in}^4)]}$$
$$= 0.113\ \text{ft} = 1.36\ \text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

8.11 Energía de deformación virtual causada por carga axial, fuerza cortante, torsión y temperatura

No obstante que las deflexiones de vigas y marcos son causadas principalmente por la energía de deformación por flexión, en algunas estructuras la energía de deformación adicional por carga axial, cortante, torsión y tal vez temperatura puede llegar a ser importante. Consideraremos ahora cada uno de esos efectos.

Carga axial

Los miembros de marcos pueden estar sometidos a cargas axiales y la energía de deformación virtual causada por esas cargas fue establecida en la sección 8.9. Para miembros con sección transversal constante, tenemos

$$U_n = \frac{nNL}{AE} \tag{8–27}$$

donde

n = carga axial virtual interna causada por la carga unitaria virtual externa
N = fuerza axial interna en el miembro causada por las cargas reales
E = módulo de elasticidad del material
A = área de la sección transversal del miembro
L = longitud del miembro

Fuerza cortante

Para determinar la energía de deformación virtual en una viga debido al cortante, consideraremos el elemento dx de viga ilustrado en la figura 8–42. La deformación dy por cortante del elemento causada por las *cargas reales* es $dy = \gamma\, dx$. Si la deformación por cortante γ es causada por una respuesta *elástica lineal* del material, entonces es aplicable la ley de Hooke, $\gamma = \tau/G$. Por tanto, $dy = (\tau/G)\, dx$. Podemos expresar el esfuerzo cortante como $\tau = K(V/A)$, donde K es un *factor de forma* que depende de la forma del área A de la sección transversal de la viga. Podemos escribir entonces $dy = K(V/GA)\, dx$. El trabajo virtual interno hecho por una fuerza cortante virtual v que actúa sobre el elemento *mientras* se deforma la cantidad dy es, por tanto, $dU_i = v\, dy = v(KV/GA)\, dx$. Para la viga entera, la energía de deformación virtual se determina por integración.

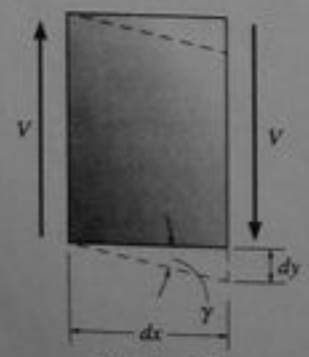


Fig. 8–42

$$U_i = \int_0^L K\left(\frac{vV}{GA}\right) dx \tag{8–28}$$

donde

v = fuerza cortante virtual interna en el miembro, expresada como función de x y causada por la carga unitaria virtual externa
V = fuerza cortante interna en el miembro, expresada como función de x y causada por las cargas reales
A = área de la sección transversal del miembro
K = factor de forma de la sección transversal:
$K = 1.2$ para secciones rectangulares
$K = 10/9$ para secciones circulares
$K \approx 1$ para vigas I y de patín ancho, donde A es el área del alma
G = módulo de elasticidad por cortante para el material

Torsión

A menudo, las estructuras tridimensionales están sometidas a cargas torsionales. Si el miembro tiene una sección transversal *circular*, no se presentará ningún alabeo en su sección transversal al ser cargado; la energía de deformación virtual en el miembro puede entonces obtenerse fácilmente. Para esto, considere un elemento dx del miembro sometido a una torca $\mathbf{T}$, figura 8–43. Esta torca genera una deformación cortante $\gamma = (c\,d\theta)/dx$. Si el material es de respuesta elástica lineal, entonces $\gamma = \tau/G$, donde $\tau = Tc/J$. Así, entonces, el ángulo de torsión, $d\theta = (\gamma\,dx)/c = (\tau/Gc)\,dx = (T/GJ)\,dx$. Si se aplica a la estructura una carga unitaria virtual que cause una torca virtual interna $\mathbf{t}$ en el miembro, entonces después de aplicar las cargas reales, la energía de deformación virtual en el miembro de longitud dx será $dU = t\,d\theta = tT\,dx/GJ$. Integrando sobre la longitud L del miembro se obtiene

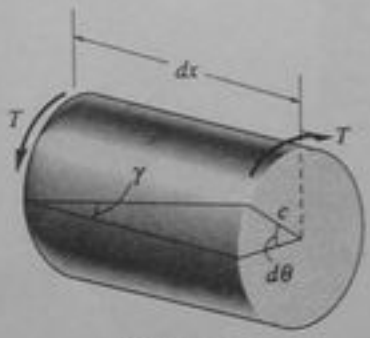


Fig. 8–43

$$U_t = \frac{tTL}{GJ} \tag{8–29}$$

donde

t = torca virtual interna causada por la carga unitaria virtual externa
T = torca interna en el miembro causada por las cargas reales
G = módulo cortante de elasticidad para el material
J = momento de inercia polar de la sección transversal, $J = \pi c^4/2$, donde c es el radio de la sección transversal
L = longitud del miembro

La energía de deformación virtual debida a torsión en miembros con secciones transversales no circulares se determina por medio de un análisis más riguroso que el presentado aquí.*

*Vea Bairstow, *et. al.*, en las referencias.

Temperatura

En la sección 8.9 consideramos el efecto de un *cambio uniforme de temperatura* ΔT sobre un miembro de una armadura e indicamos que el miembro se alargará o acortará una cantidad $\Delta L = \alpha \Delta T L$. El resultado de este cambio de longitud puede considerarse con el uso de la ecuación 8–23 ($1 \cdot \Delta = n\alpha\Delta TL$) del trabajo virtual. Sin embargo, en algunos casos un miembro estructural puede estar sometido a una *diferencia de temperatura a través de su peralte*, como en el caso de la viga mostrada en la figura 8–44*a*. Cuando esto ocurre, es también posible determinar el desplazamiento de puntos de su curva elástica utilizando el principio del trabajo virtual. Para ello, debemos primero calcular la cantidad de *rotación* de un elemento diferencial dx de la viga causada por el gradiente térmico que actúa sobre la sección transversal de la viga. Para el análisis de este caso, escogeremos una viga que tenga su eje neutro situado a la mitad de su peralte (c). Si traza-

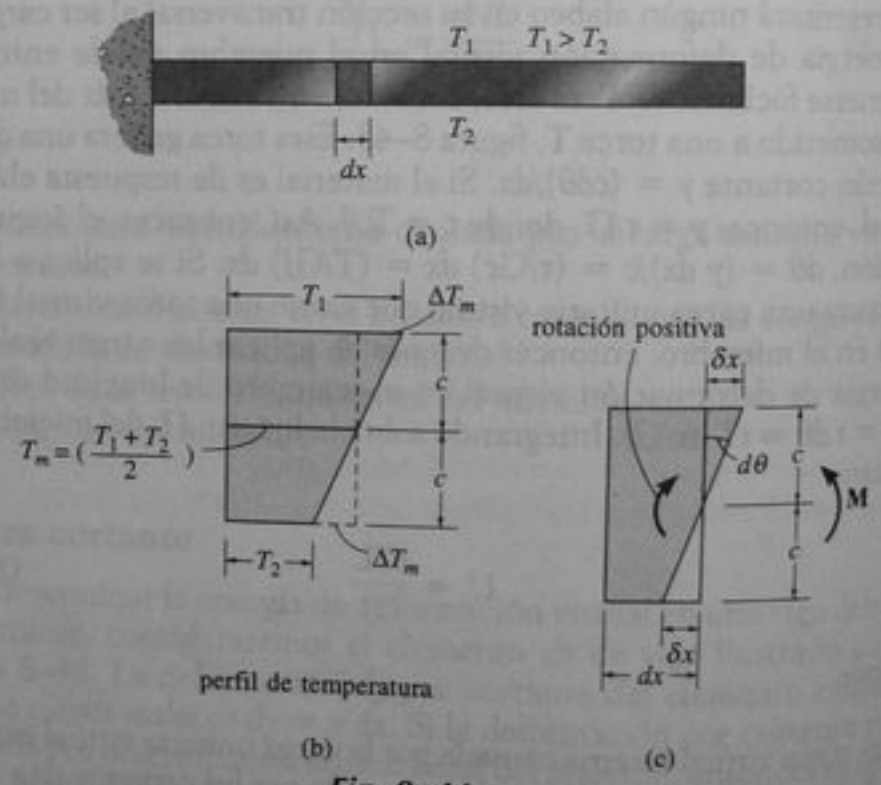


Fig. 8–44

mos el perfil de temperatura, figura 8–44*b*, se verá que la temperatura media $T_m = (T_1 + T_2)/2$ ocasionará que *la viga entera se alargue* sin hacerla girar. Si $T_1 > T_2$, la diferencia de temperatura generará una deformación de alargamiento en la parte superior del elemento y una deformación de contracción en la parte inferior. En ambos casos, la diferencia de temperatura es $\Delta T_m = T_1 - T_m = T_m - T_2$. Como el cambio térmico de longitud en esas fibras es $\delta x = \alpha \Delta T\, dx$, figura 8–44*c*, entonces la rotación del elemento es

$$d\theta = \frac{\alpha\, \Delta T_m\, dx}{c}$$

Si aplicamos una carga unitaria virtual al punto donde se busca el desplazamiento, o aplicamos un momento concentrado unitario al punto donde se busca el desplazamiento rotacional de la tangente, esto generará un momento virtual m en la viga en el punto donde se localiza el elemento dx. Cuando se impone el gradiente de temperatura, la energía de deformación virtual en la viga es entonces

$$U_{temp} = \int_0^L \frac{m\alpha\, \Delta T_m\, dx}{c} \tag{8–30}$$

donde

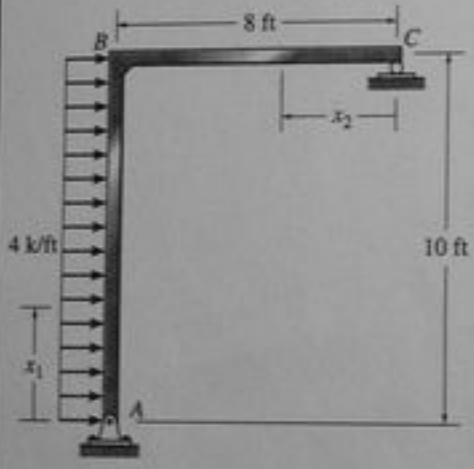
m = momento virtual interno en la viga expresado en función de x y causado por la carga unitaria virtual externa
α = coeficiente de dilatación térmica
ΔT_m = diferencia de temperatura entre la temperatura media y la temperatura en las partes superior e inferior de la viga
c = peralte medio de la viga

A menos que se especifique diferente, *este texto considerará sólo deflexiones en vigas y marcos debidas a flexión*. En general, los miembros de vigas y marcos pueden estar sometidos a varias de las otras cargas vistas en esta sección. Sin embargo, como lo mencionamos antes, las deflexiones adicionales causadas por la fuerza axial y la cortante alteran la deflexión de las vigas en sólo un pequeño porcentaje y por tanto en general se ignoran aún en el análisis de estructuras "pequeñas" de dos o tres miembros de un solo nivel. Si éstos y los otros efectos de torsión y temperatura deben considerarse en el análisis, entonces simplemente se suman sus energías de deformación virtual, como se definieron en las ecuaciones 8–27 a la 8–30, a la ecuación del trabajo virtual definido por la ecuación 8–25 o la 8–26.

Los ejemplos siguientes ilustran la aplicación de esas ecuaciones.

Ejemplo 8–21

Determine el desplazamiento horizontal del punto C del marco que se muestra en la figura 8–45*a*. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $G = 12(10^3)$ ksi, $I = 600$ in^4 y $A = 80$ in^2 para ambos miembros. El área de la sección transversal es rectangular. Incluya la energía de deformación interna por carga axial y fuerza cortante.



(a)

Solución

Aquí debemos aplicar una carga unitaria horizontal en C. Los diagramas necesarios de cuerpo libre para la carga real y virtual se muestran en las figuras 8–45*b* y 8–45*c*.

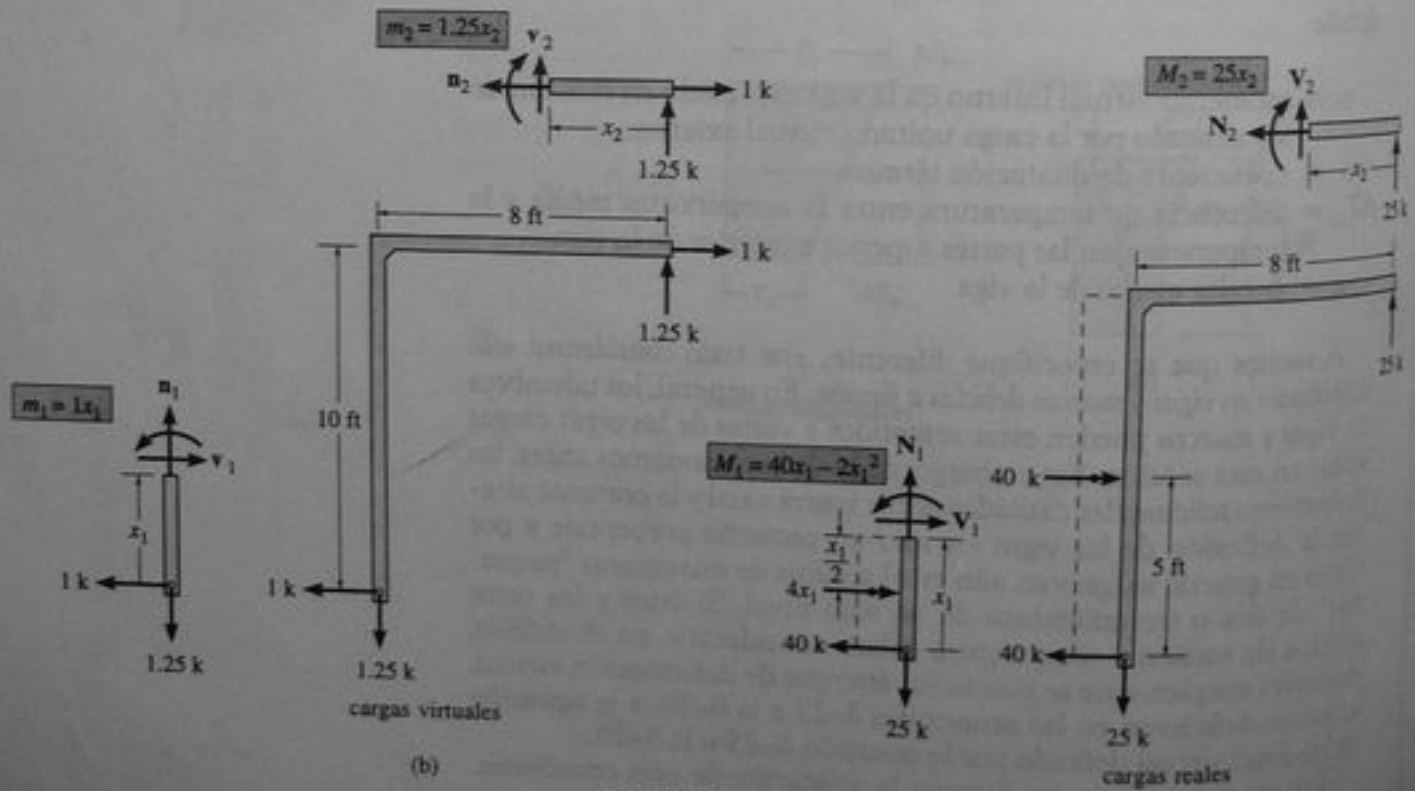


Fig. 8–45

Flexión. La energía de deformación virtual debido a flexión ya se calculó en el ejemplo 8–18. Se demostró que

$$U_b = \int \frac{mM\,dx}{EI} = \frac{13{,}666.7\ \text{k}^2\cdot\text{ft}^3(12^3\ \text{in}^3/1\ \text{ft}^3)}{[29(10^3)\ \text{k/in}^2](600\ \text{in}^4)} = 1.357\ \text{in.}\cdot\text{k}$$

Carga axial. De los datos en las figuras 8–45*b* y 8–45*c*, tenemos

$$\begin{aligned} U_a &= \sum \frac{nNL}{AE} \\ &= \frac{1.25\ \text{k}(25\ \text{k})(120\ \text{in.})}{80\ \text{in}^2[29(10^3)\ \text{k/in}^2]} + \frac{(1\ \text{k})(0)(96\ \text{in.})}{(80\ \text{in}^2)[29(10^3)\ \text{k/in}^2]} \\ &= 0.001616\ \text{in.}\cdot\text{k} \end{aligned}$$

Fuerza cortante. Aplicando la ecuación 8–28 con $K = 1.2$ para secciones transversales rectangulares y usando las funciones de fuerza cortante mostradas en las figuras 8–45*b* y 8–45*c*, tenemos

$$\begin{aligned} U_s &= \int_0^L K\left(\frac{vV}{GA}\right) dx \\ &= \int_0^{10} \frac{1.2(1)(40 - 4x_1)\,dx_1}{GA} + \int_0^8 \frac{1.2(-1.25)(-25)\,dx_2}{GA} \\ &= \frac{540\ \text{k}^2\cdot\text{ft}(12\ \text{in./ft})}{[12(10^3)\ \text{k/in}^2](80\ \text{in}^2)} = 0.00675\ \text{in.}\cdot\text{k} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación del trabajo virtual, tenemos

$$1\ \text{k}\cdot\Delta_{C_v} = 1.357\ \text{in.}\cdot\text{k} + 0.001616\ \text{in.}\cdot\text{k} + 0.00675\ \text{in.}\cdot\text{k}$$

$$\Delta_{C_v} = 1.37\ \text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

Los efectos de la fuerza cortante y de la fuerza axial incrementaron sólo 0.6% del valor obtenido considerando sólo el efecto de la flexión.

Ejemplo 8–22

La viga ilustrada en la figura 8–46*a* se usa en un edificio sometido a dos ambientes térmicos diferentes. Si la temperatura en la superficie superior de la viga es de 80°F y en la superficie inferior es de 160°F, determine la deflexión vertical de la viga en el centro de su claro debido al gradiente de temperatura. Considere $\alpha = 6.5(10^{-6})/°F$.

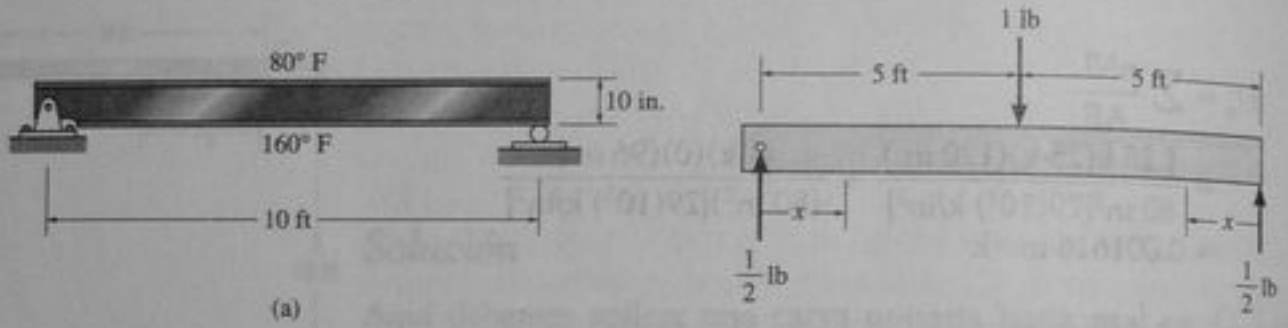
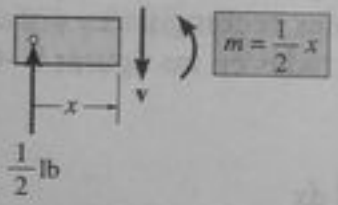


Fig. 8–46



Solución

Como la deflexión en el centro de la viga debe ser determinada, colocamos ahí una carga virtual unitaria y calculamos el momento virtual interno de la viga, figura 8–46*b*.

La temperatura media en el centro de la viga es $(160° + 80°)/2 = 120°F$, por lo que para la aplicación de la ecuación 8–30, $\Delta T_m = 120°F - 80°F = 40°F$. Además, $c = 10\text{ in}/2 = 5\text{ in}$. Aplicando el principio del trabajo virtual, tenemos

$$1\text{ lb} \cdot \Delta_{C_v} = \int_0^L \frac{m\alpha\,\Delta T_m\,dx}{c}$$

$$= 2\int_0^{60\text{ in.}} \frac{(\frac{1}{2}x)6.5(10^{-6})/°F(40°F)}{5\text{ in.}}\,dx$$

$$\Delta_{C_v} = 0.0936\text{ in.} \qquad \textit{Resp.}$$

El resultado indica una deflexión insignificante.

8.12 Teorema de Castigliano

En 1879, Alberto Castigliano, un ingeniero de ferrocarriles italiano, publicó un libro en el que delineó un método para determinar la deflexión o la pendiente en un punto de una estructura, ya fuese ésta una armadura, una viga o un marco. Este método, llamado *segundo teorema de Castigliano* o *método del trabajo mínimo*, es aplicable sólo a estructuras con temperatura constante, con soportes sin asentamientos y hechas de material con respuesta *elástica lineal*. Si va a determinarse el desplazamiento de un punto, el teorema establece que éste es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en la estructura con respecto a una fuerza que actúa en el punto y en la dirección del desplazamiento. De manera similar, la pendiente en un punto de una estructura es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en la estructura respecto a un momento concentrado que actúa en el punto y en la dirección de la rotación.

Para obtener el segundo teorema de Castigliano considere un cuerpo (estructura) de cualquier forma arbitraria sometido a una serie de n fuerzas $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Como el trabajo externo hecho por esas cargas es igual a la energía de deformación interna almacenada en el cuerpo, podemos escribir

$$U_i = U_e$$

Sin embargo, el trabajo externo es una función de las cargas externas ($U_e = \Sigma \int P\, dx$). Esto es,

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

Ahora, si cualquiera de las fuerzas, digamos P_i, se incrementa en una cantidad diferencial dP_i, el trabajo interno también se incrementará, de manera que la nueva energía de deformación resulta ser

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_i} dP_i \tag{8–31}$$

Sin embargo, este valor no debe depender de la secuencia con que se apliquen las n fuerzas al cuerpo. Por ejemplo, si aplicamos *primero* dP_i al cuerpo, ocasiona que éste se desplace en una cantidad diferencial $d\Delta_i$ en la dirección de dP_i. De acuerdo con la ecuación 8–10 ($U_e = \frac{1}{2} P\Delta$), el incremento de energía de deformación sería $\frac{1}{2} dP_i d\Delta_i$. Sin embargo, esta cantidad es una diferencial de segundo orden y puede despreciarse. La aplicación adicional de las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que desplazará el cuerpo $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, dará la energía de deformación

$$U_i + dU_i = U_i + dP_i \Delta_i \tag{8–32}$$

Aquí, igual que antes, U_i es la energía de deformación interna en el cuerpo, causada por las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y $dU_i = dP_i\Delta_i$ es la energía de deformación *adicional* causada por dP_i (ecuación 8–11, $U_e = P\Delta'$.) En resumen, la ecuación 8–31 representa la energía de deformación en el cuerpo determinada aplicando primero las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *luego* dP_i, y la ecuación 8–32 representa la energía de deformación determinada aplicando primero dP_i y *luego* las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Como esas dos ecuaciones deben ser iguales, se requiere que

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i} \tag{8–33}$$

lo que demuestra el teorema; esto es, el desplazamiento Δ_i en la dirección de P_i es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a P_i.*

Nótese que la ecuación 8–33 es un enunciado respecto a la *compatibilidad de la estructura*. La deducción anterior requiere que *sólo fuerzas conservativas* sean consideradas en el análisis. Esas fuerzas efectúan trabajo que es independiente de la trayectoria y, por tanto, no generan pérdida de energía. Como las fuerzas que generan respuestas elástico-lineales son conservativas, el teorema queda restringido a materiales con *comportamiento elástico lineal*, lo que contrasta con el método de la fuerza virtual visto en la sección anterior, que se aplica a materiales con comportamiento tanto elástico como inelástico.

*El primer teorema de Castigliano es similar a su segundo teorema; sin embargo relaciona la carga P_i con la derivada parcial de la energía de deformación con respecto al desplazamiento correspondiente, esto es, $P_i = \partial U_i / \partial \Delta_i$. La demostración es similar a la dada arriba y, al igual que el método del desplazamiento virtual, el primer teorema de Castigliano se aplica a materiales de comportamiento tanto elástico como inelástico. Este teorema es otra manera de expresar los *requisitos de equilibrio* para una estructura, y como tiene un uso muy escaso en el análisis estructural, no se verá en este libro.

8.13 Teorema de Castigliano para armaduras

La energía de deformación para un miembro de una armadura está dada por la ecuación 8–16, $U_i = N^2L/2AE$. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación 8–33 y omitiendo el subíndice i, tenemos

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

Es generalmente más fácil efectuar la diferenciación antes que sumar. En el caso general, L, A y E son constantes para un miembro dado y por tanto puede escribirse

$$\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} \tag{8–34}$$

donde

Δ = desplazamiento externo del nudo de la armadura
P = fuerza externa aplicada al nudo de la armadura en la dirección de la Δ buscada
N = fuerza interna en un miembro causada por las fuerza P y cargas sobre la armadura
L = longitud de un miembro
A = área de la sección transversal de un miembro
E = módulo de elasticidad de un miembro

Esta ecuación es similar a la usada en el método del trabajo virtual, ecuación 8–22 ($1 \cdot \Delta = \Sigma nNL/AE$), excepto que se reemplaza por $\partial N/\partial P$. Nótese que para determinar esta derivada parcial es necesario tratar a P como una *variable* (no como una cantidad numérica específica) y además, cada fuerza de barra N debe expresarse como función de P. Por esto, el cálculo de $\partial N/\partial P$ requiere en general algo más de trabajo que el requerido para calcular cada fuerza n directamente. Ambos términos son por supuesto iguales, ya que n o $\partial N/\partial P$ es simplemente la razón de cambio de la fuerza interna de barra con respecto a la carga P o bien el cambio en la fuerza de barra por carga unitaria.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar el desplazamiento de cualquier nudo sobre una armadura usando el teorema de Castigliano.

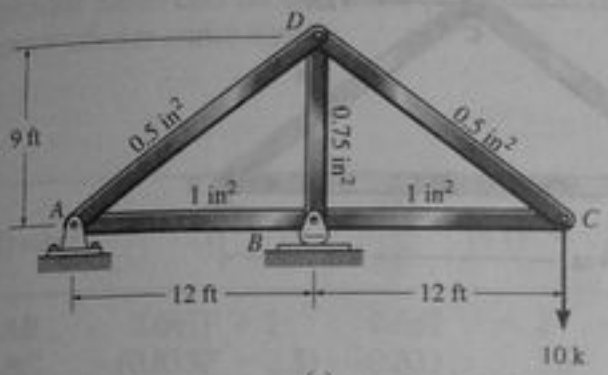
Fuerza externa P Coloque una fuerza P sobre la armadura en el nudo donde debe determinarse el desplazamiento. Se supone que esta fuerza tiene una *magnitud variable* y debe estar dirigida a lo largo de la línea de acción del desplazamiento.

Fuerzas internas N Determine la fuerza N en cada miembro causada por las cargas reales (numéricas) y por la fuerza variable P. Suponga que las fuerzas de tensión son positivas y las de compresión, negativas. Calcule también la derivada parcial respectiva $\partial N/\partial P$ para cada miembro. *Después* de que N y $\partial N/\partial P$ hayan sido determinadas, asigne a P su valor numérico si ésta ha sido reemplazado por una fuerza real sobre la armadura. De otra manera, haga P igual a cero.

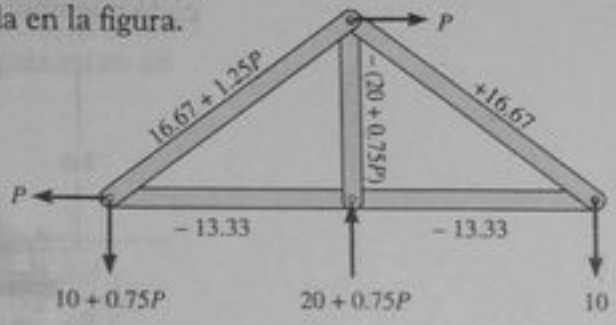
Teorema de Castigliano Aplique la ecuación 8–34 para determinar el desplazamiento buscado Δ. Es importante conservar los signos algebraicos de los valores correspondientes de N y $\partial N/\partial P$ al sustituir esos términos en la ecuación. Si la suma resultante $\Sigma N(\partial N/\partial P)L/AE$ es positiva, Δ tiene el mismo sentido que P. Si la suma resulta negativa, Δ tiene sentido opuesto al de P.

Ejemplo 8–23

Determine el desplazamiento horizontal del nudo D de la armadura mostrada en la figura 8–47*a*. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. El área de la sección transversal de cada miembro está indicada en la figura.



(a)



(b)

Fig. 8–47

Solución

Fuerza externa P. Como debe determinarse el desplazamiento horizontal de D, aplicamos una fuerza P horizontal variable en el nudo D, figura 8–47*b*.

Fuerzas internas N. Si se utiliza el método de los nudos, calculamos la fuerza N en cada miembro.* Los resultados se muestran en la figura 8–47*b*. Arreglando los datos en forma tabular, tenemos

Miembro	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N\,(P=0)$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	−13.33	0	−13.33	12	0
BC	−13.33	0	−13.33	12	0
CD	+16.67	0	+16.67	15	0
DA	16.67 + 1.25P	+1.25	+16.67	15	312.50
BD	−(20 + 0.75P)	−0.75	−20	9	135.00

Teorema de Castigliano. Aplicando la ecuación 8–34, tenemos

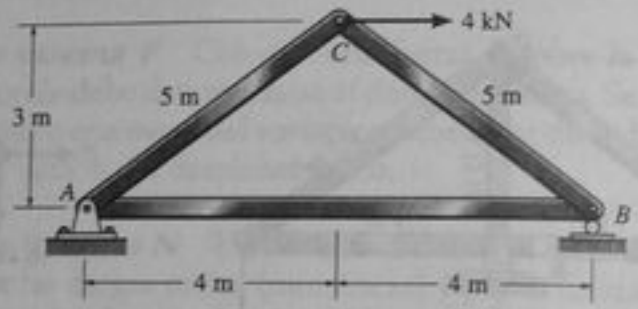
$$\Delta_{D_h} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = 0 + 0 + 0 + \frac{312.5\ \text{k}\cdot\text{ft}(12\ \text{in./ft})}{(0.5\ \text{in}^2)(29(10^3)\ \text{k/in}^2)} + \frac{135.00\ \text{k}\cdot\text{ft}(12\ \text{in./ft})}{(0.75\ \text{in.})[29(10^3)\ \text{k/in}^2]}$$

$$= 0.333\ \text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

*Igual que en el ejemplo anterior, puede ser preferible efectuar un análisis separado de la armadura cargada con 10 k y cargada con P y luego superponer los resultados.

Ejemplo 8–24

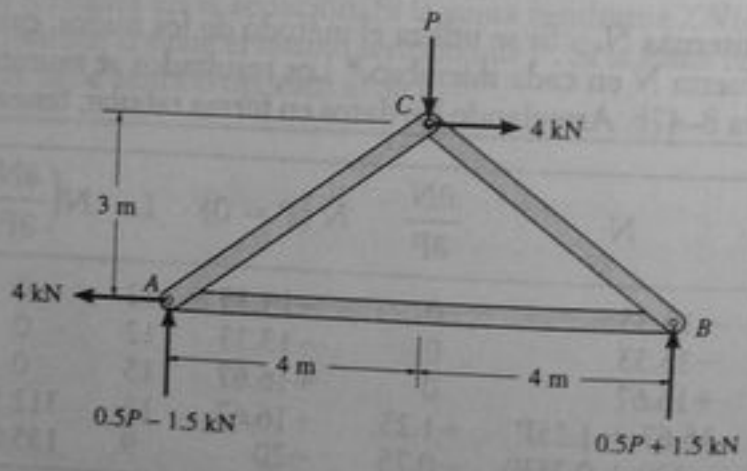
Determine el desplazamiento vertical del nudo C de la armadura mostrada en la figura 8–48*a*. El área de la sección transversal de cada miembro es $A = 400\ \text{mm}^2$ y $E = 200\ \text{GPa}$.



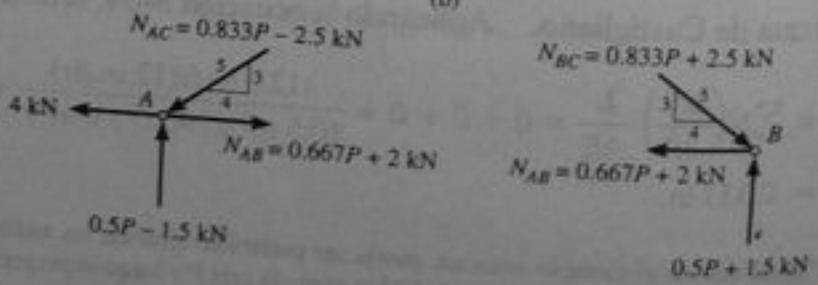
(a)

Solución

Fuerza externa P. Una fuerza vertical **P** se aplica a la armadura en el nudo C ya que es aquí donde debe determinarse el desplazamiento vertical, figura 8–48*b*.



(b)



(c)

Fig. 8–48

Fuerzas internas N. Las reacciones en los soportes A y B de la armadura se determinan y los resultados se muestran en la figura 8–48*b*. Si se utiliza el método de los nudos, se determinan las fuerzas N en cada miembro, figura 8–48*c*.* Por conveniencia, esos resultados junto con las derivadas parciales $\partial N/\partial P$ se presentan en forma tabular como sigue:

Miembro	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N\,(P=0)$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	$0.667P + 2$	0.667	2	8	10.67
AC	$-(0.833P - 2.5)$	-0.833	2.5	5	-10.41
BC	$-(0.833P + 2.5)$	-0.833	-2.5	5	10.41
					$\Sigma 10.67\ \text{kN}\cdot\text{m}$

Como P no existe realmente como carga en la armadura, se requiere que $P = 0$ en la tabla anterior.

Teorema de Castigliano. Aplicando la ecuación 8–34, tenemos

$$\Delta_{C_v} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{10.67\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}$$

Sustituyendo $A = 400\ \text{mm}^2 = 400(10^{-6})\ \text{m}^2$, $E = 200\ \text{GPa} = 200(10^9)\ \text{Pa}$ y convirtiendo las unidades de N de kN a N, tenemos

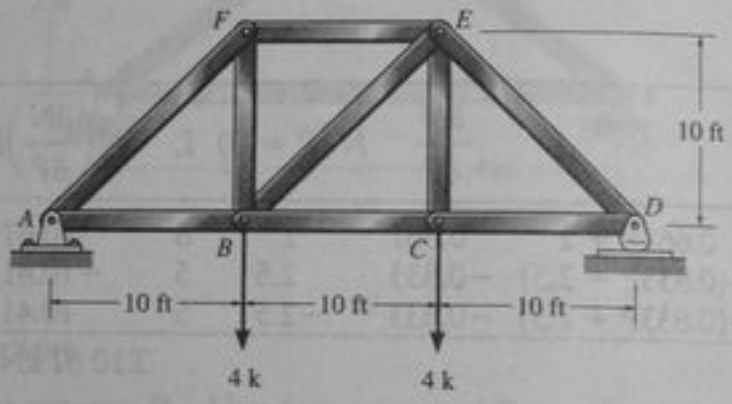
$$\Delta_{C_v} = \frac{10.67(10^3)}{400(10^{-6})200(10^9)} = 0.000133\ \text{m} = 0.133\ \text{mm}\quad \textit{Resp.}$$

Esta solución debería compararse con el método del trabajo virtual empleado en el ejemplo 8–14.

*Puede ser más conveniente analizar la armadura con sólo la carga de 4 kN sobre ella y luego analizar la armadura con la carga P que actúa sobre ella. Los resultados pueden luego sumarse para dar las fuerzas N.

Ejemplo 8–25

Determine el desplazamiento vertical del nudo C de la armadura mostrada en la figura 8–49*a*. Suponga que $A = 0.5\ \text{in}^2$ y $E = 29(10^3)$ ksi.

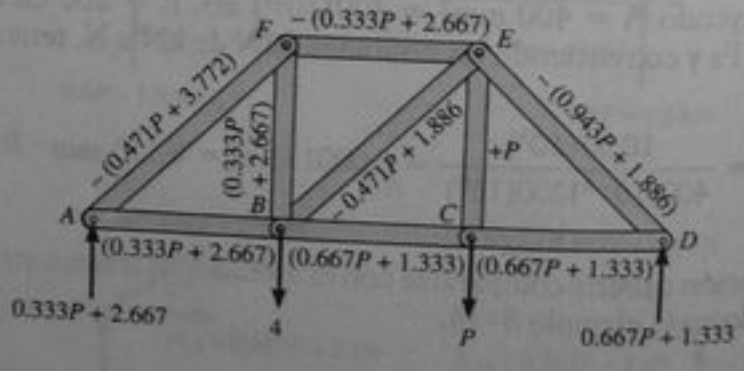


(a)

Fig. 8–49

Solución.

Fuerza externa P. La fuerza de 4 k en C se reemplaza por una *fuerza variable* P en el nudo C, figura 8–49*b*.



(b)

Fuerzas internas N. El método de los nudos se usa para determinar la fuerza N en cada miembro de la armadura. Los resultados se resumen en la figura 8–49*b*. Los datos requeridos pueden arreglarse en forma tabular como sigue:

Miembro	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	N $(P = 4\,\text{k})$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	$(0.333P + 2.667)$	$+0.333$	$+4$	10	13.33
BC	$(0.667P + 1.333)$	$+0.667$	$+4$	10	26.67
CD	$(0.667P + 1.333)$	$+0.667$	$+4$	10	26.67
DE	$-(0.943P + 1.886)$	-0.943	-5.66	14.14	75.47
EF	$-(0.333P + 2.667)$	-0.333	-4	10	13.33
FA	$-(0.471P + 3.772)$	-0.471	-5.66	14.14	37.70
BF	$(0.333P + 2.667)$	$+0.333$	$+4$	10	13.33
BE	$(-0.471P + 1.886)$	-0.471	0	14.14	0
CE	P	1	4	10	40

$\Sigma = 246.50\,\text{k}\cdot\text{ft}$

Teorema de Castigliano. Sustituyendo los datos en la ecuación 8–34, tenemos

$$\Delta_{C_x} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{10.67\,\text{kN}\cdot\text{m}}{AE}$$

Convirtiendo las unidades de longitud de miembro a pulgadas y sustituyendo el valor numérico de AE, resulta

$$\Delta_{C_x} = \frac{(246.50\,\text{k}\cdot\text{ft})(12\,\text{in./ft})}{(0.5\,\text{in}^2)(29(10^3)\,\text{k/in}^2)} = 0.204\,\text{in.} \qquad \textit{Resp.}$$

Debe observarse la semejanza entre esta solución y la obtenida con el trabajo virtual en el ejemplo 8–13.

8.14 Teorema de Castigliano para vigas y marcos

La energía de deformación interna para una viga o marco está dada por la ecuación 8–18 ($U_i = \int M^2\,dx/2EI$). Si sustituimos esta ecuación en la ecuación 8–33 ($\Delta_i = \partial U_i/\partial P_i$) y omitimos el subíndice i, tenemos

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

En lugar de elevar al cuadrado la expresión para el momento M, integrar y luego derivar parcialmente, es en general más fácil diferenciar antes que integrar. Si E e I son constantes, tenemos

$$\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} \tag{8–35}$$

donde

Δ = desplazamiento externo del punto provocado por las cargas reales que actúan sobre la viga o marco
P = fuerza externa aplicada a la viga o marco en la dirección de Δ
M = momento interno en la viga o marco, expresado en función de x y provocado por la fuerza P y las cargas reales sobre la viga
E = módulo de elasticidad del material de la viga
I = momento de inercia del área de la sección transversal calculada respecto al eje neutro

Si la pendiente q en un punto va a determinarse, debe calcularse la derivada parcial del momento interno M con respecto a un *momento concentrado externo* M' que actúa en el punto, esto es,

$$\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} \tag{8–36}$$

Las ecuaciones anteriores son similares a las usadas en el método del trabajo bajo virtual, ecuaciones 8–25 y 8–26, excepto que $\partial M/\partial P$ y $\partial M/\partial M'$ reemplazan a m y a m_θ, respectivamente. Como en el caso de las ar-maduras, se requiere generalmente algo más de trabajo de cálculo para determinar las derivadas parciales y aplicar el teorema de Castigliano que en usar el método del trabajo virtual. Recuerde que este teorema es aplicable sólo a un material con respuesta elástica lineal. Si se desea considerar más ampliamente la energía de deformación en la estructura, pueden incluirse los efectos en la energía de

deformación debidos a la fuerza cortante, a la fuerza axial y a la torsión. Las derivaciones por fuerza cortante y torsión siguen el mismo desarrollo que en las ecuaciones 8–28 y 8–29. Las energías de deformación y sus deriviadas son, respectivamente,

$$U_s = K\int_0^L \frac{V^2\,dx}{2AG} \qquad \frac{\partial U_s}{\partial P} = \int_0^L \frac{V}{AG}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) dx$$

$$U_t = \int_0^L \frac{T^2\,dx}{2JG} \qquad \frac{\partial U_t}{\partial P} = \int_0^L \frac{T}{JG}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) dx$$

Sin embargo, esos efectos no se incluirán en el análisis de los problemas en este texto ya que las deflexiones en vigas y marcos se deben principalmente a la energía de deformación por deflexión. Marcos más grandes o con geometría fuera de lo común pueden analizarse por computadora, donde esos efectos se incorporan más fácilmente al análisis.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar la deflexión o la pendiente en un punto en una viga o marco mediante el teorema de Castigliano.

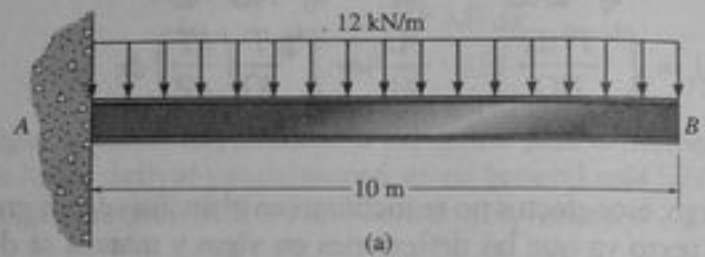
Fuerza externa P o momento concentrado M' Coloque una fuerza P sobre la viga o marco en el punto y en la dirección del desplazamiento buscado. Si la pendiente va a determinarse, coloque un momento concentrado M' en el punto. Se supone que P y M' tienen magnitudes variables.

Momentos internos M Establezca coordenadas x apropiadas que sean válidas dentro de regiones de la viga o marco donde no haya discontinuidades de fuerza, carga distribuida o momento concentrado. Calcule el momento interno M como función de P o M' y de cada coordenada x. Calcule también la derivada parcial $\partial M/\partial P$ o $\partial M/\partial M'$ para cada coordenada x. Después de que M y $\partial M/\partial P$ o $\partial M/\partial M'$ han sido determinadas, asigne a P o a M' su valor numérico si ha reemplazado a una fuerza real o a un momento concentrado. De otra manera, haga P o M' igual a cero.

Teorema de Castigliano Aplique la ecuación 8–35 o 8–36 para determinar el desplazamiento Δ o pendiente θ buscado. Es importante retener los signos algebraicos de los valores correspondientes de M y $\partial M/\partial P$ o $\partial M/\partial M'$. Si la suma resultante de todas las integrales definidas es positiva, Δ o θ actúan con el mismo sentido que P o M'.

Ejemplo 8–26

Determine el desplazamiento del punto B de la viga mostrada en la figura 8–50*a*. Considere $E = 200$ GPa e $I = 500(10^6)$ mm^4.

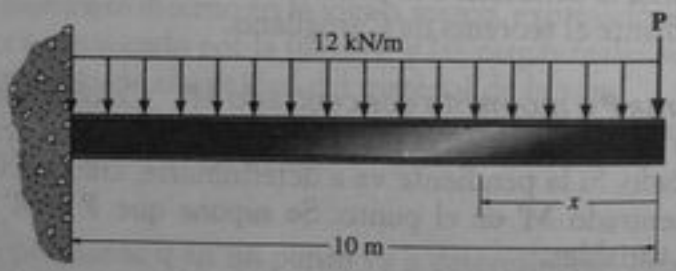


(a)

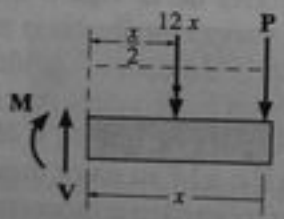
Fig. 8–50

Solución

Fuerza externa P. Una fuerza **P** vertical se coloca sobre la viga en *B* como se muestra en la figura 8–50*b*.



(b)



(c)

Momentos internos M. Se requiere una sola coordenada x para la solución ya que no hay discontinuidades de carga entre A y B. Con el método de las secciones, figura 8–50c, tenemos

$$\curvearrowright +\Sigma M = 0; \qquad M + (12x)\left(\frac{x}{2}\right) + P(x) = 0$$

$$M = -6x^2 - Px \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Haciendo $P = 0$, se obtiene

$$M = -6x^2 \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Teorema de Castigliano. Aplicamos la ecuación 8–35 y tenemos

$$\Delta_B = \int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{10} \frac{(-6x^2)(-x)\,dx}{EI}$$

$$= \frac{15(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

o

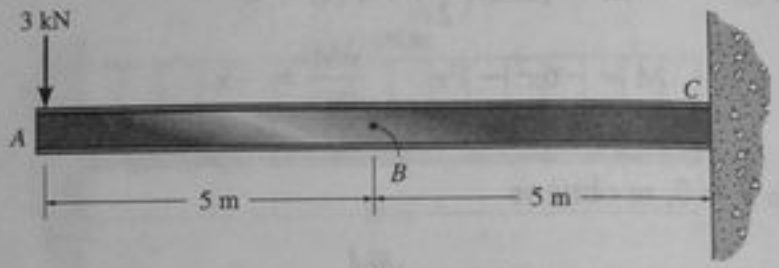
$$\Delta_B = \frac{15(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{200(10^6)\ \text{kN/m}^2[500(10^6)\ \text{mm}^4](10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= 0.150\ \text{m} = 150\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Debe notarse la semejanza entre esta solución y la del método del trabajo virtual, obtenida en el ejemplo 8–16.

Ejemplo 8–27

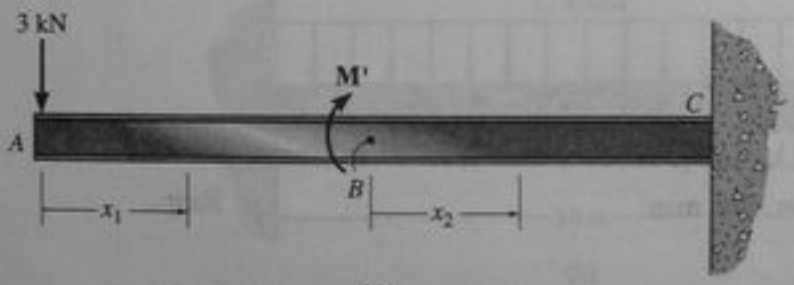
Determine la pendiente en el punto B de la viga que se ilustra en la figura 8–51*a*. Considere $E = 200$ GPa, $I = 60(10^6)$ mm^4.



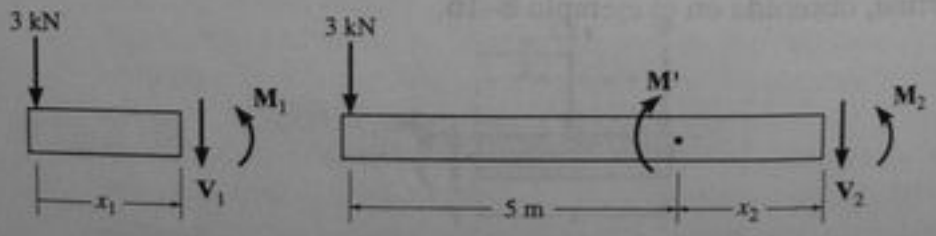
(a)

Solución

Momento concentrado externo M'. Como debe determinarse la pendiente en el punto B, se coloca un momento concentrado externo **M'** sobre la viga en este punto, figura 8–51*b*.



(b)



(c)

Fig. 8–51

Momentos internos M. Deben usarse dos coordenadas, x_1 y x_2, para determinar los momentos internos dentro de la viga ya que se tiene una discontinuidad M' en B. Como se muestra en la figura 8–51*b*, x_1 varía de A a B y x_2 varía de B a C. Con el método de las secciones, figura 8–51*c*, los momentos internos y las derivadas parciales se calculan como sigue:

Para x_1:

$$\downarrow+\Sigma M = 0; \qquad M_1 + 3x_1 = 0$$
$$M_1 = -3x_1$$
$$\frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$$

Para x_2:

$$\downarrow+\Sigma M = 0; \qquad M_2 - M' + 3(5 + x_2) = 0$$
$$M_2 = M' - 3(5 + x_2)$$
$$\frac{\partial M_2}{\partial M'} = 1$$

Teorema de Castigliano. Hacemos que M' = 0 y aplicamos la ecuación 8–36, de modo que tenemos

$$\theta_B = \int M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$$
$$= \int_0^5 \frac{(-3x_1)(0)\,dx_1}{EI} + \int_0^5 \frac{-3(5 + x_2)(1)\,dx_2}{EI}$$
$$= -\frac{112.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

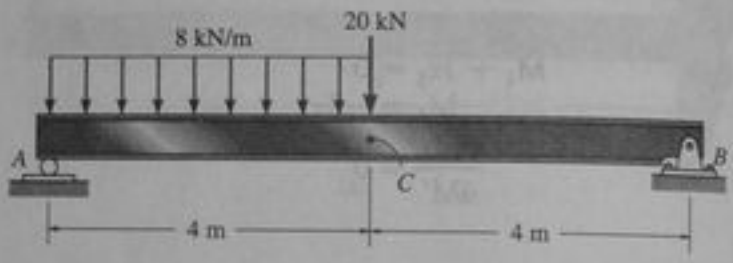
o

$$\theta_B = \frac{-112.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{200(10^6)\ \text{kN/m}^2[60(10^6)\ \text{mm}^4](10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)}$$
$$= -0.00938\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que θ_B es opuesto al sentido del momento concentrado **M'**. Note la semejanza entre esta solución y la del ejemplo 8–17.

Ejemplo 8–28

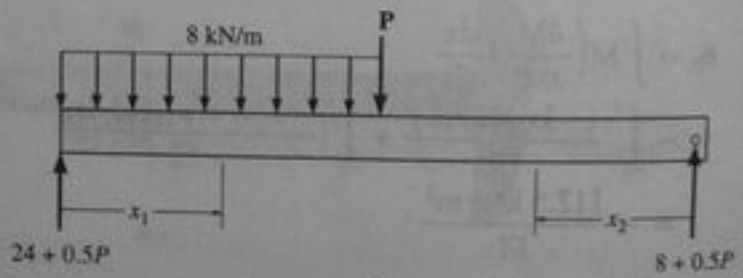
Determine el desplazamiento vertical del punto C de la viga que se muestra en la figura 8–52*a*. Considere $E = 200\,\text{GPa}$, $I = 150(10^6)\,\text{mm}^4$.



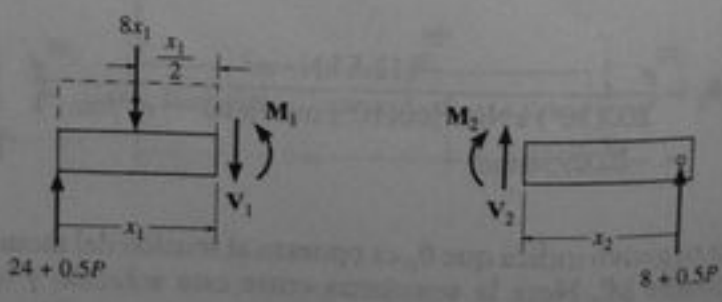
(a)

Solución

Fuerza externa P. Se aplica una fuerza vertical P en el punto C, figura 8–52*b*. Después, esta fuerza se hará igual a 20kN.



(b)



(c)

Fig. 8–52

Momentos internos M. En este caso se necesitan dos coordenadas x para la integración, figura 8–52*b*, ya que la carga es discontinua en C. Utilizamos el método de las secciones, figura 8–52*c* y tenemos

Para x_1:

$$\zeta+\Sigma M = 0; \quad (24 + 0.5P)x_1 - 8x_1\left(\frac{x_1}{2}\right) - M_1 = 0$$

$$M_1 = (24 + 0.5P)x_1 - 4x_1^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0.5x_1$$

Para x_2:

$$\zeta+\Sigma M = 0; \quad M_2 - (8 + 0.5P)x_2 = 0$$

$$M_2 = (8 + 0.5P)x_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0.5x_2$$

Teorema de Castigliano. Hacemos que $P = 20$ kN y aplicamos la ecuación 8–35, de modo que se obtiene

$$\Delta_{C_v} = \int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$= \int_0^4 \frac{(34x_1 - 4x_1^2)(0.5x_1)\,dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{(18x_2)(0.5x_2)\,dx_2}{EI}$$

$$= \frac{234.7\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{192\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{426.7\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

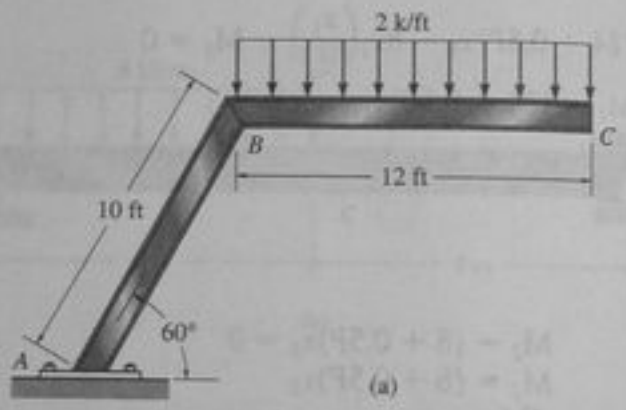
o

$$\Delta_{C_v} = \frac{426.7\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{(200)(10^6)\ \text{kN/m}^2[150(10^6)\ \text{mm}^4](10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= 0.0142\ \text{m} = 14.2\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 8–29

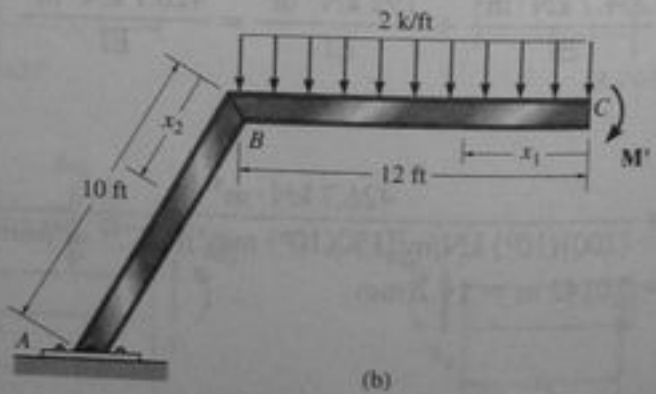
Determine la pendiente en el punto C del marco de dos miembros mostrado en la figura 8–53*a*. El soporte en A es un empotramiento. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 600$ in^4.



(a)

Solución

Momento concentrado externo M'. Se aplica un momento concentrado variable M' al marco en el punto C, ya que la pendiente en este punto va a determinarse, figura 8–53*b*. Después, este momento se hará igual a cero.



(b)

Fig. 8–53

Momentos internos M. Debido a la discontinuidad de la carga interna en B, se escogen dos coordenadas, x_1 y x_2, como se muestra en la figura 8–53c. Utilizamos el método de las secciones, figura 8–53c, y tenemos

Para x_1:

$$\zeta+\Sigma M = 0; \qquad M_1 + 2x_1\left(\frac{x_1}{2}\right) + M' = 0$$

$$M_1 = -(x_1^2 + M')$$

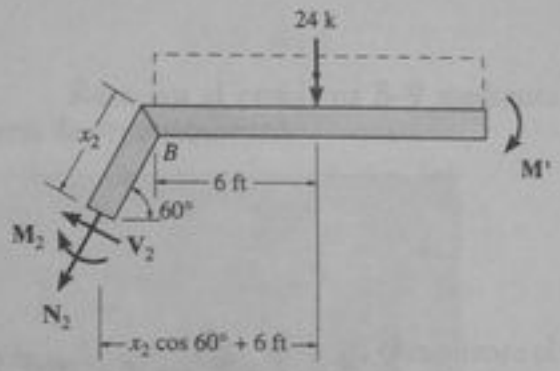
$$\frac{\partial M_1}{\partial M'} = -1$$

Para x_2:

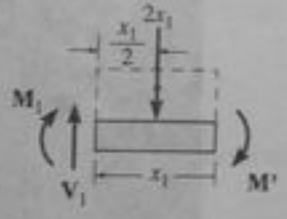
$$\zeta+\Sigma M = 0; \qquad M_2 + 24(x_2 \cos 60° + 6) + M' = 0$$

$$M_2 = -24(x_2 \cos 60° + 6) - M'$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial M'} = -1$$



(c)



Teorema de Castigliano. Hacemos que $M' = 0$ y si aplicamos la ecuación 8–36, resulta

$$\theta_C = \int M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$= \int_0^{12} \frac{(-x_1^2)(-1)\,dx_1}{EI} + \int_0^{10} \frac{-24(x_2 \cos 60° + 6)(-1)\,dx_2}{EI}$$

$$= \frac{576\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI} + \frac{2040\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI} = \frac{2616\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

o

$$\theta_C = \frac{2616\ \text{k}\cdot\text{ft}^2(144\ \text{in}^2/\text{ft}^2)}{29(10^3)\ \text{k/in}^2(600\ \text{in}^4)} = 0.0216\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

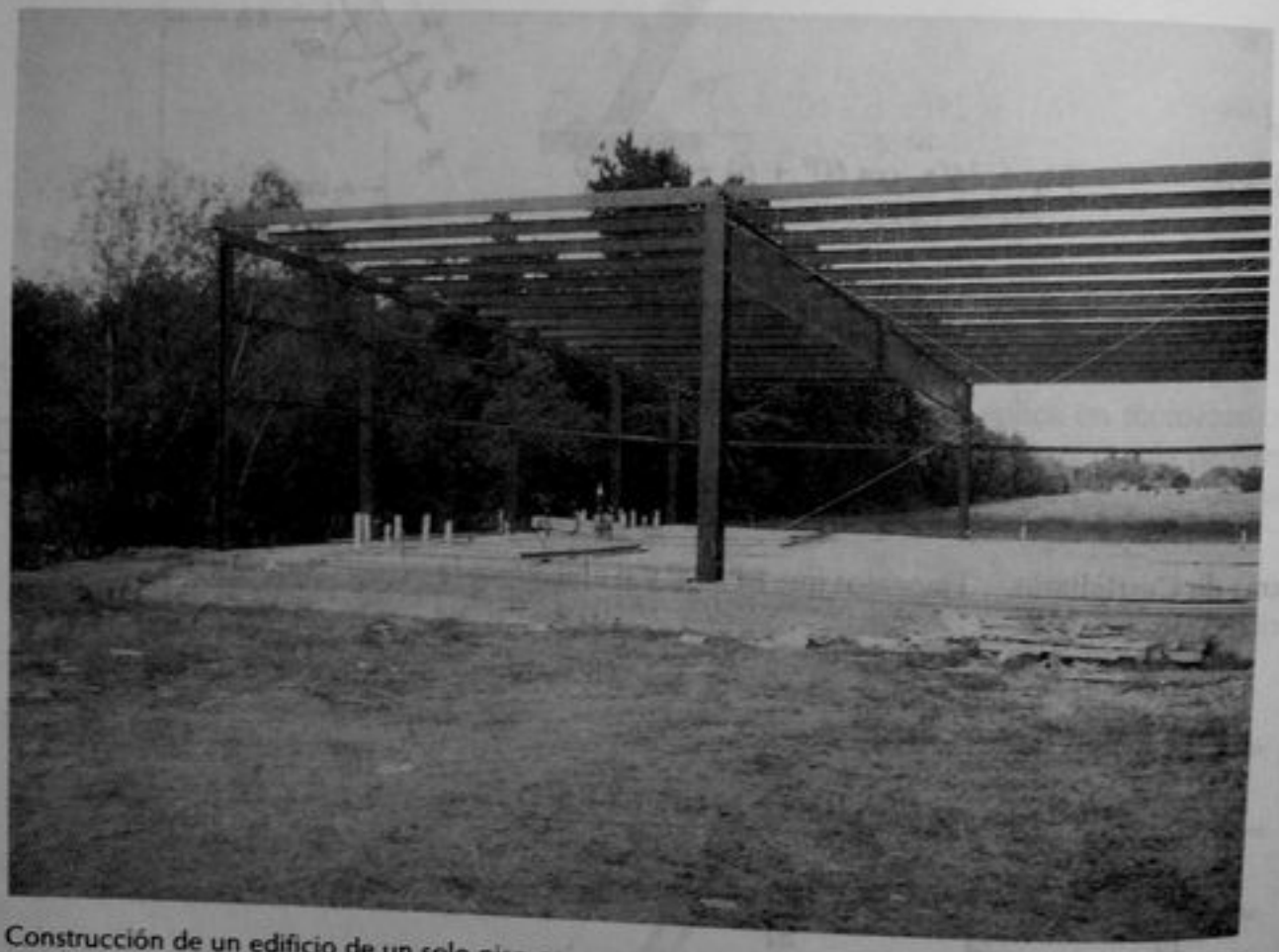
BIBLIOGRAFÍA

Bairstow, L., and Pippard, A. J. S., "The Determination of the Stresses in a Shaft of Any Cross-Section," *Proceedings, Institute of Civil Engineers*, vol. 214, 1921–22.

Betti, E. *Il Nuovo Cimento*, ser. 2, Vols. 7 and 8, 1872.

Castigliano, A. *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, Paris, 1879. (See translation E. S. Andrews. *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and its Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1966.)

Mohr, O. *Beitrag zur Theorie der Holz-und Eisenkonstruktionen*. Zeitschrift des Architekten-und Ingenieuren-Vereins Z. Hannover, 6 (1860), 323–346.



Construcción de un edificio de un solo piso con estructura de acero.

PROBLEMAS

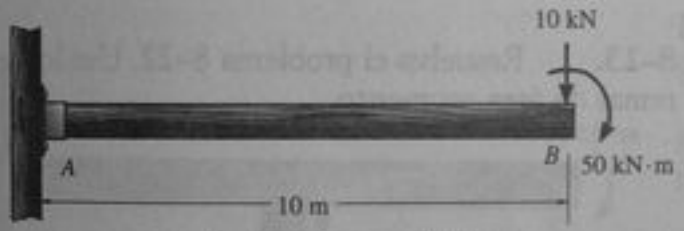
8–1. Determine la pendiente y la deflexión en *B*. Use el método de integración. *EI* es constante.

8–2. Resuelva el problema 8–1 con los teoremas de área-momento.

8–3. Resuelva el problema 8–1 con el método de la viga conjugada.

***8–4.** Resuelva el problema 8–1 con el método del trabajo virtual.

8–5. Resuelva el problema 8–1 mediante el teorema de Castigliano

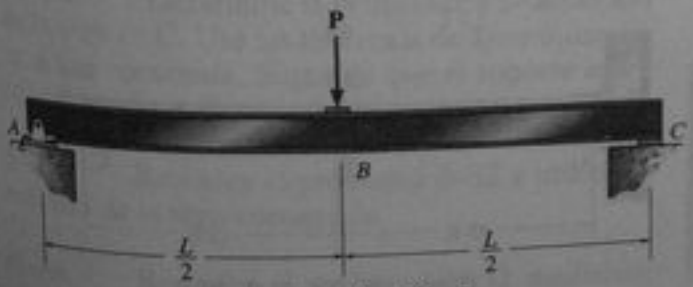


Probs. 8–1 a 8–5

8–6. Determine la deflexión en el centro *B* de la viga y la pendiente en *A*. *EI* es constante. Use el método de integración. Suponga que el soporte en *C* es un rodillo.

8–7. Resuelva el problema 8–6 y utilice los teoremas de área-momento.

***8–8.** Resuelva el problema 8–6 y utilice el método del trabajo virtual.



Probs. 8–6/8–7/8–8

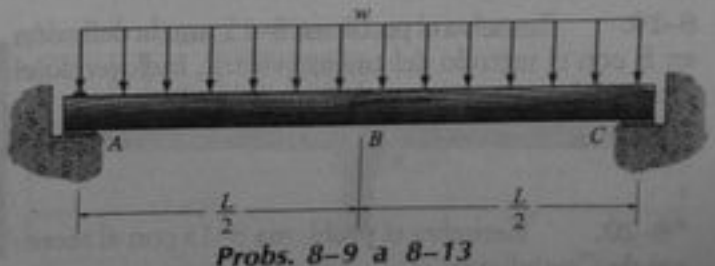
8–9. Determine la deflexión en el centro *B* de la viga y la pendiente en *A*. *EI* es constante. Use el método de integración. Suponga que el soporte en *A* es un pasador y *C* un rodillo.

8–10. Resuelva el problema 8–9 mediante los teoremas de área-momento.

8–11. Resuelva el problema 8–9 mediante el método de la viga conjugada.

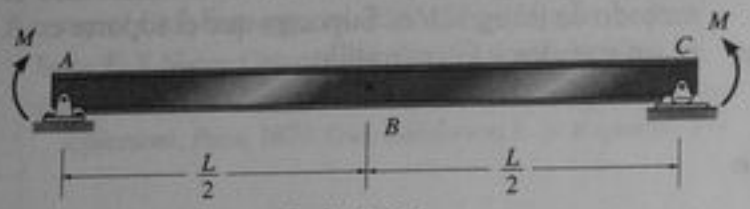
***8–12.** Resuelva el problema 8–9 mediante el método del trabajo virtual.

8–13. Resuelva el problema 8–9 mediante el teorema de Castigliano.



Probs. 8–9 a 8–13

8–14. Determine la deflexión en el centro B de la viga y la pendiente en A. EI es constante. Use el método de integración.



Prob. 8–14

8–15. Determine la pendiente y la deflexión en B. Use el método de integración. La viga tiene una sección transversal rectangular, donde $E = 13$ GPa, $A = 0.08\ m^2$, $I = 0.500(10^{-3})\ m^4$.

***8–16.** Resuelva el problema 8–15 mediante los teoremas de área-momento.

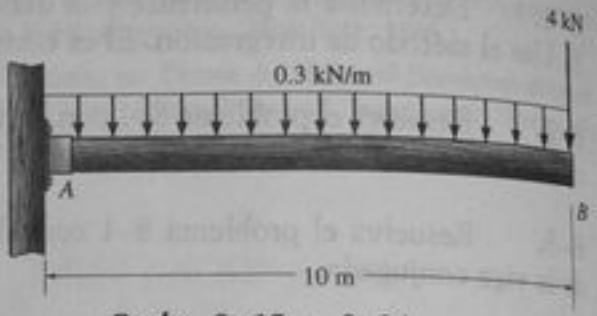
8–17. Resuelva el problema 8–15 con el método de la viga conjugada.

8–18. Resuelva el problema 8–15 con el método del trabajo virtual.

8–19. Resuelva el problema 8–15 para la deflexión en B con el método del trabajo virtual, incluyendo el efecto del cortante.

***8–20.** Resuelva el problema 8–15 con el teorema de Castigliano.

8–21. Resuelva el problema 8–15 para la deflexión en B con el teorema de Castigliano, incluyendo el efecto del cortante.



Probs. 8–15 a 8–21

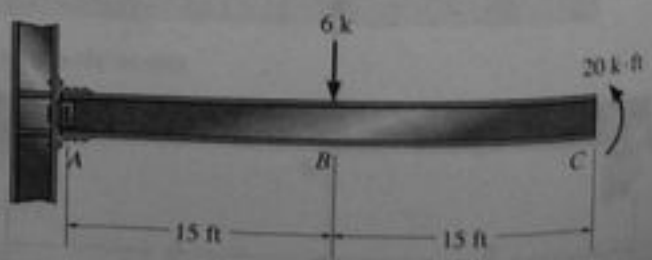
8–22. Determine la pendiente y la deflexión en C. Use el método de integración. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 800\ in^4$.

8–23. Resuelva el problema 8–22. Use los teoremas de área-momento.

***8–24.** Resuelva el problema 8–22 y utilice el método de la viga conjugada.

8–25. Resuelva el problema 8–22 con el método del trabajo virtual.

8–26. Resuelva el problema 8–22 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–22 a 8–26

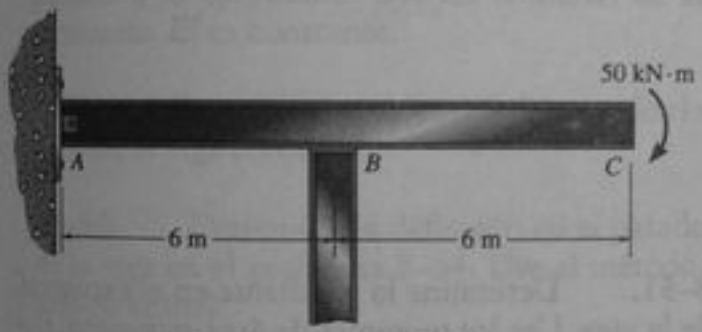
8–27. Determine la deflexión en C. Use el método de integración. Suponga que el soporte en A es un pasador y B es un rodillo. *EI* es constante.

***8–28.** Resuelva el problema 8–27 con los teoremas de área-momento.

8–29. Resuelva el problema 8–27 con el método de la viga conjugada.

8–30. Resuelva el problema 8–27 con el método del trabajo virtual.

8–31. Resuelva el problema 8–27 con el teorema de Castigliano.



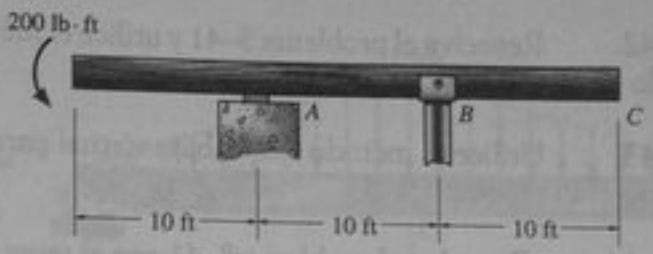
Probs. 8–27 a 8–31

***8–32.** Determine la pendiente y la deflexión de la viga en C. Use los teoremas de área-momento. *EI* es constante. Suponga que el soporte en A es un pasador y B un rodillo.

8–33. Resuelva el problema 8–32 y utilice el método de la viga conjugada.

8–34. Resuelva el problema 8–32 mediante el método del trabajo virtual.

8–35. Resuelva el problema 8–32 mediante el teorema de Castigliano.



Probs. 8–32 a 8–35

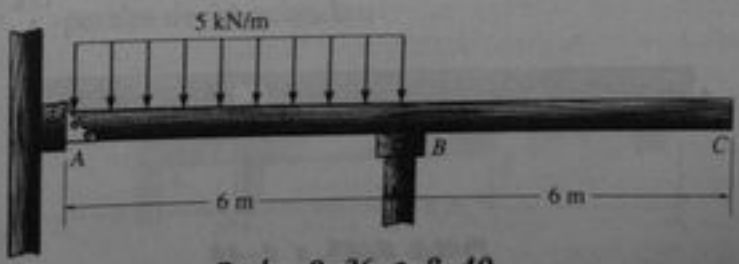
***8–36.** Determine la deflexión en C. Suponga que B es un rodillo y A un pasador. Use el método de integración. $E = 200$ GPa e $I = 80(10^{-6})$ m^4.

8–37. Resuelva el problema 8–36 usando los teoremas de área-momento.

8–38. Resuelva el problema 8–36 con el método de la viga conjugada.

8–39. Resuelva el problema 8–36 con el método del trabajo virtual.

***8–40.** Resuelva el problema 8–36 con el teorema de Castigliano.



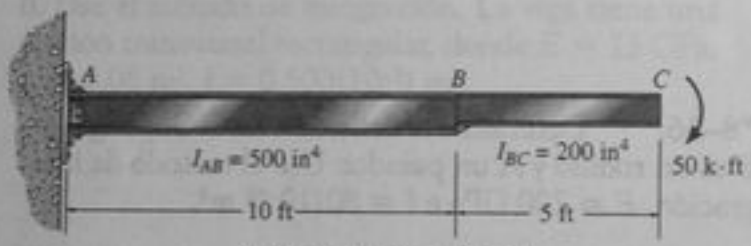
Probs. 8–36 a 8–40

8–41. Determine la deflexión y la pendiente del extremo C de la viga en voladizo. $E = 29(10^3)$ ksi. El momento de inercia de cada segmento se indica en la figura. Use los teoremas de área-momento.

8–42. Resuelva el problema 8–41 y utilice el método de la viga conjugada.

8–43. Utilice el método del trabajo virtual para resolver el problema 8–41.

***8–44.** Resuelva el problema 8–41 con el teorema de Castigliano.



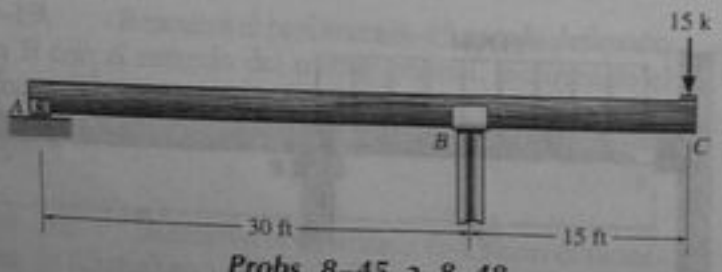
Probs. 8–41 a 8–44

8–45. Determine la pendiente y la deflexión en C. Suponga que A es un pasador y B un rodillo. EI es constante. Use los teoremas de área-momento.

8–46. Resuelva el problema 8–45 con el método de la viga conjugada.

8–47. Resuelva el problema 8–45 con el método del trabajo virtual.

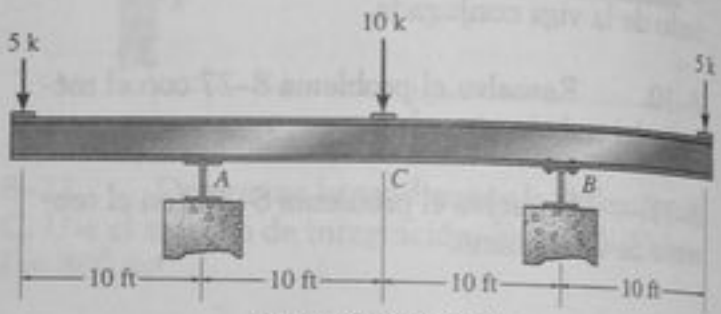
***8–48.** Resuelva el problema 8–45 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–45 a 8–48

8–49. Determine la pendiente en B y la deflexión en C. Use los teoremas de área-momento. EI es constante. Suponga que A es un rodillo y B un pasador.

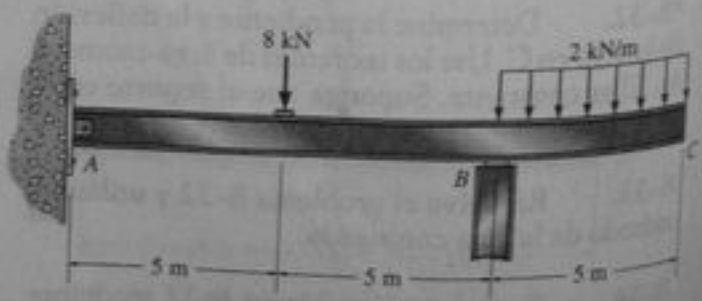
8–50. Resuelva el problema 8–49 con el método de la viga conjugada.



Probs. 8–49/8–50

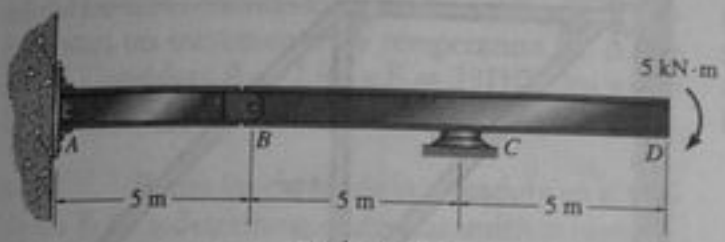
8–51. Determine la pendiente en el extremo C de la viga. Use los teoremas de área-momento. $E = 200$ GPa, $I = 70(10^6)$ mm^4. Suponga que B es un rodillo y A un pasador.

***8–52.** Resuelva el problema 8–51 mediante el método de la viga conjugada.



Probs. 8–51/8–52

8–53. Determine la pendiente justo a la izquierda y justo a la derecha del pasador en B. Determine también la deflexión en D. Suponga que la viga está empotrada en A y que C es un rodillo. Use el método de la viga conjugada. EI es constante.



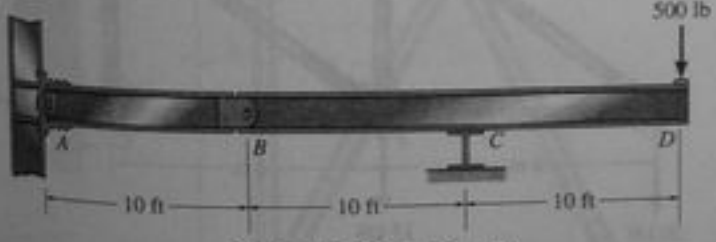
Prob. 8–53

8–54. Determine la deflexión en B y la pendiente en C. Suponga que A es un empotramiento, B un pasador y C un rodillo. Use los teoremas de área-momento. EI es constante.

8–55. Resuelva el problema 8–54 usando el método de la viga conjugada.

***8–56.** Determine la deflexión en el pasador B de la viga en el problema 8–54. Use el método del trabajo virtual.

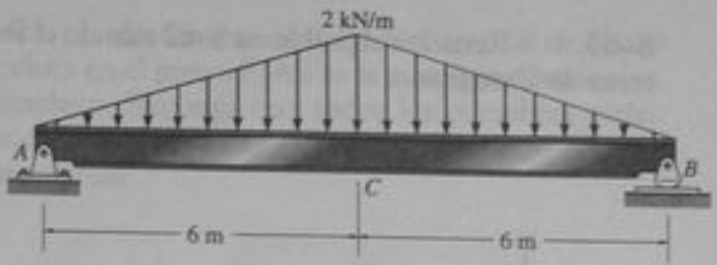
8–57. Resuelva el problema 8–54 para la deflexión en B usando el teorema de Castigliano.



Probs. 8–54 a 8–57

8–58. Determine la deflexión en el centro C de la viga de patín ancho. Use el método del trabajo virtual. $E = 200$ GPa e $I = 75(10^6)$ mm^4.

8–59. Resuelva el problema 8–58 con el teorema de Castigliano.

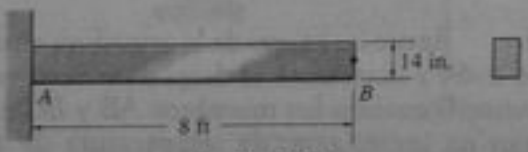


Probs. 8–58/8–59

***8–60.** La parte superior de la viga está sometida a una temperatura de $T_t = 200°C$, mientras que la temperatura de su parte inferior es $T_b = 30°C$. Si $\alpha = 12(10^{-6})/°C$, determine el desplazamiento vertical de su extremo C debido al gradiente de temperatura. La viga tiene un peralte de 350 mm.

Prob. 8–60

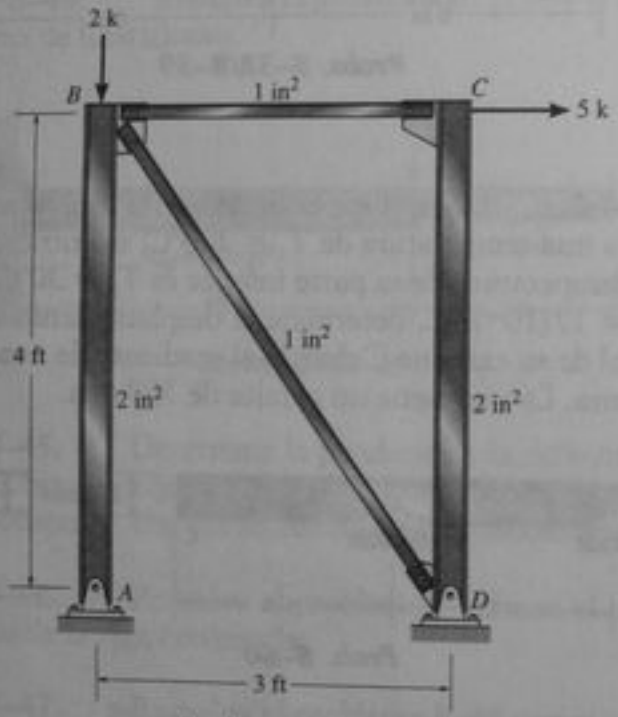
8–61. La parte inferior de la viga está sometida a una temperatura de $T_b = 250°F$, mientras que la temperatura de su parte superior es $T_t = 50°F$. Si $\alpha = 6.5(10^{-6})/°F$, determine el desplazamiento vertical de su extremo B debido al gradiente de temperatura. La viga tiene una sección transversal rectangular con peralte de 14 pulgadas.



Prob. 8–61

8–62. Determine la deflexión horizontal en *C*. El área de la sección transversal de cada miembro se indica en la figura. Suponga que los miembros están articulados en sus puntos extremos. $E = 29(10^3)$ ksi. Use el método del trabajo virtual.

8–63. Resuelva el problema 8–62 usando el teorema de Castigliano.

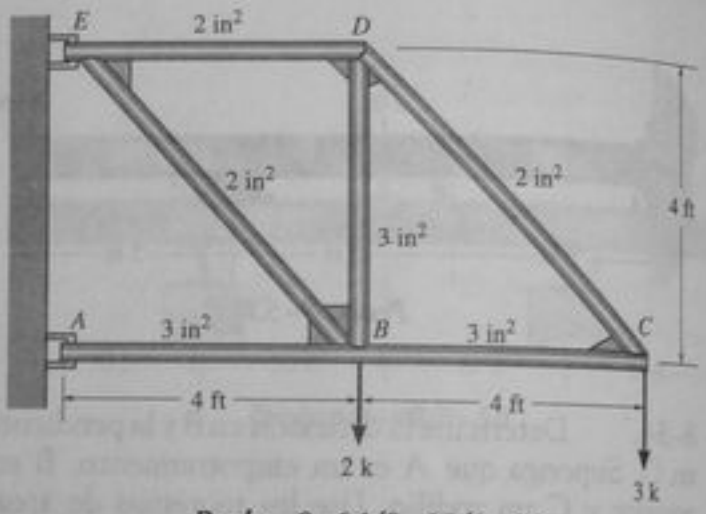


Probs. 8–62/8–63

***8–64.** Determine la deflexión vertical en *C*. El miembro *EB* se fabricó 0.02 in. más corto de lo necesario. El área de la sección transversal de cada miembro está indicada en la figura. $E = 29(10^6)$ psi. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos. Use el método del trabajo virtual.

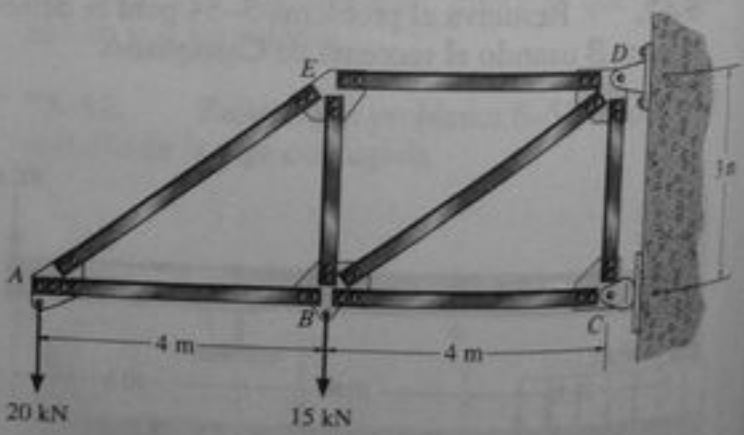
8–65. Retire las cargas de la armadura en el problema 8–64 y determine el desplazamiento vertical del punto *B* cuando los miembros *AB* y *BC* experimentan un incremento de temperatura de $\Delta T = 200°F$. Considere $E = 29(10^3)$ ksi y $\alpha = 10^{-6}/°F$.

8–66. Retire las cargas de la armadura en el problema 8–64 y determine el desplazamiento vertical del punto *B* si el miembro *EB* se fabrica 0.75 in. más largo.



Probs. 8–64/8–65/8–66

8–67. Determine la deflexión vertical en *A*. Use el método del trabajo virtual. *AE* es constante. Suponga que los miembros están articulados en sus extremos.



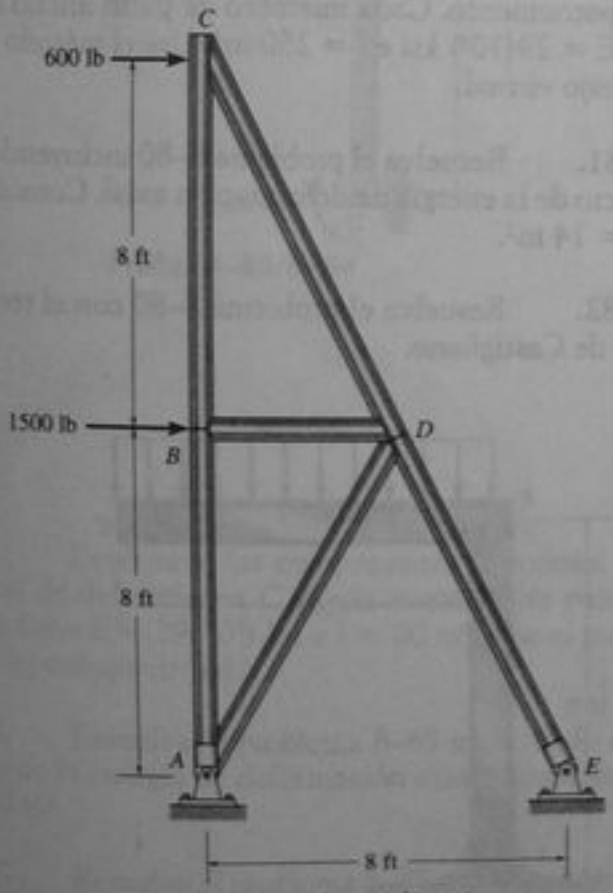
Prob. 8–67

***8–68.** Resuelva el problema 8–67 usando el teorema de Castigliano.

8–69. Determine la deflexión horizontal en C. Use el método del trabajo virtual. Suponga que los miembros están articulados en sus extremos. *AE* es constante.

8–70. Retire las cargas de la armadura en el problema 8–69 y determine el desplazamiento horizontal del punto C cuando los miembros *AB* y *BC* experimentan un incremento de temperatura de $\Delta T = 200°F$. Considere $A = 2\ in^2$ y $E = 29(10^3)$ ksi y $\alpha = 10^{-6}/°F$.

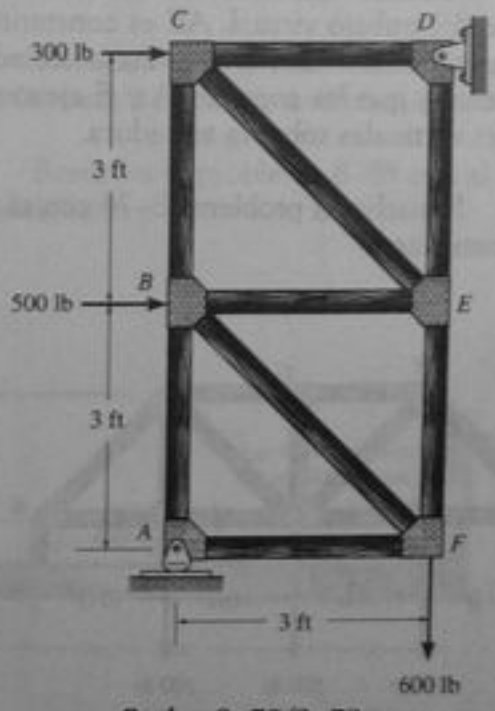
8–71. Retire las cargas de la armadura en el problema 8–69 y determine el desplazamiento horizontal del punto C si el miembro *CD* se fabrica 0.5 in. más corto de lo necesario.



Probs. 8–69/8–70/8–71

***8–72.** Determine la deflexión horizontal de la armadura en el punto *B*. *AE* es la misma para todos los miembros. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos. Use el método del trabajo virtual.

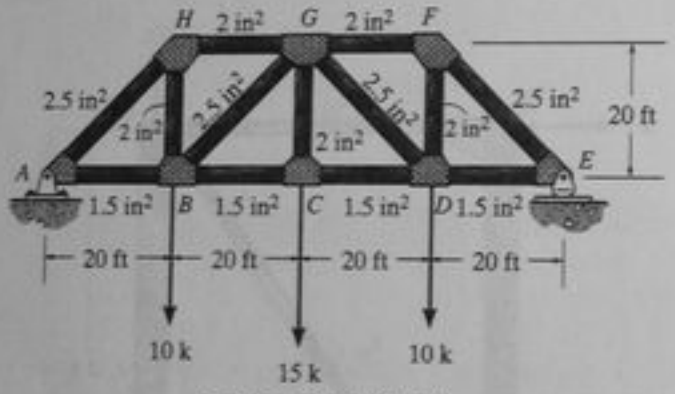
8–73. Determine la deflexión vertical de la armadura en el punto *F*. *AE* es la misma para todos los miembros. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos. Use el método del trabajo virtual.



Probs. 8–72/8–73

8–74. Determine la deflexión vertical en C. El área de la sección transversal de cada miembro se indica en la figura. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos. $E = 29(10^3)$ ksi. Use el método del trabajo virtual.

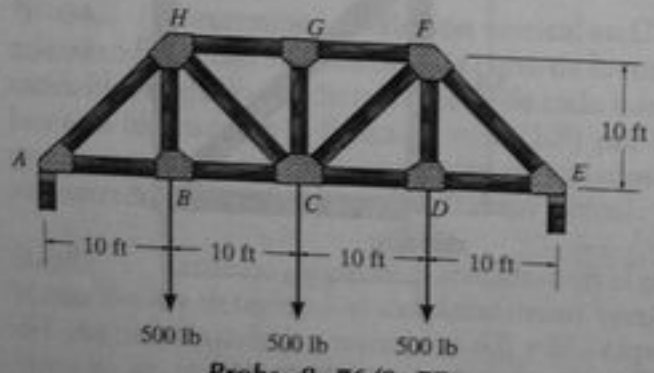
8–75. Resuelva el problema 8–74 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–74/8–75

***8–76.** Determine la deflexión vertical en C. Use el método del trabajo virtual. *AE* es constante. Suponga que todos los miembros están articulados en sus extremos y que los soportes *A* y *E* ejercen sólo reacciones verticales sobre la armadura.

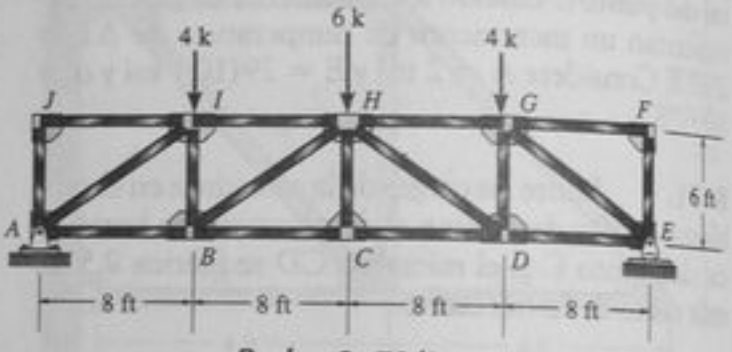
8–77. Resuelva el problema 8–76 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–76/8–77

8–78. Determine la deflexión vertical en C. *AE* es constante. Suponga que cada miembro está articulado en sus extremos. Use el método del trabajo virtual.

8–79. Resuelva el problema 8–78 con el teorema de Castigliano.

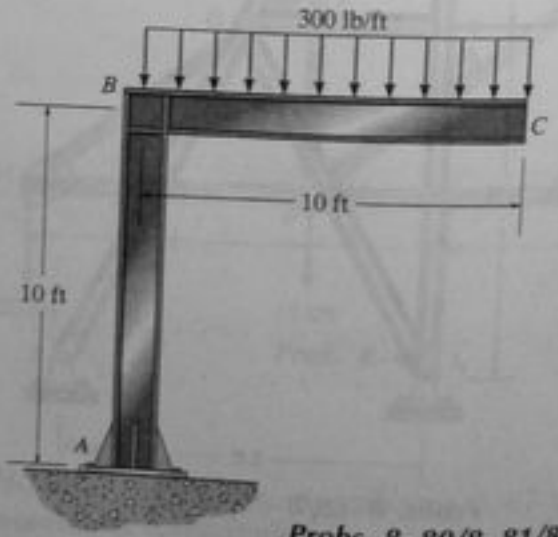


Probs. 8–78/8–79

***8–80.** Determine las componentes horizontal y vertical de deflexión en C. El soporte en *A* es un empotramiento. Cada miembro de patín ancho tiene $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 250$ in⁴. Use el método del trabajo virtual.

8–81. Resuelva el problema 8–80 incluyendo el efecto de la energía de deformación axial. Considere $A = 14$ in².

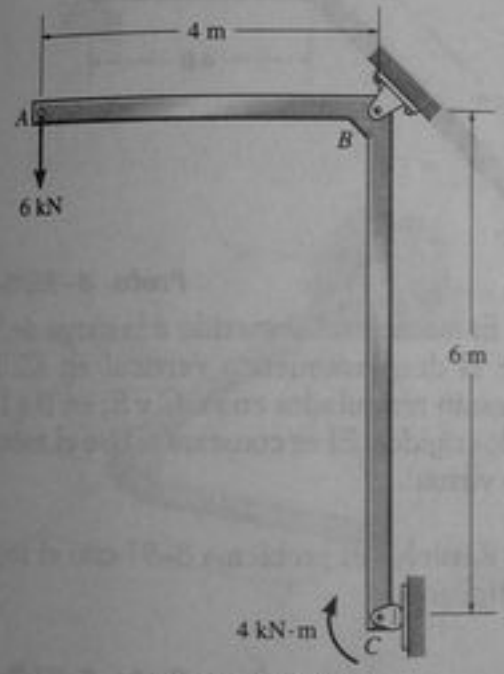
8–82. Resuelva el problema 8–80 con el teorema de Castigliano.



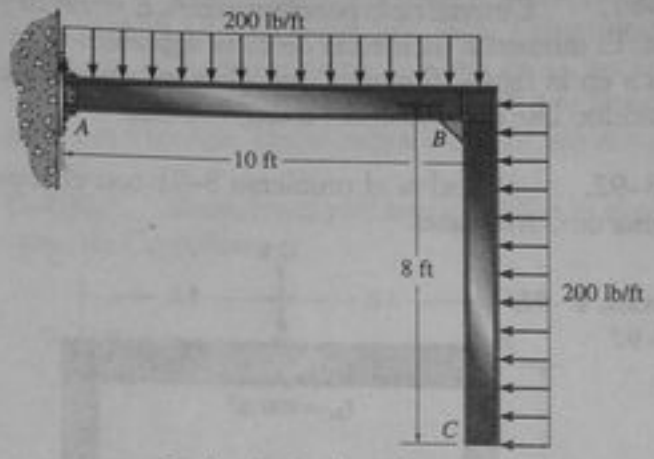
Probs. 8–80/8–81/8–82

8–83. Determine la deflexión vertical en A. Use el método del trabajo virtual. $E = 200$ GPa, $I = 90(10^6)$ mm^4.

***8–84.** Resuelva el problema 8–83 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–83/8–84



Probs. 8–85/8–86/8–87

***8–88.** Determine la deflexión vertical en C. El área de la sección transversal y el momento de inercia de cada segmento se muestran en la figura. Considere $E = 200$ GPa. Suponga que A es un empotramiento. Use el método del trabajo virtual.

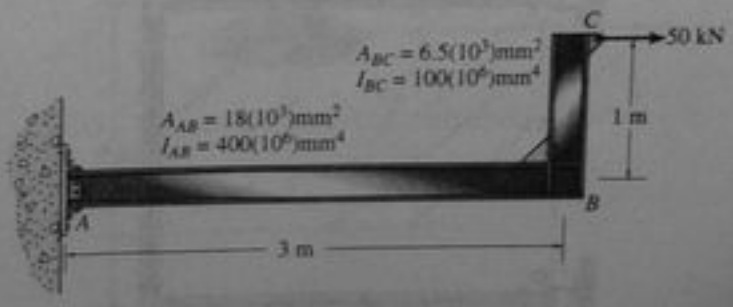
8–89. Resuelva el problema 8–88 incluyendo el efecto de la energía de deformación axial y cortante.

8–90. Resuelva el problema 8–88 con el teorema de Castigliano.

8–85. Determine las componentes horizontal y vertical de deflexión en C. Cada miembro de patín ancho tiene $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 80$ in^4. Use el método del trabajo virtual.

8–86. Resuelva el problema 8–85 incluyendo el efecto de la energía de deformación axial. Considere $A = 8$ in^2.

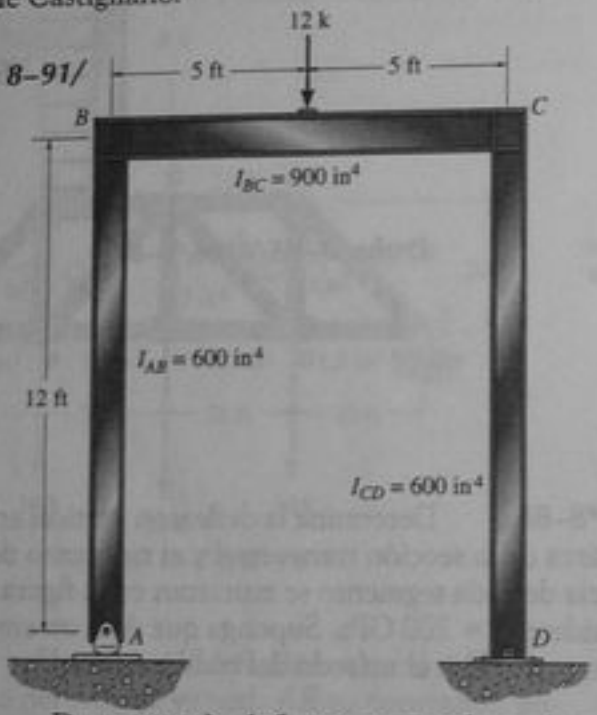
8–87. Resuelva el problema 8–85 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–88/8–89/8–90

8–91. Determine la pendiente en A. $E = 29(10^3)$ ksi. El momento de inercia de cada segmento se indica en la figura. Suponga que D es un soporte de pasador. Use el método del trabajo virtual.

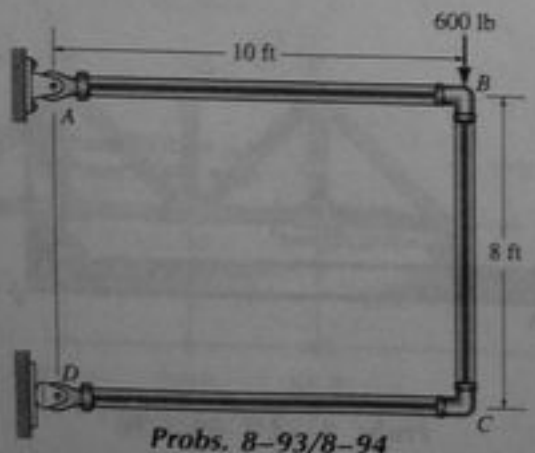
***8–92.** Resuelva el problema 8–91 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–91/8–92

8–93. Determine la deflexión vertical en el soporte de balancín en D. EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

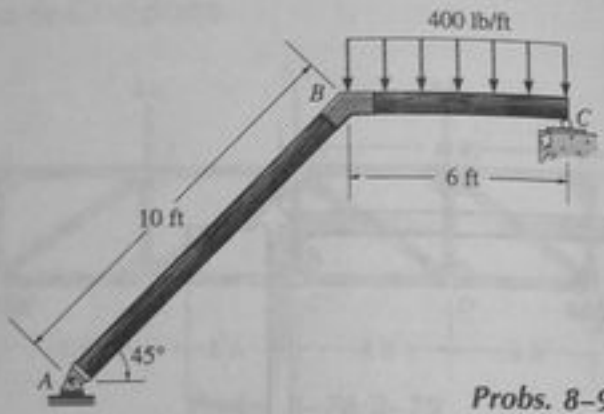
8–94. Resuelva el problema 8–93 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–93/8–94

8–95. Determine la deflexión horizontal en C. EI es constante. Use el método del trabajo virtual. A es un pasador, C un rodillo y B un nudo rígido.

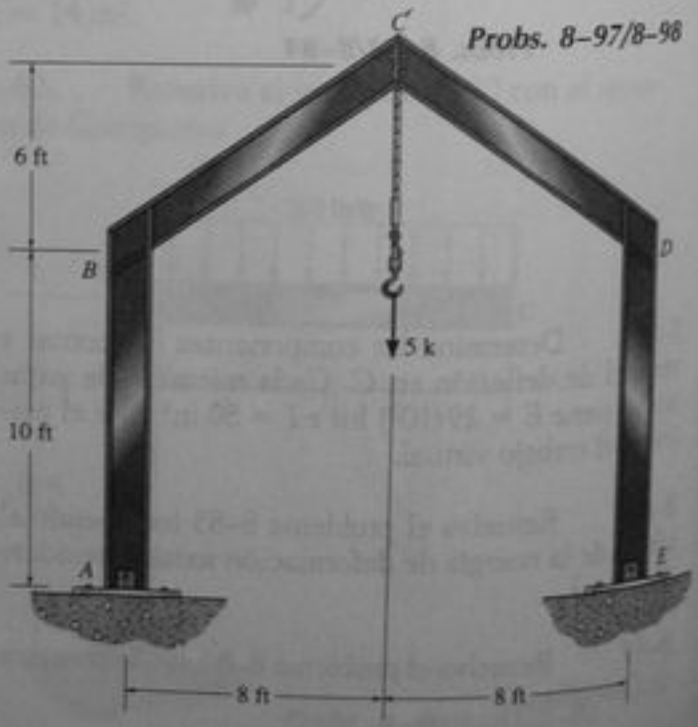
***8–96.** Resuelva el problema 8–95 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–95/8–96

8–97. El marco está sometido a la carga de 5 k. Determine el desplazamiento vertical en C. Los miembros están articulados en A, C y E; en B y D se tienen nudos rígidos. EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

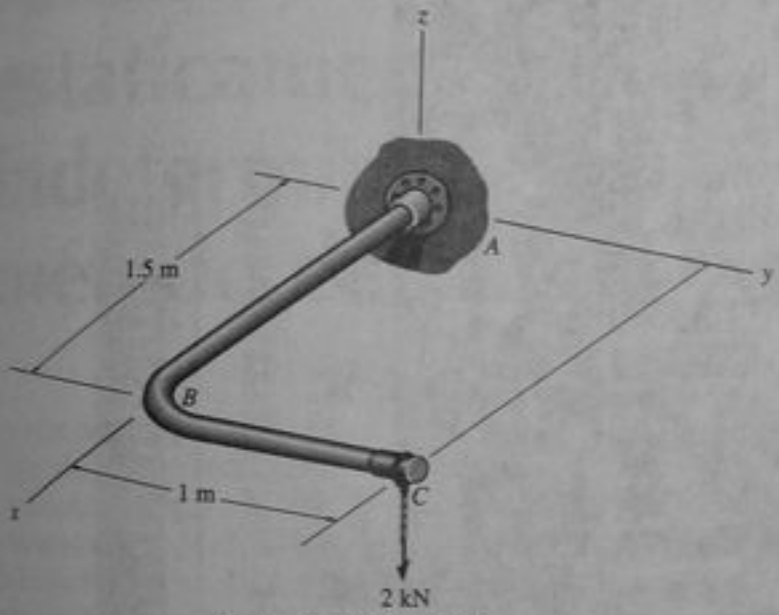
8–98. Resuelva el problema 8–97 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–97/8–98

8–99. La barra doblada tiene $E = 200$ GPa, $G = 75$ GPa y un radio de 30 mm. Determine la deflexión vertical en C incluyendo los efectos de la energía de deformación por flexión, cortante y torsión. Use el método del trabajo virtual.

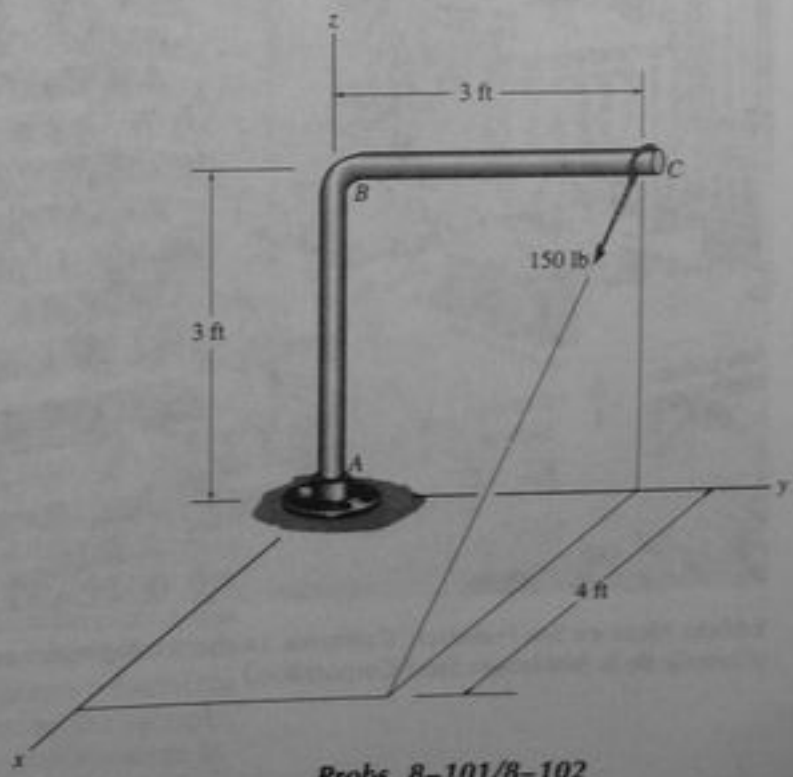
***8–100.** Resuelva el problema 8–99 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–99/8–100

8–101. La barra doblada tiene $E = 29(10^3)$ ksi, $G = 11(10^3)$ ksi y un radio de 0.75 in. Determine la deflexión en la dirección de la carga en C. Incluya los efectos de la energía de deformación por flexión, cortante y torsión. Use el método del trabajo virtual.

8–102. Resuelva el problema 8–101 con el teorema de Castigliano.



Probs. 8–101/8–102

Edificio Alcoa en San Francisco, California. Las barras diagonales exteriores se usan para resistir cargas sísmicas. (Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.)

9

Análisis de estructuras estáticamente indeterminadas por el método de las fuerzas

En este capítulo aplicaremos el método de las *fuerzas* o de las *flexibilidades* al análisis de armaduras, vigas y marcos estáticamente indeterminados. Veremos también la aplicación de la ecuación de los tres momentos, que es un método de fuerzas para el análisis de vigas indeterminadas. Al final del capítulo presentaremos un método para dibujar la línea de influencia para una viga o marco estáticamente indeterminado.

9.1 Estructuras estáticamente indeterminadas

Recuerde de la sección 2.4 que una estructura de cualquier tipo se clasifica como *estáticamente indeterminada* cuando el número de reacciones o fuerzas internas desconocidas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio disponibles para su análisis. En esta sección veremos las ventajas de usar estructuras indeterminadas y dos maneras fundamentales en que pueden analizarse. La mayoría de las estructuras diseñadas actualmente son estáticamente indeterminadas. Esta indeterminación puede surgir como resultado de soportes o miembros adicionales o bien por la forma general de la estructura. Por ejemplo, los edificios de concreto reforzado son casi siempre estáticamente indeterminados ya que las columnas y las vigas se cuelan como miembros continuos a través de los nudos y sobre los soportes.

Ventajas y desventajas

Aunque el análisis de una estructura estáticamente indeterminada es más complicado que el de una estáticamente determinada, hay usualmente varias razones muy importantes para escoger este tipo de estructura. Tal vez el más importante es que para una carga dada, el esfuerzo y la deflexión máximos de una estructura estáticamente indeterminada son generalmente *más pequeños* que en la correspondiente estructura estáticamente determinada. Por ejemplo, la viga empotrada estáticamente indeterminada en la figura 9–1*a* estará sometida a un momento máximo $M_{máx} = PL/8$, mientras que la misma viga, al estar simplemente apoyada, figura 9–1*b*, estará sometida al momento doble, esto es, $M_{máx} = PL/4$. En consecuencia la viga empotrada tendrá la cuarta parte de deflexión y la mitad de esfuerzo en el centro de su claro respecto a la simplemente apoyada.

Otra importante razón para seleccionar una estructura estáticamente indeterminada es por la tendencia que tiene a redistribuir su carga hacia sus soportes redundantes en casos en que ocurre un diseño defectuoso o una sobrecarga. En esos casos, la estructura mantiene su estabilidad y el colapso se evita. Esto es particularmente importante cuando la estructura soporta cargas laterales *repentinas*, como cargas por efectos del viento o de sismos. Para ilustrar esto, considere de nuevo la viga empotrada cargada en su centro, figura 9–1*a*. Al incrementarse P, el material de la viga en los muros y en el centro del

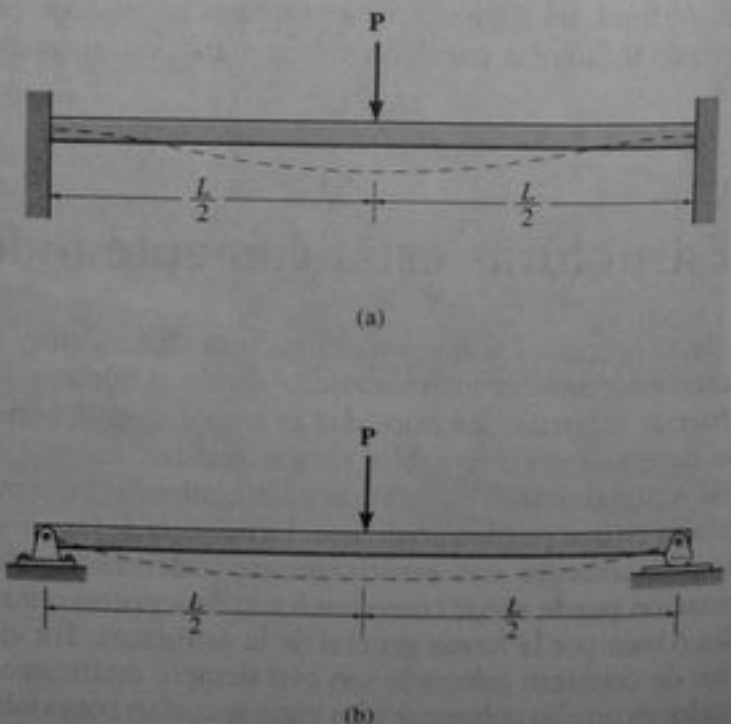


Fig. 9–1

claro comienza a *fluir* y se forma una "articulación plástica" localizada que ocasiona que la viga se deflexione como si estuviera realmente articulada en esos puntos. Aunque la deflexión resulta grande, los muros desarrollan reacciones de fuerza horizontal y momento que sostienen la viga e impiden su colapso total. En el caso de la viga simplemente apoyada, figura 9–1*b*, una carga **P** excesiva ocasiona que la "articulación plástica" se forme sólo en el centro de la viga y debido a la gran deflexión vertical, los soportes no desarrollan las reacciones por fuerza horizontal y momento que son necesarias para impedir el colapso total.

Aunque las estructuras estáticamente indeterminadas pueden soportar una carga con miembros más pequeños y con mayor estabilidad que la asociada a sus contrapartes estáticamente determinadas, hay casos en que esas ventajas pueden convertirse en desventajas. El ahorro en costo de material debe compararse con el costo adicional necesario para fabricar la estructura ya que suele ser más caro construir los soportes y nudos de una estructura estáticamente indeterminada en comparación con una estáticamente determinada. Además, como las estructuras estáticamente indeterminadas tienen soportes redundantes, se debe ser muy cuidadoso en prevenir desplazamientos diferenciales de los soportes ya que este efecto introduciría esfuerzos interiores en la estructura. Por ejemplo, si el muro de empotramiento en la viga de la figura 9–1*a* se asentase, se desarrollarían esfuerzos en la viga debido a la deformación "forzada". Por otra parte, si la viga estuviese simplemente apoyada o fuese estáticamente determinada, figura 9–1*b*, cualquier asentamiento de su extremo no ocasionaría deformaciones en la viga y no se desarrollarían entonces esfuerzos en ella. En general, cualquier deformación, como la causada por desplazamientos relativos de los soportes o por cambios en la longitud de los miembros debidos a la temperatura o a errores de fabricación, introducirá esfuerzos adicionales en la estructura, que deben considerarse al diseñar estructuras estáticamente indeterminadas.

Métodos de análisis

Al analizar cualquier estructura indeterminada, es necesario que se cumplan los requisitos de *equilibrio*, *compatibilidad* y *fuerza-desplazamiento*. El *equilibrio* se satisface cuando las fuerzas reactivas mantienen a la estructura en reposo y la *compatibilidad* se satisface cuando los diversos segmentos de la estructura se ajustan entre sí sin roturas o traslapes. Los requisitos de *fuerza-desplazamiento* dependen de la forma en que el material responde; en este texto suponemos que la respuesta es lineal-elástica. En general, hay dos maneras diferentes de satisfacer esos requisitos al analizar una estructura estáticamente indeterminada: el *método de las fuerzas* o *método de las flexibilidades* y el *método de los desplazamientos* o *método de las rigideces*.

Método de las fuerzas

Este método fue originalmente desarrollado por James Clerk Maxwell en 1864 y luego refinado por Otto Mohr y Heinrich Müller-Breslau. Este método fue uno de los primeros disponibles para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Como su nombre lo sugiere, el método de las fuerzas consiste en escribir ecuaciones que satisfagan la *compatibilidad* y los *requisitos de fuerza-desplazamiento* en la estructura y contienen como *incógnitas* a las *fuerzas* redundantes. Los coeficientes de esas incógnitas se llaman *coeficientes de flexibilidad*. Como la compatibilidad es la base de este método, se le llama a veces *método de la compatibilidad* o *método de los desplazamientos consistentes*. Una vez determinadas las fuerzas redundantes, las fuerzas reactivas restantes sobre la estructura se determinan satisfaciendo los requisitos de equilibrio en la estructura. Los principios fundamentales implicados en la aplicación de este método son fáciles de entender y desarrollar y se analizarán en este capítulo.

Método de los desplazamientos

El método de análisis de los desplazamientos consiste en escribir primero las relaciones fuerza-desplazamiento para los miembros y luego satisfacer los *requisitos de equilibrio* en la estructura. En este caso, las *incógnitas* en las ecuaciones son *desplazamientos* y sus coeficientes se llaman *coeficientes de rigidez*. Una vez obtenidos los desplazamientos, se determinan las fuerzas con las ecuaciones de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento. Estudiaremos algunas de las técnicas clásicas usadas para aplicar el método de los desplazamientos en los capítulos 10 y 11. Una formulación matricial del método se dará en los capítulos 14 y 15.

Cada uno de esos dos métodos de análisis, que se resumen en la figura 9–2, tiene determinadas ventajas y desventajas, que dependen de la geometría de la estructura y de su grado de indeterminación. Se hará un análisis de la utilidad de cada método después de presentados.

	Incógnitas	Ecuaciones usadas en la solución	Coeficientes de las incógnitas
Método de las fuerzas	Fuerzas	De compatibilidad y de desplazamientos de fuerzas	Coeficientes de flexibilidad
Método de los desplazamientos	Desplazamientos	De equilibrio y de desplazamientos de fuerzas	Coeficientes de rigidez

Fig. 9–2

9.2 Método de análisis de las fuerzas: procedimiento general

Tal vez la mejor manera de ilustrar los principios implicados en el método de análisis de las fuerzas, es considerar la viga mostrada en la figura 9–3*a*. Si se dibujase su diagrama de cuerpo libre, se tendrían cuatro reacciones desconocidas en los soportes y, dado que se tienen sólo tres ecuaciones de equilibrio disponibles para la solución, la viga es indeterminada de primer grado. En consecuencia, es necesaria una ecuación adicional para la solución. Para obtener esta ecuación, usaremos el principio de superposición y consideraremos la *compatibilidad de los desplazamientos* en uno de los soportes. Esto se hace escogiendo una de las reacciones en los soportes como "redundante" y cancelando temporalmente su efecto sobre la viga de manera que ésta resulte estáticamente determinada y estable. Esta viga se conoce como *estructura primaria*. Aquí cancelaremos la acción restrictiva del apoyo de balancín en B. Esto tiene como resultado que la carga $\mathbf{P}$ desplace a B hacia abajo en una cantidad Δ_B, como se muestra en la figura 9–3*b*. Sin embargo, por superposición, la reacción desconocida en B, esto es, $\mathbf{B}_y$, desplaza el punto B en una cantidad Δ'_{BB} hacia arriba, figura 9–3*c*. La primera letra en esta notación de doble subíndice se refiere al punto (B) donde se especifica la deflexión y la segunda letra se refiere al punto (B) en que la reacción desconocida actúa. Suponiendo que los desplazamientos hacia abajo son positivos, entonces de las ecuaciones 9–3*a* a la 9–3*c*, podemos escribir la ecuación necesaria de compatibilidad en el apoyo de balancín como

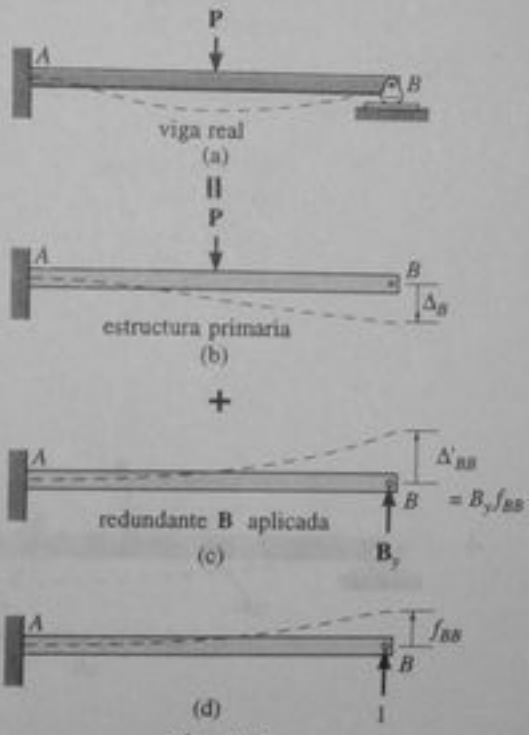


Fig. 9–3

$$(+\downarrow) \qquad 0 = \Delta_B - \Delta'_{BB}$$

Denotemos ahora el desplazamiento en B causado por una *carga unitaria* que actúa en la dirección de $\mathbf{B}_y$ como el *coeficiente de flexibilidad lineal* f_{BB}, figura 9–3*d*. Si utilizamos el mismo esquema que antes para esta notación de doble subíndice, f_{BB} es la deflexión en B causada por una carga unitaria en B. Dado que el material presenta un comportamiento elástico lineal, una fuerza de $\mathbf{B}_y$ que actúe en B en lugar de la carga unitaria, ocasionará un aumento proporcional en f_{BB}. Podemos escribir entonces

$$\Delta'_{BB} = B_y f_{BB}$$

Escrito en este formato, puede verse que el coeficiente de flexibilidad lineal f_{BB} es una *medida de la deflexión por fuerza unitaria* y sus unidades son m/N, ft/lb, etc. La ecuación anterior de compatibilidad puede escribirse en términos de la incógnita B_y como

$$0 = \Delta_B - B_y f_{BB}$$

Usando los métodos del capítulo 8 o la tabla de deflexiones en las páginas suplementarias al final del libro, pueden obtenerse las relaciones apropiadas de carga-desplazamiento para la deflexión Δ_B, figura 9–3*b*, y el coeficiente de flexibilidad f_{BB}, figura 9–3*d*, y determinarse la solución para B_y, esto es $B_y = \Delta_B/f_{BB}$. Una vez logrado esto, pueden encontrarse las tres reacciones en la pared A a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Como se indicó antes, la selección de la redundante es *arbitraria*. Por ejemplo, el momento en A, figura 9–4*a*, puede determinarse *directamente* si se elimina la capacidad de la viga de soportar un momento en A, esto es, reemplazando el empotramiento por un pasador. Como se muestra en la figura 9–4*b*, la rotación en A causada por la carga P es θ_A y la rotación en A causada por la redundante M_A en A es θ'_{AA}, figura 9–4*c*. Si denotamos un *coeficiente de flexibilidad angular* α_{AA} como el desplazamiento angular en A causado por un momento concentrado unitario aplicado en A, figura 9–4*d*, entonces

$$\theta'_{AA} = M_A \alpha_{AA}$$

Así entonces, el coeficiente de flexibilidad angular mide el desplazamiento angular por momento concentrado unitario y por tanto tiene unidades de rad/N · m o rad/lb · ft, etc. La ecuación de compatibilidad para la rotación en A requiere entonces que

$$(\curvearrowright+) \qquad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$$

En este caso, $M_A = -\theta_A/\alpha_{AA}$, un valor negativo que simplemente significa que M_A actúa con sentido opuesto al del momento concentrado unitario.

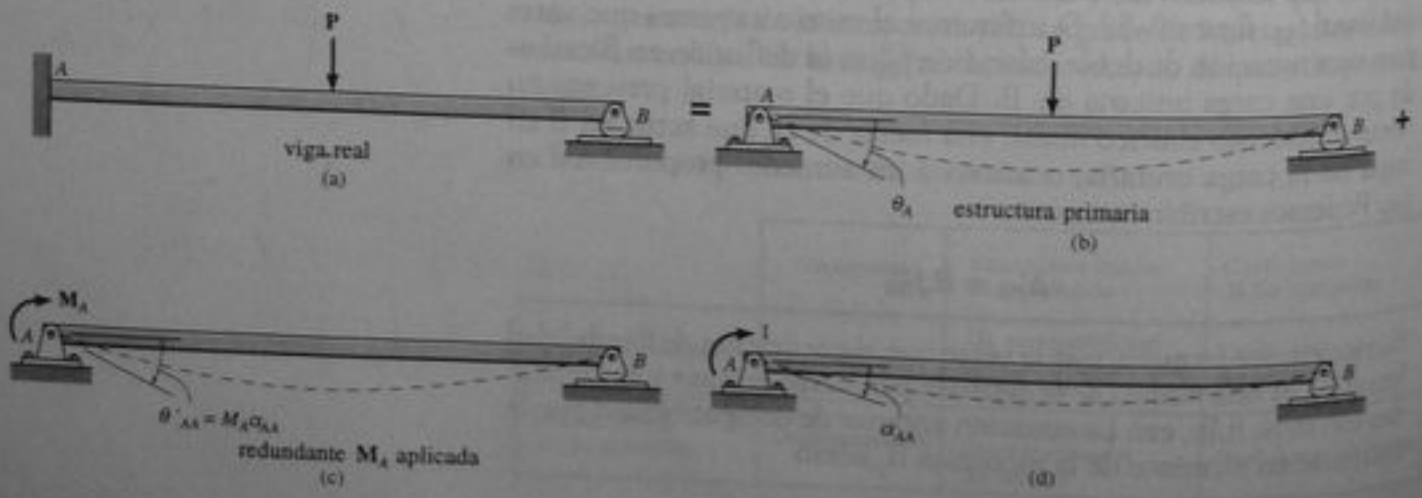


Fig. 9–4

Un tercer ejemplo que ilustra la aplicación del método de las fuerzas se da en la figura 9–5*a*. En ella, la viga es indeterminada de segundo grado y por tanto será necesario plantear dos ecuaciones de compatibilidad para su solución. Escogeremos las fuerzas verticales en los soportes de rodillo, B y C, como redundantes. La viga resultante estáticamente determinada se deflexiona como se muestra en la figura 9–5*b* al quitar las redundantes. Cada fuerza redundante, que se *supone* que actúa hacia abajo, provoca deflexión en esta viga como se muestra en las figuras 9–5*c* y 9–5*d*, respectivamente. Los coeficientes de flexibilidad* f_{BB} y f_{CB} se encuentran aplicando una carga unitaria en B, figura 9–5*e*; y f_{CC} y f_{BC} se encuentran aplicando una carga unitaria en C, figura 9–5*f*. Por superposición, las ecuaciones de compatibilidad para las deflexiones en B y C, respectivamente, son

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad & 0 = \Delta_B + B_y f_{BB} + C_y f_{BC} \\ (+\downarrow) \quad & 0 = \Delta_C + B_y f_{CB} + C_y f_{CC} \end{aligned} \tag{9–1}$$

Una vez establecidas las relaciones carga-desplazamiento usando los métodos del capítulo 8, esas ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para encontrar las fuerzas incógnitas B_y y C_y.

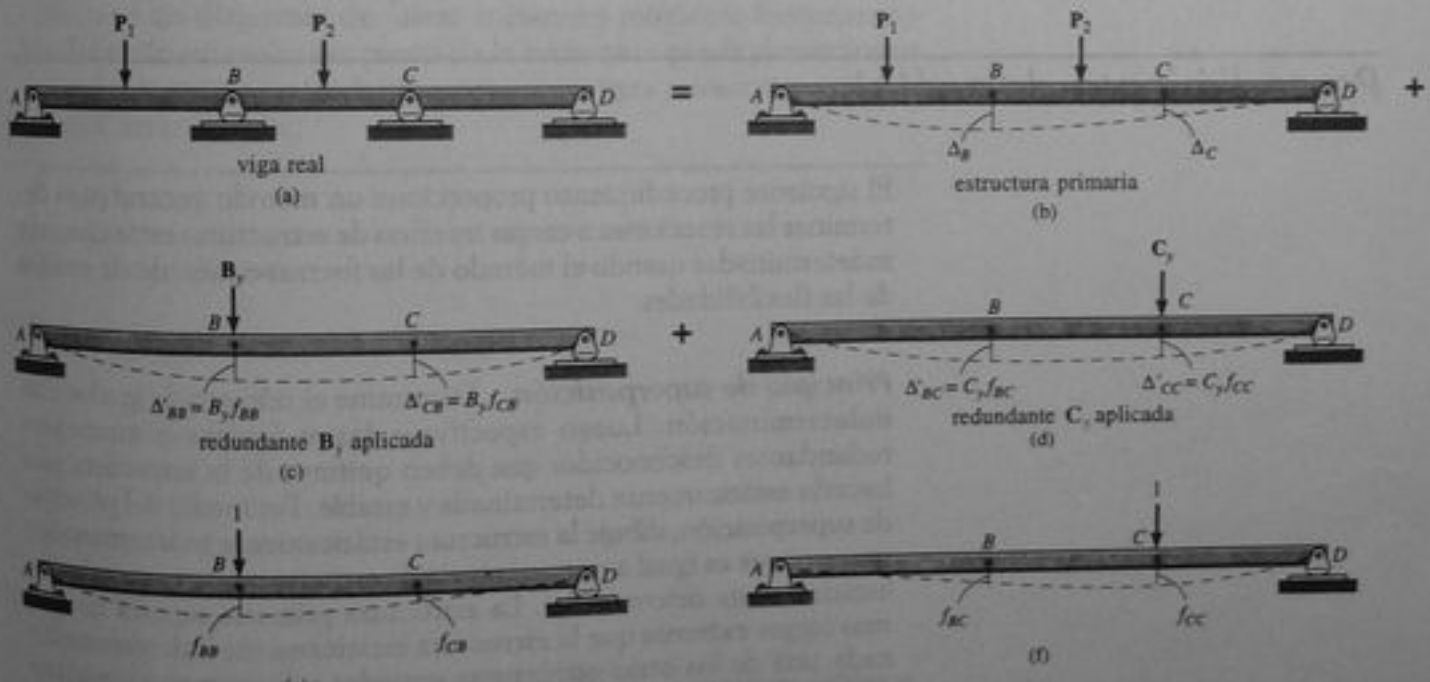


Fig. 9–5

*f_{BB} es la deflexión en B causada por una carga unitaria en B; f_{CB} es la deflexión en C causada por una carga unitaria en B.

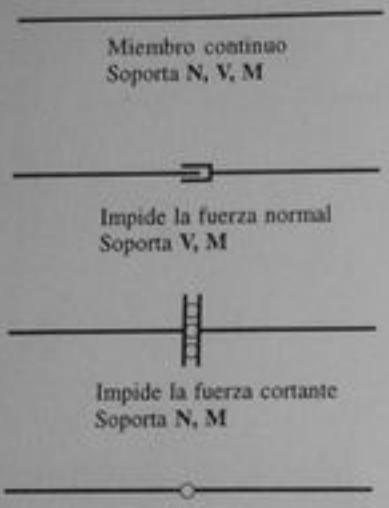


Fig. 9–6

Ya ilustrada la aplicación del método de las fuerzas por medio de ejemplos, analizaremos ahora su aplicación en términos generales y luego lo usaremos como base para resolver problemas de armaduras, vigas y marcos. Sin embargo, en todos esos casos debe quedar claro que, debido a que el método depende de la superposición de desplazamientos, es necesario que *el material permanezca elástico lineal al ser cargado*. Debe quedar también claro que cualquier reacción externa o carga interna en un punto de la estructura puede determinarse directamente cancelando primero la capacidad de la estructura para soportar esa carga y luego escribiendo una ecuación de compatibilidad en el punto. En la figura 9–6 se muestran las conexiones utilizadas para representar simbólicamente la cancelación de la fuerza normal, de la fuerza cortante y del momento en un miembro continuo. Observe que cada conexión soportará carga interna *excepto* del tipo que se está cancelando. Una *ecuación de compatibilidad* escrita para cada una de esas conexiones requiere entonces que no ocurran desplazamientos relativos en la conexión cuando el desplazamiento en la estructura primaria se superpone al causado por la carga redundante. Esta ecuación permite entonces encontrar una solución directa de la redundante en la conexión.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método general para determinar las reacciones o cargas internas de estructuras estáticamente indeterminadas usando el método de las fuerzas o método de análisis de las flexibilidades.

Principio de superposición Determine el número de grados n de indeterminación. Luego especifique las n fuerzas o momentos redundantes desconocidos que deben quitarse de la estructura para hacerla estáticamente determinada y estable. Por medio del principio de superposición, dibuje la estructura estáticamente indeterminada y muestre que es igual a una secuencia de estructuras correspondientes estáticamente *determinadas*. La estructura primaria soporta las mismas cargas externas que la estructura estáticamente indeterminada y cada una de las otras estructuras sumadas a la estructura primaria muestra la estructura cargada con una fuerza o momento redundante separada. Además, esboce la curva elástica de cada estructura e indique simbólicamente el desplazamiento o rotación en el punto de cada fuerza o momento redundante. (Véase las figuras 9–3 a la 9–5.)

Ecuaciones de compatibilidad Escriba una ecuación de compatibilidad para el desplazamiento o rotación de cada punto en que haya una fuerza o momento redundante. Esas ecuaciones deben expresarse en términos de las redundantes desconocidas y sus correspondientes coeficientes de flexibilidad deben obtenerse de cargas unitarias o momentos concentrados unitarios que sean colineales con las fuerzas o momentos redundantes.

Determine todos los coeficientes de flexibilidad usando la tabla que aparece en las páginas suplementarias al final del libro o con los métodos del capítulo 8.* Sustituya esas relaciones carga-desplazamiento en las ecuaciones de compatibilidad y despeje las redundantes desconocidas. Si el valor numérico de una redundante es positivo, ésta actúa en la misma dirección que su correspondiente fuerza unitaria o momento concentrado unitario. De la misma manera, un valor numérico "negativo", indica que la redundante actúa en sentido opuesto a su correspondiente fuerza unitaria o momento concentrado unitario.

Ecuaciones de equilibrio Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la estructura. Como las fuerzas y/o momentos redundantes ya han sido calculados, las reacciones restantes desconocidas pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Una vez conocidas todas las reacciones en los soportes, pueden dibujarse los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y la deflexión en cualquier punto de la estructura puede determinarse usando los mismos métodos descritos antes para estructuras estáticamente determinadas.

---

*Se sugiere que si el diagrama M/EI de la viga consiste en segmentos simples, se usen los teoremas de área–momento o el método de la viga conjugada. Vigas con diagramas M/EI complicados, esto es, aquellos que contienen muchos segmentos curvos (parabólicos, cúbicos, etc.) pueden analizarse más fácilmente con el uso del método del trabajo virtual o el segundo teorema de Castigliano.

9.3 Teorema de Maxwell sobre los desplazamientos recíprocos; Ley de Betti

Cuando Maxwell desarrolló el método de las fuerzas, también publicó un teorema que relaciona los coeficientes de flexibilidad de dos puntos cualquiera de una estructura elástica, sea ésta una armadura, una viga o un marco. A este teorema se le llama teorema de los desplazamientos recíprocos y puede enunciarse como sigue: *El desplazamiento de un punto B sobre una estructura debido a una carga unitaria que actúa en el punto A es igual al desplazamiento del punto A cuando la carga unitaria actúa en el punto B, esto es,* $f_{BA} = f_{AB}$.

La demostración de este teorema es fácil si se utiliza el principio del trabajo virtual. Por ejemplo, considere la viga en la figura 9–7. Cuando una carga real unitaria actúa en A, figura 9–7*a*, suponga que los momentos internos en la viga están representados por m_A. Para determinar el coeficiente de flexibilidad en B, esto es, f_{BA}, se coloca una carga virtual unitaria en B, figura 9–7*b*, y se calculan los momentos internos m_B. Aplicando luego la ecuación 8–25, se obtiene

$$f_{BA} = \int \frac{m_B m_A}{EI}\, dv$$

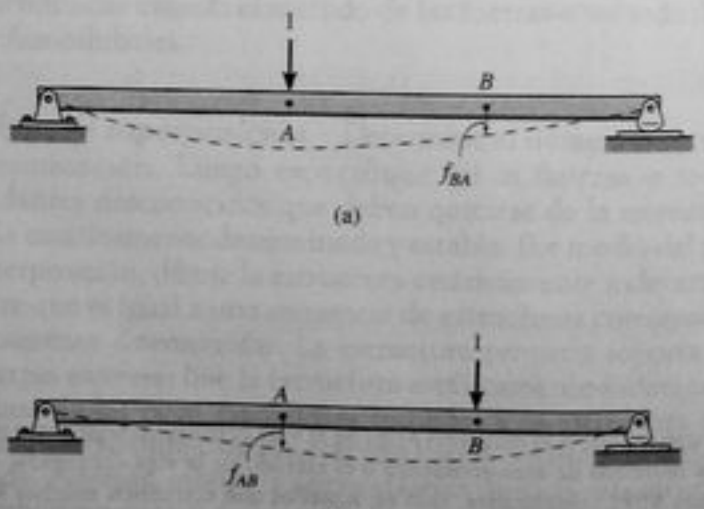


Fig. 9–7

De la misma manera, si va a determinarse el coeficiente de flexibilidad f_{AB} cuando actúa una carga real unitaria en B, figura 9–7*b*, entonces m_B representa los momentos internos en la viga debido a la carga real unitaria. Además, m_A representa los momentos internos debido a una carga virtual unitaria en A, figura 9–7*a*. Por tanto,

$$f_{AB} = \int \frac{m_A m_B}{EI}\, dx$$

Ambas integrales dan obviamente el mismo resultado, lo que demuestra el teorema. El teorema también es aplicable a rotaciones recíprocas y puede enunciarse entonces como sigue: *La rotación en el punto B sobre una estructura debido a un momento concentrado unitario que actúa en el punto A es igual a la rotación en el punto A cuando el momento concentrado unitario actúa en B*. Además, usando una fuerza unitaria y un momento concentrado unitario aplicados en puntos separados sobre la estructura, podemos también enunciar: *La rotación en radianes en el punto B sobre una estructura debido a una carga unitaria que actúa en el punto A es igual al desplazamiento en el punto A cuando un momento concentrado unitario actúa sobre el punto B*.

Como consecuencia de este teorema algo de trabajo puede ahorrarse cuando se aplica el método de las fuerzas a problemas estáticamente indeterminados de segundo grado o de grado mayor. Por ejemplo, sólo el coeficiente de flexibilidad f_{BC} o f_{CB} tiene que calcularse en las ecuaciones 9–1 ya que $f_{BC} = f_{CB}$. Además el teorema de los desplazamientos recíprocos tiene aplicaciones en el análisis estructural de modelos y en la construcción de líneas de influencia usando el principio de Müller-Breslau (Véase la sección 9–11.)

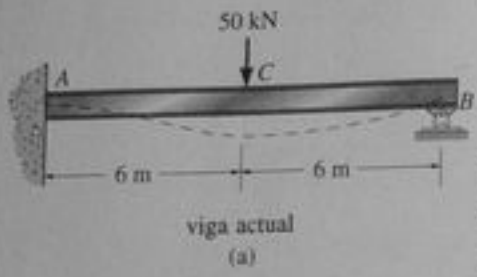
Cuando el teorema de los desplazamientos recíprocos se formaliza en un sentido más general, se le conoce como *ley de Betti*. Brevemente enunciado: El trabajo virtual U_{AB} realizado por un sistema de fuerzas $\Sigma \mathbf{P}_B$ que sufre un desplazamiento provocado por un sistema de fuerzas $\Sigma \mathbf{P}_A$ es igual al trabajo virtual U_{BA} causado por las fuerzas $\Sigma \mathbf{P}_A$ cuando la estructura se deforma debido al sistema de fuerzas $\Sigma \mathbf{P}_B$. En otras palabras, $U_{AB} = U_{BA}$. La demostración de este enunciado es similar a la dada arriba para el teorema de los desplazamientos recíprocos.

9.4 Método de las fuerzas: vigas

El método de las fuerzas aplicado a vigas fue delineado en la sección 9.2. Utilizando el "procedimiento de análisis" dado también en la sección 9.2, presentaremos ahora varios ejemplos que ilustran la aplicación de esta técnica.

Ejemplo 9–1

Determine la reacción en el soporte B de rodillo en la viga mostrada en la figura 9–8*a*. EI es constante.



Solución

Principio de superposición. Por inspección, la viga es estáticamente indeterminada de primer grado. Se considerará que $\mathbf{B}_y$ es la redundante, por lo que esta fuerza puede determinarse *directamente*. La figura 9–8*b* muestra la aplicación del principio de superposición. Nótese que retirar la redundante requiere que el soporte de rodillo o la acción restrictiva en la viga en la dirección de $\mathbf{B}_y$ quede cancelada. Aquí hemos supuesto que $\mathbf{B}_y$ actúa hacia arriba sobre la viga.

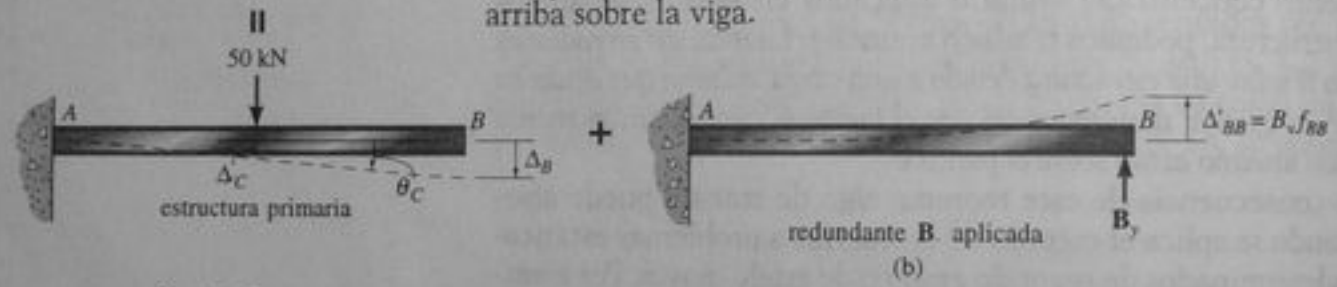


Fig. 9–8

Ecuación de compatibilidad. Considerando los desplazamientos hacia abajo como positivos, figura 9–8*b*, tenemos

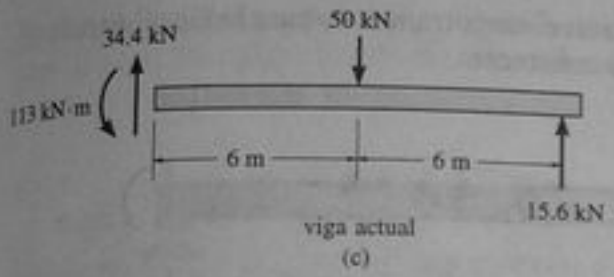
$$(+\downarrow) \qquad 0 = \Delta_B - B_y f_{BB} \tag{1}$$

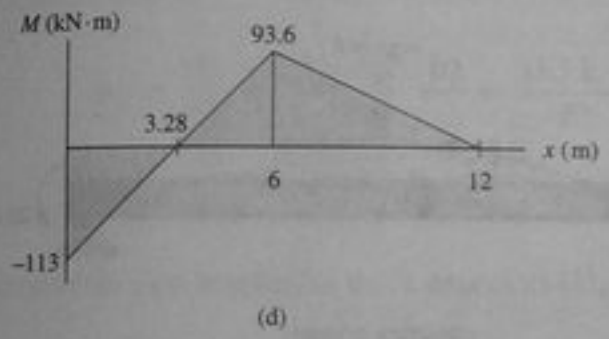
Los términos Δ_B y f_{BB} se obtienen fácilmente con ayuda de la tabla que aparece en las páginas suplementarias al final del libro. En particular, note que $\Delta_B = \Delta_C + \theta_C\,(6\text{ m})$. Entonces,

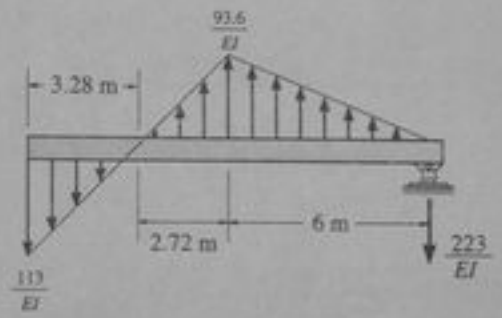
$$\Delta_B = \frac{P(L/2)^3}{3EI} + \frac{P(L/2)^2}{2EI}\left(\frac{L}{2}\right)$$
$$= \frac{(50\text{ kN})(6\text{ m})^3}{3EI} + \frac{(50\text{ kN})(6\text{ m})^2}{2EI}(6\text{ m}) = \frac{9000\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$
$$f_{BB} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(1)(12\text{ m})^3}{3EI} = \frac{576\text{ m}^3}{EI}\uparrow$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1) se obtiene

$$(+\downarrow) \qquad 0 = \frac{9000}{EI} - B_y\left(\frac{576}{EI}\right) \qquad B_y = 15.6\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

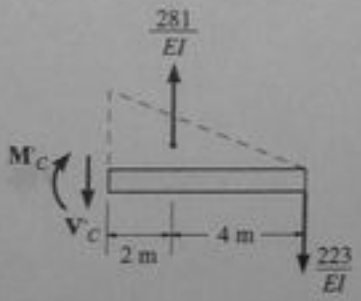






Si esta reacción se coloca sobre el diagrama de cuerpo libre de la viga, las reacciones en A pueden obtenerse a partir de las tres ecuaciones de equilibrio, figura 9–8c.

Una vez determinadas todas las reacciones, puede construirse el diagrama de momentos flexionantes como se muestra en la figura 9–8d. Podemos determinar también la deflexión de la viga en cualquier punto. Por ejemplo, la viga conjugada para la viga real en la figura 9–8a se muestra en la figura 9–8e.* Si quiere determinarse la deflexión bajo la carga de 50 kN, entonces de la figura 9–8f, tenemos



$$M'_C + \frac{223}{EI}(6) - \frac{281}{EI}(2) = 0$$

$$\Delta_C = M'_C = -\frac{776\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.

*Note que aunque la viga conjugada será siempre inestable para una viga real estáticamente indeterminada, se mantendrá en equilibrio por su carga (diagrama M/EI).

Ejemplo 9–2

Determine el momento en el empotramiento para la viga ilustrada en la figura 9–9*a*. *EI* es constante.

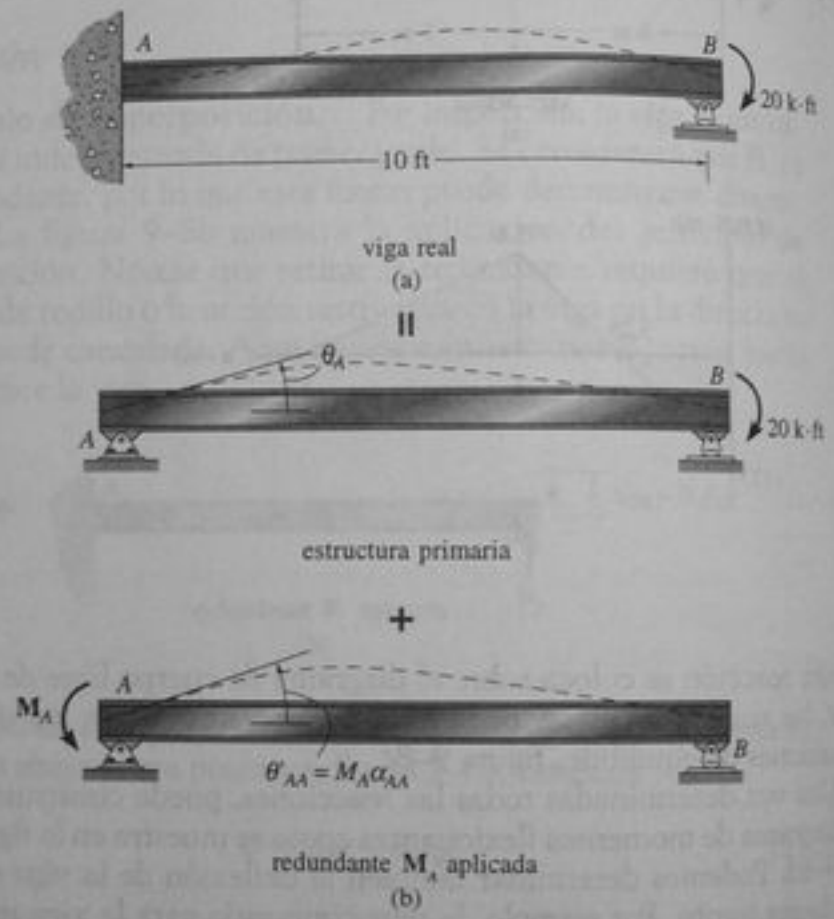


Fig. 9–9

Solución

Principio de superposición. Se considerará aquí como redundante M_A ya que este momento puede entonces determinarse directamente. La aplicación del principio de superposición se muestra en la figura 9–9*b*. Aquí se ha quitado a la viga la capacidad de soportar un momento en *A*. Esto requiere insertar un pasador en vez del empotramiento en *A*. Hemos supuesto que M_A actúa en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ecuación de compatibilidad. Considerando como positiva una rotación con sentido opuesto a las manecillas del reloj, figura 9–9*b*, tenemos

$$(\curvearrowleft +) \qquad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA} \tag{1}$$

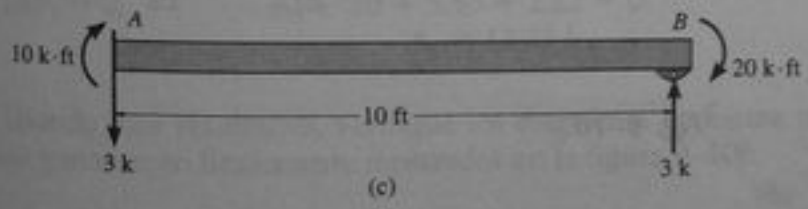
Los términos θ_A y α_{AA} pueden determinarse de la tabla que aparece en las páginas suplementarias al final del libro. Tenemos

$$\theta_A = \frac{ML}{6EI} = \frac{20\,\text{k}\cdot\text{ft}(10\,\text{ft})}{6EI} = \frac{33.3\,\text{k}\cdot\text{ft}}{EI}$$
$$\alpha_{AA} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1\,(10\,\text{ft})}{3EI} = \frac{3.33\,\text{ft}}{EI}$$

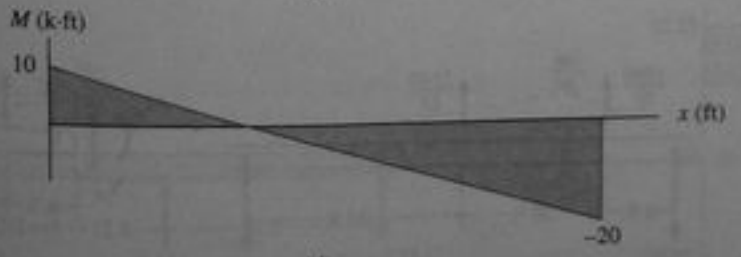
Sustituyendo esos resultados en la ecuación (1), obtenemos

$$0 = \frac{33.3}{EI} + M_A\left(\frac{3.33}{EI}\right) \qquad M_A = -10\,\text{k}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{M}_A$ actúa en sentido opuesto al que se muestra en la figura 9–9*b*. Cuando esta reacción se coloca sobre la viga, las otras reacciones pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 9–9*c*. El diagrama de momentos se muestra en la figura 9–9*d*.

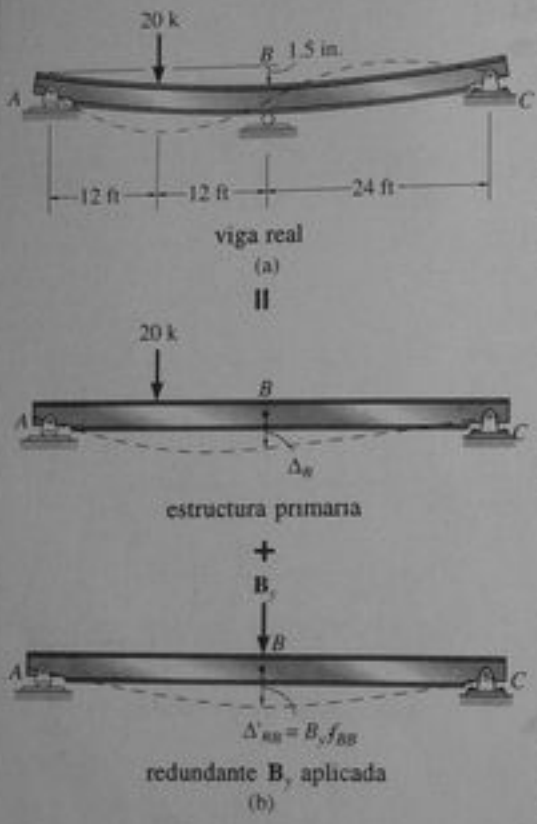


(c)



(d)

Ejemplo 9–3



Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 9–10*a*. El soporte en B desciende 1.5 in. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 750$ in^4.

Solución

Principio de superposición. Por inspección, la viga es estáticamente indeterminada de primer grado. El soporte central B se escogerá como redundante, por lo que el rodillo en *B* se retira, figura 9–10*b*. Aquí, $\mathbf{B}_y$ se supone que actúa hacia abajo sobre la viga.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al punto B en la figura 9–10*b* y utilizando el ft como unidad, requerimos

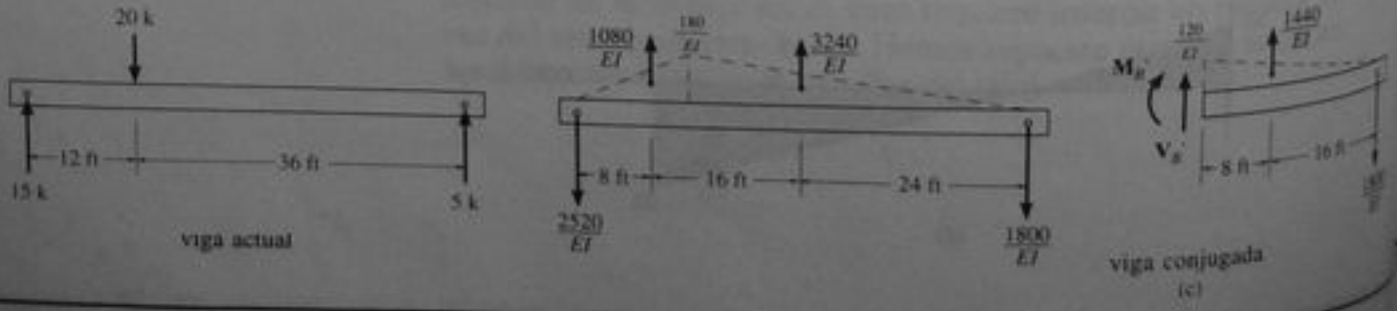
$$(+\downarrow) \qquad \frac{1.5}{12} = \Delta_B + B_y f_{BB} \tag{1}$$

Usaremos aquí el método de la viga conjugada para calcular Δ_B y f_{BB} ya que los diagramas de momento consisten en segmentos de líneas rectas. Para Δ_B, verifique los cálculos mostrados en la figura 9–10*c*. Note que

$$\curvearrowright + \Sigma M_{B'} = 0; \qquad M_{B'} - \frac{1440}{EI}(8) + \frac{1800}{EI}(24) = 0$$

$$M_{B'} = -\frac{31\,680}{EI} = \frac{31\,680}{EI}\downarrow$$

Fig. 9–10



Verifique los cálculos para f_{BB} en la figura 9–10*d*. Note que

$$\curvearrowleft + \Sigma M_{B'} = 0; \qquad m_{B'} - \frac{144}{EI}(8) + \frac{144}{EI}(24) = 0$$

$$m_{B'} = -\frac{2304}{EI} = \frac{2304}{EI}\downarrow$$

Sustituyendo esos resultados en la ecuación (1), tenemos

$$\frac{1.5}{12} = \frac{31\,680}{EI} + B_y\left(\frac{2304}{EI}\right)$$

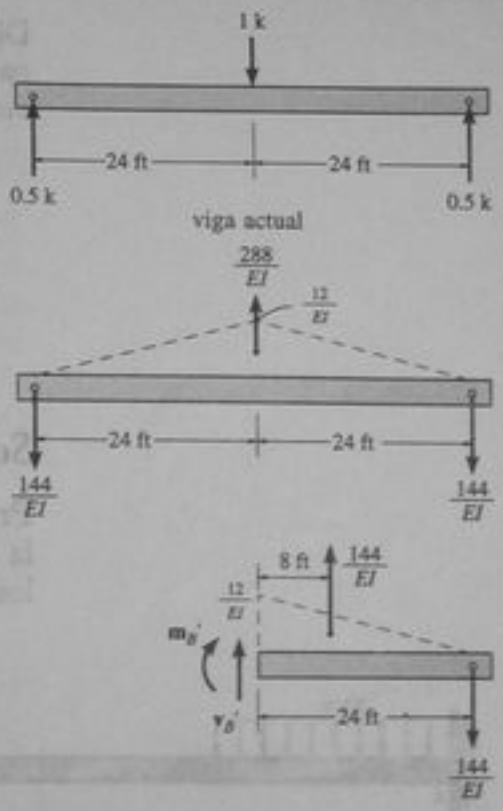
Expresando las unidades de E e I en términos de k y ft, tenemos

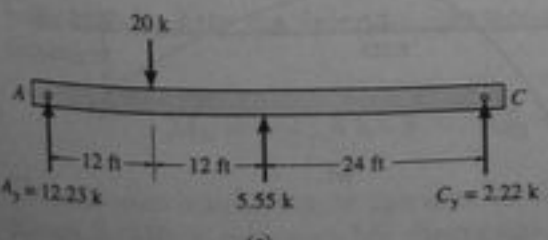
$$\left(\frac{1.5}{12}\text{ ft}\right)[29(10^3)\text{ k/in}^2((12)^2\text{ in}^2/\text{ft}^2)][750\text{ in}^4(\text{ft}^4/(12)^4\text{ in}^4)]$$
$$= 31\,680 + B_y(2304)$$
$$B_y = -5.55\text{ k}$$

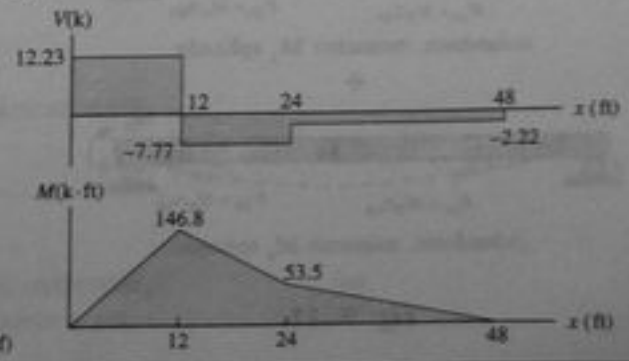
Ecuaciones de equilibrio. El signo negativo indica que B_y actúa *hacia arriba* sobre la viga. Del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 9–10*e*, tenemos

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad 20(12) - 5.55(24) - C_y(48) = 0$$
$$C_y = 2.22\text{ k}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 20 + 5.55 + 2.22 = 0$$
$$A_y = 12.23\text{ k}$$

Usando esos resultados, verifique los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante mostrados en la figura 9–10*f*.

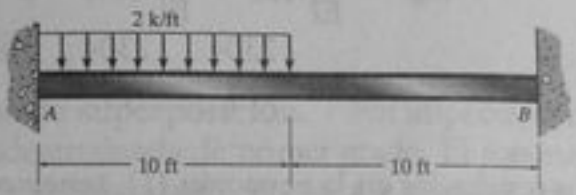






Ejemplo 9–4

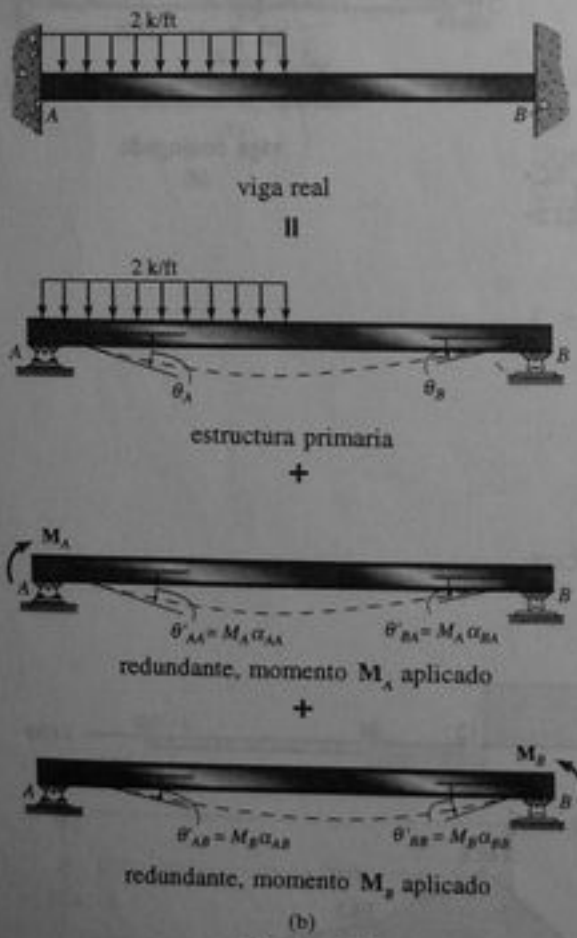
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 9–11*a*. *EI* es constante. Desprecie los efectos de la carga axial.



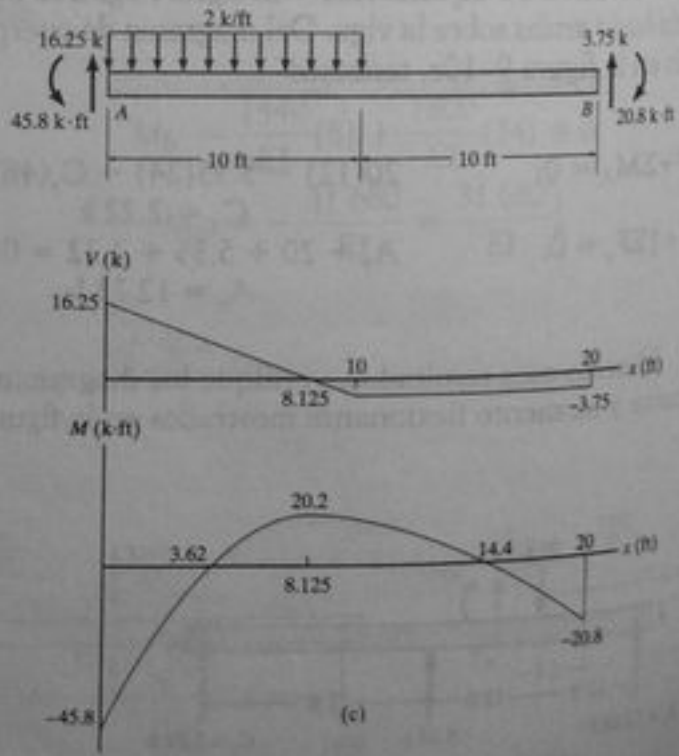
(a)

Solución

Principio de superposición. Como se desprecia la carga axial, la viga es indeterminada de segundo grado. Los dos momentos en los empotramientos *A* y *B* se considerarán como redundantes. La



(b)



(c)

Fig. 9–11

capacidad de la viga para resistir esos momentos se elimina colocando un pasador en A y un apoyo de balancín en B. El principio de superposición aplicado a la viga se muestra en la figura 9–11*b*.

Ecuaciones de compatibilidad. Con referencia a los puntos A y B, figura 9–11*b*, se requiere

$$(\curvearrowright+) \qquad 0 = \theta_A + M_A\alpha_{AA} + M_B\alpha_{AB} \qquad (1)$$

$$(\downarrow+) \qquad 0 = \theta_B + M_A\alpha_{BA} + M_B\alpha_{BB} \qquad (2)$$

Los coeficientes de pendientes y flexibilidad angular requeridos pueden determinarse usando la tabla de las páginas suplementarias al final del libro. Tenemos

$$\theta_A = \frac{3wL^3}{128EI} = \frac{3(2)(20)^3}{128EI} = \frac{375}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{7wL^3}{384EI} = \frac{7(2)(20)^3}{384EI} = \frac{291.7}{EI}$$

$$\alpha_{AA} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(20)}{3EI} = \frac{6.67}{EI}$$

$$\alpha_{BB} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(20)}{3EI} = \frac{6.67}{EI}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{ML}{6EI} = \frac{1(20)}{6EI} = \frac{3.33}{EI}$$

Note que $\alpha_{BA} = \alpha_{AB}$, lo cual es una consecuencia del teorema de Maxwell sobre los desplazamientos recíprocos.

Sustituyendo los datos en las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$0 = \frac{375}{EI} + M_A\left(\frac{6.67}{EI}\right) + M_B\left(\frac{3.33}{EI}\right)$$

$$0 = \frac{291.7}{EI} + M_A\left(\frac{3.33}{EI}\right) + M_B\left(\frac{6.67}{EI}\right)$$

Cancelando *EI* y resolviendo esas ecuaciones simultáneamente, tenemos

$$M_A = -45.8\ \text{k} \cdot \text{ft} \qquad M_B = -20.8\ \text{k} \cdot \text{ft}$$

Usando esos resultados, se calculan las fuerzas cortantes extremas, figura 9–11*c*, y se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Ejemplo 9–5

Determine las reacciones en los soportes de la viga que se muestra en la figura 9–12*a*. *EI* es constante.

Solución

Principio de superposición. Por inspección, la viga es indeterminada de primer grado. Aquí, como ilustración, escogeremos el momento interno en el soporte *B* como redundante. Para esto, la viga se corta y se colocan pasadores extremos en *B* para anular *sólo* la capacidad de la viga de resistir momentos en este punto, figura 9–12*b*. El momento interno en *B* se aplica a la viga en la figura 9–12*c*.

Ecuaciones de compatibilidad. De la figura 9–12*a*, requerimos que la rotación relativa de un extremo de la viga con respecto al otro extremo sea cero, esto es,

$$(\curvearrowright+) \qquad \theta_B + M_B \alpha_{BB} = 0$$

donde

$$\theta_B = \theta'_B + \theta''_B$$

y

$$\alpha_{BB} = \alpha_{BB_1} + \alpha_{BB_2}$$

La pendiente θ_B y los coeficientes de flexibilidad angular pueden determinarse de la tabla que aparece en las páginas finales del libro; éstos son,

$$\theta'_B = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{120(12)^3}{24EI} = \frac{8640\ \text{lb} \cdot \text{ft}^2}{EI}$$

$$\theta''_B = \frac{PL^2}{16EI} = \frac{500(10)^2}{16EI} = \frac{3125\ \text{lb} \cdot \text{ft}^2}{EI}$$

$$\alpha'_{BB} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(12)}{3EI} = \frac{4\ \text{ft}}{EI}$$

$$\alpha''_{BB} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(10)}{3EI} = \frac{3.33\ \text{ft}}{EI}$$

Así entonces,

$$\frac{8640\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2}{EI} + \frac{3125\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2}{EI} + M_B\left(\frac{4\ \text{ft}}{EI} + \frac{3.33\ \text{ft}}{EI}\right) = 0$$

$$M_B = -1604\ \text{lb}\cdot\text{ft}$$

El signo negativo indica que M_B actúa en sentido opuesto al mostrado en la figura 9–12*c*. Usando este resultado, las reacciones en los soportes se calculan como se muestra en la figura 9–12*d*. Además, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en la figura 9–12*e*.

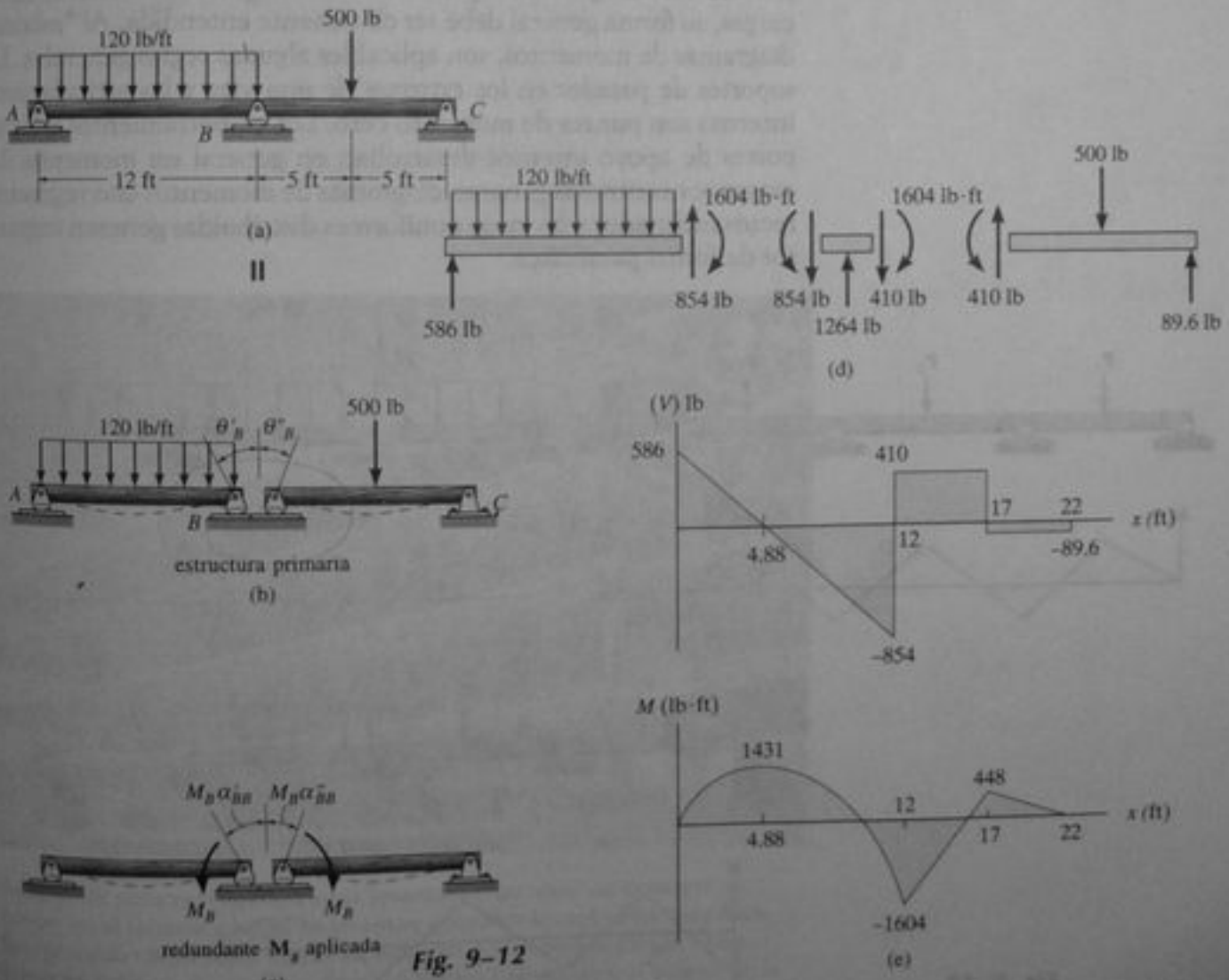


Fig. 9–12

9.5 Diagramas de momento generales para vigas estáticamente indeterminadas

El diagrama de momentos para una viga es de importancia fundamental para el diseño y análisis de esfuerzos de la viga. Por ello, este diagrama se dibujó en la mayoría de los ejemplos anteriores después de que se determinaron las reacciones en las vigas. Como las vigas continuas son tan comunes en el análisis estructural, los ingenieros deberían tener una idea general sobre la forma de este diagrama para diversos tipos de cargas. Por esto, en la figura 9–13 presentamos algunos ejemplos de vigas continuas con cargas y soportes comunes. No se muestran valores específicos para los momentos sobre los diagramas ya que se espera que los valores numéricos puedan obtenerse usando los principios básicos delineados en la sección 4.3. Aunque los máximos de esos diagramas dependen de las magnitudes relativas de las cargas, su forma general debe ser claramente entendida. Al "esbozar" diagramas de momentos, son aplicables algunas reglas generales. Los soportes de pasador en los *extremos* de una viga y las articulaciones internas son puntos de momento cero. Los empotramientos y los soportes de apoyo internos desarrollan en general un momento. Las cargas concentradas generan diagramas de momentos con segmentos rectos inclinados y las cargas uniformes distribuidas generan segmentos de forma parabólica.

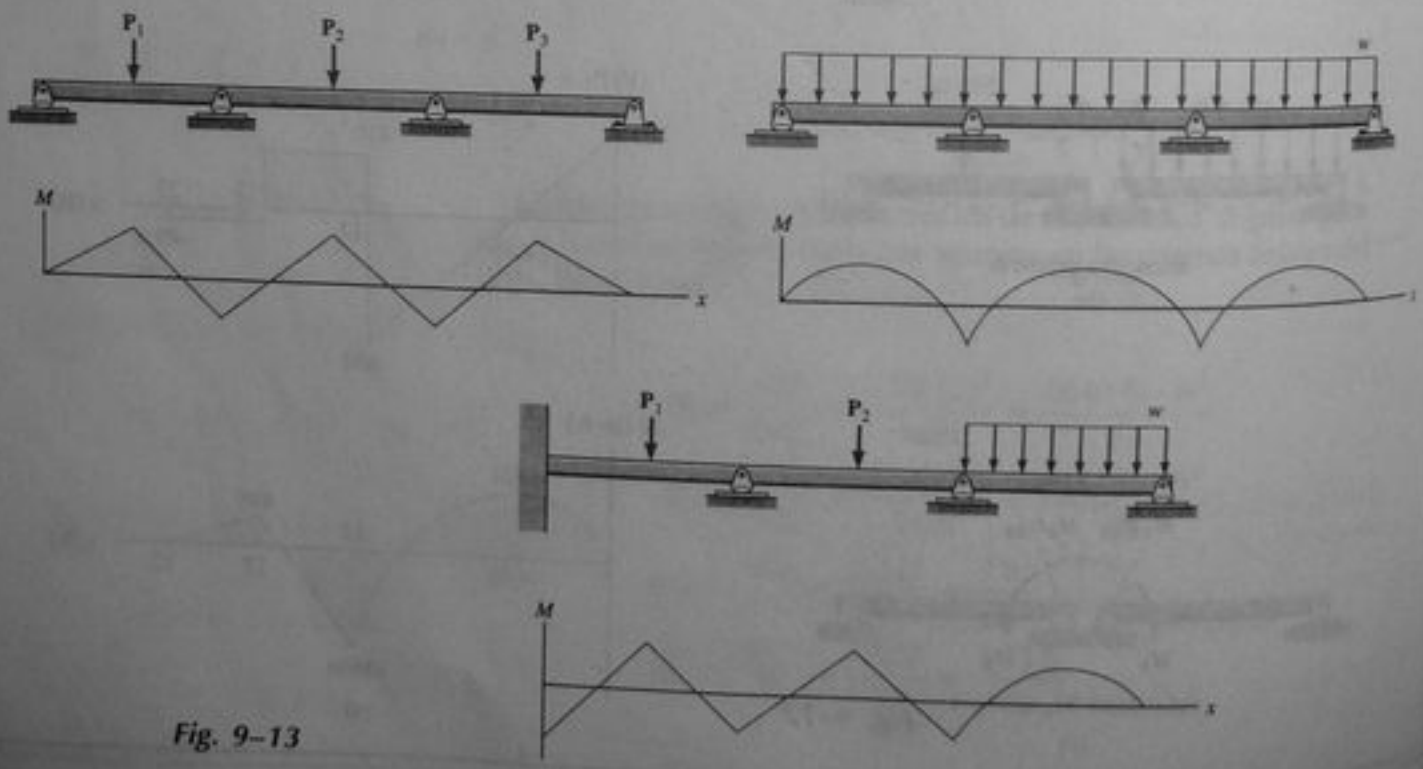
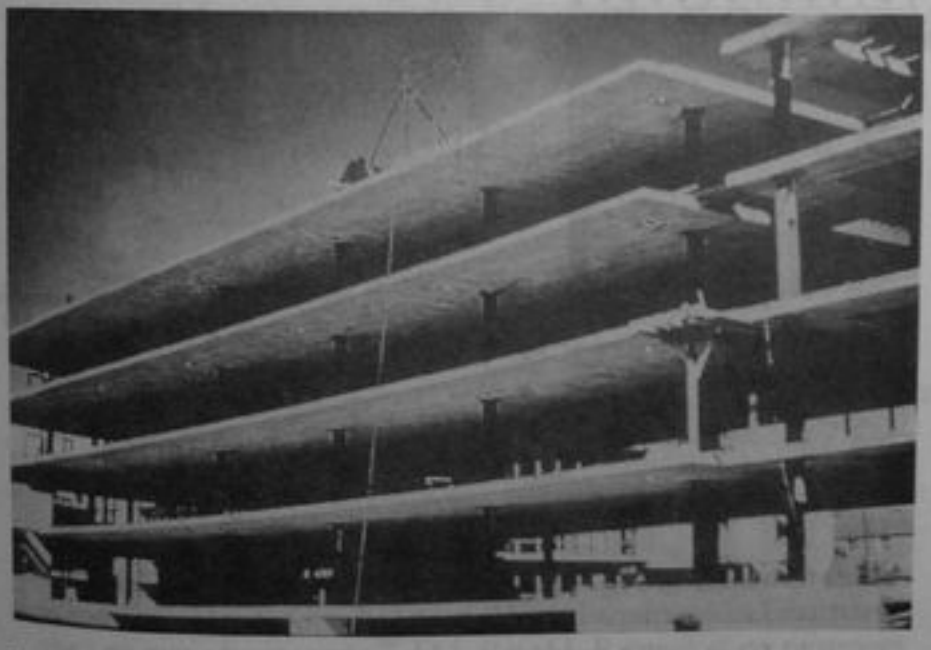


Fig. 9–13

9.6 Método de análisis de las fuerzas: marcos

El método de las fuerzas es muy útil para resolver problemas de marcos estáticamente indeterminados de un solo piso con geometrías no comunes, como los marcos a dos aguas. Los problemas de marcos de niveles múltiples o con alto grado de indeterminación se resuelven más fácilmente usando el método de pendiente-desviación, el de distribución de momentos o el método matricial que se verán en capítulos posteriores.

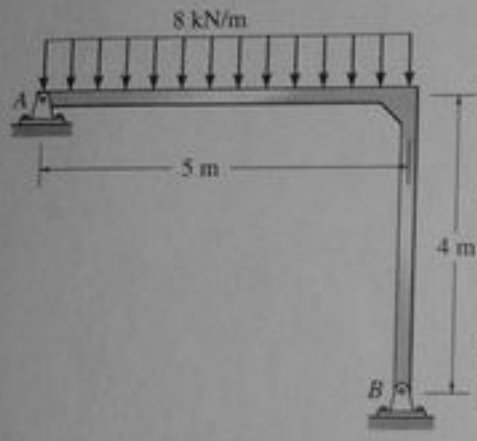
Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación del método de las fuerzas usando el procedimiento de análisis delineado en la sección 9.2.



Ejemplo de construcción con losas levantadas: las losas de concreto se cuelan en el terreno y luego se levantan apoyándolas sobre las columnas. Este procedimiento suele usarse en edificios que soportan cargas ligeras, como en edificios de apartamentos y edificios comerciales. (*Cortesía de la Portland Cement Association.*)

Ejemplo 9–6

Determine las reacciones en los soportes del marco mostrado en la figura 9–14*a*. *EI* es constante.



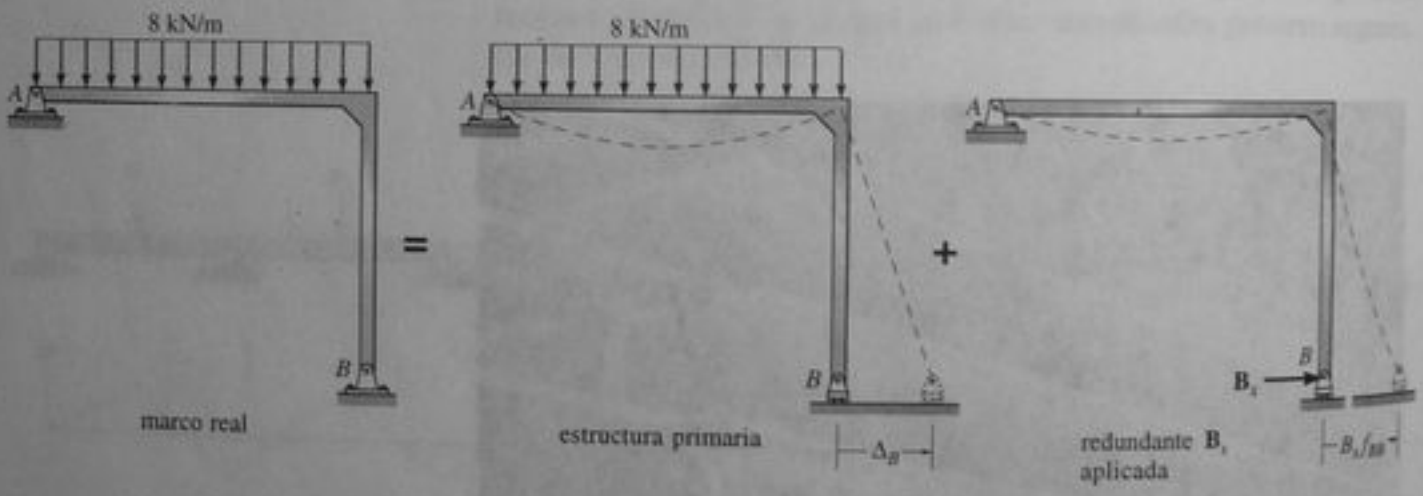
(a)

Solución

Principio de superposición. Por inspección, el marco es estáticamente indeterminado de primer grado. Escogeremos la reacción horizontal en *B* como la redundante. En consecuencia, el pasador en *B* se reemplaza por un rodillo, ya que un rodillo no restringe a B en la dirección horizontal. El principio de superposición aplicado al marco se muestra en la figura 9–14*b*.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al punto B en la figura 9–14*b*, se requiere

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad 0 = \Delta_B + B_x f_{BB} \tag{1}$$



(b)

Fig. 9–14

Los términos Δ_B y f_{BB} se calcularán usando el método del trabajo virtual. Las coordenadas *x* del marco y los momentos internos se muestran en la figura 9–14*c* y 9–14*d*. Es importante que en cada caso, la coordenada x_1 o x_2 seleccionada sea la *misma* para la carga real y para la carga virtual. Además, los sentidos positivos para **M** y **m** deben ser los *mismos*.

Para Δ_B se requiere la aplicación de la carga real, figura 9–14*c* y una carga unitaria virtual en *B*, figura 9–14*d*. Entonces,

$$\Delta_B = \int \frac{Mm}{EI}\,dx = \int_0^5 \frac{(20x_1 - 4x_1^2)(0.8x_1)\,dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{0(1x_2)\,dx_2}{EI}$$
$$= \frac{166.7}{EI} + 0 = \frac{166.7}{EI}$$

Para f_{BB} se requiere la aplicación de una carga unitaria real que actúa en *B*, figura 9–14*d*, y una carga unitaria virtual que actúa en B. Entonces,

$$f_{BB} = \int \frac{mm}{EI}\,dx = \int_0^5 \frac{(0.8x_1)^2\,dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{(1x_2)^2\,dx_2}{EI}$$
$$= \frac{26.7}{EI} + \frac{21.3}{EI} = \frac{48.0}{EI}$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (1) y despejando se obtiene

$$0 = \frac{166.7}{EI} + B_x\left(\frac{48.0}{EI}\right) \qquad B_x = -3.47\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Ecuaciones de equilibrio. Mostramos $\mathbf{B}_x$ en el diagrama de cuerpo libre del marco en el sentido correcto, figura 9–14*e*, y aplicamos las ecuaciones de equilibrio, de modo que tenemos

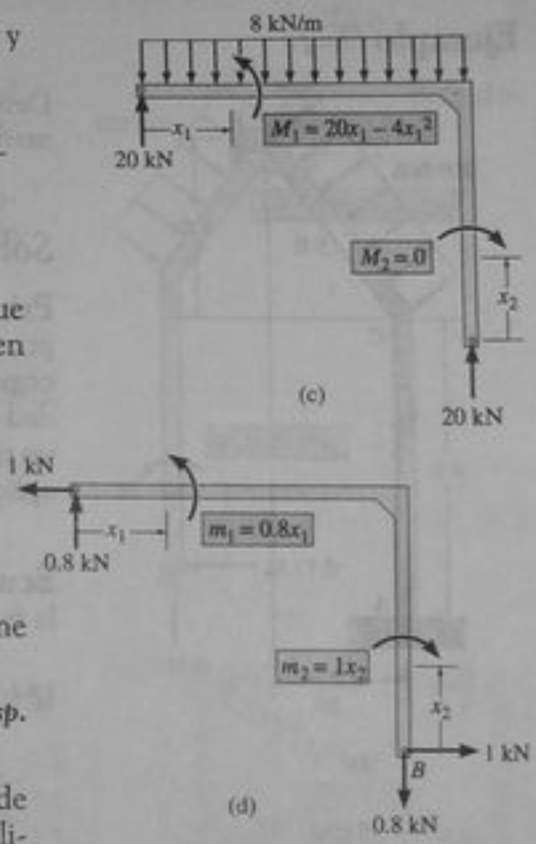
$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;$ $\quad A_x - 3.47 = 0 \quad A_x = 3.47\ \text{kN}$ *Resp.*

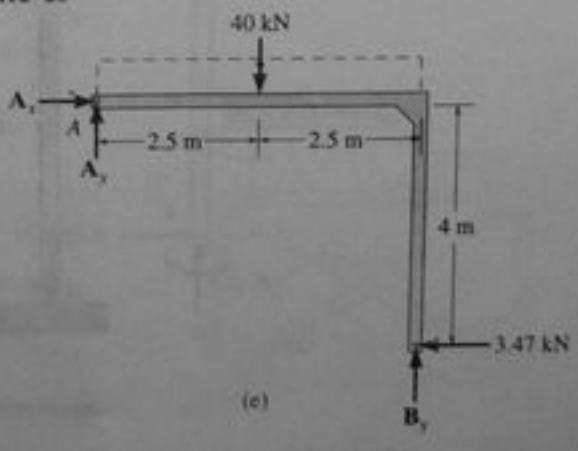
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$

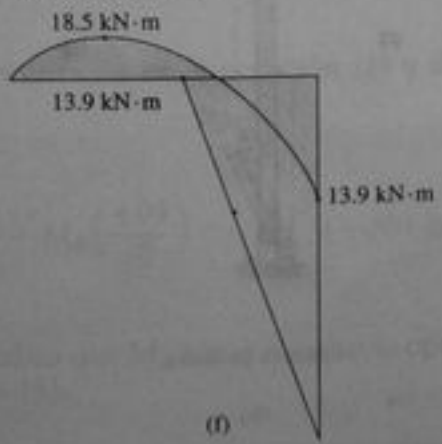
$40(2.5) - B_y(5) + 3.47(4) = 0 \quad B_y = 22.8\ \text{kN}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad A_y - 40 + 22.8 = 0 \quad A_y = 17.2\ \text{kN}$ *Resp.*

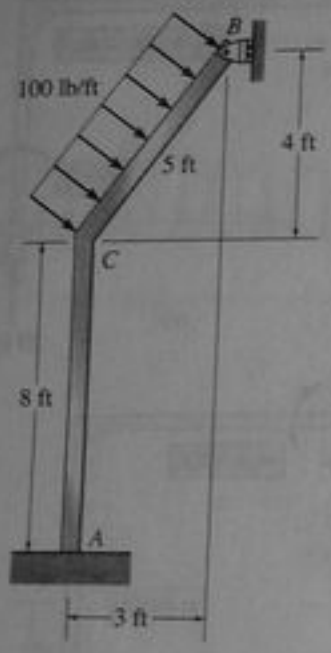
Con estos resultados, el diagrama de momento flexionante es como se muestra en la figura 9–14*f*.







Ejemplo 9–7



(a)

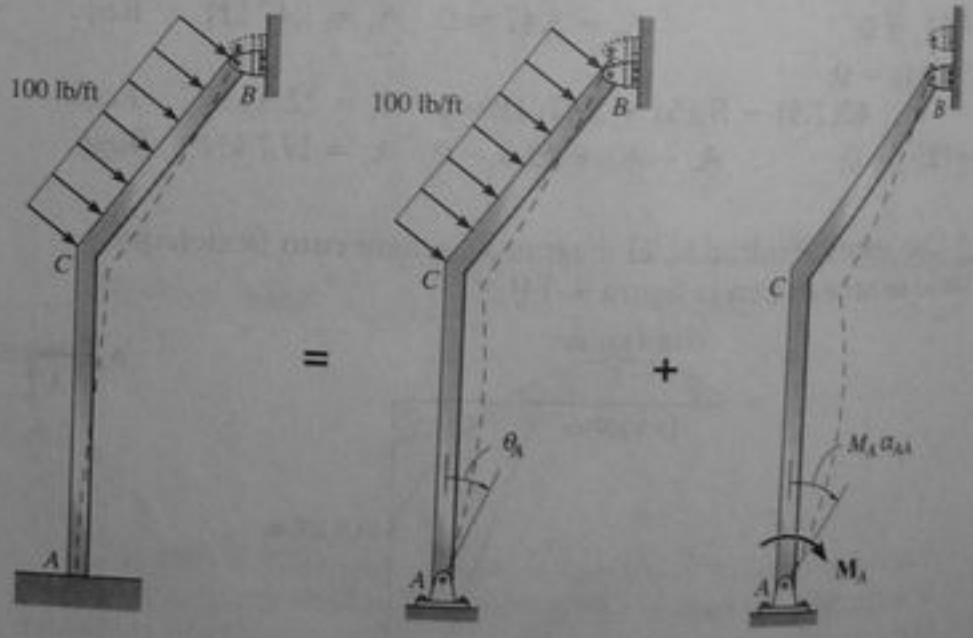
Determine el momento flexionante en el empotramiento A para el marco que se muestra en la figura 9–15*a*. *EI* es constante.

Solución

Principio de superposición. El marco es indeterminado de primer grado. Una solución directa para $\mathbf{M}_A$ puede obtenerse escogiendo este momento como redundante. Se elimina la capacidad del marco de soportar un momento en A, de modo que se usa un pasador en ese punto como soporte. El principio de superposición aplicado al marco se muestra en la figura 9–15*b*.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al punto A en la figura 9–15*b*, se requiere

$$(\curvearrowright+) \qquad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA} \tag{1}$$



marco real | estructura primaria | redundante M_A aplicada

(b)

Fig. 9–15

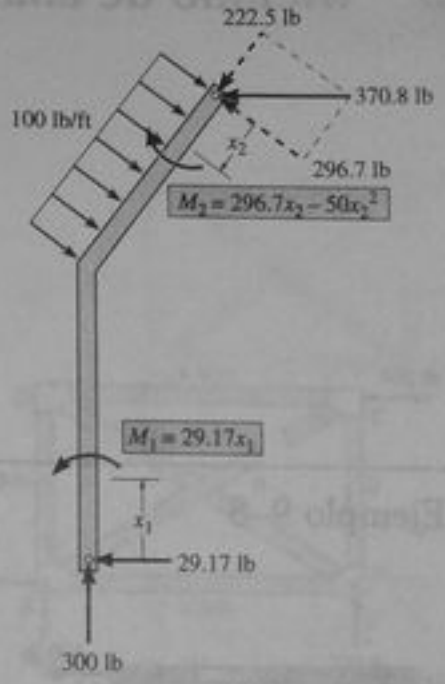
Igual que en el ejemplo anterior, θ_A y α_{AA} se calcularán usando el método del trabajo virtual. Las coordenadas x del marco y momentos internos se muestran en las figuras 9–15c y 9–15d.

Para determinar θ_A se requiere la aplicación de las cargas reales, figura 9–15c, y de un momento concentrado virtual unitario en A figura 9–15d. Así,

$$\theta_A = \sum \int \frac{M m_\theta \, dx}{EI}$$

$$= \int_0^8 \frac{(29.17x_1)(1 - 0.0833x_1)\, dx_1}{EI} + \int_0^5 \frac{(296.7x_2 - 50x_2^2)(0.0667x_2)\, dx_2}{EI}$$

$$= \frac{518.7}{EI} + \frac{303.5}{EI} = \frac{822.2}{EI}$$

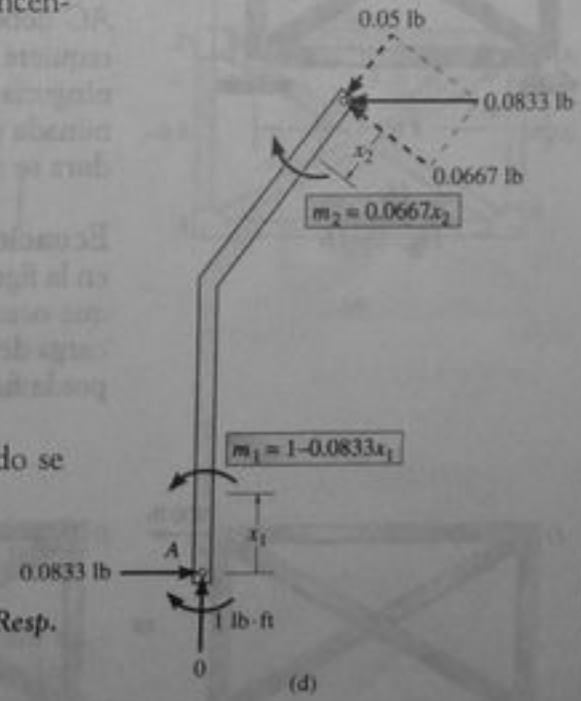


Para determinar α_{AA} se requiere la aplicación de un momento concentrado real actuando en A, figura 9–15d, y de un momento concentrado unitario virtual que actúe en A, figura 9–15d. Así,

$$\alpha_{AA} = \sum \int \frac{m_\theta m_\theta}{EI} dx$$

$$= \int_0^8 \frac{(1 - 0.0833x_1)^2\, dx_1}{EI} + \int_0^5 \frac{(0.0667x_2)^2\, dx_2}{EI}$$

$$= \frac{3.85}{EI} + \frac{0.185}{EI} = \frac{4.04}{EI}$$



Sustituyendo esos resultados en la ecuación (1) y despejando se obtiene

$$0 = \frac{822.2}{EI} + M_A\left(\frac{4.04}{EI}\right) \qquad M_A = -204 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \textbf{Resp.}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{M}_A$ actúa en sentido opuesto al mostrado en la figura 9–15b.

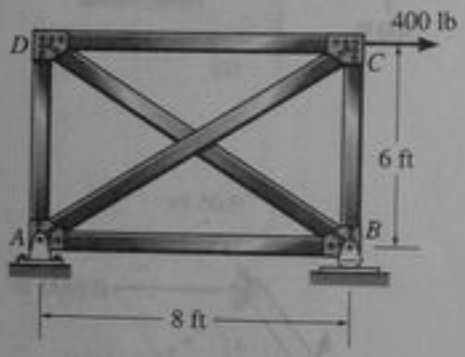
9.7 Método de análisis de las fuerzas: armaduras

El grado de indeterminación de una armadura puede usualmente determinarse por inspección; sin embargo, si esto resulta difícil, use la ecuación 3–1, $b + r > 2j$. Aquí, las incógnitas están representadas por el número de barras (b) más las reacciones (r); el número de ecuaciones de equilibrio disponibles es $2j$ ya que pueden escribirse dos ecuaciones para cada uno de los j nudos.

El método de las fuerzas es muy apropiado para analizar armaduras estáticamente indeterminadas de primero o segundo grado. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de este método usando el procedimiento de análisis delineado en la sección 9.2.

Ejemplo 9–8

Determine la fuerza en el miembro AC de la armadura mostrada en la figura 9–16*a*. *AE* es la misma para todos los miembros.



(a)

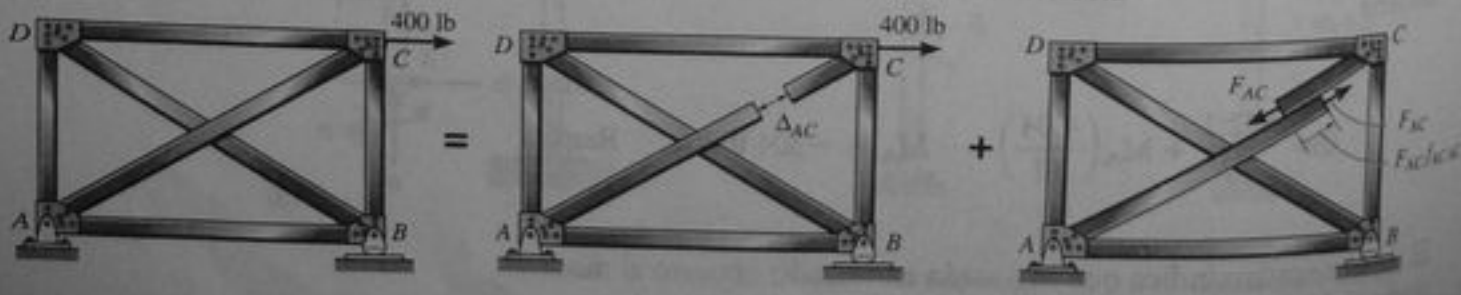
Fig. 9–16

Solución

Principio de superposición. Por inspección, la armadura es indeterminada de primer grado.* Como la fuerza en el miembro AC debe determinarse, ésta se escogerá como redundante. Esto requiere "cortar" este miembro de manera que no pueda tomar ninguna fuerza, haciendo así a la armadura estáticamente determinada y estable. El principio de superposición aplicado a la armadura se muestra en la figura 9–16*b*.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al miembro *AC* en la figura 9–16*b*, se requiere que el desplazamiento relativo Δ_{AC}, que ocurre en los extremos del miembro cortado *AC* debido a la carga de 400 lb, más el desplazamiento relativo $F_{AC}f_{AC\,AC}$ causado por la fuerza redundante que actúa sola, sea igual a cero, esto es,

$$0 = \Delta_{AC} + F_{AC}f_{AC\,AC} \tag{1}$$



armadura real — estructura primaria — redundante $\mathbf{F}_{AC}$ aplicada

(b)

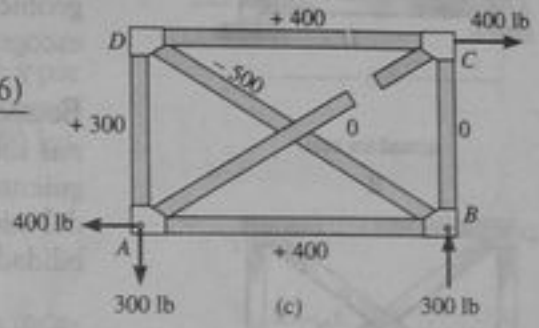
Aquí, el coeficiente de flexibilidad $f_{AC\,AC}$ representa el desplazamiento relativo de los extremos cortados del miembro AC causado por una carga "real" unitaria que actúa en los extremos cortados del miembro AC. Este término, $f_{AC\,AC}$ y Δ_{AC} se calcularán con el método del trabajo virtual. El análisis de fuerzas, con ayuda del método de los nudos, se resume en las figuras 9–16c y 9–16d.

Para determinar Δ_{AC} se requiere la aplicación de la carga real de 400 lb, figura 9–16c, y de una fuerza virtual unitaria que actúa en los extremos cortados del miembro AC, figura 9–16d. Así,

$$\Delta_{AC} = \sum \frac{nNL}{AE}$$

$$= 2\left[\frac{(-0.8)(400)(8)}{AE}\right] + \frac{(-0.6)(0)(6)}{AE} + \frac{(-0.6)(300)(6)}{AE} + \frac{(1)(-500)(10)}{AE} + \frac{(1)(0)(10)}{AE}$$

$$= -\frac{11{,}200}{AE}$$

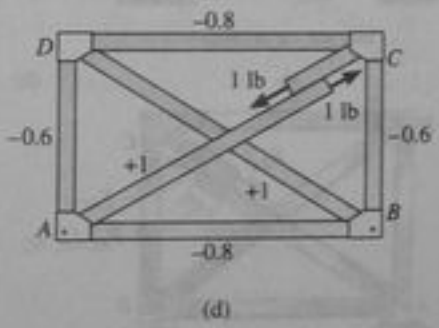


Para determinar $f_{AC\,AC}$ se requiere la aplicación de fuerzas reales unitarias que actúen sobre los extremos cortados del miembro AC, figura 9–16d, y de fuerzas unitarias virtuales que actúen sobre los extremos cortados del miembro AC, figura 9–16d. Así,

$$f_{AC\,AC} = \sum \frac{n^2 L}{AE}$$

$$= 2\left[\frac{(-0.8)^2(8)}{AE}\right] + 2\left[\frac{(-0.6)^2(6)}{AE}\right] + 2\left[\frac{(1)^2 10}{AE}\right]$$

$$= \left(\frac{34.56}{AE}\right)$$



Si sustituimos los datos en la ecuación (1) y despejamos, obtenemos

$$0 = -\frac{11{,}200}{AE} + \frac{34.56}{AE} F_{AC}$$

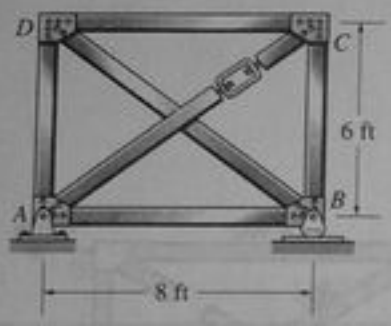
$$F_{AC} = 324 \text{ lb (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

Como el resultado numérico es positivo, AC está sometido a tensión, tal y como se supuso, figura 9–16b. Con este resultado, pueden encontrarse por equilibrio las fuerzas en los otros miembros, por medio del método de los nudos.

*Se aplica la ecuación 3–1, $b + r > 2j$ o $6 + 3 > 2(4)$, $9 > 8$, $9 - 8 = 1^*$.

Ejemplo 9–9

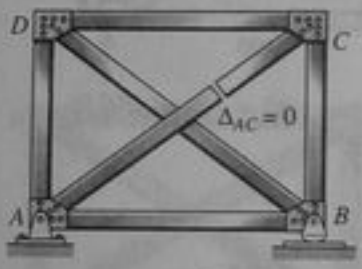
Determine la fuerza en cada miembro de la armadura ilustrada en la figura 9–17*a* si el templador en el miembro AC se usa para acortar el miembro en 0.5 in. Cada barra tiene un área transversal de 0.2 in² y $E = 29(10^6)$ psi.



(a)

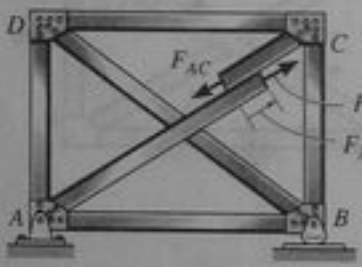
armadura real

=



estructura primaria

+



redundante F_{AC} aplicada

Fig. 9–17

Solución

Principio de superposición. Esta armadura tiene la misma geometría que la del ejemplo 9–8. Como AC ha sido acortada, la escogeremos como redundante, figura 9–17*b*.

Ecuación de compatibilidad. Como no actúan cargas externas sobre la estructura primaria (armadura), no se dará el consiguiente desplazamiento provocado por carga entre los extremos del miembro seccionado; esto es, $\Delta_{AC} = 0$. El coeficiente de flexibilidad $f_{AC\,AC}$ se calculó en el ejemplo 9–8, por lo que

$$f_{AC\,AC} = \frac{34.56}{AE}$$

(b) Suponiendo que la cantidad en que la barra se acorta es positiva, la ecuación de compatibilidad para la barra es entonces

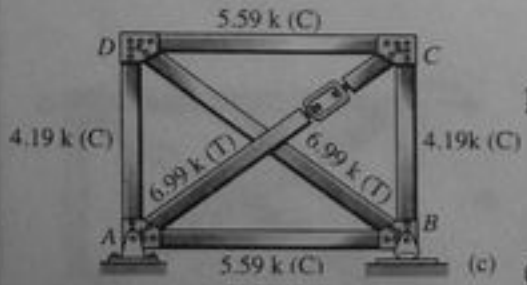
$$0.5 \text{ in.} = 0 + \frac{34.56}{AE} F_{AC}$$

Como $f_{AC\,AC}$ es una medida del desplazamiento por fuerza unitaria, tenemos

$$0.5 \text{ in.} = 0 + \frac{34.56 \text{ ft}(12 \text{ in./ft})}{(0.2 \text{ in}^2)[29(10^6) \text{ lb/in}^2]} F_{AC}$$

Entonces,

$$F_{AC} = 6993 \text{ lb} = 6.99 \text{ k (T)} \qquad \textit{Resp.}$$



(c) Como no actúan fuerzas externas sobre la armadura, las reacciones externas son cero. Por tanto, utilizamos F_{AC} y analizamos la armadura por el método de los nudos, de modo que obtenemos los resultados que se muestran en la figura 9–17*c*.

9.8 Estructuras compuestas

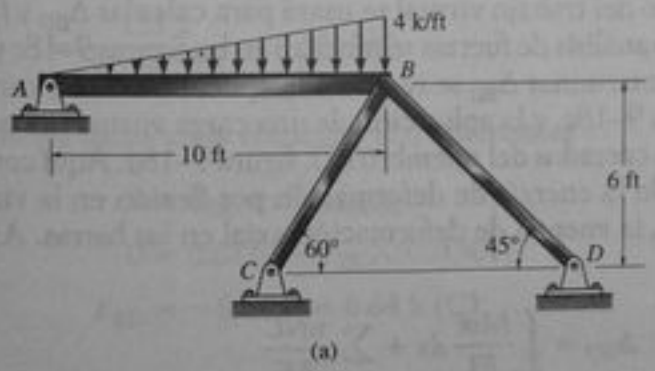
Las *estructuras compuestas* constan de miembros algunos de los cuales están sometidos sólo a fuerza axial, mientras que otros están sometidos a flexión. Si la estructura es estáticamente indeterminada, el método de las fuerzas puede usarse convenientemente para su análisis. El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

Ejemplo 9–10

La viga de la figura 9–18*a* está soportada por un pasador en *A* y por dos barras conectadas por pasadores en *B*. Determine las fuerzas en los soportes para la carga mostrada. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 800\ \text{in}^4$ para la viga y $A = 3\ \text{in}^2$ para cada barra.

Solución

Principio de superposición. Por inspección, la viga es indeterminada de primer grado. Escogeremos como redundante la fuerza en el miembro *BD*. Este miembro se secciona entonces para cancelar su capacidad de soportar fuerzas. El principio de superposición aplicado a la estructura se muestra en la figura 9–18*b*.



(a)

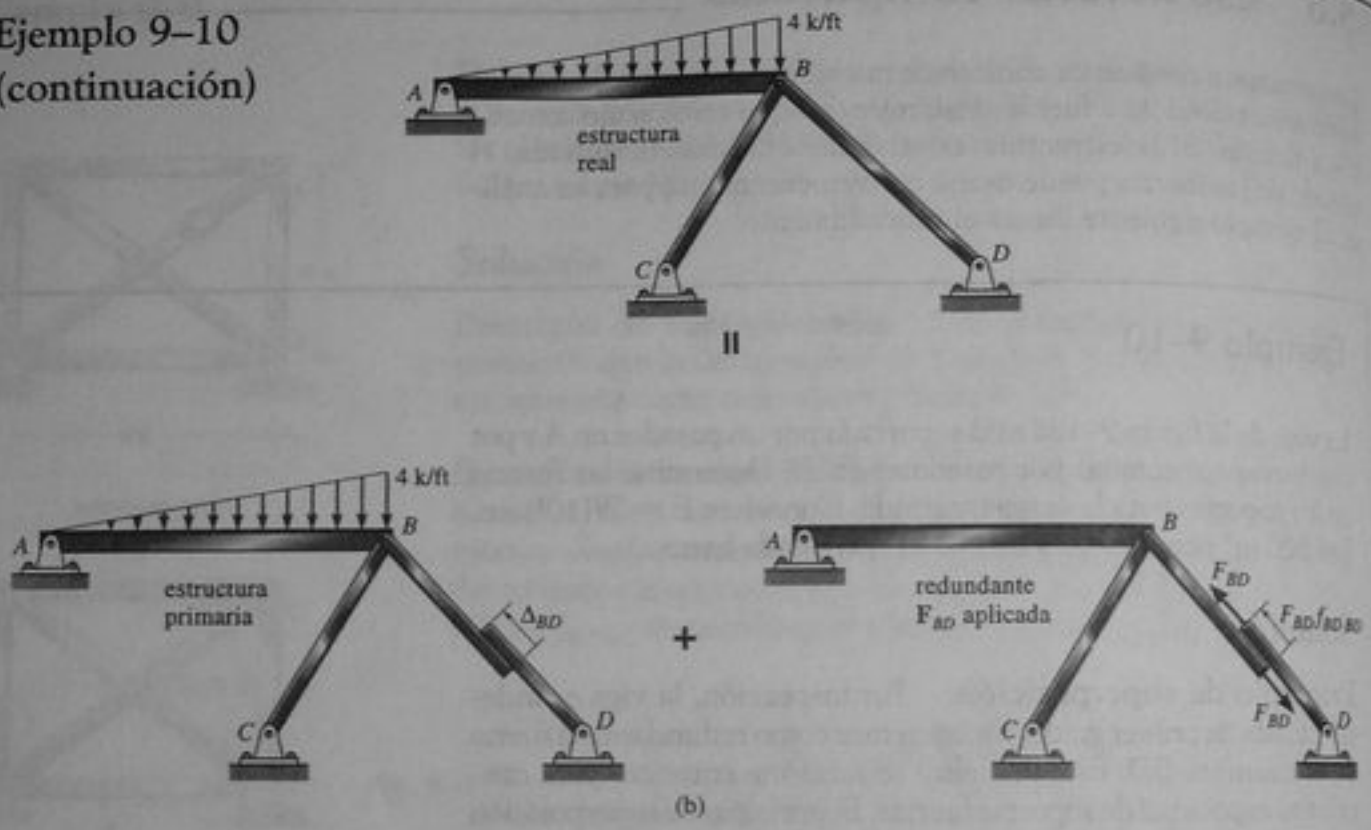
Fig. 9–18

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al desplazamiento relativo de los extremos cortados del miembro *BD*, figura 9–18*b*, se requiere

$$0 = \Delta_{BD} + F_{BD} f_{BD\,BD} \qquad (1)$$

(continúa)

Ejemplo 9–10 (continuación)

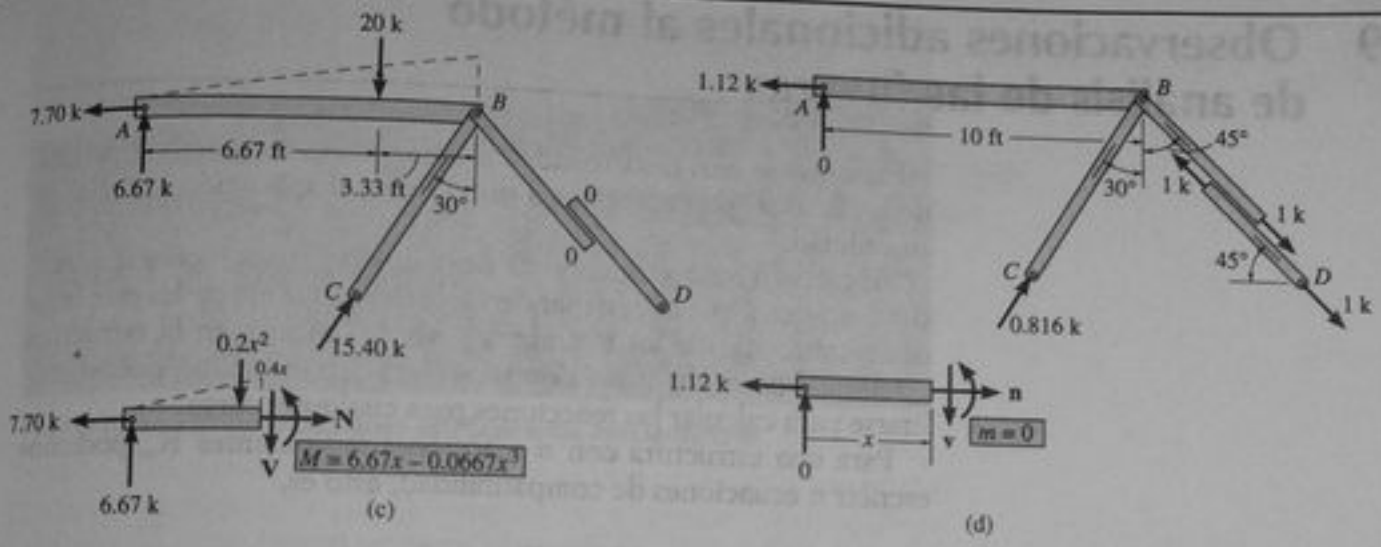


(b)

El método del trabajo virtual se usará para calcular Δ_{BD} y $f_{BD\,BD}$. El necesario análisis de fuerzas se muestra en las figuras 9–18c y 9–18d.

Para determinar Δ_{BD} se requiere la aplicación de las cargas reales, figura 9–18c, y la aplicación de una carga virtual unitaria a los extremos cortados del miembro *BD*, figura 9–18*d*. Aquí consideraremos sólo la energía de deformación por flexión en la viga y por supuesto, la energía de deformación axial en las barras. Así,

$$\begin{aligned}\Delta_{BD} &= \int \frac{Mm}{EI}\,dx + \sum \frac{nNL}{AE} \\ &= \int_0^{10} \frac{(6.67x - 0.0667x^3)(0)\,dx}{EI} \\ &\quad + \frac{(-15.40)(-0.816)(6/\cos 30°)(12)}{AE} \\ &\quad + \frac{(0)(1)(6/\cos 45°)(12)}{AE} \\ &= 0 + \frac{1044.8}{3[29(10^3)]} + 0 = 0.0120 \text{ in.}\end{aligned}$$

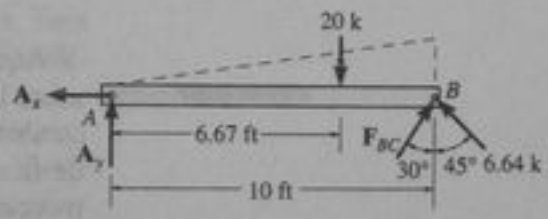


Para determinar $f_{BD\,BD}$ se requiere la aplicación de una carga real unitaria y la aplicación de una carga virtual unitaria en los extremos cortados del miembro BD, figura 9–18*d*. Así,

$$f_{BD\,BD} = \int \frac{m^2\,dx}{EI} + \sum \frac{n^2 L}{AE}$$

$$= \int_0^{10} \frac{(0)^2\,dx}{EI} + \frac{(-0.816)^2(6/\cos 30°)(12)}{AE} + \frac{(1)^2(6/\cos 45°)(12)}{AE}$$

$$= \frac{157.2}{3[29(10^3)]} = 0.001807$$



Sustituyendo los datos en la ecuación (1), obtenemos

$$0 = \Delta_{BD} + F_{BD} f_{BDBD}$$

$$0 = 0.0120 + F_{BD}(0.001807)$$

$$F_{BD} = -6.64 \text{ k} = 6.64 \text{ k (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

Ecuaciones de equilibrio. Con este resultado, se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga en la figura 9–18*e*. Tenemos

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0;$$

$$20(6.67) - 6.64\cos 45°(10) - F_{BC}\cos 30°(10) = 0$$

$$F_{BC} = 9.97 \text{ k (C)} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -A_x + 9.97 \operatorname{sen} 30° - 6.64 \operatorname{sen} 45° = 0$$

$$A_x = 0.290 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 20 + 6.64\cos 45° + 9.97\cos 30° = 0$$

$$A_y = 6.67 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

9.9 Observaciones adicionales al método de análisis de las fuerzas

Ahora que se han desarrollado las ideas básicas respecto al método de las fuerzas, procederemos a generalizar su aplicación y a analizar su utilidad.

Al calcular los coeficientes de flexibilidad, f_{ij} (o α_{ij}), para la estructura, se notará que ellos dependen sólo del material y de las propiedades geométricas de los miembros y no de la carga en la estructura primaria. Por tanto, esos valores, una vez determinados, pueden utilizarse para calcular las reacciones para cualquier carga.

Para una estructura con n reacciones redundantes $\mathbf{R}_n$, podemos escribir n ecuaciones de compatibilidad, esto es,

$$\begin{aligned}
\Delta_1 + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + \cdots + f_{1n}R_n &= 0 \\
\Delta_2 + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 + \cdots + f_{2n}R_n &= 0 \\
&\vdots \\
\Delta_n + f_{n1}R_1 + f_{n2}R_2 + \cdots + f_{nn}R_n &= 0
\end{aligned}$$

Aquí, los desplazamientos, $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, se deben a las *cargas reales* sobre la estructura primaria y a los *asentamientos de los soportes* o a los *cambios dimensionales* debidos a diferencias de temperatura o errores de fabricación de los miembros. Para simplificar los cálculos de estructuras con un gran número de redundantes, las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial,* esto es,

$$\begin{bmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1n} \\ f_{21} f_{22} \cdots f_{2n} \\ \vdots \\ f_{n1} f_{n2} \cdots f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} \tag{9-2}$$

o simplemente,

$$\mathbf{fR} = -\boldsymbol{\Delta}$$

En particular, note que $f_{ij} = f_{ji}$ ($f_{12} = f_{21}$, etc.), lo que es una consecuencia del teorema de Maxwell sobre los desplazamientos recíprocos (o del teorema de Betti). Por tanto, la *matriz de flexibilidades será simétrica*, lo que es de gran ventaja al resolver conjuntos grandes de ecuaciones simultáneas, como sucede con estructuras altamente indeterminadas.

*El álgebra matricial se repasa en el capítulo 13.

Puente típico carretero de trabes estáticamente indeterminado.

A lo largo de todo este capítulo hemos determinado los coeficientes de flexibilidad por medio del método del trabajo virtual aplicado a *toda la estructura*. Sin embargo, es posible obtener esos coeficientes para *cada miembro* de la estructura y luego, mediante ecuaciones de transformación, obtener sus valores para la estructura entera. Esta manera de proceder se ve con detalle en los libros dedicados al análisis matricial de estructuras y no se estudiará en este texto.*

Aunque los detalles de la aplicación del método de las fuerzas con el uso de computadora se omitirá aquí, podemos hacer algunas observaciones y comentarios generales respecto a este método en la solución de problemas de alta indeterminación que implican la formulación de grandes conjuntos de ecuaciones. Respecto a esto, la exactitud numérica de la solución se mejora si los coeficientes de flexibilidad localizados cerca de la diagonal principal de la matriz **f** son mayores que los localizados lejos de esta diagonal.† Para lograr esto, debe darse alguna consideración a la selección de la estructura primaria. Para facilitar el cálculo de los f_{ij}, es conveniente escoger la estructura primaria de manera que sea simétrica en alguna medida. Esto dará algunos coeficientes de flexibilidad similares o iguales a cero. Finalmente, la línea elástica de la estructura primaria debería ser *similar* a la de la estructura real. Si es así, las redundantes inducirán sólo *pequeñas* correcciones a la estructura primaria, lo que conduce a una solución más exacta de la ecuación 9–2.

* Véase, por ejemplo, H. C. Martin, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw–Hill, Nueva York.

† La diagonal principal de una matriz consiste en los términos f_{ii}.

9.10 La ecuación de los tres momentos

La ecuación de los tres momentos fue desarrollada por el ingeniero francés Clapeyron en 1857. Esta ecuación relaciona los momentos internos de una viga continua en tres puntos de soporte con las cargas que actúan entre los soportes. Por aplicación sucesiva de esta ecuación a segmentos de la viga, se obtiene un conjunto de ecuaciones que pueden resolverse simultáneamente para los momentos internos desconocidos en los soportes.

Una forma general de la ecuación de los tres momentos puede obtenerse al considerar un segmento de una *viga continua*, figura 9–19*a*, que pasa sobre los soportes izquierdo, central y derecho, L, C y R. Las cargas entre los soportes son arbitrarias y a los *momentos internos* desconocidos en los soportes se les llamará M_L, M_C y M_R. Además, la parte izquierda de la viga tiene propiedades geométricas I_L y L_L; la parte derecha tiene las propiedades I_R y L_R. Se supone que los soportes no sufren asentamientos.* Queremos determinar los momentos internos en L, C y R, que actúan en las direcciones definidas como positivas *sobre la viga* en la figura 9–19*a*. La derivación se basará en el método de la viga conjugada. Como la viga "real" es continua sobre los soportes, la viga conjugada tiene *articulaciones* en L, C y R. Mediante el principio de superposición, los diagramas *M/EI* para las cargas aplicadas y para cada uno de los momentos internos se muestran, para mayor claridad, separados en las figuras 9–19*b* y 9–19*c*. En particular, A_L/EI y A_R/EI representan el área total bajo sus respectivos diagramas *M/EI*, y $\bar{x}_L$ y $\bar{x}_R$ localizan sus centroides. Como la pendiente de la viga real es *continua* sobre el soporte central, se requiere que las fuerzas cortantes $C_{L_1} + C_{L_2} = -(C_{R_1} + C_{R_2})$ para la viga conjugada. Sumando momentos respecto al punto L' para los segmentos izquierdos, tenemos

$$\begin{aligned} C_{L_1} + C_{L_2} &= \frac{1}{L_L}\left(\frac{A_L}{EI_L}\bar{x}_L\right) \\ &\quad + \frac{1}{L_L}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_L}{EI_L}\right)(L_L)\left(\frac{1}{3}L_L\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{M_C}{EI_L}\right)(L_L)\left(\frac{2}{3}L_L\right)\right] \\ &= \frac{A_L\bar{x}_L}{EI_L L_L} + \frac{M_L L_L}{6EI_L} + \frac{M_C L_L}{3EI_L} \end{aligned}$$

*Si se incluyen los asentamientos de los soportes, las ecuaciones resultantes son más complicadas. Sin embargo, esta situación puede resolverse con el uso de los procedimientos de pendiente-desviación o de distribución de momentos presentados en los capítulos 10 y 11.

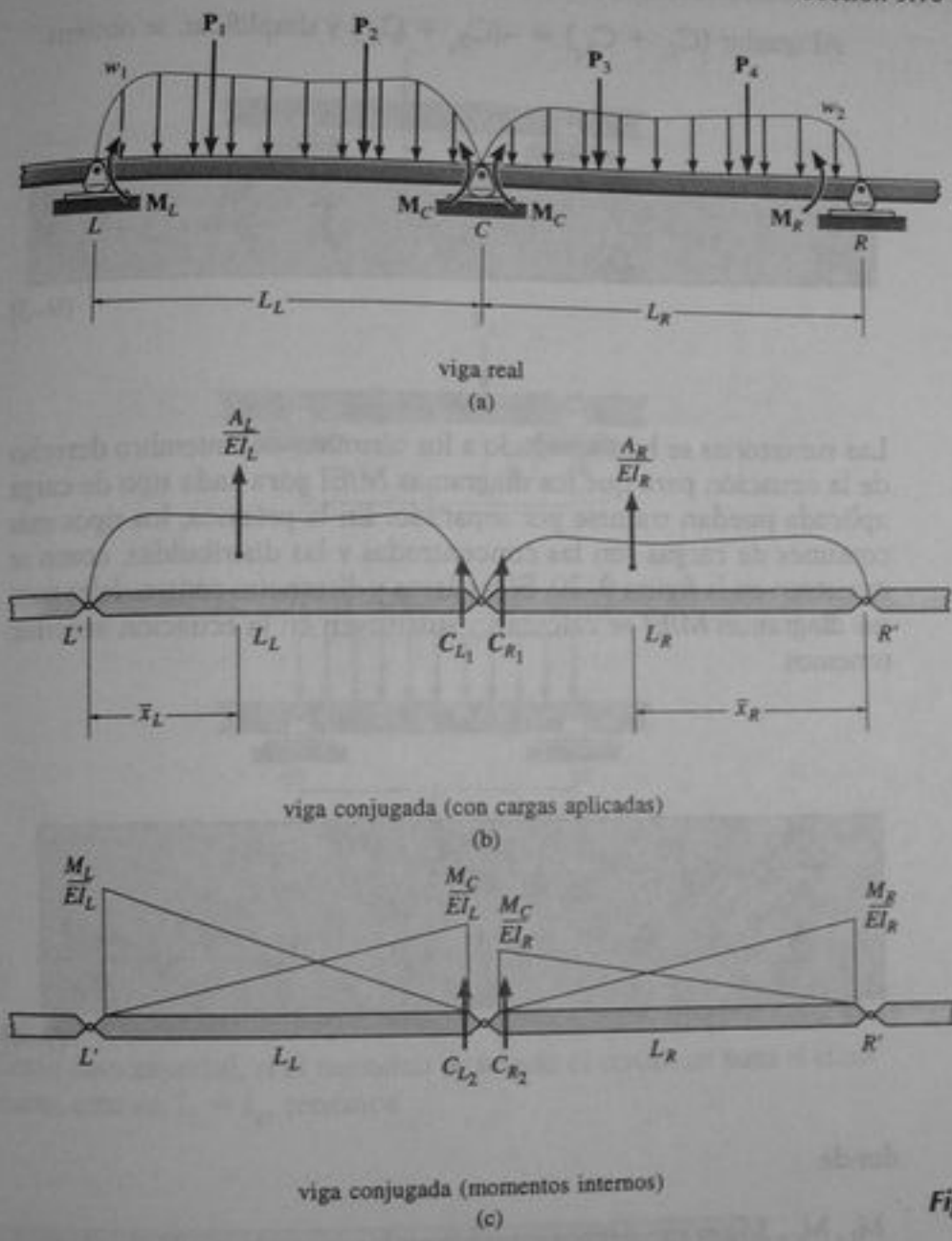


Fig. 9–19

Sumamos ahora momentos respecto al punto R′ para el segmento derecho, y obtenemos

$$C_{R_1} + C_{R_2} = \frac{1}{L_R}\left(\frac{A_R}{EI_R}\bar{x}_R\right) + \frac{1}{L_R}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_R}{EI_R}\right)(L_R)\left(\frac{1}{3}L_R\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{M_C}{EI_R}\right)(L_R)\left(\frac{2}{3}L_R\right)\right]$$

$$= \frac{A_R\bar{x}_R}{EI_RL_R} + \frac{M_RL_R}{6EI_R} + \frac{M_CL_R}{3EI_R}$$

Al igualar $(C_{L_1} + C_{L_2}) = -(C_{R_1} + C_{R_2})$ y simplificar, se obtiene

$$\frac{M_L L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + \frac{M_R L_R}{I_R} = -\sum \frac{6A_L\bar{x}_L}{I_L L_L} - \sum \frac{6A_R\bar{x}_R}{I_R L_R} \tag{9-3}$$

Las sumatorias se han agregado a los términos del miembro derecho de la ecuación para que los diagramas *M/EI* para cada tipo de carga aplicada puedan tratarse por separado. En la práctica, los tipos más comunes de cargas son las concentradas y las distribuidas, como se muestran en la figura 9–20. Si las áreas y distancias centroidales para sus diagramas *M/EI* se calculan y sustituyen en la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{M_L L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + \frac{M_R L_R}{I_R} = -\sum \frac{P_L L_L^2}{I_L}(k_L - k_L^3) - \sum \frac{P_R L_R^2}{I_R}(k_R - k_R^3) - \frac{w_L L_L^3}{4I_L} - \frac{w_R L_R^3}{4I_R} \tag{9-4}$$

donde

M_L, M_C, M_R = momentos internos en los soportes izquierdo, central y derecho; se supone que esos momentos actúan en el sentido positivo sobre la viga, como se muestra en la figura 9–19*a*.

$I_L, L_L; I_R, L_R$ = momentos de inercia y longitudes de claros izquierdo y derecho de la viga, figura 9–19*a*.

$P_L, w_L; P_R, w_R$ = cargas concentradas y cargas uniformes distribuidas izquierda y derecha sobre la viga; se supone que actúan en el sentido positivo, como se muestra en la figura 9–19*a*.

k_L, k_R = fracción de la longitud del claro donde actúa la carga concentrada, desde el soporte izquierdo o derecho, figura 9–20.

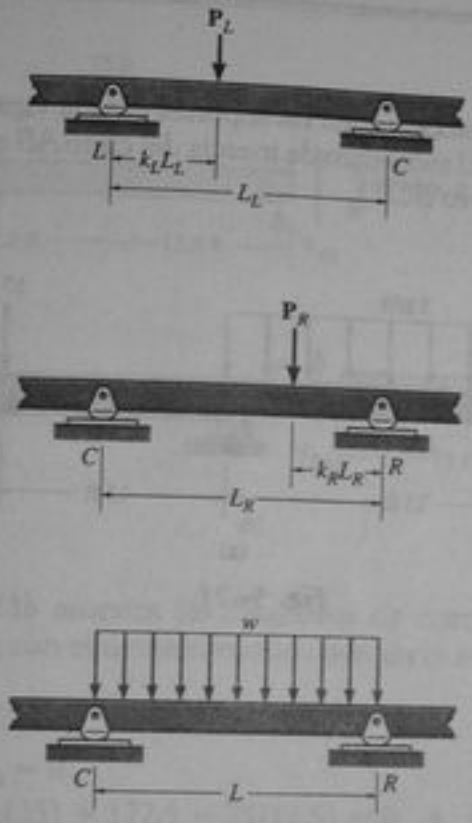


Fig. 9–20

Como caso especial, si el *momento de inercia es constante para el claro entero*, esto es, $I_L = I_R$, tenemos

$$M_L L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R L_R = -\Sigma P_L L_L^2(k_L - k_L^3) - \Sigma P_R L_R^2(k_R - k_R^3) - \frac{w_L L_L^3}{4} - \frac{w_R L_R^3}{4} \tag{9–5}$$

La aplicación de las ecuaciones (9–3) a la (9–5) es bastante directa, aunque debe tenerse cuidado de respetar la convención de signo positivo para los términos de momento y carga. Además, debe usarse un conjunto de unidades que sea consistente. Los siguientes ejemplos ilustran cómo aplicar esas ecuaciones. Note en particular la técnica utilizada para tratar un soporte de empotramiento en el ejemplo 9–13.

Ejemplo 9–11

Determine las reacciones en los soportes para la viga mostrada en la figura 9–21*a*. El momento de inercia del claro *AB* es la mitad del momento del claro *BC*.

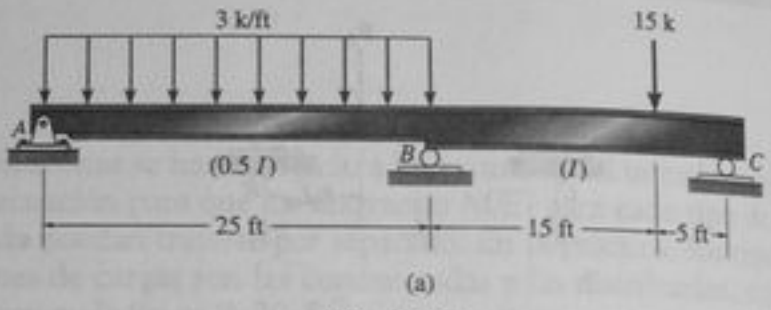


Fig. 9–21

Solución

Aquí debemos usar la ecuación 9–4 para la solución. Los datos son los siguientes:

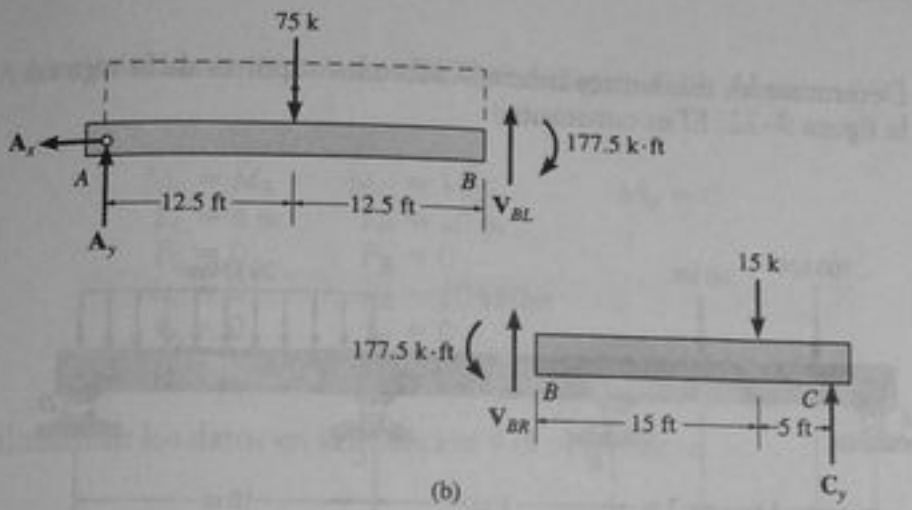
$M_L = 0$	$M_C = M_B$	$M_R = 0$
$L_L = 25$ ft	$L_R = 20$ ft	
$I_L = 0.5I$	$I_R = I$	
$P_L = 0$	$P_R = 15$ k	
$w_L = 3$ k/ft	$w_R = 0$	
$k_L = 0$	$k_R = \frac{5}{20} = 0.25$	

Si se sustituye en la ecuación 9–4 se obtiene

$$0 + 2M_B\left(\frac{25}{0.5I} + \frac{20}{I}\right) + 0$$
$$= 0 - \frac{15(20)^2}{I}[0.25 - (0.25)^3] - \left[\frac{3(25)^3}{4(0.5I)} + 0\right]$$

Se cancela el término común I, y se despeja, de modo que se obtiene

$$M_B = -177.5 \text{ k} \cdot \text{ft}$$



(b)

La figura 9–21*b* muestra los diagramas de cuerpo libre de los claros *AB* y *BC*, con el momento calculado en la sección.

Para el claro *AB*:

$\stackrel{+}{\leftarrow}\Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$ *Resp.*

$\curvearrowleft+\Sigma M_B = 0; \quad A_y(25) + 177.5 - 75(12.5) = 0 \quad A_y = 30.4\text{ k}$ *Resp.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad 30.4 - 75 + V_{BL} = 0 \quad V_{BL} = 44.6\text{ k}$

Para el claro *BC*:

$\curvearrowleft+\Sigma M_B = 0; \quad -177.5 + 15(15) - C_y(20) = 0$

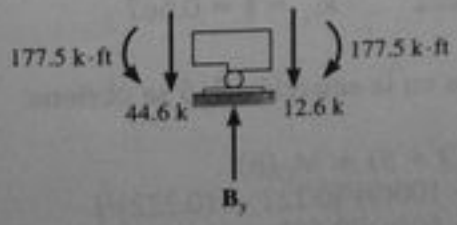
$C_y = 2.38\text{ k}$ *Resp.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad V_{BR} - 15 + 2.38 = 0$

$V_{BR} = 12.6\text{ k}$

En la figura 9–21*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento diferencial de la viga que pasa sobre el rodillo en *B*.

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad B_y - 44.6 - 12.6 = 0 \quad B_y = 57.2\text{ k}$ *Resp.*



(c)

Ejemplo 9–12

Determine los momentos internos sobre los soportes de la viga en la figura 9–22. *EI* es constante.

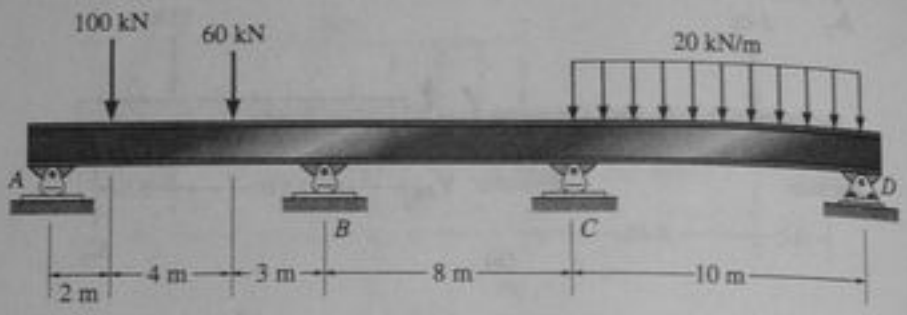


Fig. 9–22

Solución

Como *I* es constante, podemos usar la ecuación 9–5. Por inspección,

$$M_A = M_D = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

Hay dos incógnitas, M_B y M_C; por lo que la ecuación 9–5 debe aplicarse dos veces.

Consideraremos primero *ABC* en la figura 9–22, en cuyo caso tenemos

$M_L = 0$	$M_C = M_B$	$M_R = M_C$
$L_L = 9$ m	$L_R = 8$ m	
$P_{L_1} = 100$ kN	$P_{L_2} = 60$	$P_R = 0$
$w_R = 0$	$w_L = 0$	
$k_{L_1} = \frac{2}{9} = 0.222$	$k_{L_2} = \frac{8}{9} = 0.667$	

Al sustituir los datos en la ecuación 9–5 se obtiene

$$\begin{aligned} 0 + 2M_B(9 + 8) + M_C(8) &= -100(9)^2[0.222 - (0.222)^3] \\ &\quad - 60(9)^2[0.667 - (0.667)^3] - 0 - 0 - 0 \\ 34M_B + 8M_C &= -3509.0 \end{aligned} \qquad (1)$$

A continuación consideramos *BCD* en la figura 9-22. Aquí,

$$\begin{array}{lll} M_L = M_B & M_C = M_C & M_R = 0 \\ L_L = 8\text{ m} & L_R = 10\text{ m} & \\ P_L = 0 & P_R = 0 & \\ w_L = 0 & w_R = 20\text{ kN/m} & \\ k_L = 0 & k_R = 0 & \end{array}$$

Al sustituir los datos en la ecuación 9–5 obtenemos

$$M_B(8) + 2M_C(8 + 10) + 0 = -0 - 0 - 0 - \frac{20(10)^3}{4}$$

$$8M_B + 36M_C = -5000 \qquad (2)$$

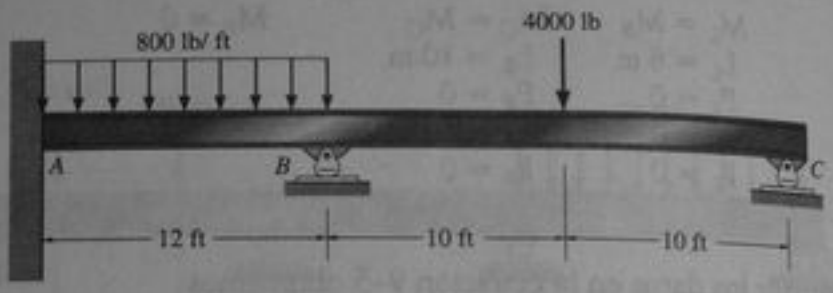
Se resuelven las ecuaciones (1) y (2) y resulta:

$$M_B = -74.4\text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

$$M_C = -122.4\text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 9–13

Determine los momentos internos sobre los soportes de la viga en la figura 9–23*a*. *EI* es constante.



(a)

Fig. 9–23

Solución

La ecuación 9–5 puede usarse para la solución ya que *I* es constante. Por inspección,

$$M_C = 0 \qquad \text{Resp.}$$

Los momentos en A y B se determinarán por dos aplicaciones de la ecuación 9–5. *El empotramiento en A puede tratarse como un soporte de rodillo si se agrega a la viga un claro extremo imaginario de longitud cero*, figura 9–23b.

Primero consideramos A'AB, figura 9–23*b*, en cuyo caso

$$\begin{array}{lll} M_L = 0 & M_C = M_A & M_R = M_B \\ L_L = 0 & L_R = 12 & \\ P_L = 0 & P_R = 0 & \\ w_L = 0 & w_R = 800 \text{ lb/ft} & \\ k_L = 0 & k_R = 0 & \end{array}$$

Sustituimos los datos en la ecuación 9–5 y obtenemos

$$0 + 2M_A(0 + 12) + M_B(12) = -0 - 0 - 0 - \frac{800(12)^3}{4}$$

$$24M_A + 12M_B = -345{,}600 \qquad (1)$$

Ahora consideramos ABC, figura 9–23*b*. Tenemos

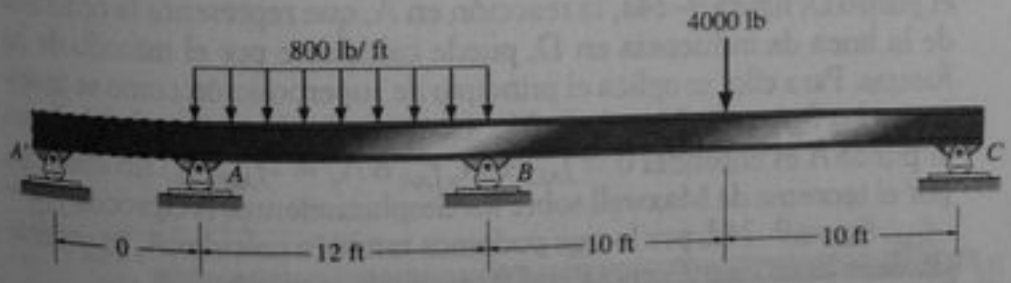
$$\begin{aligned} M_L &= M_A & M_C &= M_B & M_R &= 0 \\ L_L &= 12 \text{ ft} & L_R &= 20 \text{ ft} \\ P_L &= 0 & P_R &= 4000 \text{ lb} \\ w_L &= 800 \text{ lb/ft} & w_R &= 0 \\ k_L &= 0 & k_R &= \frac{10}{20} = 0.5 \end{aligned}$$

Sustituimos los datos en la ecuación 9–5 y tenemos

$$\begin{aligned} &M_A(12) + 2M_B(12 + 20) + 0 \\ &\quad = -0 - 4000(20)^2[0.5 - (0.5)^3] - \frac{800(12)^3}{4} - 0 \\ &12M_A + 64M_B = -945{,}600 \qquad (2) \end{aligned}$$

Se resuelven las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente y resulta:

$$\begin{aligned} M_A &= -7.74 \text{ k} \cdot \text{ft} && \textit{Resp.} \\ M_B &= -13.3 \text{ k} \cdot \text{ft} && \textit{Resp.} \end{aligned}$$



(b)

9.11 Líneas de influencia para vigas estáticamente indeterminadas

En la sección 6.3 estudiamos el uso del principio de Müller-Breslau para dibujar la línea de influencia de la reacción, fuerza cortante y momento en un punto de una viga estáticamente determinada. En esta sección extenderemos este método y lo aplicaremos a vigas estáticamente indeterminadas.

Recuerde que, para una viga, *el principio de Müller-Breslau establece que la línea de influencia para una función (reacción, fuerza cortante o momento) es, a la misma escala, la forma deflexionada o línea elástica de la viga cuando sobre ésta actúa la función*. Para dibujar la línea elástica apropiadamente, la capacidad de la viga para resistir la función aplicada debe *cancelarse* de modo que la viga pueda deflexionarse cuando la función se aplique. Para *vigas estáticamente determinadas*, las formas deflexionadas (o líneas de influencia) serán una serie de *segmentos rectos*. Sin embargo, para *vigas estáticamente indeterminadas*, se tendrán *líneas curvas*. Veremos ahora la construcción de cada uno de los tres tipos de líneas de influencia (reacción, fuerza cortante y momento) para una viga estáticamente indeterminada. En cada caso ilustraremos la validez del principio de Müller-Breslau usando el teorema de Maxwell sobre los desplazamientos recíprocos.

Reacción en A

Para determinar la línea de influencia para la reacción en A en la figura 9–24*a*, se coloca una carga unitaria sobre la viga en puntos sucesivos y en cada caso se calcula la reacción en A. La gráfica de los resultados representa la línea de influencia. Por ejemplo, cuando la carga está en el punto D, figura 9–24*a*, la reacción en A, que representa la ordenada de la línea de influencia en D, puede calcularse por el método de las fuerzas. Para ello, se aplica el principio de superposición como se muestra en las figuras 9–24*a* a la 9–24*c*. La ecuación de compatibilidad para el punto A es entonces $0 = f_{AD} + A_y f_{AA}$ o $A_y = -f_{AD}/f_{AA}$; sin embargo, por el teorema de Maxwell sobre los desplazamientos recíprocos, $f_{AD} = -f_{DA}$, figura 9–24*d*, por lo que podemos también calcular A_y (u ordenada de la línea de influencia en D) usando la ecuación

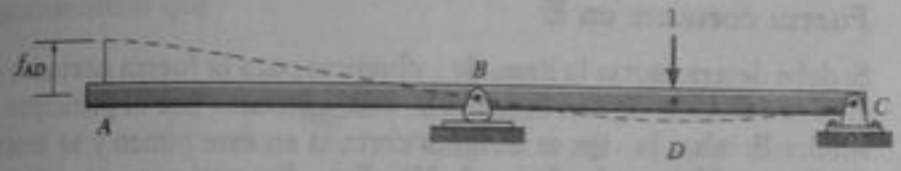
$$A_y = \left(\frac{1}{f_{AA}}\right) f_{DA}$$

Por comparación, el principio de Müller-Breslau implica quitar el soporte en A y aplicar en su lugar una carga unitaria vertical. La curva deflexionada resultante, figura 9–24*d*, es a cierta escala la forma de la línea de influencia para A_y. Sin embargo, de la ecuación anterior se ve que el factor de escala es $1/f_{AA}$.

viga real

(a)

=



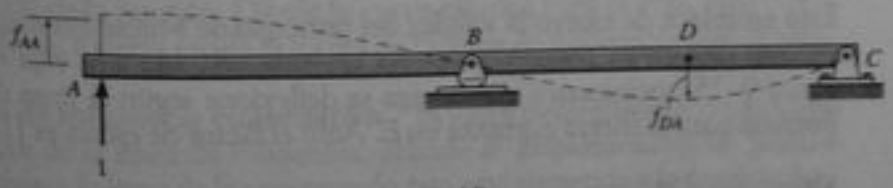
estructura primaria

(b)

+

redundante A_y aplicada

(c)



(d)

Fig. 9–24

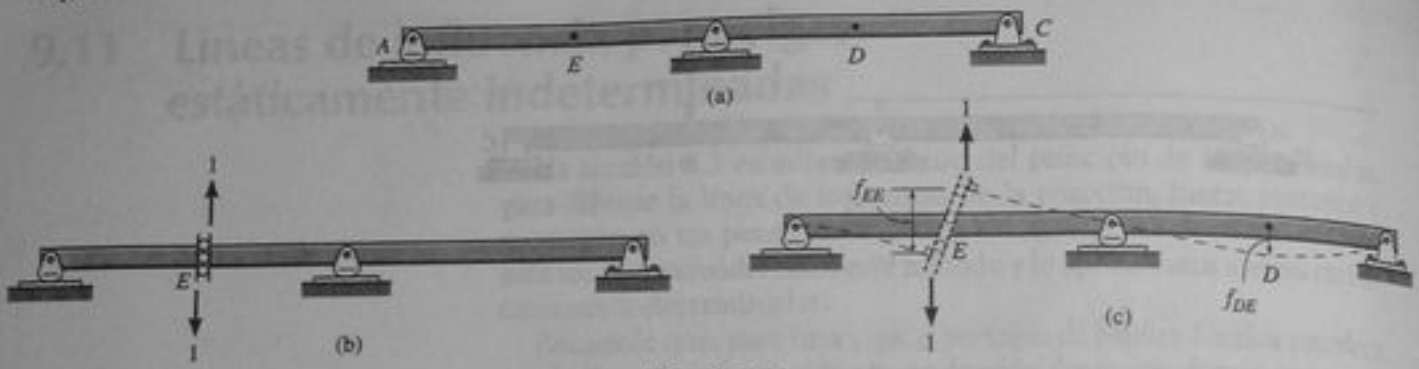


Fig. 9–25

Fuerza cortante en E

Si debe determinarse la línea de influencia para la fuerza cortante en el punto E de la viga en la figura 9–25*a*, entonces por el principio de Müller-Breslau, la viga se imagina cortada en este punto y se inserta en E un *rodillo guiado*, figura 9–25*b*. Este dispositivo transmitirá un momento y una fuerza normal pero ninguna fuerza cortante. Cuando la viga se deflexiona debido a las cargas cortantes unitarias positivas que actúan en E, la pendiente a cada lado del rodillo se mantiene constante y la curva de deflexión representa a cierta escala la línea de influencia para la fuerza cortante en E, figura 9–25*c*. Si se hubiese aplicado el método básico para establecer la línea de influencia para la fuerza cortante en E, habría sido necesario aplicar una carga unitaria en cada punto D y calcular la fuerza cortante interna en E, figura 9–25*a*. Este valor V_E, representaría la ordenada de la línea de influencia en D. Mediante el método de las fuerzas y el teorema de Maxwell sobre los desplazamientos recíprocos, como en el caso anterior, puede demostrarse que

$$V_E = \left(\frac{1}{f_{EE}}\right) f_{DE}$$

Esto establece de nuevo la validez del principio de Müller-Breslau, esto es, que una carga cortante unitaria positiva aplicada a la viga en E, figura 9–25*c*, ocasionará que la viga se deflexione según la línea de influencia para la fuerza cortante en E. Aquí el factor de escala es $(1/f_{EE})$.

Momento flexionante en E

La línea de influencia para el momento flexionante en E en la figura 9–26*a* puede determinarse colocando una *articulación* en E, ya que esta conexión transmite fuerzas normales y cortantes pero ningún momento, figura 9–26*b*. Mediante un par de momentos unitarios positivos, la viga asumirá la forma deflexionada indicada por la línea

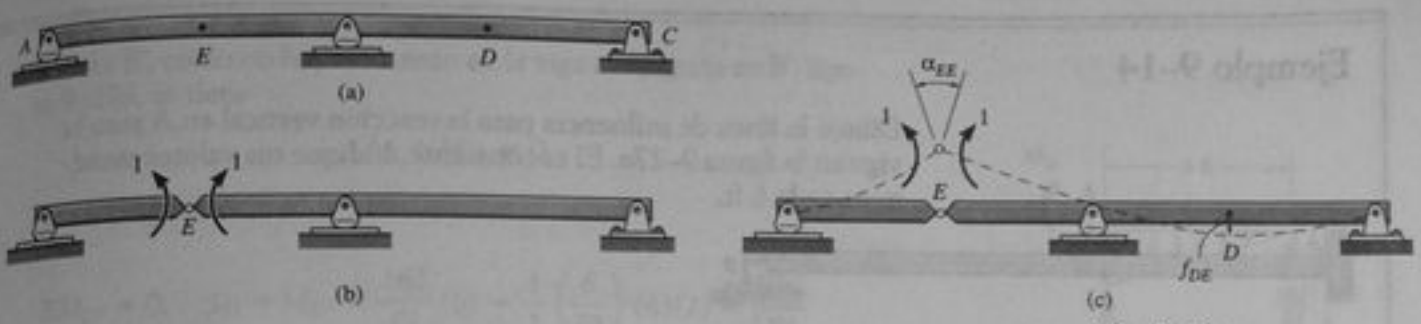


Fig. 9–26

punteada en la figura 9–26c, que representa a cierta escala la línea de influencia, nuevamente una consecuencia del principio de Müller-Breslau. Con el método de las fuerzas y el teorema de Maxwell, podemos demostrar que

$$M_E = \left(\frac{1}{\alpha_{EE}}\right) f_{DE}$$

El factor de escala aquí es $(1/\alpha_{EE})$.

Procedimiento de análisis

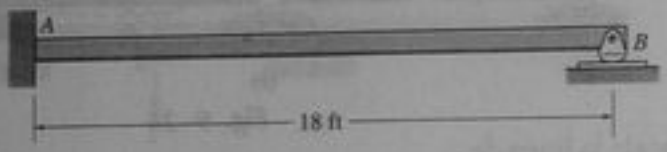
El siguiente procedimiento proporciona un método para determinar la línea de influencia para la reacción, la fuerza cortante o el momento flexionante en un punto de una viga usando el principio de Müller-Breslau.

Línea de influencia cualitativa En el punto de la viga en que va a determinarse la línea de influencia, coloque un dispositivo que cancele la capacidad de la viga para soportar la función de la línea de influencia. Si la función es una *reacción* vertical, use un *rodillo guiado* verticalmente; si la función es la *fuerza cortante*, use un *dispositivo deslizante*; o si la función es el *momento*, use una *articulación* o *pasador*. Coloque una carga unitaria en la conexión que actúa sobre la viga en la "dirección positiva" de la función. Dibuje la curva elástica para la viga. Esta curva representa a cierta escala la forma de la línea de influencia para la viga.

Línea de influencia cuantitativa Si van a determinarse valores numéricos de la línea de influencia, calcule el *desplazamiento* de puntos sucesivos a lo largo de la viga cuando ésta está sometida a la carga unitaria colocada en la conexión mencionada arriba. En general, es aconsejable usar el método de la viga conjugada para los cálculos. Divida cada valor del desplazamiento por el desplazamiento determinado en el punto en que actúa la carga unitaria. Aplicando este factor de escala, los valores resultantes son las ordenadas de la línea de influencia.

Ejemplo 9–14

Dibuje la línea de influencia para la reacción vertical en A para la viga en la figura 9–27*a*. EI es constante. Indique sus valores numéricos cada 6 ft.



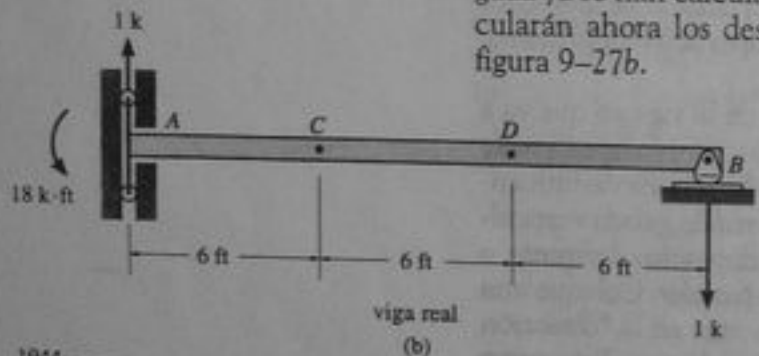
(a)

Solución

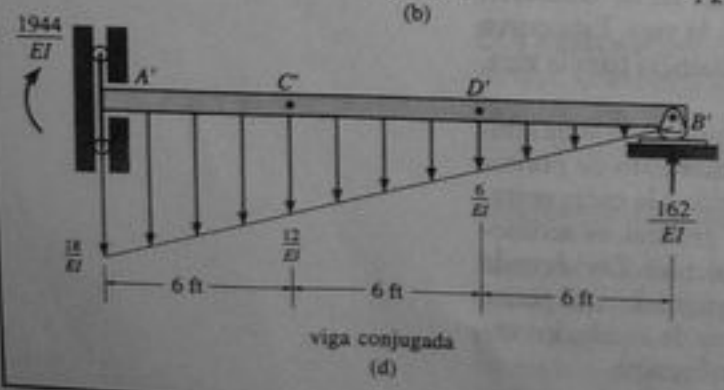
La capacidad de la viga de resistir la reacción A_y se cancela. Esto se logra por medio de un rodillo vertical, como el que se muestra en la figura 9–27*b*. Aplicando una carga unitaria vertical en A se obtiene la forma de la línea de influencia mostrada en la figura 9–27*c*.

Las reacciones en A y B sobre la "viga real" al someterla a la carga unitaria en A, se muestran en la figura 9–27*b*. La correspondiente viga conjugada se muestra en la figura 9–27*d*. Note que el soporte en A' sigue siendo el *mismo* que se utiliza para A en la figura 9–27*b*. Esto se debe a que un rodillo vertical en la viga conjugada soporta un momento pero no una fuerza cortante, correspondiente a un desplazamiento pero sin pendiente en A en la viga real, figura 9–27*c*. Las reacciones en los soportes de la viga conjugada ya se han calculado y se muestran en la figura 9–27*d*. Se calcularán ahora los desplazamientos de puntos sobre la viga real, figura 9–27*b*.

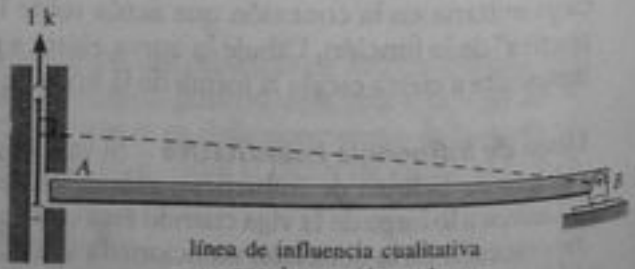
Fig. 9–27



viga real
(b)



viga conjugada
(d)



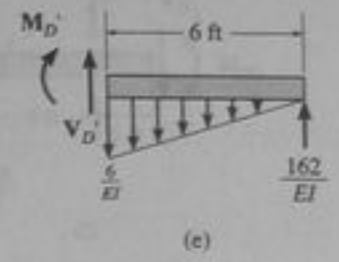
línea de influencia cualitativa para la reacción en A
(c)

Para B', como no hay momento en la viga conjugada en B', figura 9–27*d*, se tiene

$$\Delta_B = M_{B'} = 0$$

Para D', figura 9–27*e*:

$$\Sigma M_{D'} = 0; \quad \Delta_D = M_{D'} = \frac{162}{EI}(6) - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{EI}\right)(6)(2) = \frac{936}{EI}$$



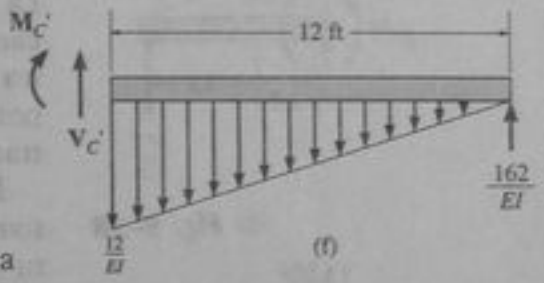
(e)

Para C', figura 9–27*f*:

$$\Sigma M_{C'} = 0; \quad \Delta_C = M_{C'} = \frac{162}{EI}(12) - \frac{1}{2}\left(\frac{12}{EI}\right)(12)(4) = \frac{1656}{EI}$$

Para A', figura 9–27*d*:

$$\Delta_A = M_{A'} = \frac{1944}{EI}$$

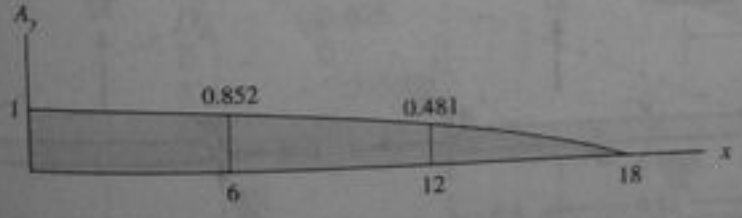


(f)

Como una carga vertical de 1 k que actúa en la viga en la figura 9–27*b* en A ocasiona una reacción vertical en A de 1 k, el desplazamiento en A, $\Delta_A = 1944/EI$, deberá corresponder a un valor numérico de 1 para la ordenada en A de la línea de influencia. Así, dividiendo los otros desplazamientos calculados entre este factor, obtenemos

x	A_y
A	1
C	0.852
D	0.481
B	0

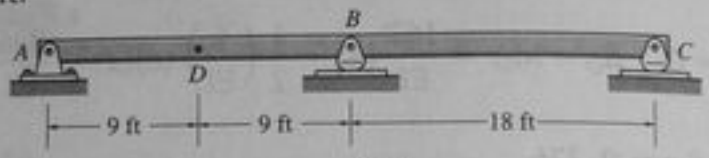
La gráfica de esos valores da la línea de influencia mostrada en la figura 9–27*g*.



Línea de influencia cuantitativa para la reacción en A
(g)

Ejemplo 9–15

Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en D de la viga en la figura 9–28*a*. EI es constante. Indique sus valores numéricos cada 9 ft.



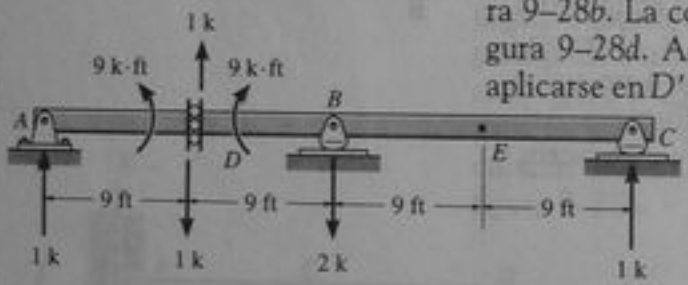
(a)

Solución

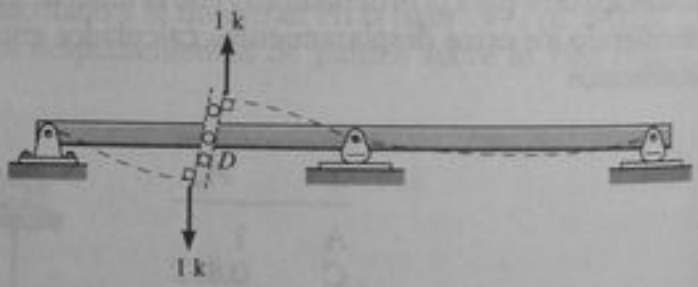
La capacidad de la viga de resistir una fuerza cortante en D se cancela. Esto se logra usando el dispositivo de rodillo que se muestra en la figura 9–28*b*. Si aplicamos una fuerza cortante unitaria positiva en D, obtenemos la forma de la línea de influencia mostrada en la figura 9–28*c*.

Las reacciones en los soportes A, B y C sobre la "viga real" al someterla a la fuerza cortante unitaria en D se muestran en la figura 9–28*b*. La correspondiente viga conjugada se muestra en la figura 9–28*d*. Aquí, un momento concentrado externo $M_{D'}$ debe aplicarse en D' para generar un *momento interno* diferente justo a la

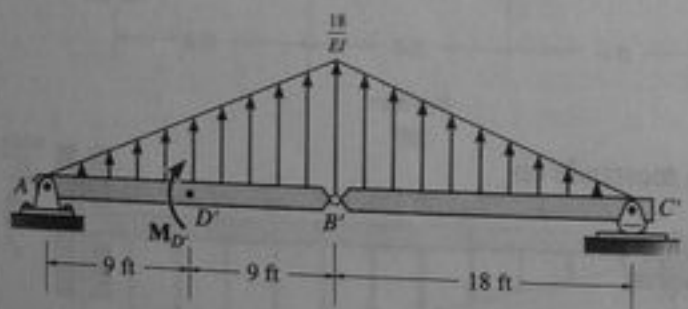
Fig. 9–28



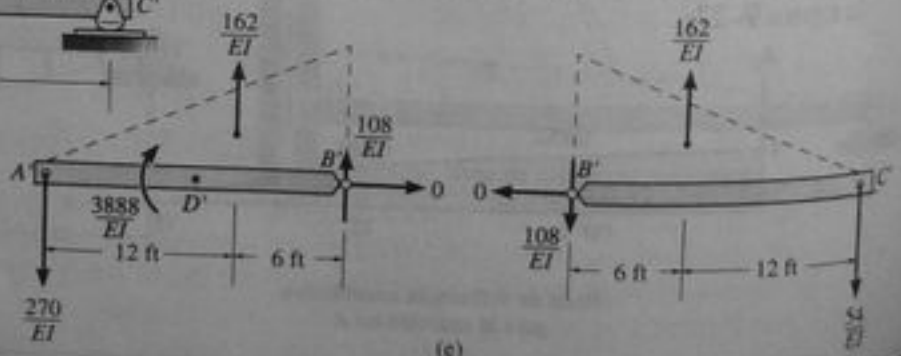
viga real
(b)



línea de influencia cualitativa para la fuerza cortante en D
(c)

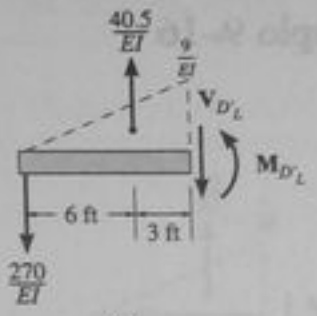


viga conjugada
(d)



(e)

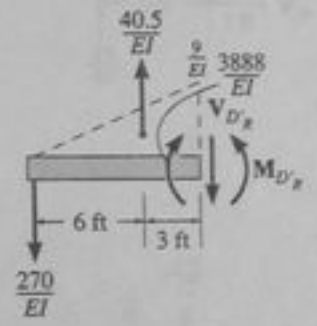
izquierda y justo a la derecha de D'. Esos momentos internos corresponden a los desplazamientos justo a la izquierda y justo a la derecha de D sobre la viga real, figura 9–28c. Las reacciones en los soportes A', B' y C' y el momento externo $\mathbf{M}_{D'}$ sobre la viga conjugada ya han sido calculados y se muestran en la figura 9–28e. Verifique los cálculos. Como hay una *discontinuidad* del momento en D', se calcularán los momentos internos justo a la izquierda y justo a la derecha de D'. Justo a la izquierda de D', figura 9–28f, tenemos



(f)

$$\Sigma M_{D'_L} = 0; \quad \Delta_{D_L} = M_{D'_L} = \frac{40.5}{EI}(3) - \frac{270}{EI}(9) = -\frac{2308.5}{EI}$$

Justo a la derecha de D', figura 9–28g, tenemos



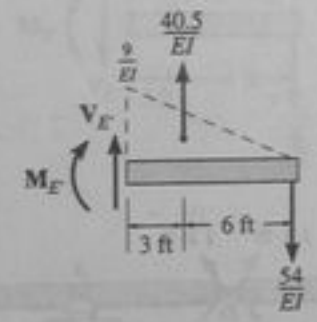
(g)

$$\Sigma M_{D'_R} = 0; \; \Delta_{D_R} = M_{D'_R} = \frac{40.5}{EI}(3) - \frac{270}{EI}(9) + \frac{3888}{EI} = \frac{1579.5}{EI}$$

De la figura 9–28e,

$$\Delta_A = M_{A'} = 0 \qquad \Delta_B = M_{B'} = 0 \qquad \Delta_C = M_{C'} = 0$$

Para el punto E, figura 9–28b, se utiliza el método de secciones en el correspondiente punto E' de la viga conjugada, figura 9–28h, y se obtiene

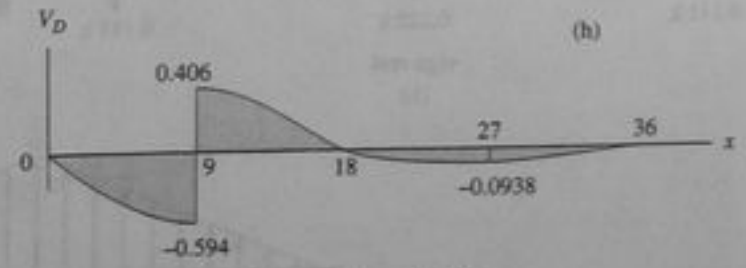


(h)

$$\Sigma M_{E'} = 0; \qquad \Delta_E = M_{E'} = \frac{40.5}{EI}(3) - \frac{54}{EI}(9) = -\frac{364.5}{EI}$$

Las ordenadas de la línea de influencia se obtienen dividiendo cada uno de los valores anteriores entre $M_{D'} = 3888/EI$. Tenemos

x	V_D
A	0
D_L	−0.594
D_R	0.406
B	0
E	−0.0938
C	0

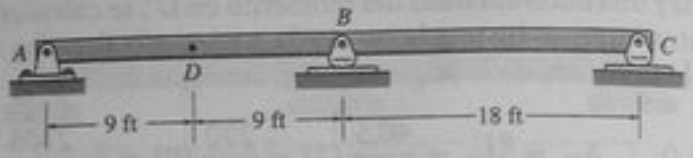


Línea de influencia cuantitativa para la fuerza cortante en D
(i)

La gráfica de esos valores da la línea de influencia mostrada en la figura 9–28i.

Ejemplo 9–16

Dibuje la línea de influencia para el momento flexionante en D para la viga en la figura 9–29*a*. *EI* es constante. Indique sus valores cada 9 ft.



(a)

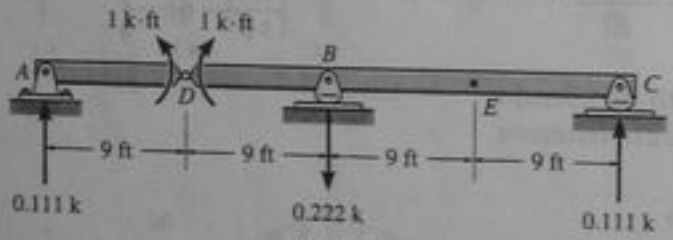
Fig. 9–29

Solución

Se inserta una articulación en *D* para cancelar la capacidad de la viga para resistir momentos en este punto, figura 9–29*b*. Se aplican momentos concentrados unitarios positivos en *D* y se obtiene la línea de influencia mostrada en la figura 9–29*c*.

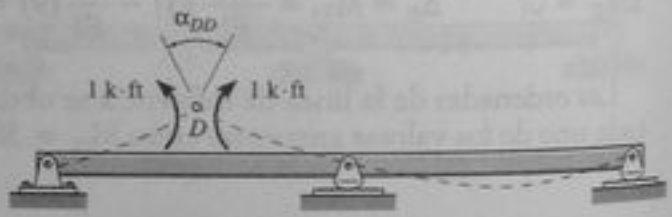
Las reacciones en *A*, *B* y *C* sobre la "viga real" al someterla a los momentos concentrados unitarios en *D* se muestran en la figura 9–29*b*. La correspondiente viga conjugada y sus reacciones se muestran en la figura 9–29*d*. Se sugiere que se verifiquen las reacciones en ambos casos. De la figura 9–29*d*, note que

$$\Delta_A = M_{A'} = 0 \qquad \Delta_B = M_{B'} = 0 \qquad \Delta_C = M_{C'} = 0$$



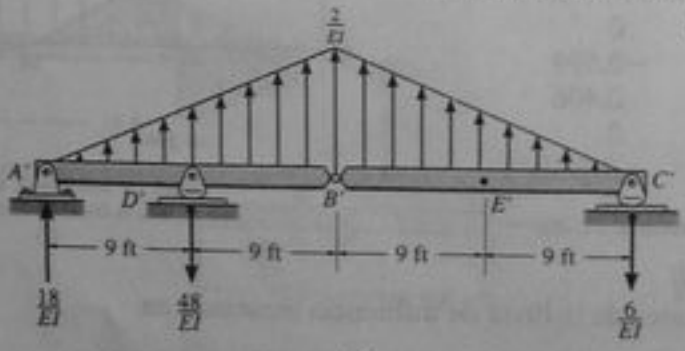
viga real

(b)



línea de influencia cualitativa para el momento en *D*

(c)



(d)

Para el punto D', figura 9–29*e*:

$$\Sigma M_{D'} = 0; \quad \Delta_D = M_{D'} = \frac{4.5}{EI}(3) + \frac{18}{EI}(9) = \frac{175.5}{EI}$$

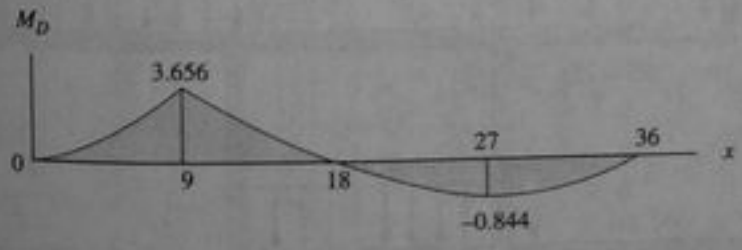
Para el punto E', figura 9–29*f*:

$$\Sigma M_{E'} = 0; \quad \Delta_E = M_{E'} = \frac{4.5}{EI}(3) - \frac{6}{EI}(9) = -\frac{40.5}{EI}$$

El desplazamiento angular α_{DD} en D de la "viga real" en la figura 9–29*c* se define por la reacción en D' sobre la viga conjugada. Los valores anteriores se dividen entre este factor, $D'_y = 48/EI$, para obtener las ordenadas de la línea de influencia, esto es,

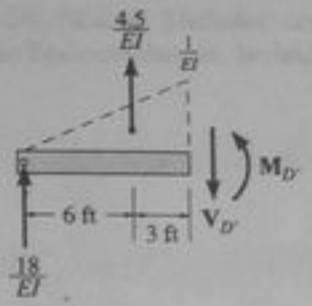
x	M_D
A	0
D	3.656
B	0
E	−0.844
C	0

La gráfica de esos valores da la línea de influencia mostrada en la figura 9–29*g*.

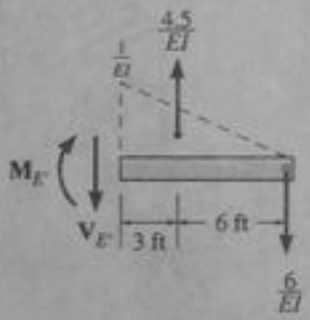


línea de influencia cuantitativa para el momento en D

(g)



(e)



(f)

9.12 Líneas de influencia cualitativas para marcos

El principio de Müller-Breslau proporciona un método rápido y de gran valor para establecer la forma general de la línea de influencia para marcos de edificios. Una vez conocida la *forma* de la línea de influencia, uno puede inmediatamente especificar la *localización* de las cargas vivas de manera que generen la influencia máxima de la función (reacción, fuerza cortante o momento) en el marco. Por ejemplo, la forma de la línea de influencia para el momento *positivo* en el centro I de la trabe FG del marco en la figura 9–30*a*, se muestra con líneas punteadas. Entonces, para generar el momento positivo más grande en I, se colocarían cargas uniformes sólo en las trabes AB, CD y FG. Con el marco cargado de esta manera, figura 9–30*b*, podría efectuarse un análisis indeterminado del marco para determinar el momento crítico en I.

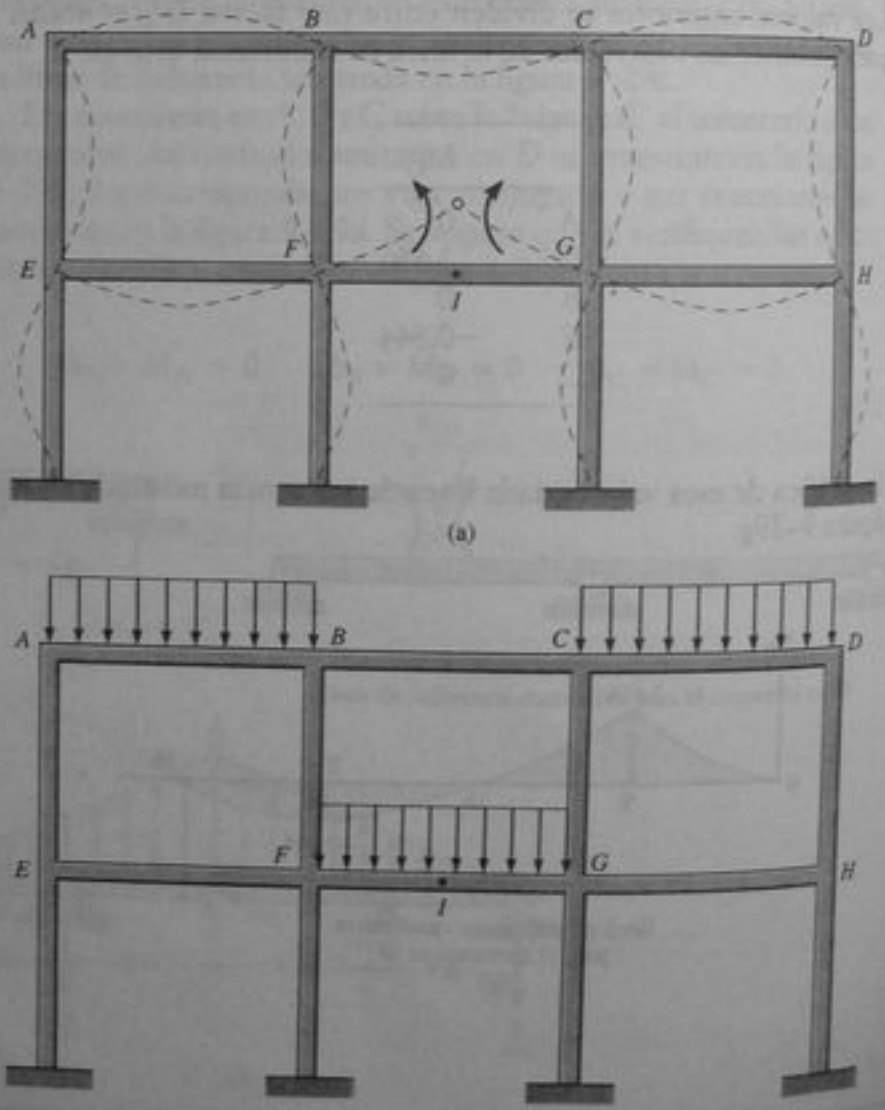


Fig. 9–30

BIBLIOGRAFÍA

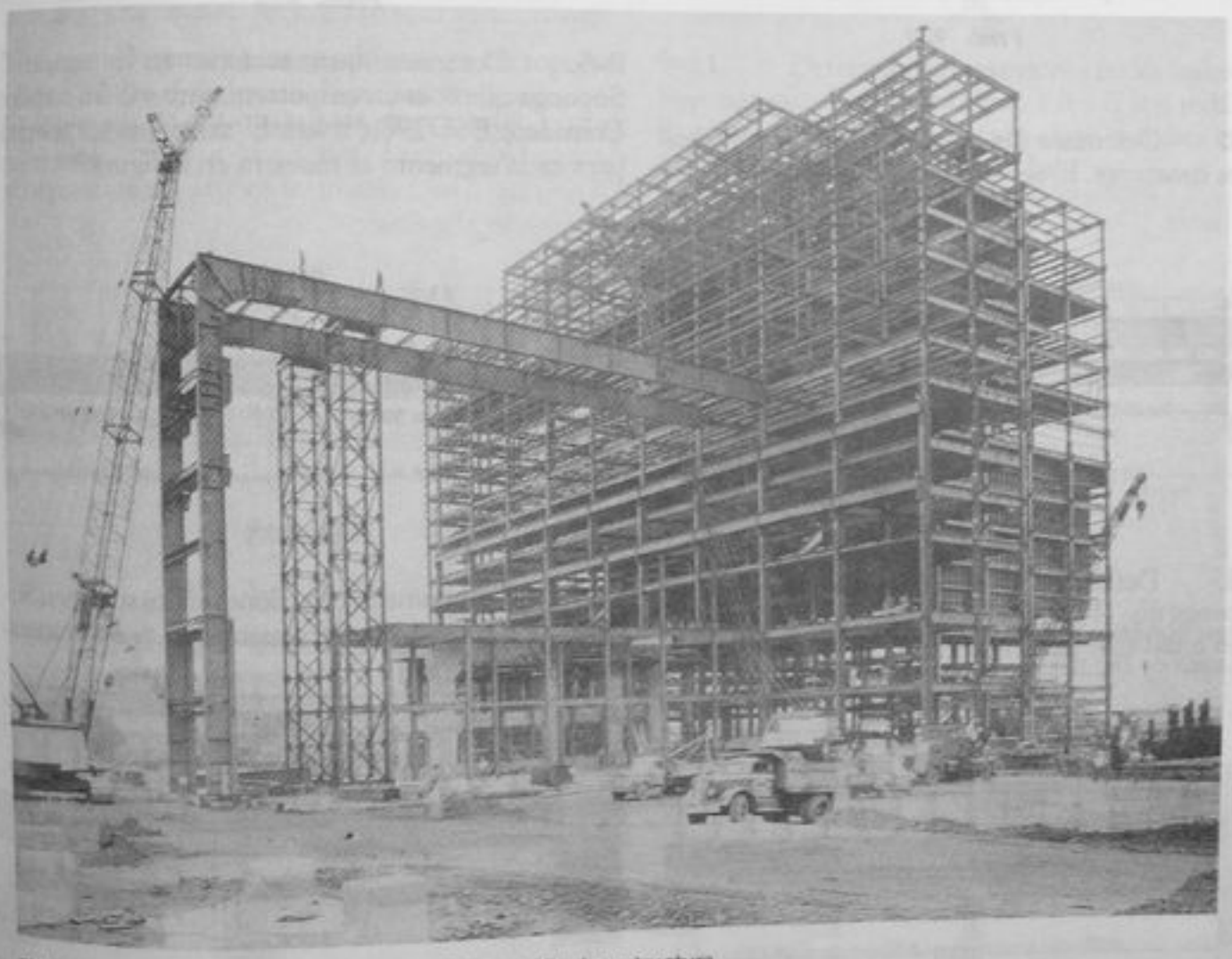
Clapeyron, B. P. E., "Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés," *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, Paris 45, 1857, 1076–1080.

Maxwell, J. C., "On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces," *Philosophical Magazine*, (4), 27, 1864.

Maxwell, J. C. "On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames," *Philosophical Magazine*, (4), 27, 1864.

Mohr, O., "Beitrag zur Theorie des Fachwerks," *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 20, 1874.

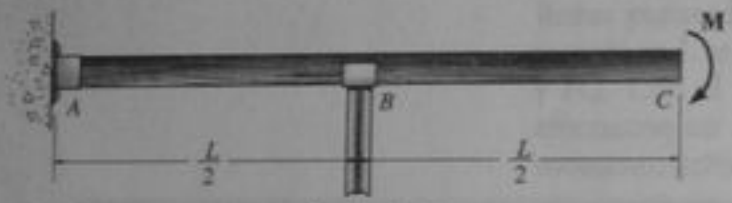
Muller-Breslau, H. F. B., *Die Neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*. Berlin, 1886.



Philadelphia Electric Generating Plant, Eddystone, Pa. La estructura saliente debe soportar una viga carril que fue diseñada usando líneas de influencia.

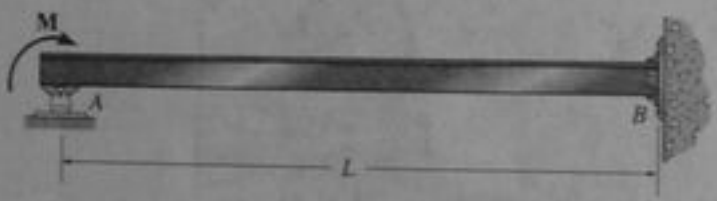
PROBLEMAS

9–1. Determine las reacciones en los soportes y dibuje el diagrama de momentos flexionantes para la viga. Suponga que el soporte en A es un empotramiento y B un rodillo. EI es constante.



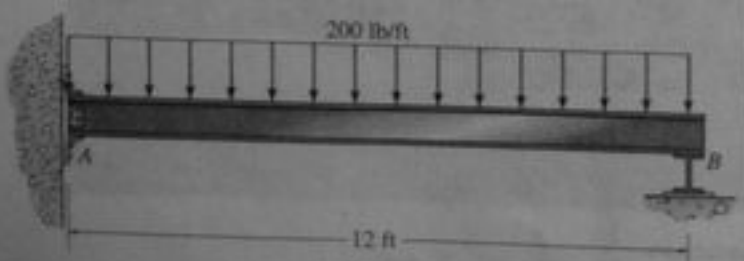
Prob. 9–1

9–2. Determine las reacciones en los soportes. EI es constante. El soporte B es un empotramiento.



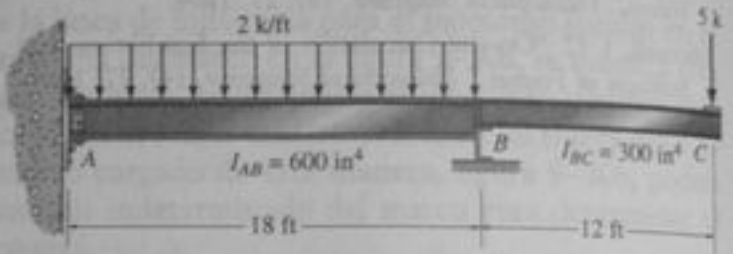
Prob. 9–2

9–3. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que el soporte en A es un empotramiento y B un rodillo. EI es constante.



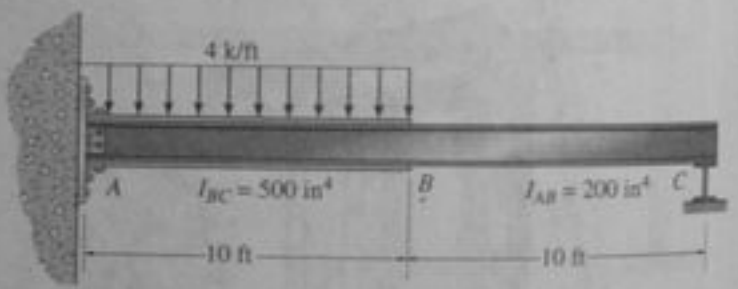
Prob. 9–3

***9–4.** Determine las reacciones en los soportes. Suponga que el soporte en A es un empotramiento y B un rodillo. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. El momento de inercia para cada segmento se muestra en la figura.



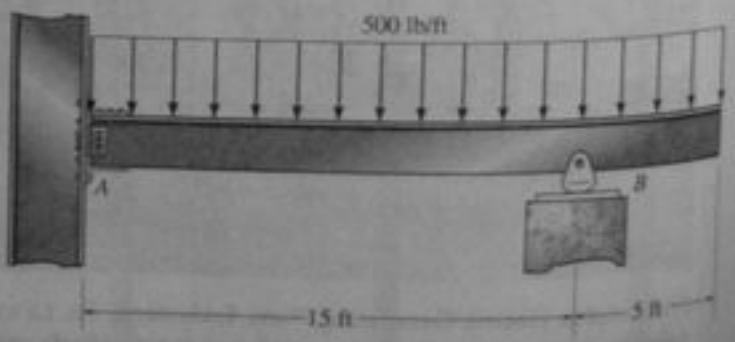
Prob. 9–4

9–5. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A es un empotramiento y C un rodillo. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. El momento de inercia para cada segmento se muestra en la figura.



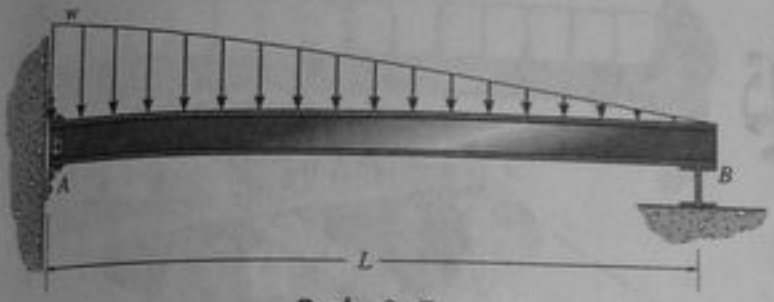
Prob. 9–5

9–6. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A es un empotramiento. EI es constante.



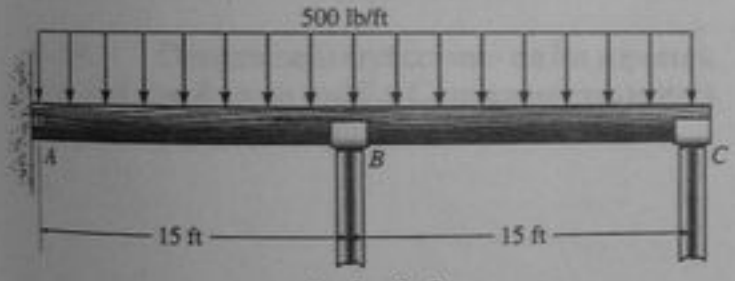
Prob. 9–6

9–7. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que el soporte A es un empotramiento y B un rodillo.



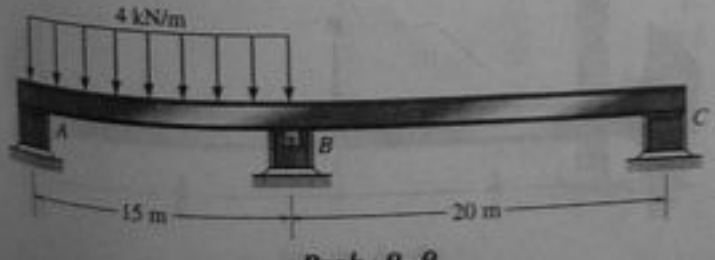
Prob. 9–7

***9–8.** Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momento flexionante. Suponga que A es un pasador y B y C rodillos. *EI* es constante.



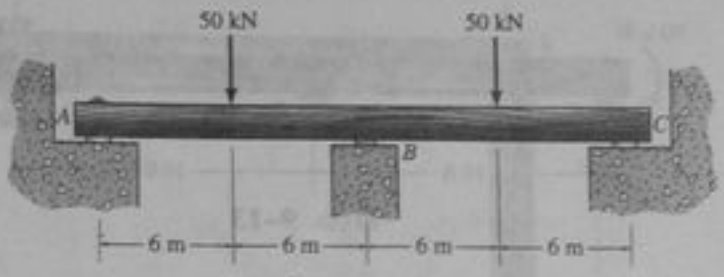
Prob. 9–8

9–9. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que B es un pasador y A y C rodillos. *EI* es constante.



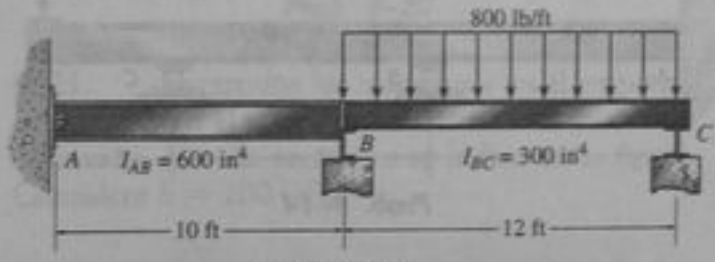
Prob. 9–9

9–10. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A es un pasador y B y C rodillos. *EI* es constante.



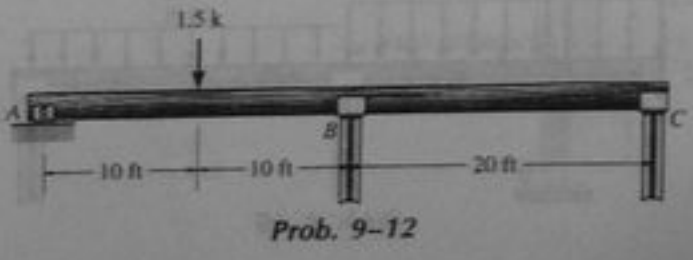
Prob. 9–10

9–11. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A está articulado y B y C son rodillos. El momento de inercia de cada claro se indica en la figura. Considere $E = 29(10^3)$ ksi.



Prob. 9–11

***9–12.** Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A es un pasador y B y C rodillos. *EI* es constante.

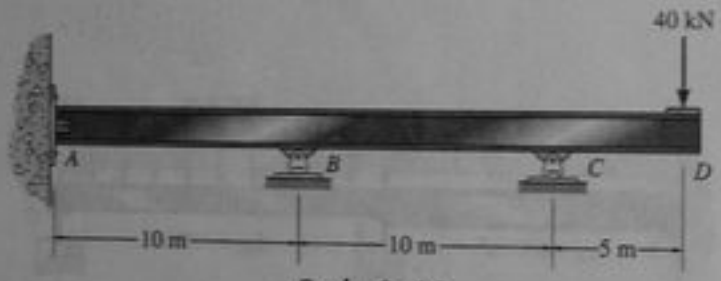


Prob. 9–12

9–13. Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momentos de la viga. El soporte en B se asienta 0.2 ft. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 600$ in^4.

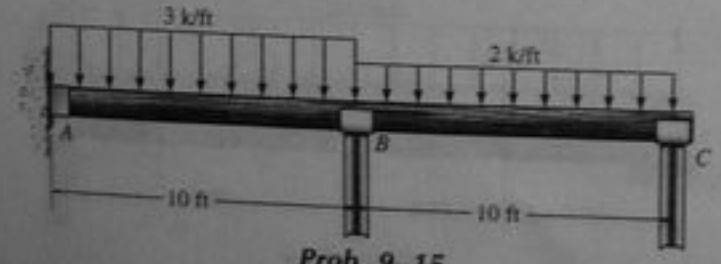
Prob. 9–13

9–14. Determine el momento interno que actúa en la viga en los soportes B y C. El muro en A se mueve hacia arriba 30 mm. Suponga que el soporte en A es un pasador. Considere $E = 200$ GPa, $I = 90(10^6)$ mm^4.



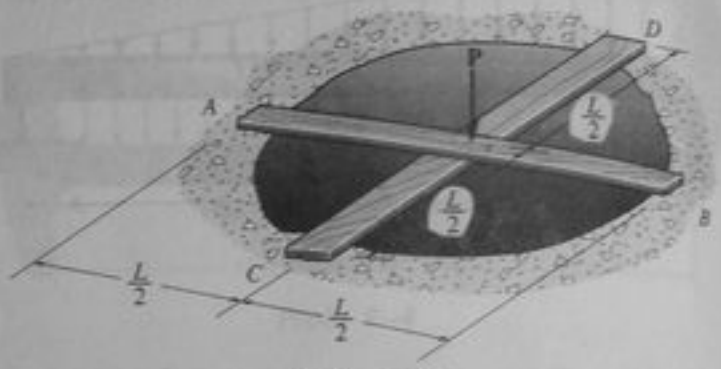
Prob. 9–14

9–15. Dibuje el diagrama de momentos de la viga. EI es constante. Suponga que el soporte en A es un empotramiento y B y C son rodillos.



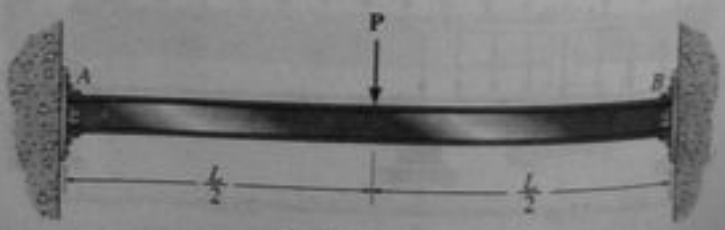
Prob. 9–15

***9–16.** Dos tablones de igual EI y longitud L se cruzan perpendicularmente entre sí como se muestra en la figura. Determine las reacciones verticales en los soportes. Suponga que los tablones apenas se tocan antes de aplicarse la carga **P**.



Prob. 9–16

9–17. Determine las reacciones en los empotramientos. EI es constante.

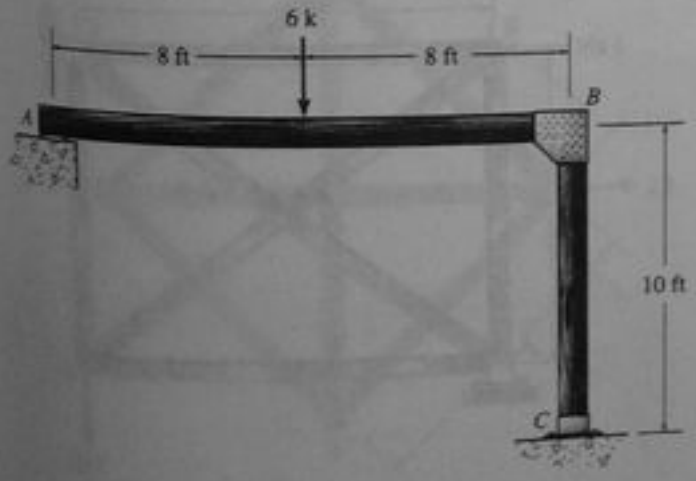


Prob. 9–17

9–18. Dibuje el diagrama de momentos para la viga doblemente empotrada. *EI* es constante.

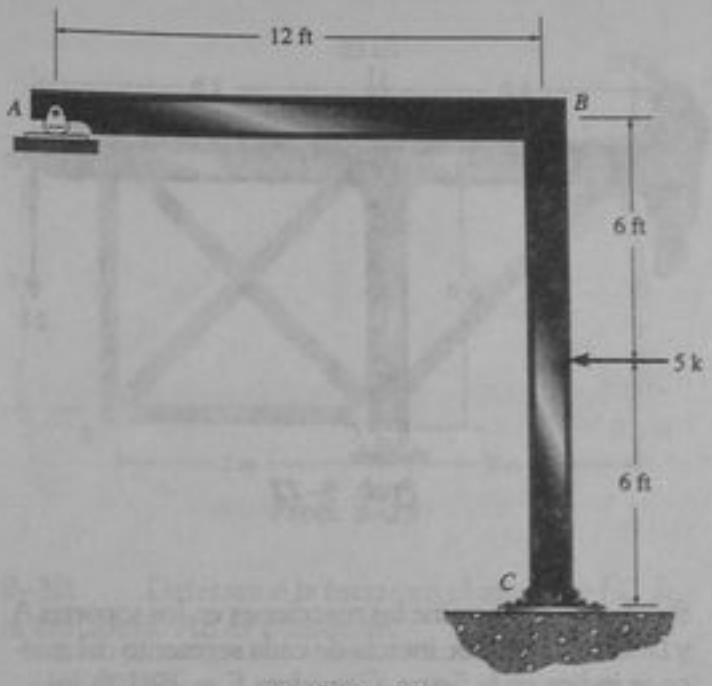
Prob. 9–18

9–19. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A es un rodillo, C un empotramiento y B un nudo rígido. *EI* es constante.



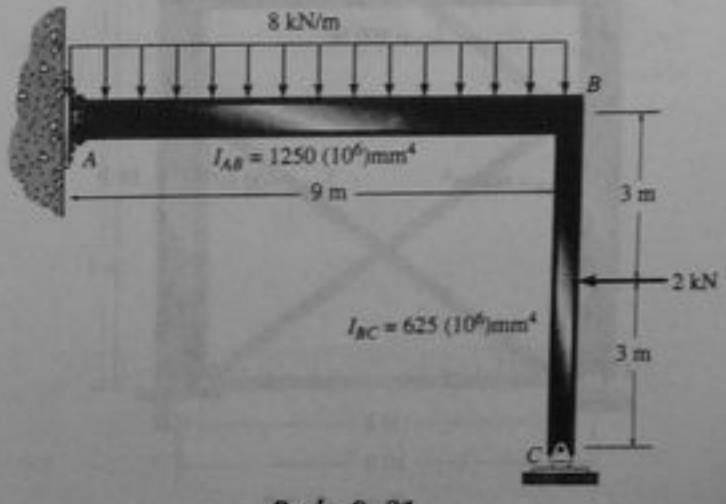
Prob. 9–19

***9–20.** Determine las reacciones en los soportes. Suponga que C es un empotramiento. *EI* es constante.



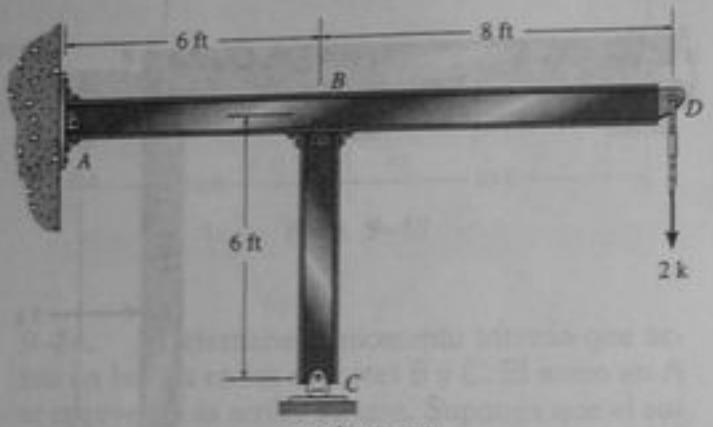
Prob. 9–20

9–21. Determine las reacciones en el empotramiento A y en el apoyo de balancín C. El momento de inercia de cada segmento se indica en la figura. Considere $E = 200$ GPa.



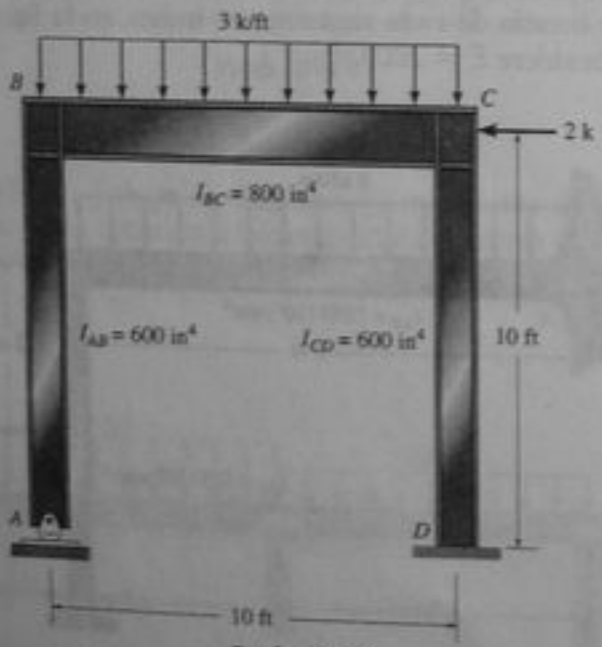
Prob. 9–21

9–22. Determine las reacciones en los soportes cuando el soporte en C se mueve hacia arriba 0.15 in. Suponga que A es un empotramiento y B es un nudo rígido. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 600$ in^4.



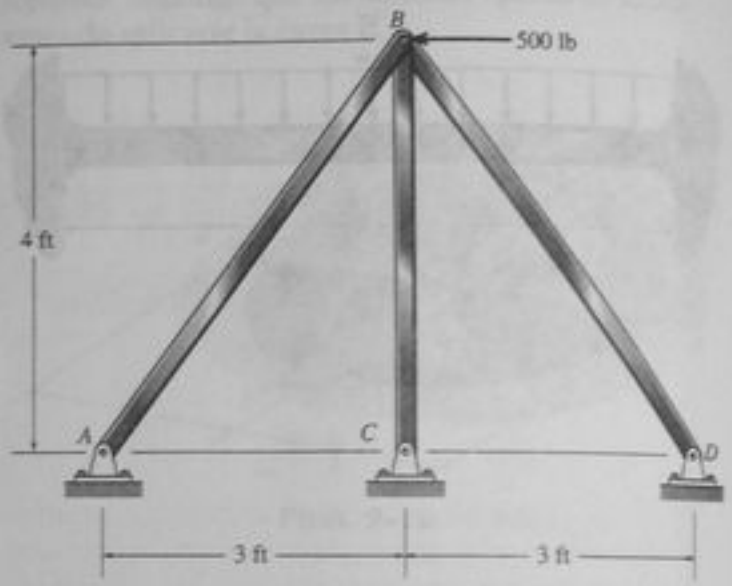
Prob. 9–22

9–23. Determine las reacciones en los soportes A y D. El momento de inercia de cada segmento del marco se indica en la figura. Considere $E = 29(10^3)$ ksi.



Prob. 9–23

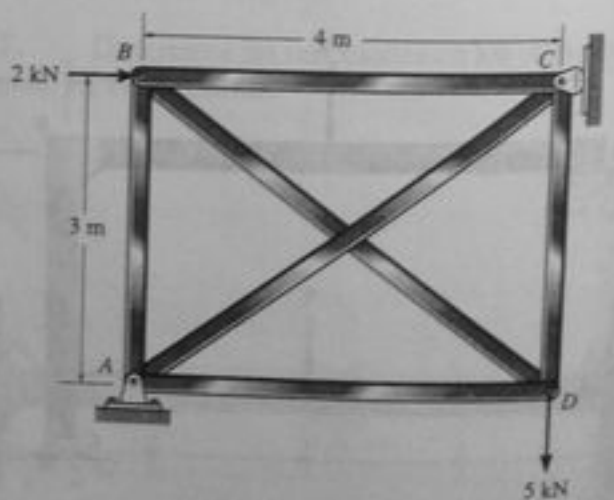
***9–24.** Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. AE es constante.



Prob. 9–24

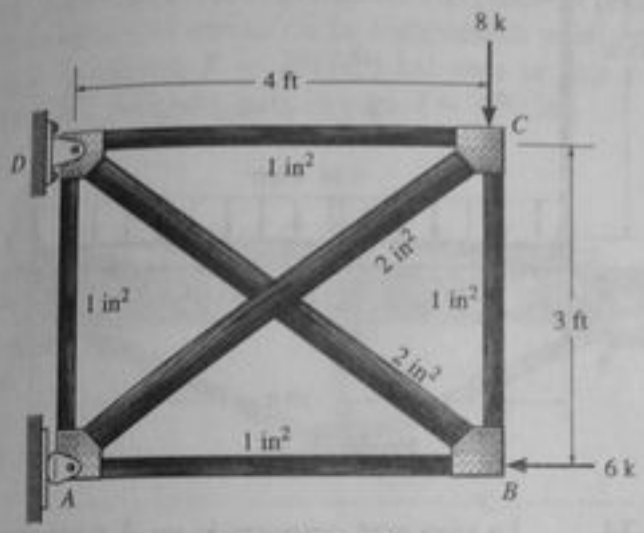
9–25. Determine la fuerza en la barra BC. AE es constante.

9–26. Determine la fuerza en la barra BD. AE es constante.



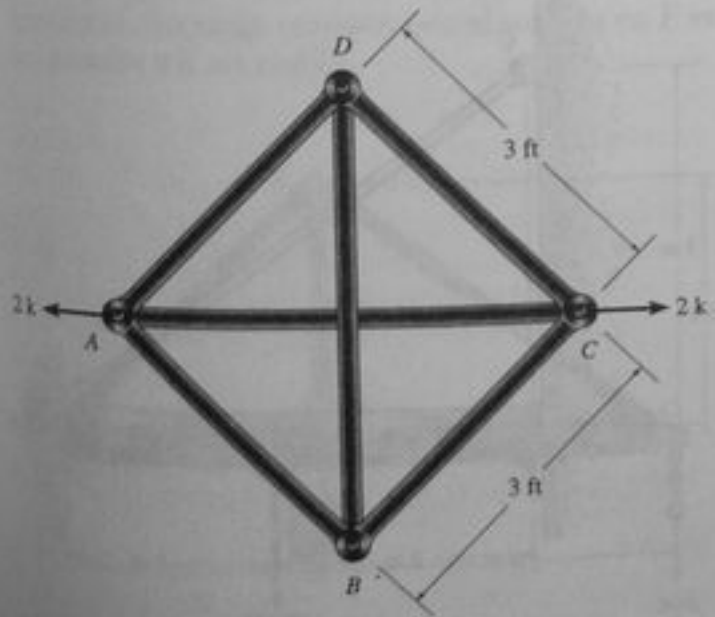
Probs. 9–25/9–26

9–27. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. El área transversal de cada miembro se indica en la figura. $E = 29(10^3)$ ksi. Suponga que los miembros están articulados en sus extremos.



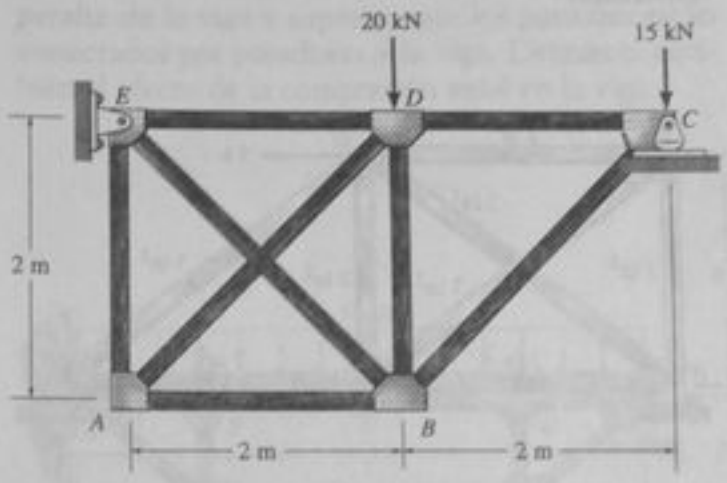
Prob. 9–27

***9–28.** Determine la fuerza en cada miembro de la armadura conectada por pasadores. AE es constante.



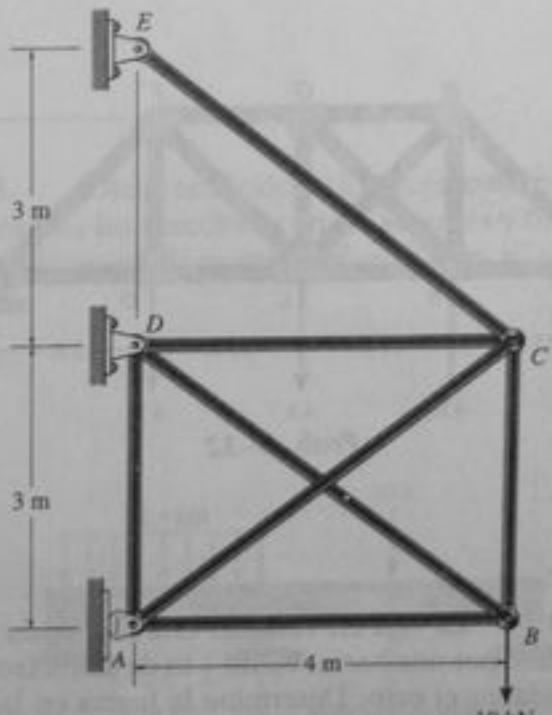
Prob. 9–28

9–29. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. AE es constante. Suponga que los miembros están conectados por pasadores en sus extremos.



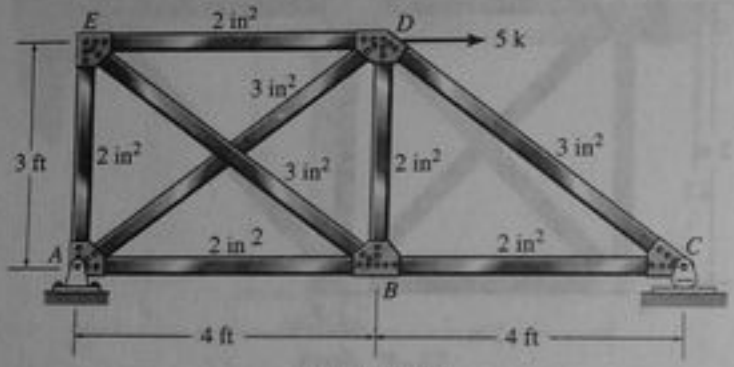
Prob. 9–29

9–30. Determine la fuerza en el miembro EC de la armadura. AE es constante.



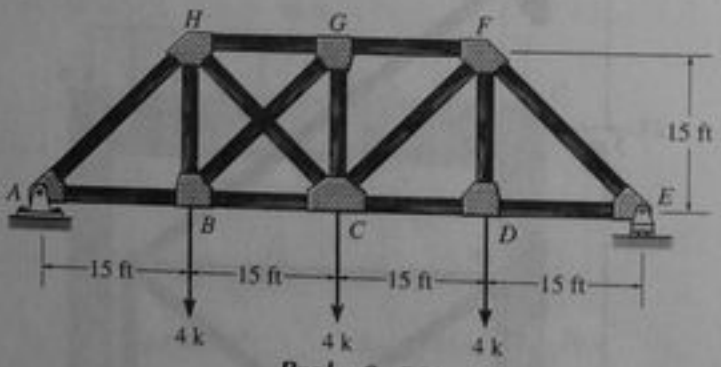
Prob. 9–30

9–31. Determine la fuerza en el miembro *AD* de la armadura. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. El área transversal de cada miembro se muestra en la figura. Suponga que los miembros están articulados en sus extremos.



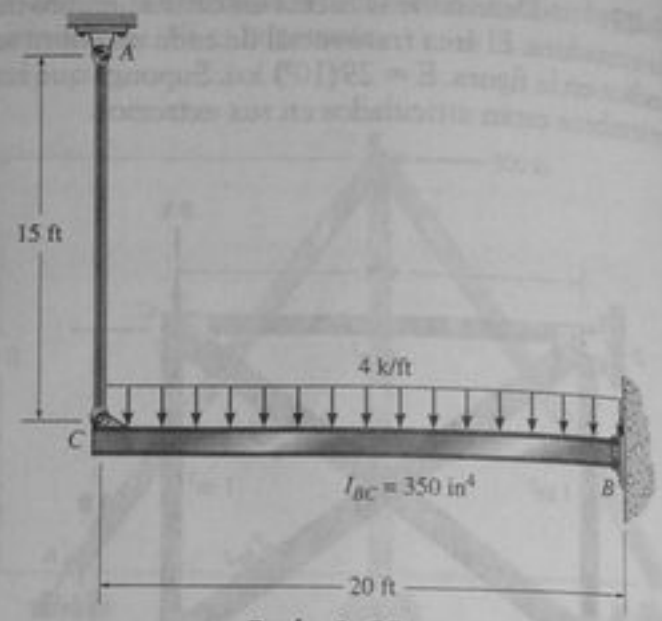
Prob. 9–31

***9–32.** Determine la fuerza en el miembro *BG*. *AE* es constante. Suponga que los miembros están articulados en sus extremos.



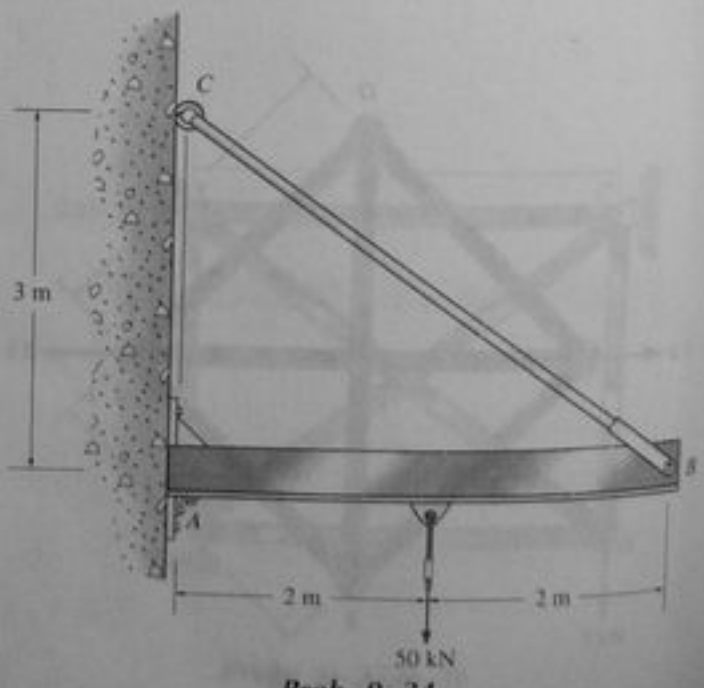
Prob. 9–32

9–33. La viga en voladizo está soportada en un extremo por una barra *AC* de $\frac{1}{2}$ in de diámetro y empotrada en el otro. Determine la fuerza en la barra debido a una carga uniforme de 4 k/ft. $E = 29(10^3)$ ksi para la barra y para la viga.



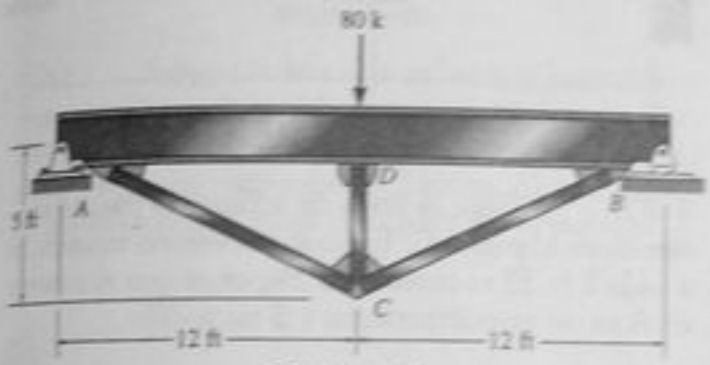
Prob. 9–33

9–34. La viga está empotrada en *A* y soportada en su otro extremo por un tirante *BC*. Determine las reacciones en *A* y la fuerza en el tirante. Considere $E = 200$ GPa, $I = 55(10^6)$ mm⁴ para la viga y $A = 600$ mm² para el tirante. Suponga que el tirante tiene 5 m de longitud y desprecie el espesor de la viga y su deformación por carga axial.



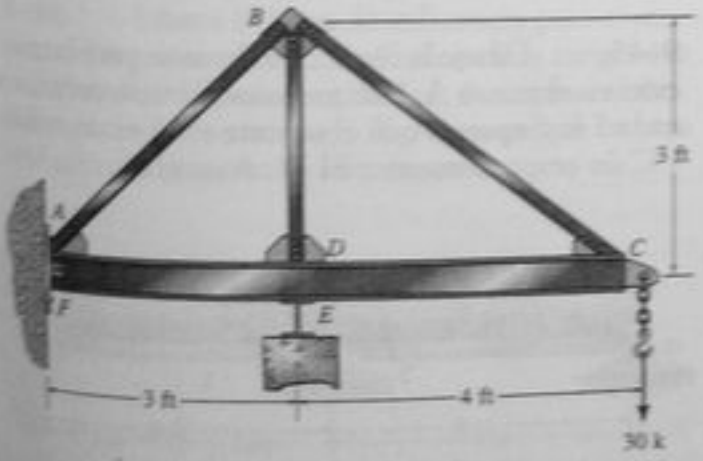
Prob. 9–34

9–35. La viga armada soporta una fuerza concentrada de 80 k en su centro. Determine la fuerza en cada uno de los tres puntales y dibuje el diagrama de momento flexionante para la viga. Cada puntal tiene un área transversal de 2 in^2. Suponga que están articulados en sus extremos. Desprecie el peralte de la viga y el efecto de la compresión axial en la viga. Considere $E = 29(10^3)$ ksi para la viga y los puntales. Además, para la viga, $I = 400$ in^4.



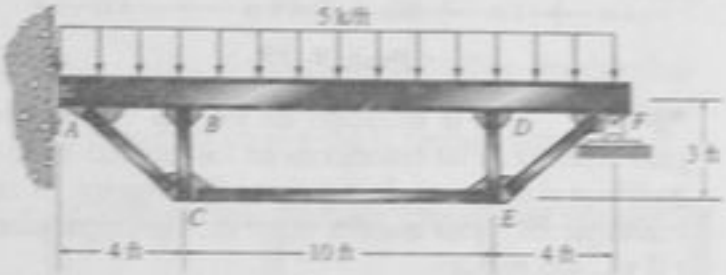
Prob. 9–35

***9–36.** Determine la fuerza en los miembros *AB*, *BC* y *BD* que se usan en conjunto con la viga para soportar la carga de 30 k. La viga tiene un momento de inercia $I = 600$ in^4, los miembros *AB* y *BC* tienen cada uno un área transversal de 2 in^2 y *BD* un área transversal de 4 in^2. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. Desprecie el peralte de la viga y su compresión axial; suponga que los miembros están conectados por pasadores. Suponga también que el soporte en *F* es un pasador y *E* un rodillo.



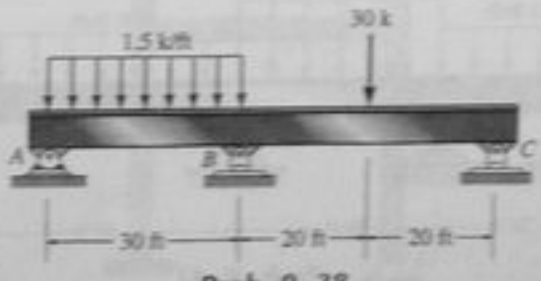
Prob. 9–36

9–37. La viga armada se usa para soportar una carga uniforme de 5 k/ft. Determine las fuerzas desarrolladas en cada uno de los cinco puntales. El área transversal de cada puntal es 3 in^2 y para la viga, $I = 600$ in^4. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. Desprecie el peralte de la viga y suponga que los puntales están conectados por pasadores a la viga. Desprecie también el efecto de la compresión axial en la viga.



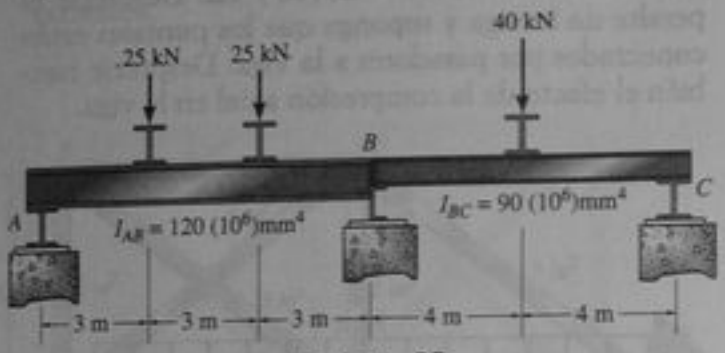
Prob. 9–37

9–38. Use la ecuación de los tres momentos para determinar las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momento flexionante. *EI* es constante.



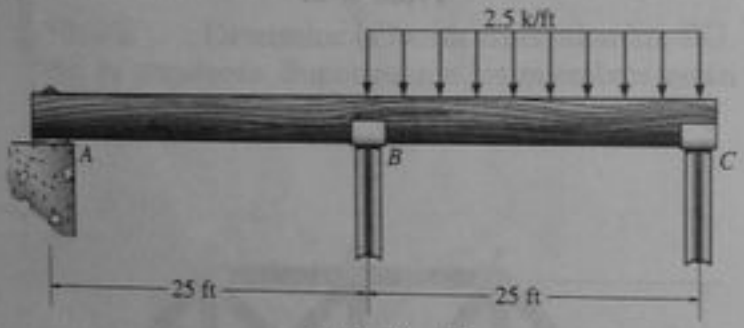
Prob. 9–38

9–39. Use la ecuación de los tres momentos para determinar las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momento flexionante. Suponga que A y C son rodillos y B un pasador.



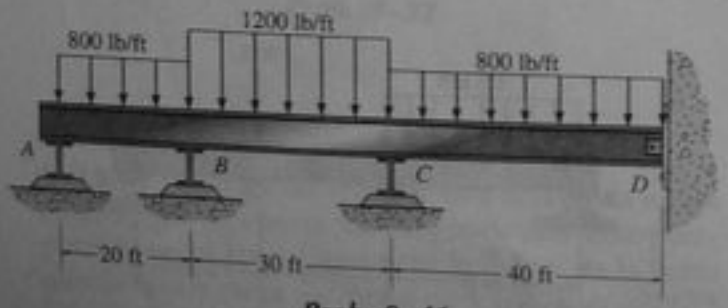
Prob. 9–39

***9–40.** Use la ecuación de los tres momentos para determinar las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momento flexionante. EI es constante. Suponga que el soporte en A es un pasador y B y C son rodillos.



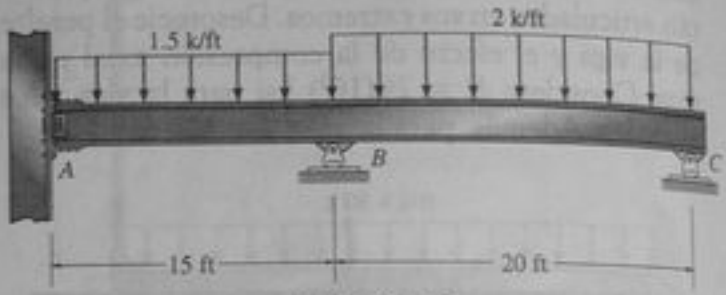
Prob. 9–40

9–41. Use la ecuación de los tres momentos para determinar las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momento flexionante. EI es constante. Suponga que los soportes en A, B y C son rodillos y D un pasador.



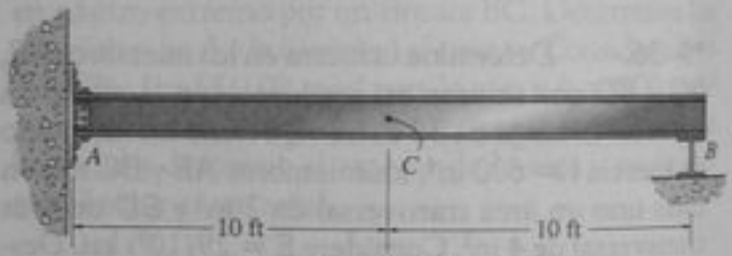
Prob. 9–41

9–42. Use la ecuación de los tres momentos para determinar las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momento flexionante. EI es constante. Suponga que A es un empotramiento.



Prob. 9–42

9–43. Dibuje la línea de influencia para el momento en el punto C. Indique sus valores numéricos a cada 5 ft. EI es constante. Suponga que el soporte en A es un empotramiento y B un rodillo.



Prob. 9–43

***9–44.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en el punto B. Indique sus valores numéricos a cada 5 ft. Suponga que el soporte en A es un rodillo y C un empotramiento. EI es constante.

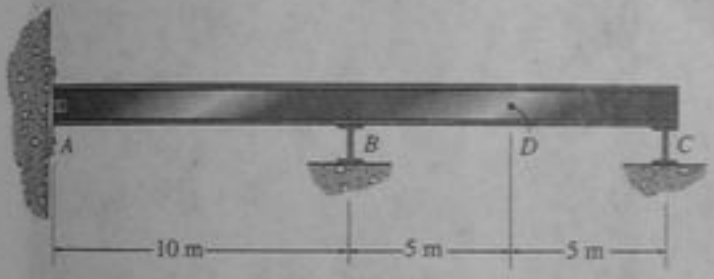
9–45. Dibuje la línea de influencia para la reacción en el punto A. Indique sus valores numéricos a cada 5 ft. Suponga que el soporte en A es un rodillo y C un empotramiento. EI es constante.

Probs. 9–44/9–45

9–46. Dibuje la línea de influencia para la reacción en *B*. Indique sus valores numéricos a cada 5 ft. *EI* es constante.

Prob. 9–46

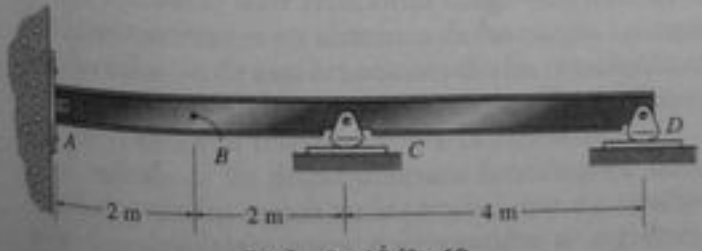
9–47. Esboce la línea de influencia para el momento en *D* con el uso del principio de Müller–Breslau. Determine el momento máximo positivo en *D* debido a una carga viva uniforme de 5 kN/m. *EI* es constante. Suponga que *A* es un pasador y *B* y *C* rodillos.



Prob. 9–47

***9–48.** Esboce la línea de influencia para la fuerza cortante en *B*. Si se coloca una carga viva uniforme de 6 kN/m sobre la viga, determine la fuerza cortante máxima positiva en *B*. Suponga que la viga está articulada en *A*. *EI* es constante.

9–49. Esboce la línea de influencia para el momento flexionante en *B*. Si se coloca una carga viva uniforme de 6 kN/m sobre la viga, determine el momento máximo positivo en *B*. Suponga que la viga está articulada en *A*. *EI* es constante.

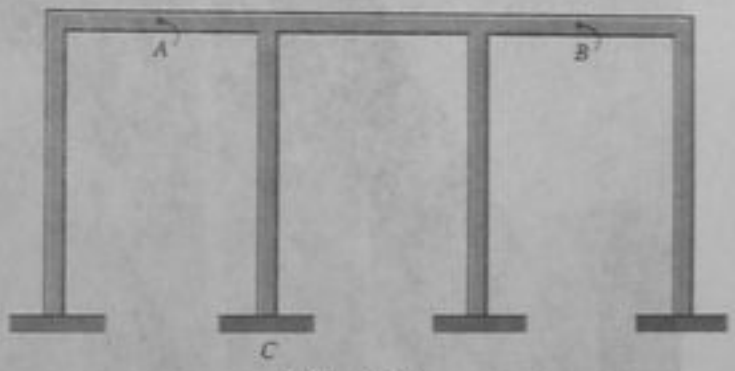


Prob. 9–48/9–49

9–50. Esboce la línea de influencia para (a) la reacción vertical en *C*, (b) el momento flexionante en *B* y (c) la fuerza cortante en *E*. En cada caso, indique en un esbozo de la viga dónde debe colocarse una carga viva uniforme distribuida para generar un valor máximo positivo de esas funciones. Suponga que la viga está empotrada en *F*.

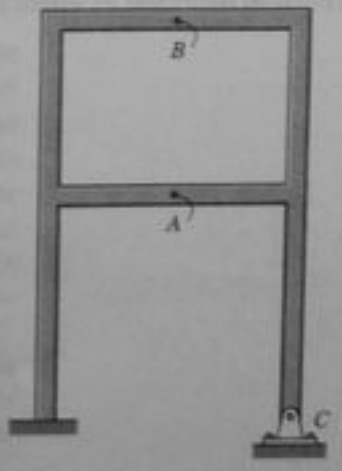
Prob. 9–50

9–51. Use el principio de Müller–Breslau para esbozar la forma general de la línea de influencia de (a) el momento en *A* y (b) la fuerza cortante en *B*.

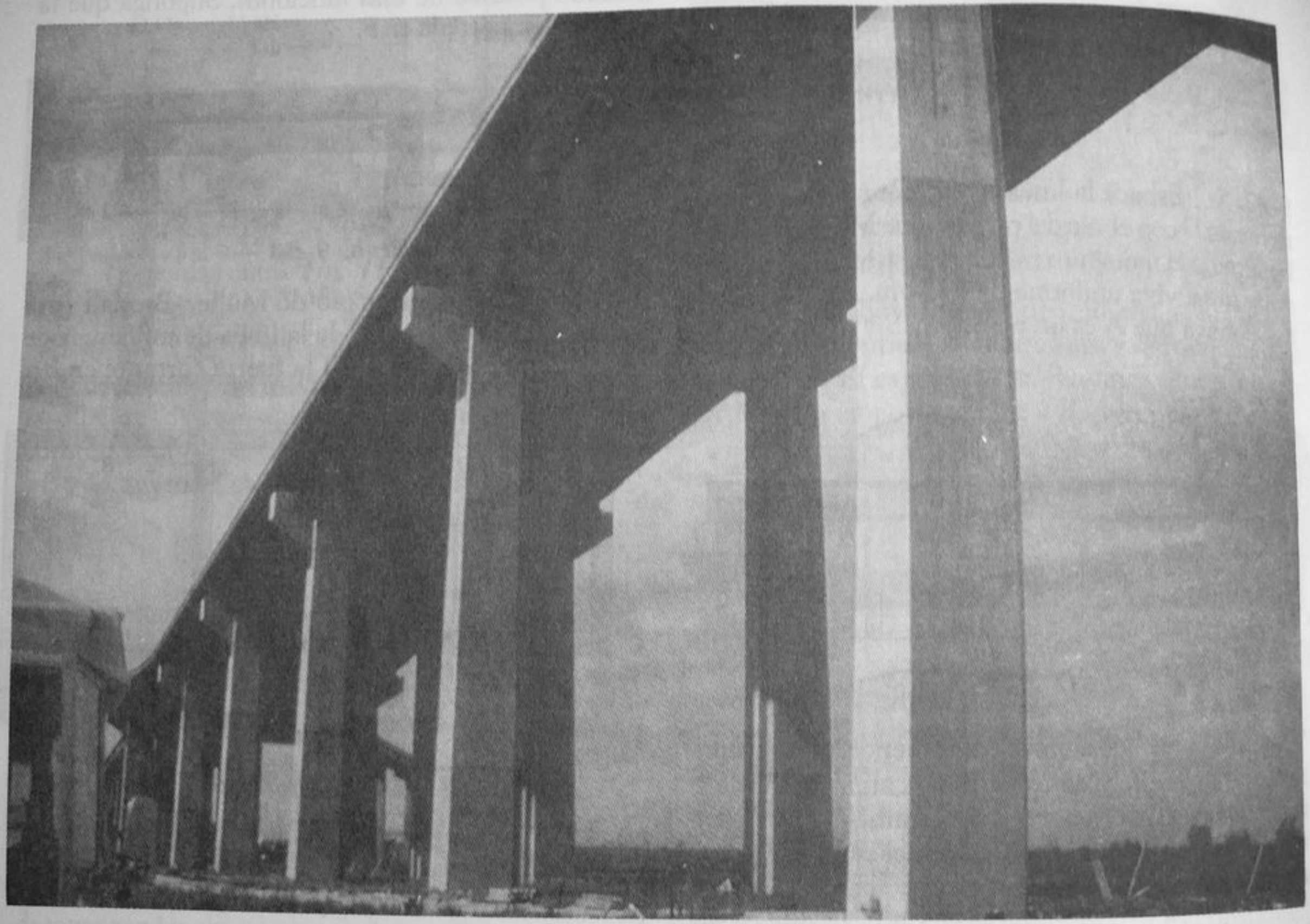


Prob. 9–51

***9–52.** Use el principio de Müller–Breslau para esbozar la forma general de la línea de influencia de (a) el momento en *A* y (b) la fuerza cortante en *B*.



Prob. 9–52



El viaducto de concreto reforzado es estáticamente indeterminado. Puede analizarse usando el método de pendiente-desviación.

10

Método de análisis de los desplazamientos: ecuaciones pendiente-desviación

En este capítulo delinearemos brevemente las ideas básicas del análisis de estructuras con el uso del método de los desplazamientos. Una vez presentados esos conceptos, desarrollaremos las ecuaciones generales de pendiente-desviación que utilizaremos para analizar vigas y marcos estáticamente indeterminados.

10.1 Método de análisis de los desplazamientos: procedimientos generales

El *método de análisis de las fuerzas* , visto en el capítulo anterior, se basó en identificar las cargas redundantes desconocidas y luego satisfacer las ecuaciones de compatibilidad en la estructura. Como esas ecuaciones contienen los desplazamientos en puntos sobre la estructura, fue necesario usar relaciones carga-desplazamiento para expresar los desplazamientos en términos de las cargas conocidas y desconocidas. La solución de esas ecuaciones dio las reacciones redundantes. Una vez obtenidas éstas, las ecuaciones de equilibrio se usaron para determinar las reacciones restantes sobre la estructura.

El *método de los desplazamientos* funciona de manera opuesta. Se requiere primero satisfacer las ecuaciones de equilibrio de la estructura. Los desplazamientos desconocidos se escriben en términos de

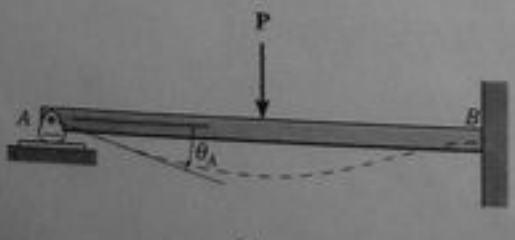
las cargas usando las relaciones carga-desplazamiento. De esas ecuaciones se despejan entonces los desplazamientos desconocidos. Una vez obtenidos éstos, las cargas incógnitas se determinan a partir de las relaciones carga-desplazamiento, que también satisfacen los requisitos de compatibilidad de la estructura. Todo método de desplazamientos sigue este procedimiento general. En este capítulo, el procedimiento se generalizará para generar las ecuaciones de pendiente-desviación. En el capítulo 11 se presentará el método de la distribución de momentos. Este método deja a un lado el cálculo de los desplazamientos y en su lugar aplica una serie de correcciones convergentes que permiten el cálculo directo de los momentos de extremo. Por último, en los capítulos 14 y 15, ilustraremos cómo aplicar este método usando análisis matricial, lo que permite su implementación con ayuda de una computadora.

En el análisis que sigue mostraremos cómo identificar los desplazamientos desconocidos en una estructura y desarrollaremos algunas de las importantes relaciones carga-desplazamiento para vigas y miembros de marcos. Los resultados se usarán en la siguiente sección y en capítulos posteriores como base para la aplicación del método de los desplazamientos.

Grados de libertad

Cuando se carga una estructura, puntos específicos de ella, llamados *nodos*, sufrirán desplazamientos. A esos desplazamientos se les llama *grados de libertad* de la estructura; en el método de los desplazamientos es importante especificar esos grados de libertad ya que ellos son las incógnitas cuando se aplica el método.

Para determinar el número de grados de libertad, podemos imaginar que la estructura consiste en una serie de miembros conectados a nodos localizados usualmente en *nudos*, *soportes*, en los *extremos* de un miembro o donde los miembros *cambian su sección transversal* bruscamente. En tres dimensiones, cada nodo de un marco rígido o viga puede tener cuando más tres desplazamientos lineales y tres desplazamientos rotacionales; en dos dimensiones, cada nodo puede tener cuando más dos desplazamientos lineales y un desplazamiento rotacional. Si la estructura es una armadura, los nodos están en los nudos y el desplazamiento rotacional de los nodos no se considera ya que los miembros no están sometidos a flexión. Además, los desplazamientos nodales pueden estar restringidos por los soportes o debido a suposiciones basadas en el comportamiento de la estructura. Por ejemplo, si la estructura es una viga y sólo se consideran deformaciones por flexión, entonces no puede haber desplazamientos lineales a lo largo del eje de la viga ya que este desplazamiento es causado por un deformación causada por fuerza axial.

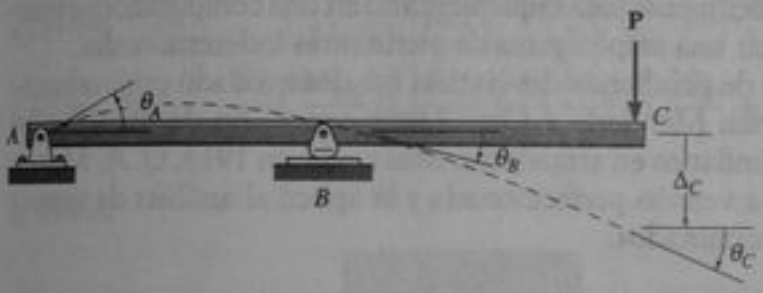


(a)

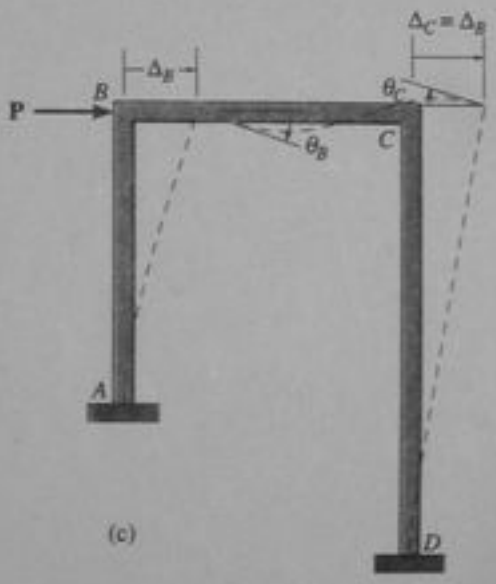
Fig. 10–1

Para aclarar esos conceptos, consideraremos algunos ejemplos, comenzando con la viga en la figura 10–1*a*. Aquí, el nodo en A sólo

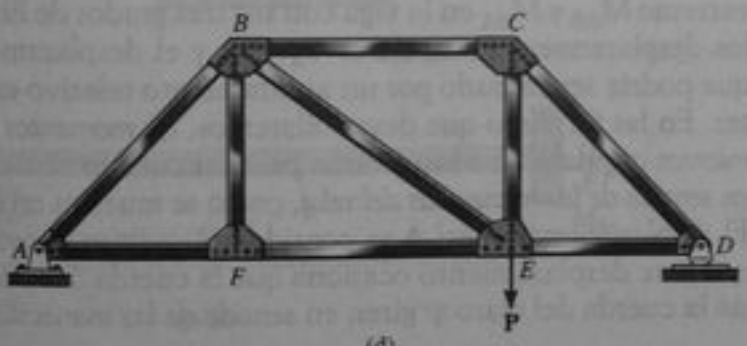
puede girar (despreciando la deformación axial), mientras que el nodo B está completamente restringido en su movimiento. Por tanto, la viga tiene sólo un grado de libertad, θ_A. La viga en la figura 10–1*b* tiene nodos en A, B y C y cuatro grados de libertad designados por los desplazamientos rotacionales θ_A, θ_B, θ_C y por el desplazamiento vertical Δ_C. Considere ahora el marco en la figura 10–1*c*. Nuevamente, si despreciamos la deformación axial de los miembros, la carga ocasionará que los nodos B y C giren y que esos nodos se desplacen horizontalmente una *misma* distancia. Por tanto, el marco tiene tres grados de libertad, θ_B, θ_C y Δ_B. Finalmente, la armadura en la figura 10–1*d* tiene un nodo en cada uno de sus nudos. Cada nodo puede moverse horizontal y verticalmente, excepto el nodo A que no puede moverse y el nodo D que sólo puede moverse horizontalmente. La armadura tiene entonces nueve grados de libertad.



(b)



(c)



(d)

En resumen, especificar el número de grados de libertad no restringidos en la estructura es un primer paso necesario al aplicar un método de análisis de los desplazamientos. Con ello se identifica el número de incógnitas en el problema, con base en las hipótesis hechas respecto al comportamiento por deformación de la estructura. Además, una vez conocidos esos desplazamientos, la deformación de la estructura puede especificarse completamente y obtenerse la carga dentro de los miembros.

10.2 Ecuaciones pendiente-desviación

Como se indicó antes, el método de los desplazamientos consistentes estudiado en el capítulo 9 se llama método de análisis de las fuerzas porque requiere el planteamiento de ecuaciones que relacionan las fuerzas o momentos desconocidos de una estructura. Desafortunadamente, su uso se limita a estructuras que no sean indeterminadas de muy alto grado. Esto se debe a que se requiere una gran cantidad de trabajo para establecer las ecuaciones de compatibilidad; además, cada ecuación que se plantea contiene *todas las incógnitas*, lo que hace difícil resolver el conjunto resultante de ecuaciones, a menos de que disponga de una computadora. En comparación, el método de pendiente-desviación no es tan complicado. Como veremos, se requiere menos trabajo para plantear las ecuaciones necesarias para la solución de un problema así como para despejar de esas ecuaciones las incógnitas. Este método puede programarse fácilmente para implementarlo en una computadora y usarse para analizar una amplia gama de estructuras indeterminadas.

El método de pendiente-desviación fue desarrollado originalmente por Heinrich Manderla y Otto Mohr con el fin de estudiar los esfuerzos secundarios en armaduras. Más tarde, en 1915, G. A. Maney desarrolló una versión perfeccionada y la aplicó al análisis de vigas y marcos indeterminados.

Caso general

Para obtener la forma general de las ecuaciones de pendiente-desviación, consideraremos el claro típico *AB* de una viga continua como el mostrado en la figura 10–2, que está sometido a una carga cualquiera y tiene *EI* constante. Queremos relacionar los momentos internos de extremo M_{AB} y M_{BA} en la viga con sus tres grados de libertad, esto es, los desplazamientos angulares θ_A y θ_B y el desplazamiento lineal Δ que podría ser causado por un asentamiento relativo entre los soportes. En las fórmulas que desarrollaremos, *los momentos y los desplazamientos angulares* se considerarán *positivos* cuando actúen *sobre el claro en sentido de las manecillas del reloj*, como se muestra en la figura 10–2. El *desplazamiento lineal* Δ se considerará *positivo* como se indica, ya que este desplazamiento ocasiona que la cuerda del claro y el ángulo de la cuerda del claro ψ giren en *sentido de las manecillas del reloj*.

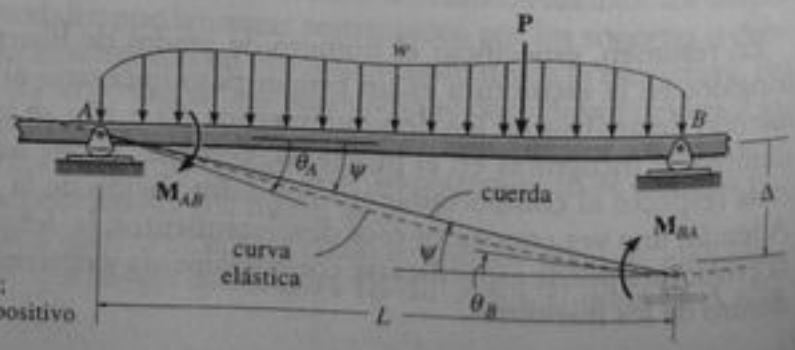


Fig. 10–2

EI es constante; convención de signo positivo

Desarrollaremos las ecuaciones de pendiente-desviación usando el principio de superposición y consideraremos *por separado* los efectos causados por cada uno de los desplazamientos θ_A, θ_B y Δ, y luego por las cargas.

Desplazamiento angular θ_A en A. Considere que el nudo A del miembro mostrado en la figura 10–3*a* gira el ángulo θ_A mientras el nodo del extremo alejado B se mantiene empotrado. Podemos determinar el momento M_{AB} necesario para causar este desplazamiento usando el método de la viga conjugada. Para este caso, se muestra la viga conjugada en la figura 10–3*b*. La fuerza cortante en A' actúa hacia abajo sobre la viga, ya que θ_A gira en sentido de las manecillas del reloj. La deflexión de la "viga real" en la figura 10–3*a* es cero en A y en B y por ello la correspondiente suma de los *momentos* en A' y en B' de la viga conjugada debe también ser cero. Esto conduce a

$$\downarrow+\Sigma M_{A'} = 0; \qquad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_{AB}}{EI}\right)L\right]\frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_{BA}}{EI}\right)L\right]\frac{2L}{3} = 0$$

$$\downarrow+\Sigma M_{B'} = 0; \qquad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_{BA}}{EI}\right)L\right]\frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_{AB}}{EI}\right)L\right]\frac{2L}{3} + \theta_A L = 0$$

de donde

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L}\theta_A \tag{10–1}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\theta_A \tag{10–2}$$

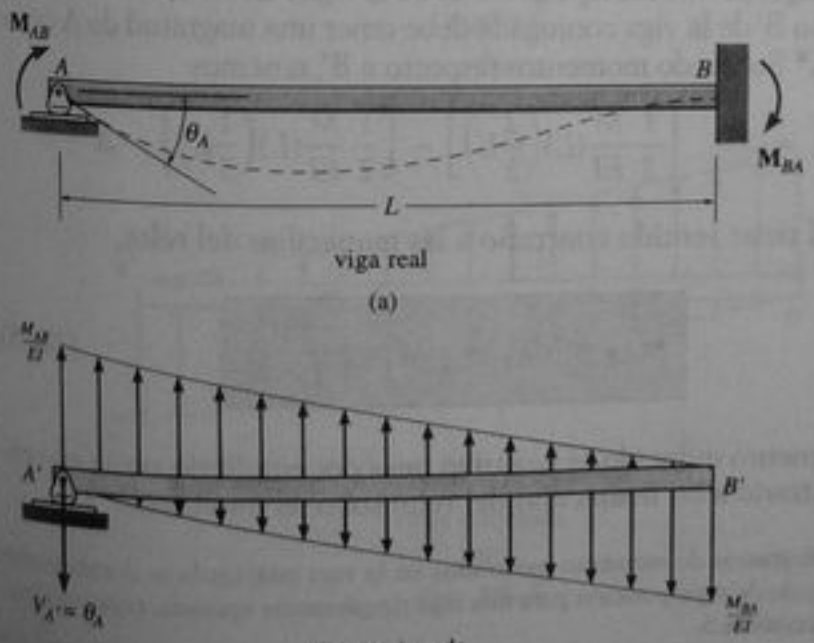


Fig. 10–3

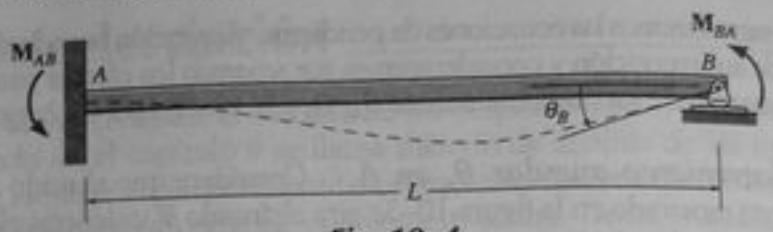


Fig. 10–4

Desplazamiento angular θ_B en B. Finalmente, si el extremo B de la viga gira a su posición final θ_B mientras el extremo A se mantiene empotrado, figura 10–4, podemos relacionar el momento aplicado M_{BA} con el desplazamiento angular θ_B y con el momento reactivo M_{AB} en el empotramiento. El análisis es similar al visto anteriormente. Los resultados son

$$M_{BA} = \frac{4EI}{L}\theta_B \tag{10–3}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\theta_B \tag{10–4}$$

Desplazamiento lineal relativo Δ. Si el nudo alejado B del miembro se desplaza relativamente a A, de manera que la cuerda del miembro gira en sentido de las manecillas del reloj (desplazamiento positivo), sin que ningún extremo gire, se desarrollarán momentos y fuerzas cortantes iguales pero opuestos en el miembro figura 10–5*a*. Igual que antes, el momento **M** puede relacionarse con el desplazamiento Δ usando el método de la viga conjugada. En este caso, la viga conjugada, figura 10–5*b*, está libre en ambos extremos, ya que la viga real (miembro) está ahí empotrada. Sin embargo, debido al *desplazamiento* de la viga real en B, el *momento* en el extremo B′ de la viga conjugada debe tener una magnitud de Δ como se indica.* Sumando momentos respecto a B′, tenemos

$$\circlearrowleft +\Sigma M_{B'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2}\frac{M}{EI}(L)\left(\frac{2}{3}L\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\frac{M}{EI}(L)\left(\frac{1}{3}L\right)\right] - \Delta = 0$$

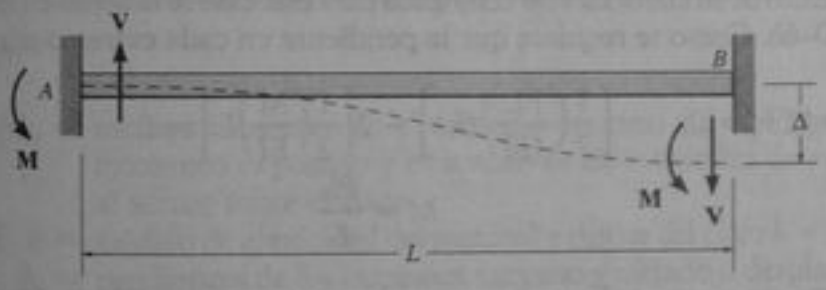
Como **M** tiene sentido contrario a las manecillas del reloj,

$$M_{AB} = M_{BA} = -M = \frac{-6EI}{L^2}\Delta \tag{10–5}$$

Este momento inducido es negativo pues por equilibrio actúa en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre el miembro.

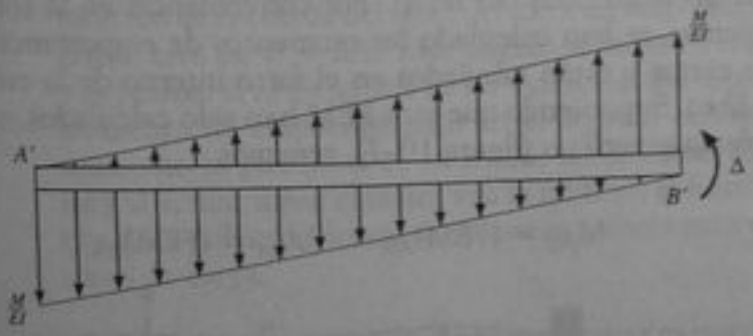
*Los diagramas de momento mostrados en la viga conjugada se determinaron por el método de superposición para una viga simplemente apoyada, como se explicó en la sección 4.5.

Estribo estáticamente indeterminado de puente.



viga real

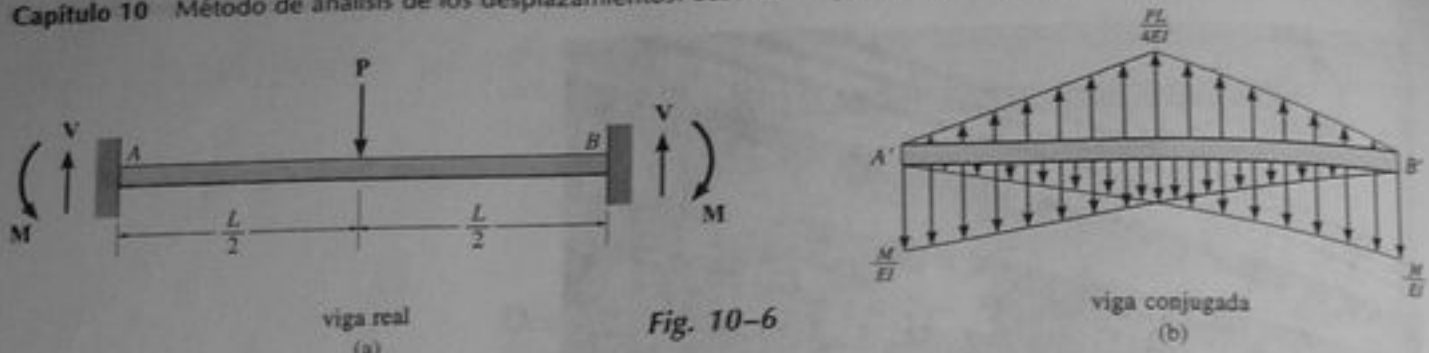
(a)



viga conjugada

(b)

Fig. 10–5



viga real
(a)

viga conjugada
(b)

Fig. 10–6

Momentos de empotramiento

En los casos anteriores hemos considerado relaciones entre los desplazamientos y los *momentos aplicados* M_{AB} y M_{BA} que actúan en los nudos A y B, respectivamente. Sin embargo, en general, los desplazamientos lineales o angulares de los nudos se deben a cargas que actúan sobre el claro del miembro, no a momentos que actúan en sus nudos. Para obtener las ecuaciones pendiente-desviación, debemos transformar esas *cargas de claro* en momentos equivalentes que actúen en los nudos y luego usar las relaciones carga-desplazamiento recién obtenidas. Esto se hace simplemente encontrando los momentos reactivos que cada carga desarrolla en los nudos. Por ejemplo, considere el miembro doblemente empotrado mostrado en la figura 10–6*a* que está sometido a una carga concentrada **P** en el centro de su claro. La viga conjugada para este caso se muestra en la figura 10–6*b*. Como se requiere que la pendiente en cada extremo sea cero,

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)(L)\right] - 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)L\right] = 0$$

$$M = \frac{PL}{8}$$

Este momento se llama *momento de empotramiento* (FEM). Note que de acuerdo con nuestra convención de signos, es negativo en el nudo A (contrario a las manecillas del reloj) y positivo en el nudo B (sentido de las manecillas del reloj). Por conveniencia en la solución de problemas, se han calculado los momentos de empotramiento para otras cargas y están tabulados en el forro interno de la cubierta de este libro. Suponiendo que esos FEM han sido calculados ya para un problema específico (figura 10–7), tenemos

$$M_{AB} = (\text{FEM})_{AB} \qquad M_{BA} = (\text{FEM})_{BA} \tag{10–6}$$

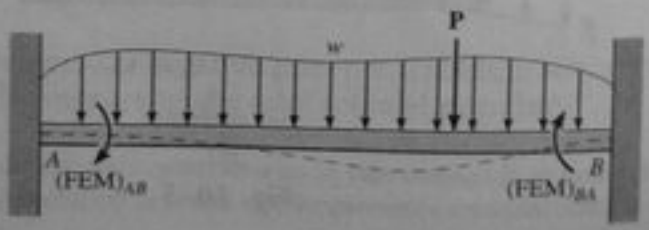


Fig. 10–7

Ecuaciones pendiente-desviación. Si se suman los momentos de extremo debidos a cada desplazamiento (ecuaciones 10–1 a la 10–5) y a la carga (ecuación 10–6), los momentos finales pueden escribirse como

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_A + \theta_B - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (FEM)_{AB} \\ M_{BA} &= 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_B + \theta_A - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (FEM)_{BA} \end{aligned} \tag{10–7}$$

Como estas dos ecuaciones son similares, el resultado puede expresarse con una sola ecuación. Si a un extremo del claro lo designamos extremo cercano (N) y al otro como extremo alejado (F), a la *rigidez del miembro* la representamos con $k = I/L$ y si a la *rotación de la cuerda del claro* la designamos $\psi = \Delta/L$, podemos escribir

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$
Para claro interno o claro extremo con extremo alejado empotrado (10–8)

donde

M_N = momento interno en el extremo cercano del claro; este momento es *positivo* y *en sentido de las manecillas del reloj* al actuar sobre el claro

E, k = módulo de elasticidad del material y rigidez del claro $k = I/L$

θ_N, θ_F = pendientes de los extremos cercano y alejado o desplazamientos angulares del claro en los soportes; los ángulos se miden en *radianes* y son *positivos* si son *en sentido de las manecillas del reloj*

ψ = rotación de la cuerda del claro debido a un desplazamiento lineal, esto es, $\psi = \Delta/L$. Este ángulo se mide en *radianes* y es *positivo* si es *en sentido de las manecillas del reloj*

$(FEM)_N$ = momento de empotramiento en el soporte cercano; el momento es *positivo* si es *en sentido de las manecillas del reloj* al actuar sobre el claro; vea la tabla en el forro interior de la cubierta, donde se muestran valores para varios casos de carga.

La ecuación 10–8 es una relación carga-desplazamiento y es la *ecuación pendiente-desviación* general. Cuando se usa para la solución de problemas, esta ecuación se aplica dos veces a cada claro de un miembro (AB); esto es, la aplicación es de A a B y de B a A para el claro AB en la figura 10–2.

Claro con extremo articulado

En ocasiones, un claro extremo de una viga o marco está soportado por un pasador o un rodillo en su *extremo alejado*, figura 10–8. Cuando esto ocurre, el momento en el soporte o rodillo debe ser cero; si el desplazamiento angular θ_B en este soporte no tiene que ser determinado, podemos modificar la ecuación general de pendiente-desviación de modo que tenga que aplicarse *sólo una vez* al claro. Para lograr esto, aplicaremos la ecuación 10–8 o la ecuación 10–7 a cada extremo de la viga en la figura 10–8. Esto da las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_N &= 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N \\ 0 &= 2Ek(2\theta_F + \theta_N - 3\psi) \end{aligned} \tag{10–9}$$

Aquí, el $(FEM)_F$ es igual a cero pues el extremo alejado está articulado, figura 10–9. Además, el $(FEM)_N$ puede obtenerse, por ejemplo, usando la tabla en la columna derecha del forro interior de la cubierta de este libro. Multiplicando la primera ecuación por 2 y restándole la segunda ecuación, se *elimina* la incógnita θ_F y resulta

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \psi) + (FEM)_N \tag{10–10}$$

Sólo para claro extremo con extremo alejado articulado o sobre rodillo

Como el momento en el extremo alejado es cero, sólo *una* aplicación de esta ecuación es necesaria para el claro extremo. Esto simplifica el análisis ya que la ecuación general, ecuación 10–8, requeriría de *dos* aplicaciones para este claro y quedaría implicado por tanto el desplazamiento angular desconocido θ_B en el soporte extremo.

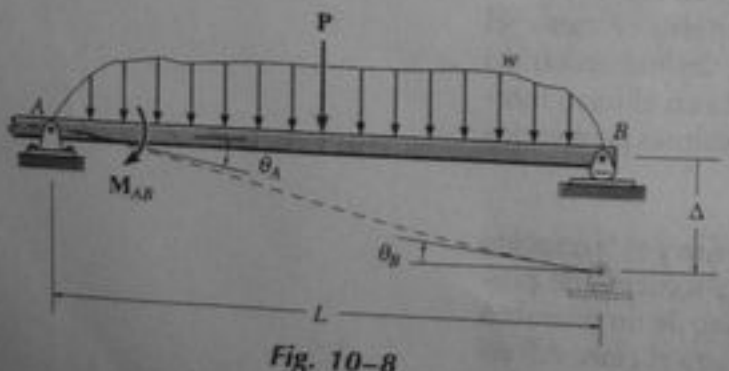


Fig. 10–8

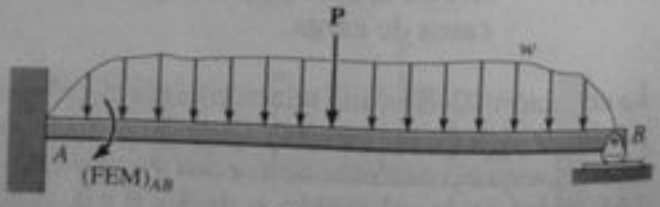


Fig. 10–9

10.3 Análisis de vigas

Procedimiento de análisis

Grados de libertad Póngale nombre a todos los soportes y nudos (nodos) para identificar los claros de la viga o marco entre los nodos. Dibujando la forma deflexionada de la estructura, será posible identificar el número de grados de libertad. Cada nodo puede en general tener un desplazamiento angular y un desplazamiento lineal. La *compatibilidad* en los nodos se conserva si los miembros que están conectados rígidamente a un nodo experimentan los mismos desplazamientos que el nodo. Si esos desplazamientos son desconocidos, y en general lo serán, entonces por conveniencia *suponga* que actúan en *sentido positivo* de modo que generen una rotación *en sentido de las manecillas del reloj* de un miembro o nudo, figura 10–2.

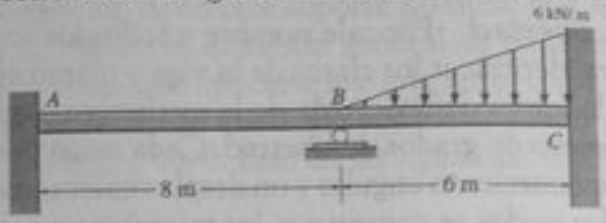
Ecuaciones pendiente-desviación Las ecuaciones pendiente-desviación relacionan los momentos desconocidos aplicados a los nodos con los desplazamientos de éstos para cualquier claro de la estructura. Si existe una carga sobre el claro, calcule los momentos de empotramiento usando las tablas en el forro interior de la cubierta. Si un nodo tiene un desplazamiento lineal Δ, calcule $\psi = \Delta/L$ en los claros adyacentes. Aplique la ecuación 10–8 a cada extremo del claro con lo que se generan así *dos* ecuaciones de pendiente-desviación para cada claro. Sin embargo, si el extremo alejado de un claro en el *extremo* de una viga o marco está articulado, aplique la ecuación 10–10 sólo al extremo restringido, con lo que se generará sólo *una* ecuación de pendiente-desviación para el claro.

Ecuaciones de equilibrio Escriba una ecuación de equilibrio para cada grado de libertad desconocido de la estructura. Cada una de esas ecuaciones debe expresarse en términos de momentos internos desconocidos, como lo especifican las ecuaciones de pendiente-desviación. Para vigas y marcos, escriba la ecuación de equilibrio por momento en cada soporte y para marcos escriba también ecuaciones de equilibrio por momento en los nudos. Si el marco sufre desplazamientos laterales en su conjunto, las fuerzas cortantes en las columnas deben relacionarse con los momentos en los extremos de éstas. Esto se verá en la sección 10.5.

Sustituya las ecuaciones de pendiente-desviación en las ecuaciones de equilibrio y despeje las rotaciones y los desplazamientos desconocidos de los nudos. Sustituya luego esos resultados en las ecuaciones de pendiente-desviación para determinar los momentos internos en los extremos de cada miembro. Si cualquiera de los resultados es *negativo*, esto indica una rotación *antihoraria*; los momentos y desplazamientos *positivos* se aplican en *sentido de las manecillas del reloj*.

Ejemplo 10–1

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 10–10*a*. *EI* es constante.



(a)

Solución

Ecuaciones pendiente-desviación. Deben considerarse dos claros en este problema. Como ningún claro tiene el extremo alejado articulado, la ecuación 10–8 es aplicable a la solución. Usando las fórmulas para los momentos de empotramiento tabuladas para la carga triangular dadas en el forro interior de la cubierta, tenemos

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{6(6)^2}{30} = -7.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{6(6)^2}{20} = 10.8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

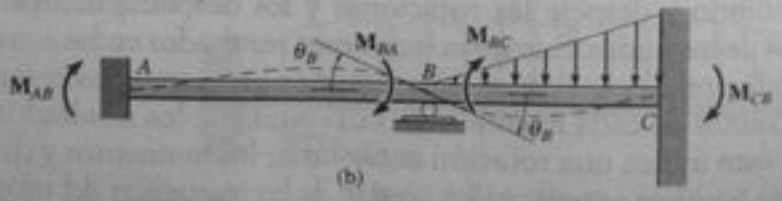
Observe que $(\text{FEM})_{BC}$ es negativo por actuar en sentido contrario a las manecillas del reloj *sobre la viga* en *B*. También, $(\text{FEM})_{AB} = (\text{FEM})_{BA} = 0$ ya que no hay carga en el claro *AB*.

Para identificar las incógnitas, se muestra la curva elástica para la viga en la figura 10–10*b*. Como se indica, hay cuatro momentos desconocidos. Sólo se conoce la pendiente θ_B en *B*. Como *A* y *C* son empotramientos, $\theta_A = \theta_C = 0$. Además como no hay asentamientos de los soportes, ni son desplazados hacia arriba o hacia abajo, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$. Aplicaremos ahora la ecuación 10–8. Para el claro *AB*, considerando que *A* es el extremo cercano y *B* el lejano, tenemos

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0$$

$$M_{AB} = \frac{EI}{4}\theta_B \qquad (1)$$



(b)

Fig. 10–10

Considerando ahora que B es el extremo cercano y A el alejado, tenemos

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{BA} = \frac{EI}{2}\theta_B \tag{2}$$

De manera similar, para el claro BC tenemos

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] - 7.2$$

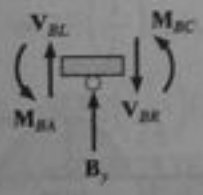
$$M_{BC} = \frac{2EI}{3}\theta_B - 7.2 \tag{3}$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 10.8$$

$$M_{CB} = \frac{EI}{3}\theta_B + 10.8 \tag{4}$$

Ecuaciones de equilibrio. Las cuatro ecuaciones anteriores contienen cinco incógnitas. La quinta ecuación necesaria se obtiene de la condición de equilibrio por momento en el soporte B. El diagrama de cuerpo libre de un segmento de la viga en B se muestra en la figura 10–10c. Se supone aquí que $\mathbf{M}_{BA}$ y $\mathbf{M}_{BC}$ actúan en sentido positivo.* Las fuerzas cortantes de las vigas contribuyen con un momento insignificante respecto a B ya que el segmento es de longitud diferencial. Así,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0 \tag{5}$$



(c)

*En sentido de las manecillas del reloj sobre la viga pero, por el principio de la acción y la reacción iguales, de sentido contrario a las manecillas del reloj sobre el soporte.

(continúa)

Ejemplo 10–1 (continuación)

Para resolverla, sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (5), lo que da

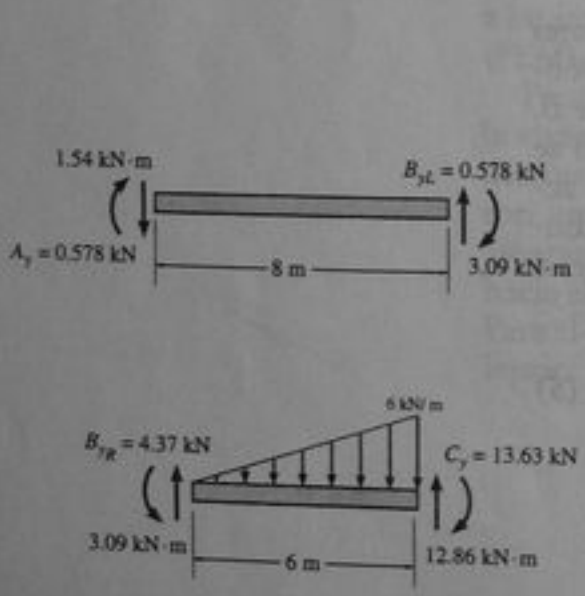
$$\theta_B = \frac{6.17}{EI}$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones (1) a la (4), obtenemos

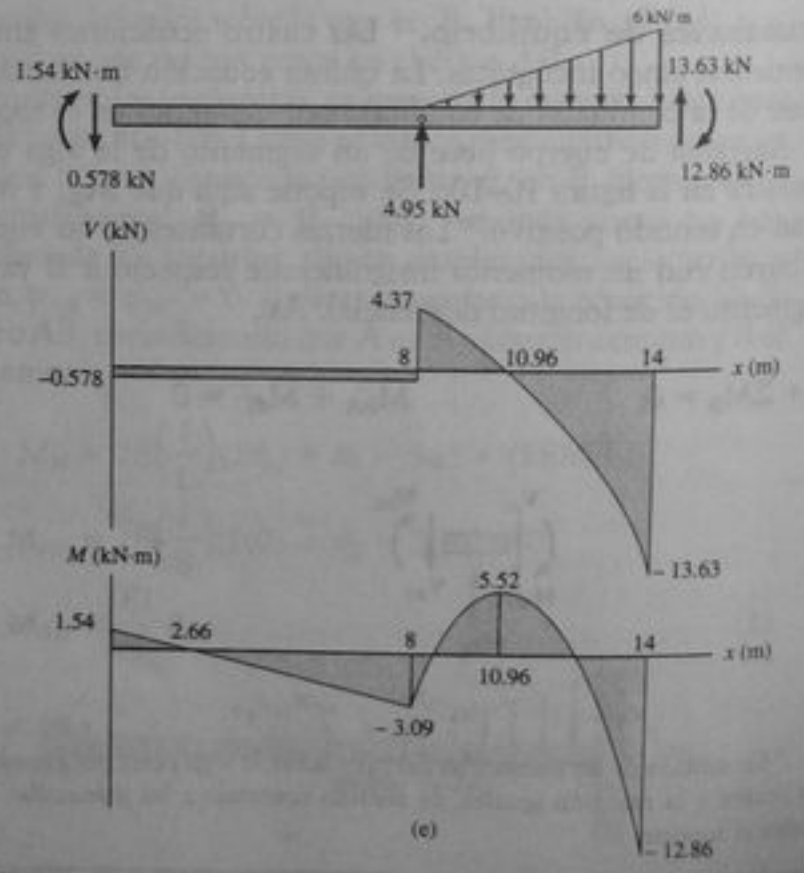
$$M_{AB} = 1.54 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{BA} = 3.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{BC} = -3.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{CB} = 12.86 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El valor negativo para M_{BC} indica que este momento actúa en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre la viga, no en sentido de las manecillas como se mostró en la figura 10–10*b*.

Usando esos resultados se determinan las fuerzas cortantes en los extremos de los claros a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 10–10*d*. El diagrama de cuerpo libre de la viga y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en la figura 10–10*e*.



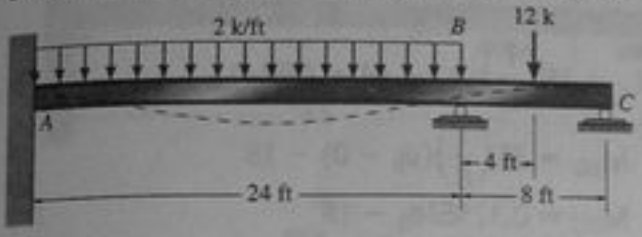
(d)



(e)

Ejemplo 10–2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 10–11*a*. *EI* es constante.



(a)

Fig. 10–11

Solución

Ecuaciones pendiente-desviación. Deben considerarse dos claros en este problema. La ecuación 10–8 es aplicable al claro AB. Podemos usar la ecuación 10–10 para el claro BC pues *el extremo C está sobre un rodillo*. Usando las fórmulas para los momentos de empotramiento tabulados en el forro interior de la cubierta, tenemos

$$(\text{FEM})_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{1}{12}(2)(24)^2 = -96\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1}{12}(2)(24)^2 = 96\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3(12)(8)}{16} = -18\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

Observe que $(\text{FEM})_{AB}$ y $(\text{FEM})_{BC}$ son negativos por actuar en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre la viga en *A* y *B*, respectivamente. Además, como los soportes no sufren asentamientos, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$. Aplicando la ecuación 10–8 para el claro AB y considerando que $\theta_A = 0$, tenemos

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{24}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 96$$

$$M_{AB} = 0.08333EI\theta_B - 96 \qquad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{24}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 96$$

$$M_{BA} = 0.1667EI\theta_B + 96 \qquad (2)$$

(continúa)

Ejemplo 10–2 (continuación)

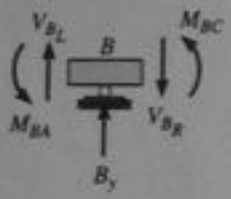
Aplicando la ecuación 10–10 con B como extremo cercano y C como extremo alejado, tenemos

$$M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{8}\right)(\theta_B - 0) - 18$$

$$M_{BC} = 0.375EI\theta_B - 18 \qquad (3)$$

Recuerde que la ecuación 10–10 *no* se aplica de C (extremo cercano) a B (extremo alejado).



(b)

Ecuaciones de equilibrio. Las tres ecuaciones anteriores contienen cuatro incógnitas. La cuarta ecuación necesaria se obtiene de la condición de equilibrio en el soporte B. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 10–11*b*. Tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad (4)$$

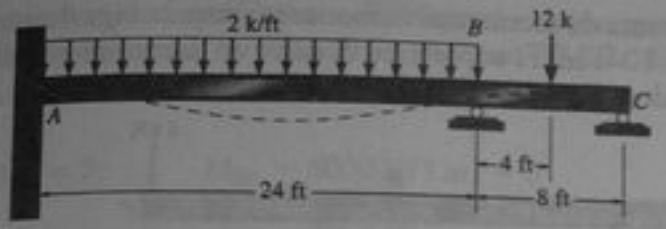
Para resolverla, sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (4), lo que da

$$\theta_B = -\frac{144.0}{EI}$$

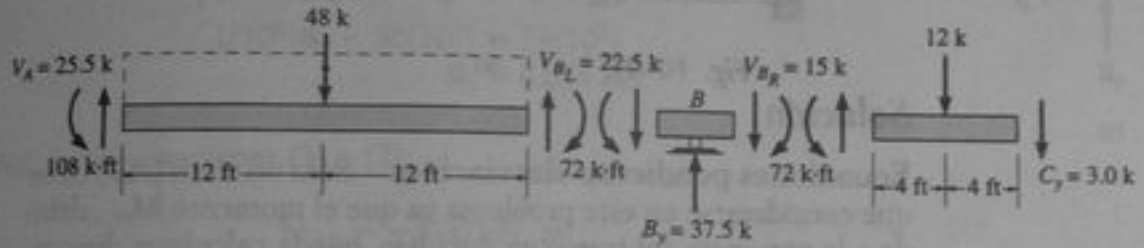
Como θ_B es negativa (sentido contrario a las manecillas del reloj), la curva elástica para la viga ha sido dibujada correctamente en la figura 10–11*a*. Sustituyendo este valor en las ecuaciones (1) a la (3), obtenemos

$$M_{AB} = -108.0\,\text{k}\cdot\text{ft}$$
$$M_{BA} = 72.0\,\text{k}\cdot\text{ft}$$
$$M_{BC} = -72.0\,\text{k}\cdot\text{ft}$$

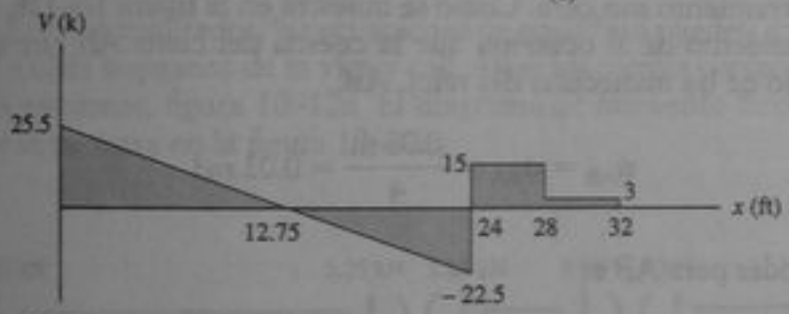
Por medio de esos datos para los momentos, las reacciones cortantes en los extremos de los claros de las vigas se han calculado en la figura 10–11*c*. Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en las figuras 10–11*d* y 10–11*e*.


2 k/ft
B
12 k
A
C
4 ft
24 ft
8 ft

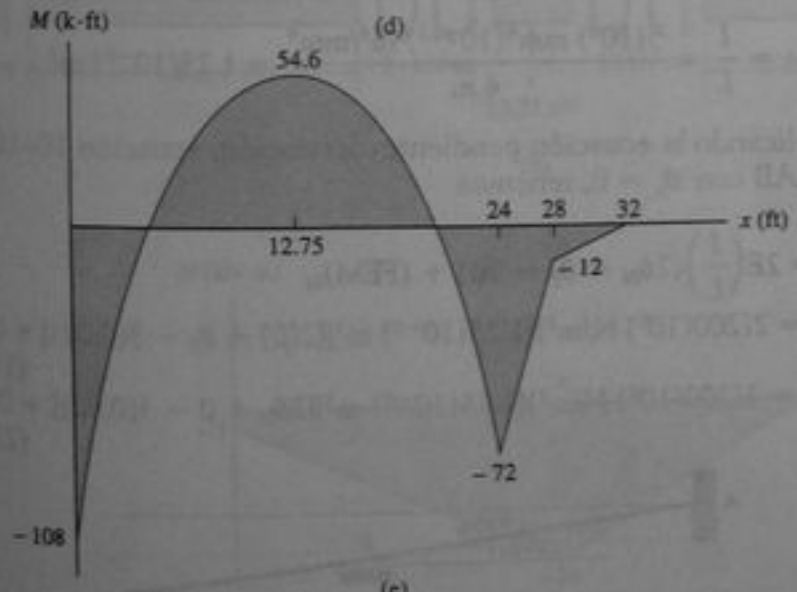
(a)


48 k
$V_A = 25.5$ k
$V_{B_L} = 22.5$ k
$V_{B_R} = 15$ k
B
12 k
108 k-ft
12 ft
12 ft
72 k-ft
72 k-ft
4 ft
4 ft
$C_y = 3.0$ k
$B_y = 37.5$ k

(c)


V (k)
25.5
15
3
x (ft)
12.75
24
28
32
−22.5

(d)


M (k-ft)
54.6
24
28
32
x (ft)
12.75
−12
−72
−108

(e)

Ejemplo 10–3

Dibuje el diagrama de momentos flexionantes para la viga ilustrada en la figura 10–12*a*. El soporte en *B* sufre un asentamiento de 80 mm. Considere $E = 200$ GPa, $I = 5(10^6)$ mm^4.

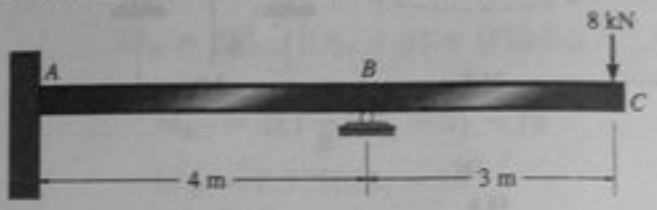


Fig. 10–12 (a)

Solución

Ecuaciones pendiente-desviación. Sólo un claro (*AB*) tiene que considerarse en este problema ya que el momento M_{BC}, debido a la presencia del tramo en voladizo, puede calcularse directamente. Como no hay carga sobre el claro *AB*, los momentos de empotramiento son cero. Como se muestra en la figura 10–12*b*, el asentamiento de *B* ocasiona que la cuerda del claro *AB* gire en sentido de las manecillas del reloj. Así,

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = \frac{0.08 \text{ m}}{4} = 0.02 \text{ rad}$$

La rigidez para *AB* es

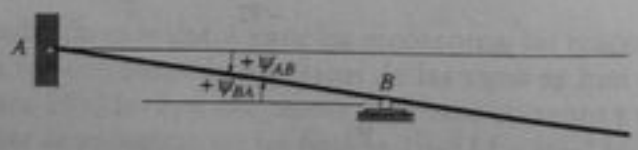
$$k = \frac{I}{L} = \frac{5(10^6) \text{ mm}^4(10^{-12}) \text{ m}^4/\text{mm}^4}{4 \text{ m}} = 1.25(10^{-6}) \text{ m}^3$$

Aplicando la ecuación pendiente-desviación, ecuación 10–10, al claro *AB* con $\theta_A = 0$, tenemos

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2(200(10^9) \text{ N/m}^2)[1.25(10^{-6}) \text{ m}^3][2(0) + \theta_B - 3(0.02)] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2(200(10^9) \text{ N/m}^2)[1.25(10^{-6}) \text{ m}^3][2\theta_B + 0 - 3(0.02)] + 0 \quad (2)$$



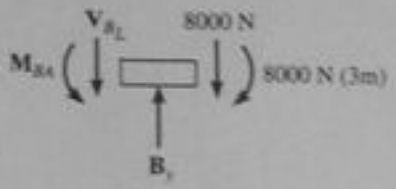
(b)

Ecuaciones de equilibrio. El diagrama de cuerpo libre de la viga en el soporte B se muestra en la figura 10–12*c*. El equilibrio por momento requiere que

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad M_{BA} - 8000\,\text{N}(3\,\text{m}) = 0$$

Sustituyendo la ecuación (2) en esta ecuación se obtiene

$$1(10^6)\theta_B - 30(10^3) = 24(10^3)$$
$$\theta_B = 0.054\ \text{rad}$$

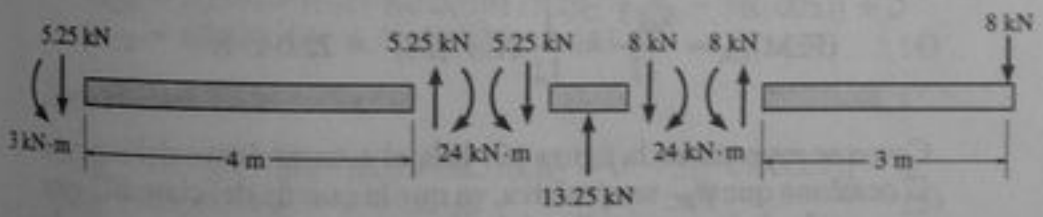


(c)

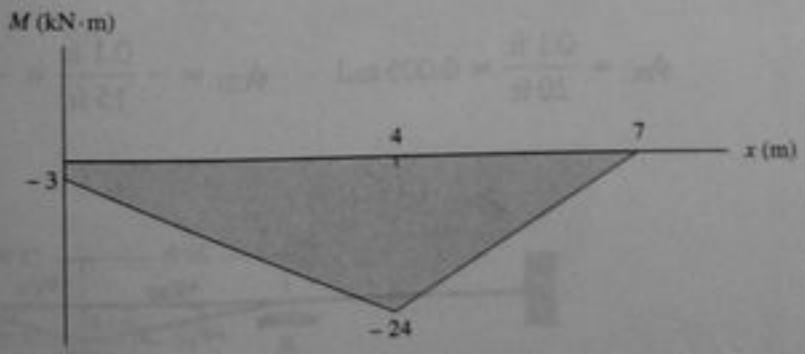
Así, de las ecuaciones (1) y (2),

$$M_{AB} = -3.00\,\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{BA} = 24.0\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Usando estos resultados, las ecuaciones de equilibrio pueden aplicarse a cada segmento de la viga y calcularse las fuerzas cortantes en los extremos, figura 10–12*d*. El diagrama de momento flexionante se muestra en la figura 10–12*e*.



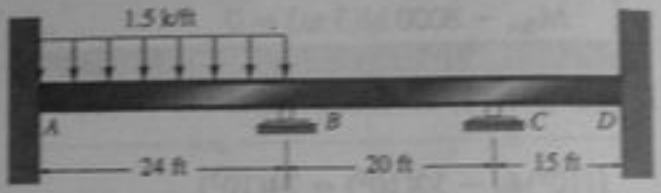
(d)



(e)

Ejemplo 10–4

Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 10–13a. El soporte en C sufre un asentamiento de 0.1 ft. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 1500$ in^4.



(a)

Solución

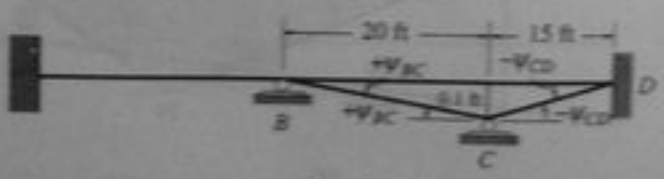
Ecuaciones pendiente-desviación. En este problema deben considerarse tres claros. La ecuación 10–8 es aplicable ya que los soportes extremos A y D están empotrados. Sólo el claro AB tiene momentos de empotramiento.

$$(\text{FEM})_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{1}{12}(1.5)(24)^2 = -72.0\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1}{12}(1.5)(24)^2 = 72.0\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

Como se muestra en la figura 10–13b, el asentamiento del soporte C ocasiona que ψ_{BC} sea positiva, ya que la cuerda del claro BC gira en sentido de las manecillas del reloj y ψ_{CD} es negativa, ya que la cuerda del claro CD gira en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por consiguiente,

$$\psi_{BC} = \frac{0.1\ \text{ft}}{20\ \text{ft}} = 0.005\ \text{rad} \qquad \psi_{CD} = -\frac{0.1\ \text{ft}}{15\ \text{ft}} = -0.00667\ \text{rad}$$



(b)

Fig. 10–13

Si expresamos las unidades de la rigidez en ft³, tenemos

$$k_{AB} = \frac{1500}{24(12)^4} = 0.003014 \text{ ft}^3 \qquad k_{BC} = \frac{1500}{20(12)^4} = 0.003617 \text{ ft}^3$$
$$k_{CD} = \frac{1500}{15(12)^4} = 0.004823 \text{ ft}^3$$

Si obervamos que $\theta_A = \theta_D = 0$ por ser A y D empotramientos y aplicamos la ecuación pendiente-desviación, ecuación 10–8, dos veces a cada claro, tenemos

Para el claro AB:

$$M_{AB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003014)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 72$$
$$M_{AB} = 25{,}172.9\theta_B - 72 \quad (1)$$
$$M_{BA} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003014)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 72$$
$$M_{BA} = 50{,}345.9\theta_B + 72 \quad (2)$$

Para el claro BC:

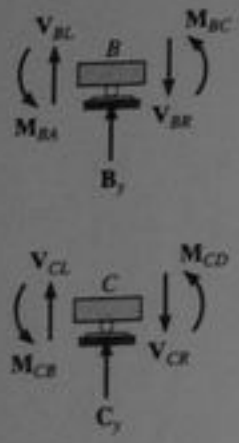
$$M_{BC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003617)[2\theta_B + \theta_C - 3(0.005)] + 0$$
$$M_{BC} = 60{,}418.4\theta_B + 30{,}209.2\theta_C - 453.2 \quad (3)$$
$$M_{CB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003617)[2\theta_C + \theta_B - 3(0.005)] + 0$$
$$M_{CB} = 60{,}418.4\theta_C + 30{,}209.2\theta_B - 453.2 \quad (4)$$

Para el claro CD:

$$M_{CD} = 2[29(10^3)(12)^2](0.004823)[2\theta_C + 0 - 3(-0.00667)] + 0$$
$$M_{CD} = 80{,}563.4\theta_C + 0 + 805.6 \quad (5)$$
$$M_{DC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.004823)[2(0) + \theta_C - 3(-0.00667)] + 0$$
$$M_{DC} = 40{,}281.7\theta_C + 805.6 \quad (6)$$

(continúa)

Ejemplo 10–4 (continuación)



(c)

Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones de equilibrio contienen ocho incógnitas. Si escribimos las ecuaciones de equilibrio por momento para los soportes B y C, figura 10–13c, tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0 \tag{7}$$
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0 \tag{8}$$

Para resolverlas, sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7) y las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8). Esto da

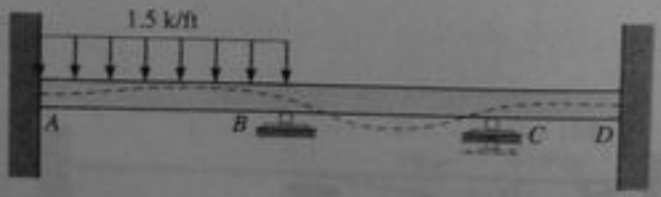
$$\theta_C + 3.667\theta_B = 0.01262$$
$$-\theta_C - 0.214\theta_B = 0.00250$$

Al despejar se obtiene

$$\theta_B = 0.00438 \text{ rad} \qquad \theta_C = -0.00344 \text{ rad}$$

El valor negativo de θ_C indica una rotación antihoraria de la tangente en C, figura 10–13*d*. Sustituyendo esos valores en las ecuaciones (1) a la (6) se obtiene

$$M_{AB} = 38.2 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{BA} = 292 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{BC} = -292 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CB} = -529 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CD} = 529 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{DC} = 667 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$



(d)

10.4 Análisis de marcos sin desplazamiento lateral

Un marco no se desplazará hacia la derecha o hacia la izquierda si está apropiadamente restringido. Ejemplos se muestran en la figura 10–14. Tampoco se tendrán desplazamientos laterales si el marco es simétrico en geometría y carga, como se muestra en la figura 10–15. En ambos casos, el término ψ en las ecuaciones pendiente-desviación es igual a cero ya que los nudos no tienen el correspondiente desplazamiento entre sí.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las ecuaciones pendiente-desviación usando el procedimiento de análisis delineado en la sección 10.3 para estos tipos de marcos.

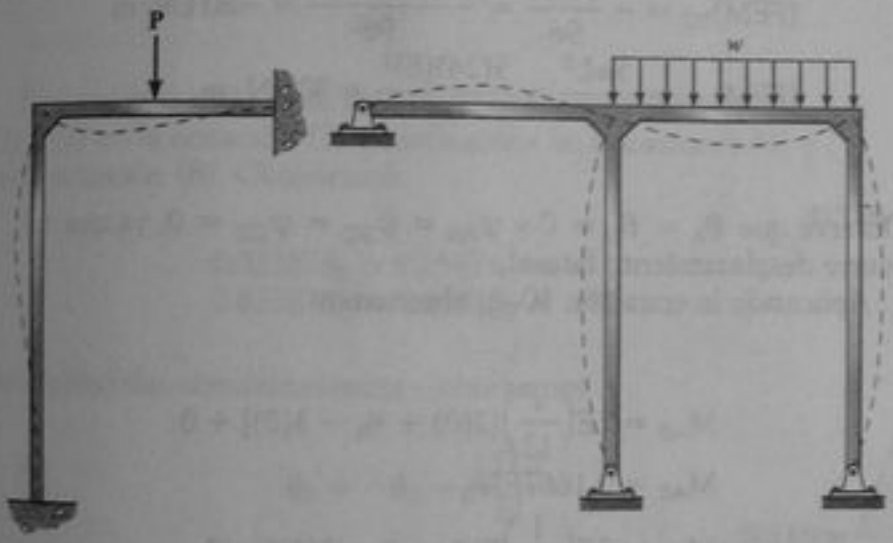


Fig. 10–14

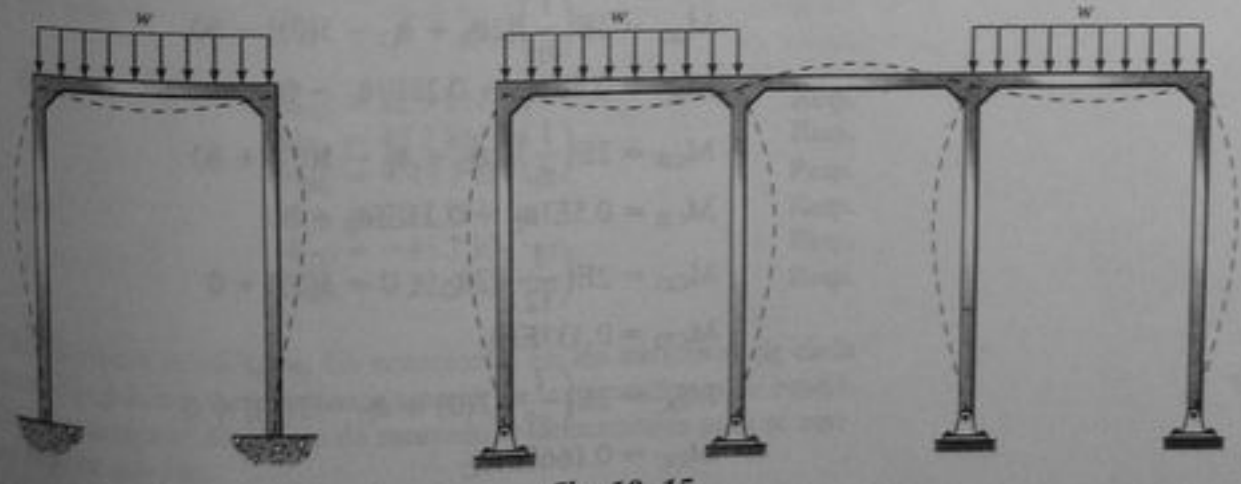
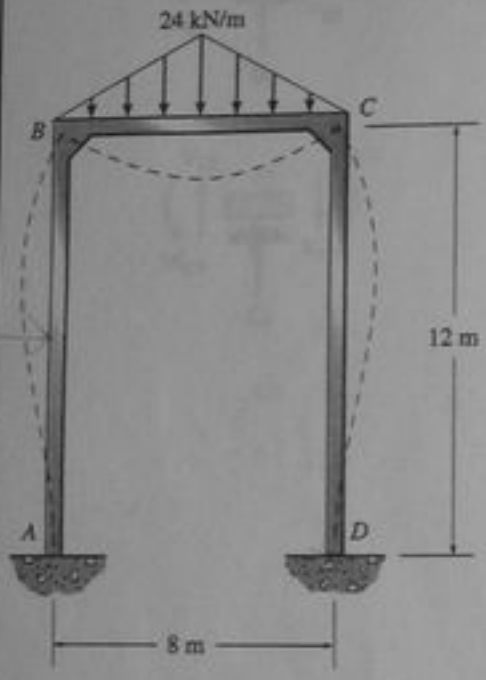


Fig. 10–15

Ejemplo 10–5

Determine los momentos en cada nudo del marco mostrado en la figura 10–16*a*. *EI* es constante.



(a)

Fig. 10–16

Solución

Ecuaciones pendiente-desviación. En este problema deben considerarse los tres claros *AB*, *BC* y *CD*. Como los claros están empotrados en *A* y *D*, es aplicable la ecuación 10–8.

De la tabla en el forro interior de la cubierta, los momentos de empotramiento para *BC* son

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{5wL^2}{96} = -\frac{5(24)(8)^2}{96} = -80\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{5wL^2}{96} = \frac{5(24)(8)^2}{96} = 80\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Observe que $\theta_A = \theta_D = 0$ y $\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$, ya que no ocurre desplazamiento lateral.

Aplicando la ecuación 10–8, obtenemos

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0$$

$$M_{AB} = 0.1667EI\theta_B \tag{1}$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{BA} = 0.333EI\theta_B \tag{2}$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] - 80$$

$$M_{BC} = 0.5EI\theta_B + 0.25EI\theta_C - 80 \tag{3}$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 80$$

$$M_{CB} = 0.5EI\theta_C + 0.25EI\theta_B + 80 \tag{4}$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0)] + 0$$

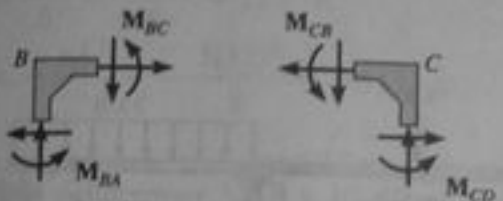
$$M_{CD} = 0.333EI\theta_C \tag{5}$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0)] + 0$$

$$M_{DC} = 0.1667EI\theta_C \tag{6}$$

Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones anteriores contienen ocho incógnitas. Las dos ecuaciones de equilibrio restantes se obtienen del equilibrio de momentos en los nudos B y C, figura 10–16*b*. Tenemos

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$
$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$



(b)

Para resolver estas ocho ecuaciones, sustituimos las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7) y sustituimos las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8). Obtenemos

$$0.833EI\theta_B + 0.25EI\theta_C = 80$$
$$0.833EI\theta_C + 0.25EI\theta_B = -80$$

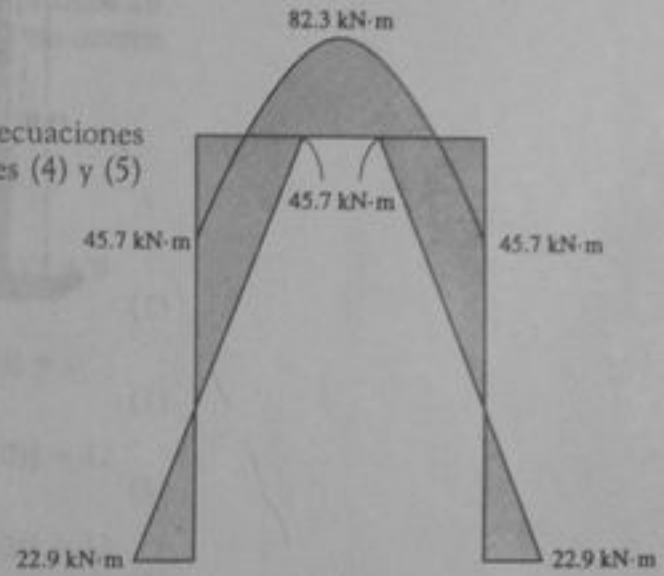
Resolviéndolas simultáneamente, obtenemos

$$\theta_B = -\theta_C = \frac{137.1}{EI}$$

que concuerda con la forma en que el marco se deflexiona; esto se muestra en la figura 10–16*a*. Sustituyendo en las ecuaciones (1) a la (6), resulta

$$M_{AB} = 22.9\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{BA} = 45.7\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{BC} = -45.7\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CB} = 45.7\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CD} = -45.7\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{DC} = -22.9\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Resp.}$$

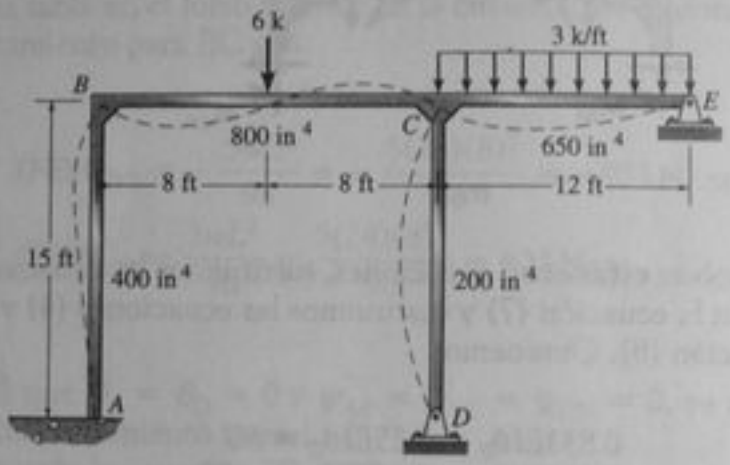
Usando estos resultados, las reacciones en los extremos de cada miembro pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio y trazarse el diagrama de momentos flexionantes para el marco, figura 10–16*c*.



(c)

Ejemplo 10–6

Determine los momentos internos de cada nudo del marco mostrado en la figura 10–17*a*. El momento de inercia de cada miembro se indica en la figura. Considere $E = 29(10^3)$ ksi.



(a)

Fig. 10–17

Solución

Ecuaciones pendiente-desviación. Cuatro claros deben considerarse en este problema. La ecuación 10–8 es aplicable a los claros *AB* y *BC* y la ecuación 10–10 a los claros *CD* y *CE*, porque los extremos *D* y *E* están articulados.

Las rigideces de los miembros son

$$k_{AB} = \frac{400}{15(12)^4} = 0.001286 \text{ ft}^3 \qquad k_{CD} = \frac{200}{15(12)^4} = 0.000643 \text{ ft}^3$$

$$k_{BC} = \frac{800}{16(12)^4} = 0.002411 \text{ ft}^3 \qquad k_{CE} = \frac{650}{12(12)^4} = 0.002612 \text{ ft}^3$$

Los momentos de empotramiento debido a las cargas son

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{PL}{8} = -\frac{6(16)}{8} = -12\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{PL}{8} = \frac{6(16)}{8} = 12\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{CE} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{3(12)^2}{8} = -54\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

Aplicamos las ecuaciones 10–8 y 10–10 al marco y tenemos en cuenta que $\theta_A = 0$, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = \psi_{CE} = 0$ por no ocurrir desplazamiento lateral, de modo que tenemos

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.001286)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0$$
$$M_{AB} = 10{,}740.7\theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2[29(10^3)(12)^2](0.001286)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0$$
$$M_{BA} = 21{,}481.3\theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.002411)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] - 12$$
$$M_{BC} = 40{,}273.3\theta_B + 20{,}136.7\theta_C - 12 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.002411)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 12$$
$$M_{CB} = 20{,}136.7\theta_B + 40{,}273.3\theta_C + 12 \quad (4)$$

$$M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{CD} = 3[29(10^3)(12)^2](0.000643)[\theta_C - 0] + 0$$
$$M_{CD} = 8055.5\theta_C \quad (5)$$

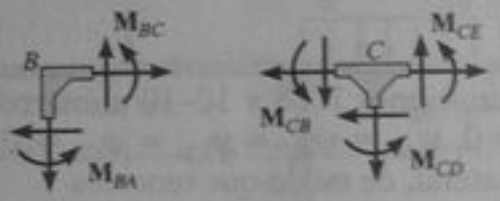
$$M_{CE} = 3[29(10^3)(12)^2](0.002612)[\theta_C - 0] - 54$$
$$M_{CE} = 32{,}723.1\theta_C - 54 \quad (6)$$

(continúa)

Ejemplo 10–6 (continuación)

Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones contienen ocho incógnitas. Pueden escribirse dos ecuaciones de equilibrio por momento para los nudos B y C, figura 10–17*b*. Tenemos

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$
$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CE} = 0 \quad (8)$$



(b)

Para resolverlas, sustituimos las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7) y las ecuaciones (4) a la (6) en la ecuación (8). Esto da

$$61{,}754.6\theta_B + 20{,}136.7\theta_C = 12$$
$$20{,}136.7\theta_B + 81{,}051.9\theta_C = 42$$

Resolvemos simultáneamente estas ecuaciones y resulta

$$\theta_B = 2.758(10^{-5}) \text{ rad} \qquad \theta_C = 5.113(10^{-4}) \text{ rad}$$

Estos valores que representan rotaciones en sentido de las manecillas del reloj, tienden a deformar el marco como se indica en la figura 10–17*a*. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1) a la (6) y despejando, obtenemos

$$M_{AB} = 0.296 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{BA} = 0.592 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{BC} = -0.592 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CB} = 33.2 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CD} = 4.12 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CE} = -37.3 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

10.5 Análisis de marcos con desplazamiento lateral

Un marco se moverá lateralmente cuando éste o la carga que soporta sean asimétricos. Para ilustrar este efecto, considere el marco mostrado en la figura 10–18. Aquí, la carga P ocasiona momentos *desiguales* M_B y M_C en los nudos *B* y *C*, respectivamente. M_B tiende a desplazar el nudo *B* hacia la derecha, mientras que M_C tiende a desplazar el nudo *C* hacia la izquierda. Como M_B es mayor que M_C, el resultado neto es un desplazamiento lateral Δ de ambos nudos *B* y *C* hacia la derecha, como se muestra en la figura.* Al aplicar la ecuación de pendiente-desviación a cada columna de este marco, debemos entonces considerar la rotación ψ (ya que $\psi = \Delta/L$) de la columna como incógnita en la ecuación. En consecuencia, debe incluirse una ecuación adicional de equilibrio para la solución. En las secciones anteriores se vio que los *desplazamientos angulares* θ desconocidos están relacionados por *ecuaciones de equilibrio por momento* en los nudos. De manera similar, cuando se tienen *desplazamientos lineales* Δ (o rotaciones ψ del claro) en los nudos, debemos escribir *ecuaciones de equilibrio por fuerzas* para obtener la solución completa. Sin embargo, las incógnitas en esas ecuaciones deben contener sólo los *momentos* internos que actúan en los extremos de las columnas, ya que las ecuaciones pendiente-desviación contienen esos momentos. El procedimiento para resolver problemas de marcos con desplazamiento lateral se entiende mejor por medio de ejemplos.

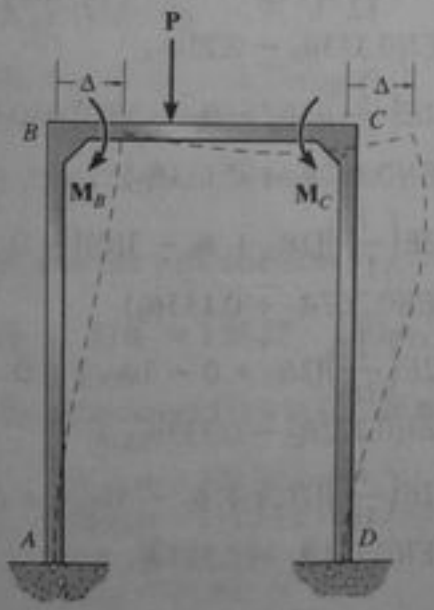


Fig. 10–18

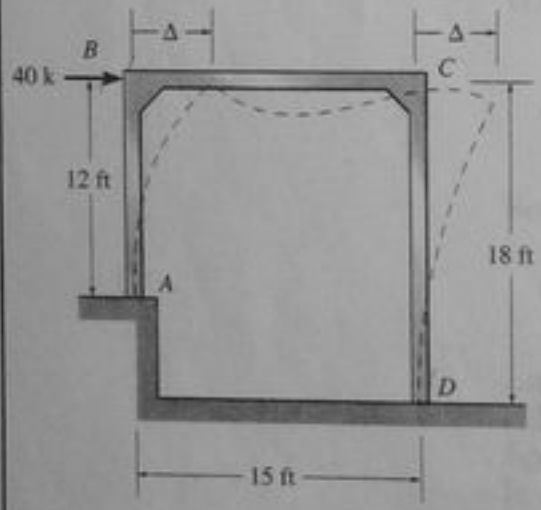
*La deformación de los tres miembros por carga axial se desprecia.

Ejemplo 10–7

Determine los momentos en cada nudo del marco mostrado en la figura 10–19*a*. *EI* es constante.

Solución

Ecuaciones pendiente-desviación. Como los extremos A y *D* están empotrados, la ecuación 10–8 es aplicable a los tres claros del marco. Se tiene aquí desplazamiento lateral del marco ya que la geometría de éste y las cargas aplicadas no son simétricas. La carga está aplicada aquí directamente al nudo *B* por lo que no se tienen momentos de empotramiento en los nudos. Como se muestra en la figura 10–19*a*, se supone que los nudos *B* y *C* se desplazan en una *misma distancia* Δ. En consecuencia, $\psi_{AB} = \Delta/12$ y $\psi_{DC} = \Delta/18$. Ambos términos son positivos ya que las cuerdas de los miembros *AB* y *CD* "giran" en sentido de las manecillas del reloj. Sí ψ_{AB} está en relación con ψ_{DC}, tenemos $\psi_{AB} = (18/12)\psi_{DC}$. Aplicando la ecuación 10–8 al marco, se tiene



(a)

Fig. 10–19

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)\left[2(0) + \theta_B - 3\left(\frac{18}{12}\psi_{DC}\right)\right] + 0$$

$$M_{AB} = EI(0.1667\theta_B - 0.75\psi_{DC}) \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)\left[2\theta_B + 0 - 3\left(\frac{18}{12}\psi_{DC}\right)\right] + 0$$

$$M_{BA} = EI(0.333\theta_B - 0.75\psi_{DC}) \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] + 0$$

$$M_{BC} = EI(0.267\theta_B + 0.133\theta_C) \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 0$$

$$M_{CB} = EI(0.267\theta_C + 0.133\theta_B) \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)[2\theta_C + 0 - 3\psi_{DC}] + 0$$

$$M_{CD} = EI(0.222\theta_C - 0.333\psi_{DC}) \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)[2(0) + \theta_C - 3\psi_{DC}] + 0$$

$$M_{DC} = EI(0.111\theta_C - 0.333\psi_{DC}) \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones anteriores contienen nueve incógnitas. Pueden escribirse dos ecuaciones de equili-

brio por momento en los nudos B y C, figura 10–19b:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$
$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

Como se tiene un desplazamiento horizontal Δ, consideraremos la suma de fuerzas en el *marco entero* en la dirección x. Esto da

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \qquad 40 - V_A - V_D = 0$$

Las reacciones horizontales o fuerzas cortante V_A y V_D en las columnmas pueden relacionarse con los momentos internos considerando el diagrama de cuerpo libre de cada columna por separado, figura 10–19c. Tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{12}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad V_D = -\frac{M_{DC} + M_{CD}}{18}$$

Entonces,

$$40 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{12} + \frac{M_{DC} + M_{CD}}{18} = 0 \quad (9)$$

Sustituya ahora las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8) y las ecuaciones (1),(2),(5), y (6) en la ecuación (9). Esto da

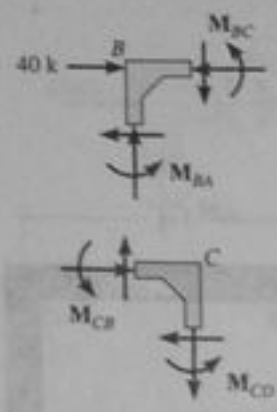
$$0.6\theta_B + 0.133\theta_C - 0.75\psi_{DC} = 0$$
$$0.133\theta_B + 0.489\theta_C - 0.333\psi_{DC} = 0$$
$$0.5\theta_B + 0.222\theta_C - 1.944\psi_{DC} = -\frac{480}{EI}$$

Resolvemos simultánemente y obtenemos

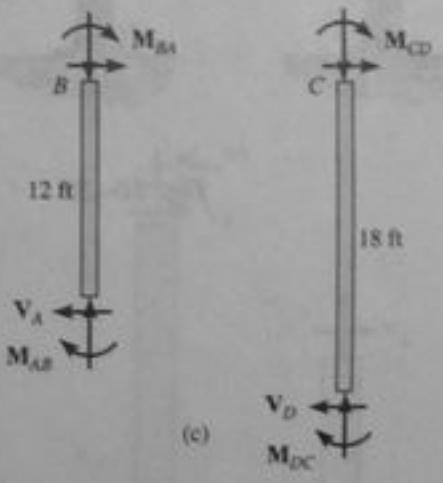
$$EI\theta_B = 439.05 \qquad EI\theta_C = 136.22 \qquad EI\psi_{DC} = 375.39$$

Resolvemos ahora las ecuaciones (1) a la (6), de modo que resulta

$M_{AB} = -208.36\ \text{k}\cdot\text{ft}$ *Resp.*
$M_{BA} = -135.34\ \text{k}\cdot\text{ft}$ *Resp.*
$M_{BC} = 135.34\ \text{k}\cdot\text{ft}$ *Resp.*
$M_{CB} = 94.8\ \text{k}\cdot\text{ft}$ *Resp.*
$M_{CD} = -94.8\ \text{k}\cdot\text{ft}$ *Resp.*
$M_{DC} = -109.89\ \text{k}\cdot\text{ft}$ *Resp.*



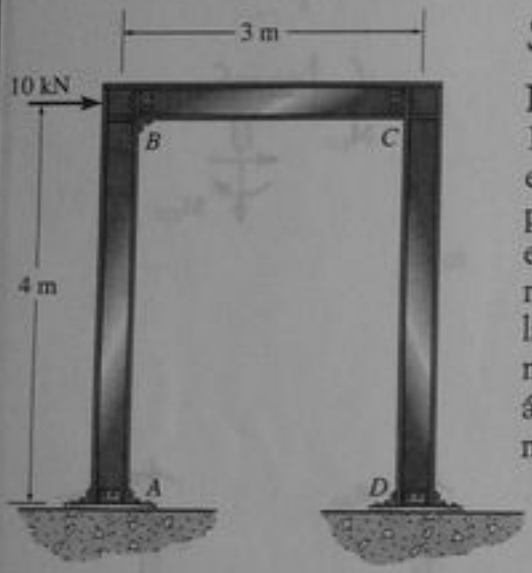
(b)



(c)

Ejemplo 10–8

Determine los momentos en cada nudo del marco mostrado en la figura 10–20*a*. Los nudos en *A* y *D* están empotrados y el nudo C se supone articulado. *EI* tiene el mismo valor en todos los miembros.



(a)

Fig. 10–20

Solución

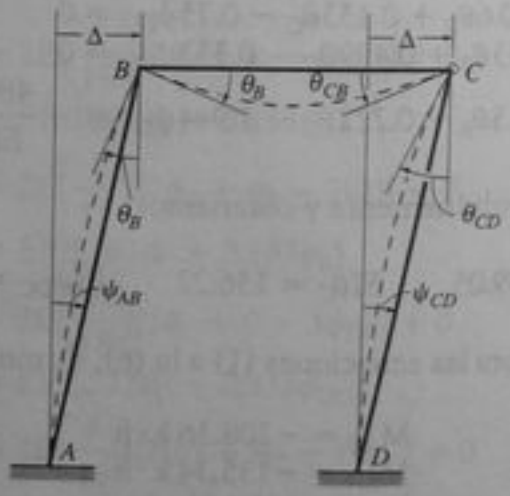
Ecuaciones pendiente-desviación. Aplicaremos la ecuación 10–8 al miembro *AB* ya que está conectado rígidamente en ambos extremos. La ecuación 10–10 puede aplicarse de B a C y de D a C porque la articulación en C no toma momento. Como se muestra en el diagrama de deflexión, figura 10–20*b*, se tiene un desplazamiento lineal desconocido Δ del marco y un desplazamiento angular desconocido θ_B en el nudo *B*.* Debido a Δ, las cuerdas de los miembros *AB* y *CD* giran en sentido de las manecillas del reloj un ángulo $\psi = \psi_{AB} = \psi_{DC} = \Delta/4$. Como $\theta_A = \theta_D = 0$ y no hay momentos de empotramiento en ningún miembro, tenemos

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi] + 0 \tag{1}$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)(2\theta_B + 0 - 3\psi) + 0 \tag{2}$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{3}\right)(\theta_B - 0) + 0 \tag{3}$$

$$M_{DC} = 3E\left(\frac{I}{4}\right)(0 - \psi) + 0 \tag{4}$$

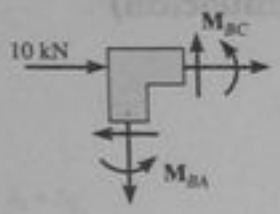


(b)

*Los desplazamientos angulares θ_{CB} y θ_{CD} en el nudo C (pasador) no se incluyen en el análisis ya que la ecuación 10–10 va a usarse.

Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio por momento en el nudo *B*, figura 10–20*c*, requiere que

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \tag{5}$$



(c)

Al sumar las fuerzas de *todo el marco* en la dirección horizontal, tenemos

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 10 - V_A - V_D = 0 \tag{6}$$

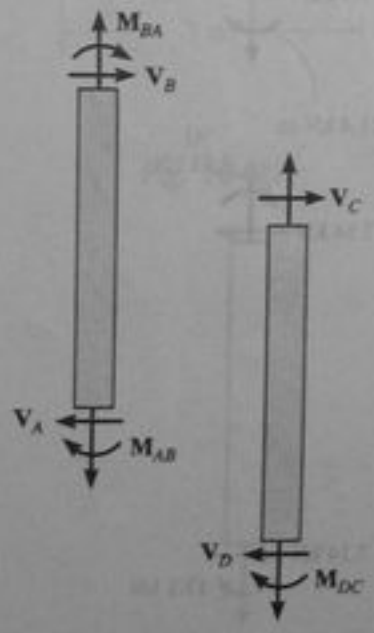
Como se muestra sobre el diagrama de cuerpo libre de cada columna, figura 10–20*d*, se tiene

$$\circlearrowleft+\Sigma M_B = 0; \qquad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4}$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_C = 0; \qquad V_D = -\frac{M_{DC}}{4}$$

Entonces, de la ecuación 6,

$$10 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} + \frac{M_{DC}}{4} = 0 \tag{7}$$



(d)

Sustituimos las ecuaciones de pendiente-desviación en las ecuaciones (5) y (7) y, simplificando, resulta

$$\theta_B = \frac{3}{4}\psi$$

$$10 + \frac{EI}{4}\left(\frac{3}{2}\theta_B - \frac{15}{4}\psi\right) = 0$$

Entonces,

$$\theta_B = \frac{240}{21EI}$$

$$\psi = \frac{320}{21EI}$$

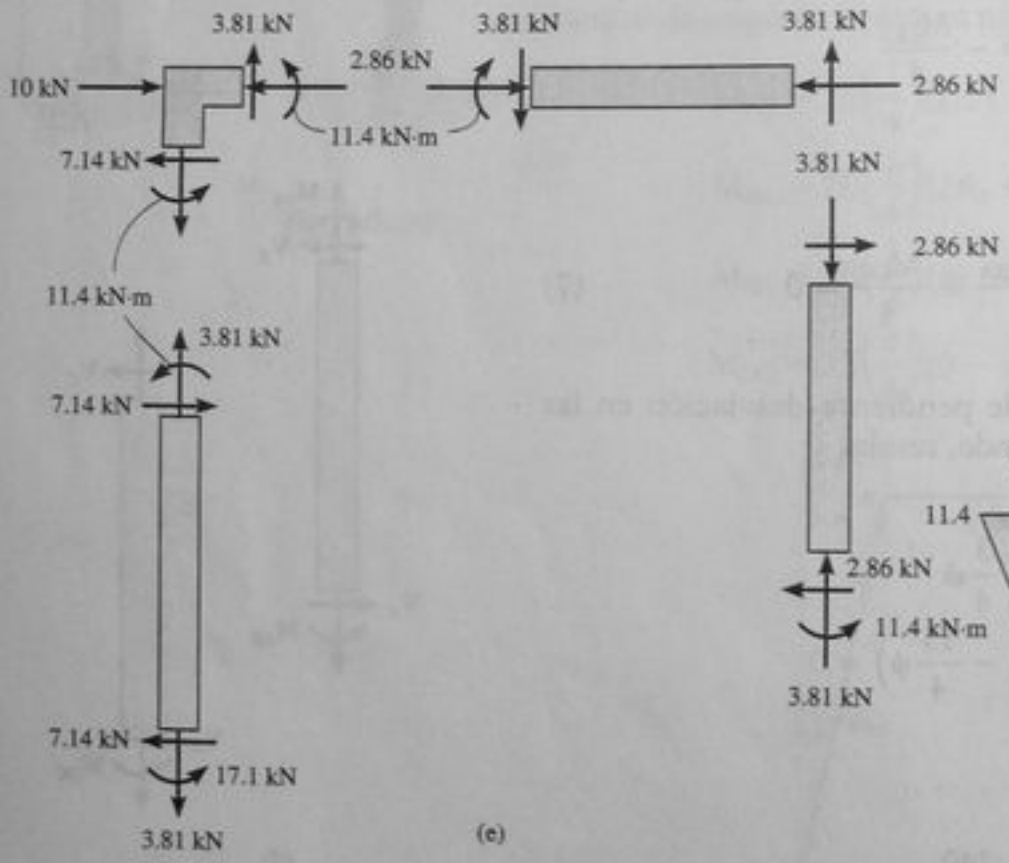
(continúa)

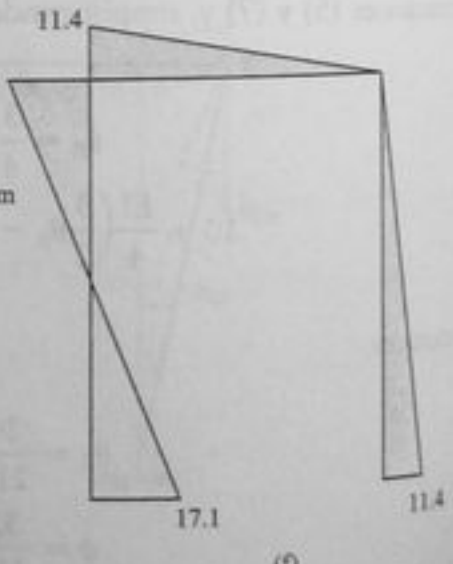
Ejemplo 10–8 (continuación)

Sustituimos estos valores en las ecuaciones (1) a la (4), de modo que tenemos

$$M_{AB} = -17.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{BA} = -11.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{BC} = 11.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{DC} = -11.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Mediante estos resultados, se obtienen las reacciones de extremo de cada miembro a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 10–20*e*. El diagrama de momentos flexionantes se muestra en la figura 10–20*f*.





Ejemplo 10–9

Explique cómo se determinan los momentos en cada nudo del marco de dos niveles que se muestra en la figura 10–21*a*. *EI* es constante.

Solución

Ecuación pendiente-desviación. Como los soportes en *A* y *F* están empotrados, la ecuación 10–8 es aplicable en los seis claros del marco. Ningún momento de empotramiento tiene que calcularse ya que las cargas aplicadas actúan sobre los nudos. La carga desplaza los nudos *B* y *E* en una distancia Δ_1 y los nudos *C* y *D* una distancia $\Delta_1 + \Delta_2$. En consecuencia, los miembros *AB* y *FE* sufren rotaciones $\psi_1 = \Delta_1/5$ y *BC* y *ED* sufren rotaciones $\psi_2 = \Delta_2/5$.

Al aplicar la ecuación 10–8 al marco, se obtiene

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi_1] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2] + 0 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3\psi_2] + 0 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_C + \theta_D - 3(0)] + 0 \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_D + \theta_C - 3(0)] + 0 \quad (6)$$

$$M_{BE} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_B + \theta_E - 3(0)] + 0 \quad (7)$$

$$M_{EB} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_E + \theta_B - 3(0)] + 0 \quad (8)$$

$$M_{ED} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_E + \theta_D - 3\psi_2] + 0 \quad (9)$$

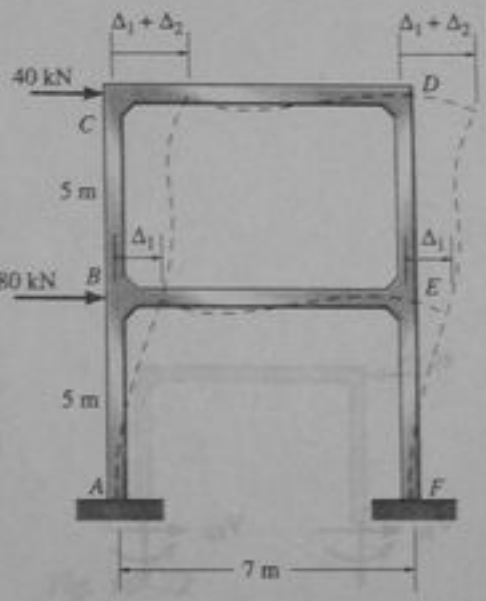
$$M_{DE} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2] + 0 \quad (10)$$

$$M_{FE} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2(0) + \theta_E - 3\psi_1] + 0 \quad (11)$$

$$M_{EF} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_E + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (12)$$

Estas doce ecuaciones contienen 18 incógnitas.

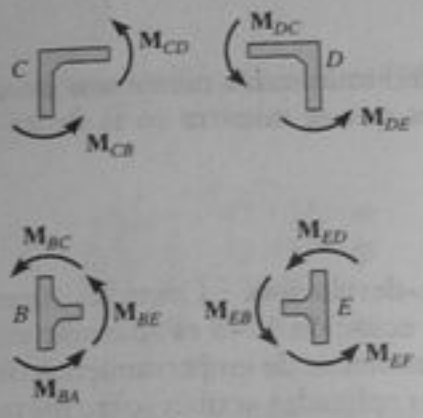
(continúa)



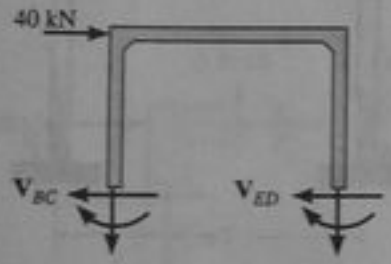
(a)

Fig. 10–21

Ejemplo 10–9 (continuación)

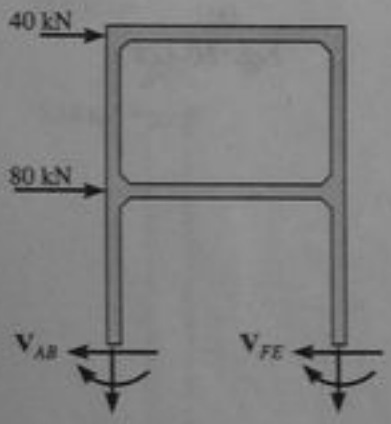


(b)



Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio por momento de los nudos *B*, *C*, *D* y *E*, figura 10–21*b*, requiere que

$$M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0 \tag{13}$$
$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \tag{14}$$
$$M_{DC} + M_{DE} = 0 \tag{15}$$
$$M_{EF} + M_{EB} + M_{ED} = 0 \tag{16}$$



(c)

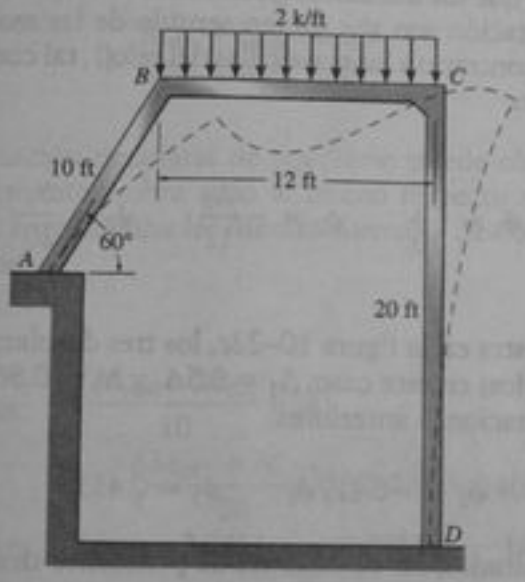
Igual que en los ejemplos anteriores, la fuerza cortante en la base de todas las columnas de cualquier nivel debe balancear las cargas horizontales aplicadas, figura 10–21c. Esto da

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 40 - V_{BC} - V_{ED} = 0$$
$$40 + \frac{M_{BC} + M_{CB}}{5} + \frac{M_{ED} + M_{DE}}{5} = 0 \tag{17}$$
$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 40 + 80 - V_{AB} - V_{FE} = 0$$
$$120 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{5} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{5} = 0 \tag{18}$$

La solución requiere que se sustituyan las ecuaciones (1) a la (12) en las ecuaciones (13) a la (18), lo que da seis ecuaciones con las incógnitas ψ_1, ψ_2, θ_B, θ_C, θ_D y θ_E. Estas ecuaciones pueden entonces resolverse simultáneamente. Los resultados se sustituyen en las ecuaciones (1) a la (12), lo que da los momentos en los nudos.

Ejemplo 10–10

Determine los momentos en cada nudo del marco que se muestra en la figura 10–22*a*. *EI* es constante en todos los miembros.



(a)

Fig. 10–22

Solución

Ecuaciones pendiente-desviación. La ecuación 10–8 es aplicable a cada uno de los tres claros. Los momentos de empotramiento son

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2(12)^2}{12} = -24\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(12)^2}{12} = 24\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

El miembro inclinado *AB* ocasiona que el marco se mueva hacia la derecha, como se muestra en la figura 10–22*a*. En consecuencia, los nudos *B* y *C* están sometidos a rotación y a desplaza-

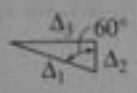
(continúa)

Ejemplo 10–10 (continuación)

miento. Los desplazamientos se muestran en la figura 10–22*b*; B se mueve Δ_1 hacia B' y C se mueve Δ_3 hacia C'. Estos desplazamientos ocasionan que los miembros giren como "cuerpos rígidos". Los ángulos de rotación son ψ_1, ψ_3 (en sentido de las manecillas del reloj) y $-\psi_2$ (contrario a las manecillas del reloj), tal como se muestra.* Por tanto,

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{10} \qquad \psi_2 = -\frac{\Delta_2}{12} \qquad \psi_3 = \frac{\Delta_3}{20}$$

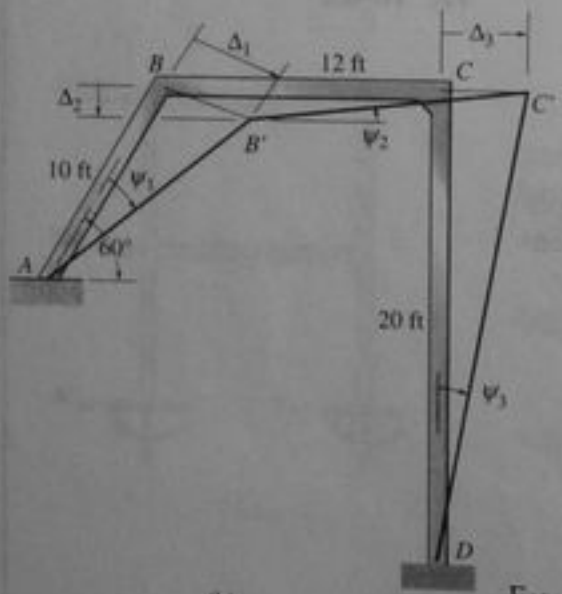
Como se muestra en la figura 10–22*c*, los tres desplazamientos están relacionados; en este caso, $\Delta_2 = 0.5\Delta_1$ y $\Delta_3 = 0.866\Delta_1$. Entonces, de las ecuaciones anteriores,



(c)

$$\psi_2 = -0.417\psi_1 \qquad \psi_3 = 0.433\psi_1$$

Con esos resultados, las ecuaciones de pendiente-desviación para el marco son



(b)

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi_1] + 0 \tag{1}$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi_1] + 0 \tag{2}$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(-0.417\psi_1)] - 24 \tag{3}$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(-0.417\psi_1)] + 24 \tag{4}$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0.433\psi_1)] + 0 \tag{5}$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0.433\psi_1)] + 0 \tag{6}$$

Estas seis ecuaciones contienen nueve incógnitas.

*Recuerde que las deformaciones por fuerza axial se desprecian y que los arcos de desplazamiento BB' y CC' pueden considerarse como líneas rectas, ya que ψ_1 y ψ_3 son en realidad muy pequeños.

Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio por momento en los nudos B y C da

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$
$$M_{CD} + M_{CB} = 0 \quad (8)$$

La tercera ecuación necesaria de equilibrio puede obtenerse sumando los momentos sobre todo el marco respecto al punto O, figura 10–22*d*. Esto elimina las fuerzas normales desconocidas N_A y N_D, por lo que

$$\curvearrowleft + \Sigma M_O = 0;$$
$$M_{AB} + M_{DC} - \left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{10}\right)(34) - \left(\frac{M_{DC} + M_{CD}}{20}\right)(40.78) - 24(6) = 0$$
$$-2.4M_{AB} - 3.4M_{BA} - 2.04M_{CD} - 1.04M_{DC} - 144 = 0 \quad (9)$$

Sustituimos las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8) y las ecuaciones (1),(2),(5) y (6) en la ecuación (9), de modo que se obtiene

$$0.733\theta_B + 0.167\theta_C - 0.392\psi_1 = \frac{24}{EI}$$
$$0.167\theta_B + 0.533\theta_C + 0.0786\psi_1 = -\frac{24}{EI}$$
$$-1.840\theta_B - 0.512\theta_C + 3.880\psi_1 = \frac{144}{EI}$$

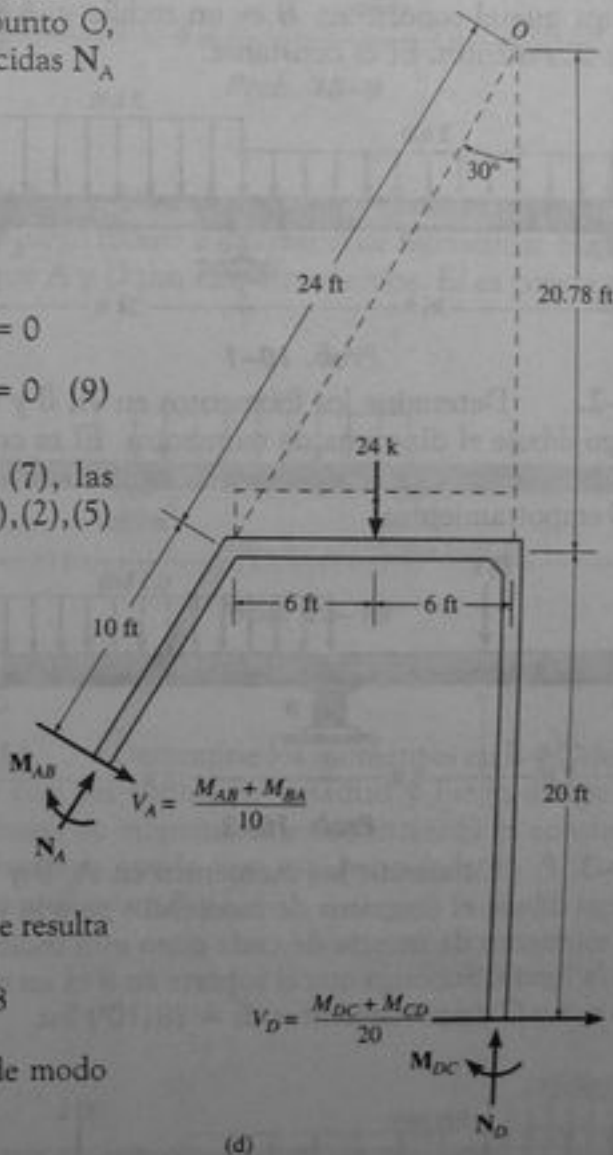
Resolvemos simultáneamente estas ecuaciones, de modo que resulta

$$EI\theta_B = 87.86 \qquad EI\theta_C = -82.57 \qquad EI\psi_1 = 67.88$$

Sustituimos esos valores en las ecuaciones (1) a la (6), de modo que tenemos

$M_{AB} = -23.2\ \text{k}\cdot\text{ft}$ $M_{BC} = 5.63\ \text{k}\cdot\text{ft}$ $M_{CD} = -25.3\ \text{k}\cdot\text{ft}$ ***Resp.***

$M_{BA} = -5.63\ \text{k}\cdot\text{ft}$ $M_{CB} = 25.3\ \text{k}\cdot\text{ft}$ $M_{DC} = -17.1\ \text{k}\cdot\text{ft}$ ***Resp.***



(d)

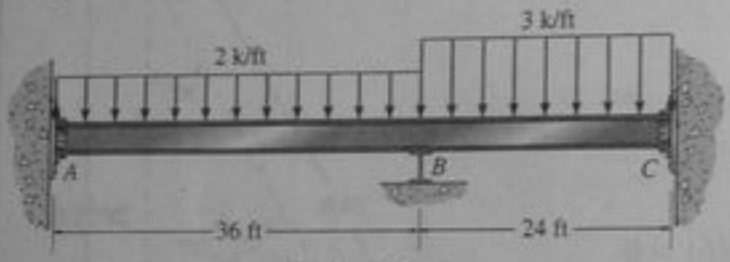
BIBLIOGRAFÍA

Evans, L. T., "The Modified Slope-Deflection Equations," *Journal of the American Concrete Institute*, Oct. 1931.

Maney, G. A., "Studies in Engineering," University of Minnesota, Minneapolis, MN, Bulletin No. 1, 1915.

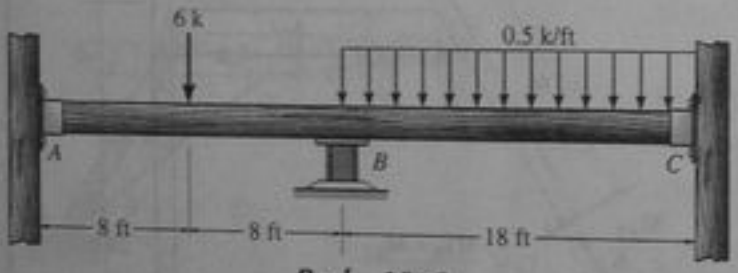
PROBLEMAS

10–1. Determine los momentos en *A*, *B* y *C*. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo y *A* y *C* empotramientos. *EI* es constante.



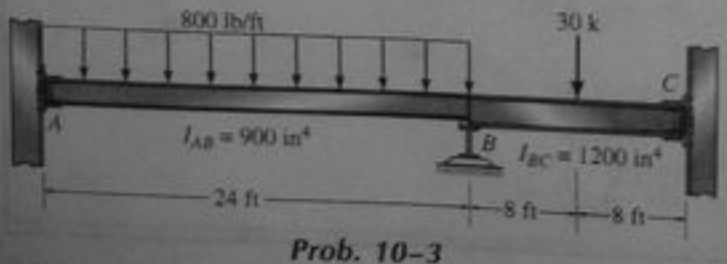
Prob. 10–1

10–2. Determine los momentos en *A*, *B* y *C* y luego dibuje el diagrama de momentos. *EI* es constante. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo y *A* y *C* empotramientos.



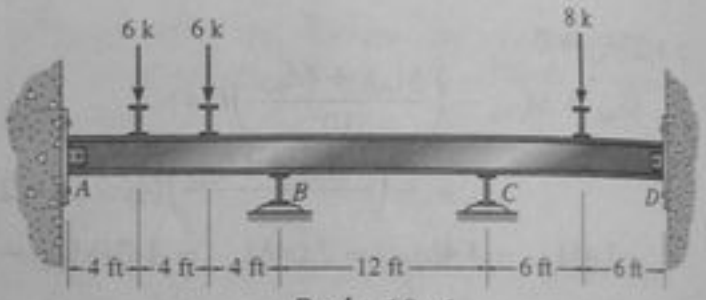
Prob. 10–2

10–3. Determine los momentos en *A*, *B* y *C* y luego dibuje el diagrama de momentos para la viga. El momento de inercia de cada claro está indicado en la figura. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo y *A* y *C* empotramientos. $E = 29(10^3)$ ksi.



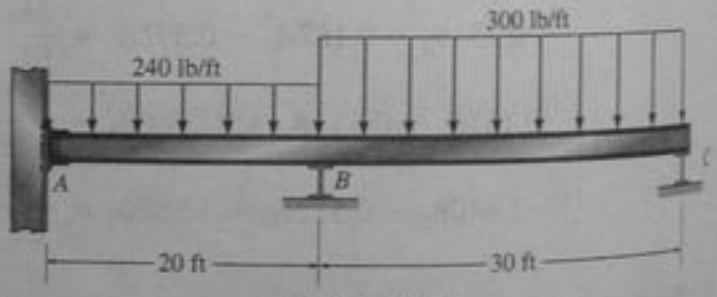
Prob. 10–3

***10–4.** Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes. Suponga que *A* y *D* son pasadores y *B* y *C* rodillos. El soporte en *B* se asienta 0.03 ft. Considere $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 4500$ in^4.



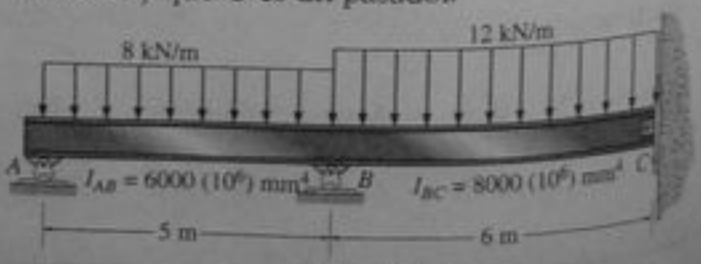
Prob. 10–4

10–5. Determine los momentos en *A*, *B* y *C*. El soporte en *B* se asienta 0.15 ft. $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 8000$ in^4. Suponga que los soportes en *B* y *C* son rodillos y *A* un empotramiento.



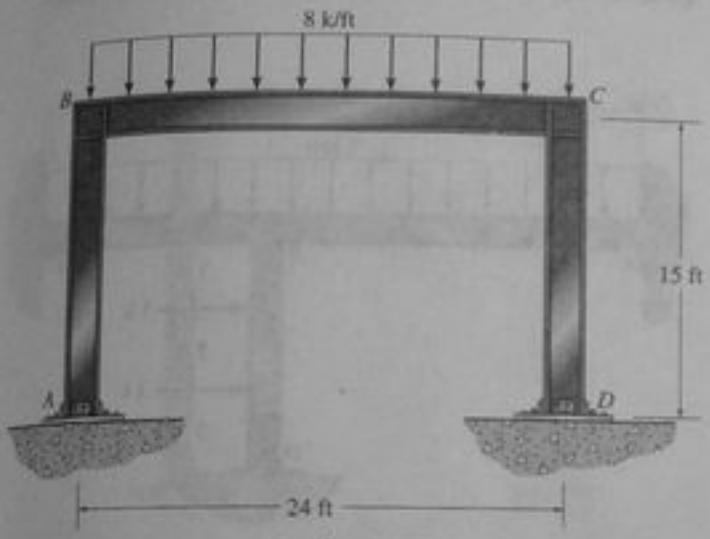
Prob. 10–5

10–6. Determine el momento interno en el punto *B* de la viga y luego dibuje el diagrama de momento flexionante. Suponga que *A* y *B* son apoyos de balancín y que *C* es un pasador.



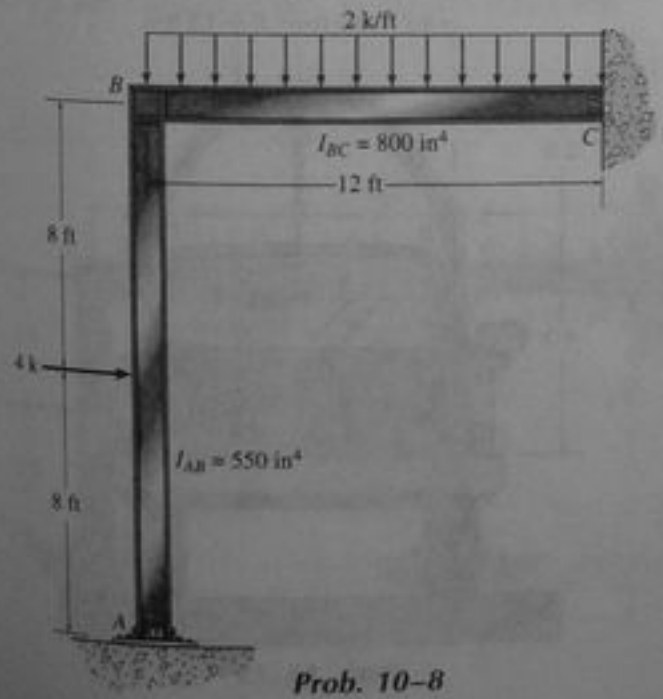
Prob. 10–6

10–7. Determine las reacciones en A y D. Considere EI de igual valor en todos los miembros. Suponga que los soportes en A y D son empotramientos.



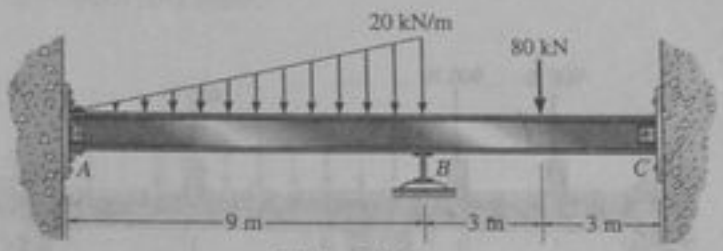
Prob. 10–7

***10–8.** Determine los momentos en los extremos de cada miembro del marco. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. El momento de inercia de cada miembro se indica en la figura. Suponga que el nudo en B es rígido, C articulado y A empotrado.



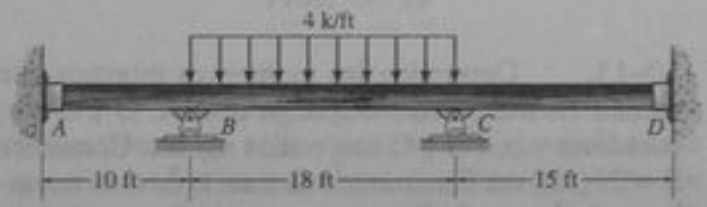
Prob. 10–8

10–9. Determine los momentos en A y B. Suponga que A es un empotramiento, B un rodillo y C un pasador. EI es constante.



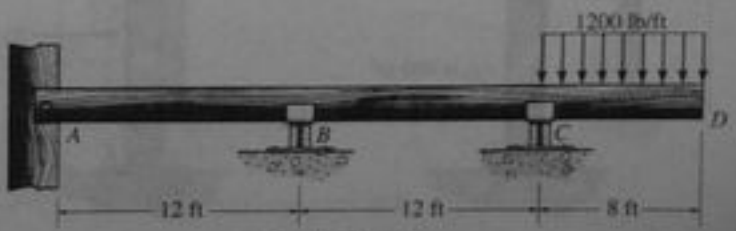
Prob. 10–9

10–10. Determine los momentos en los soportes y luego dibuje el diagrama de momentos. Suponga que A y D son empotramientos. EI es constante.



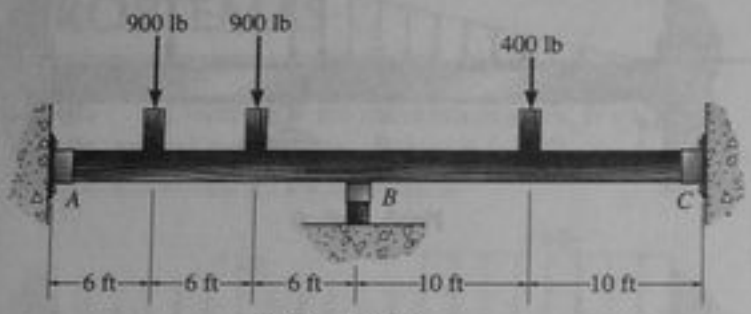
Prob. 10–10

10–11. Determine los momentos en B y C de la viga con un tramo en voladizo y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes. EI es constante. Suponga que la viga está articulada en A y que tiene rodillos en B y C.



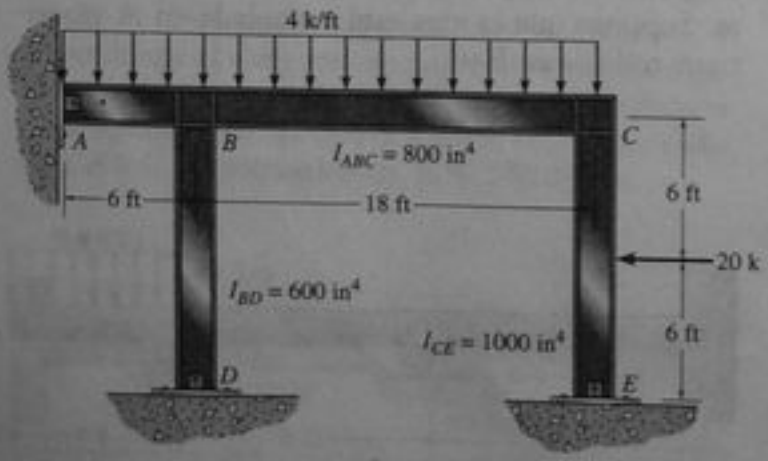
Prob. 10–11

*10–12. Determine los momentos en A, B y C y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes. EI es constante. Suponga que el soporte en B es un rodillo y A y C empotramientos.



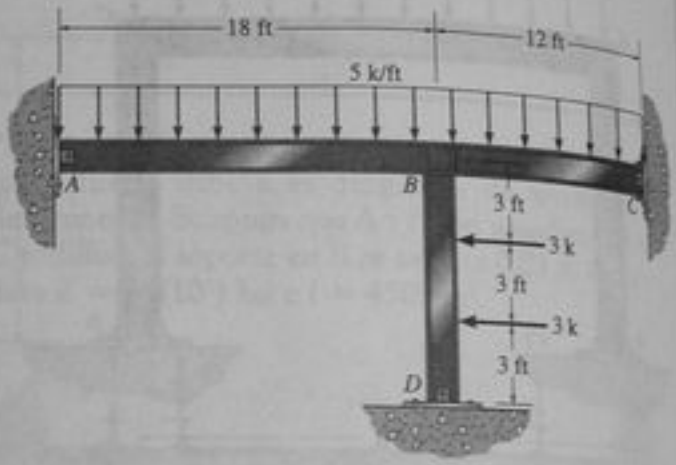
Prob. 10–12

10–13. Determine los momentos internos que actúan en cada nudo. Suponga que A, D y E son pasadores y que B y C son nudos rígidos. Considere $E = 29(10^3)$ksi. El momento de inercia de cada miembro se indica en la figura.



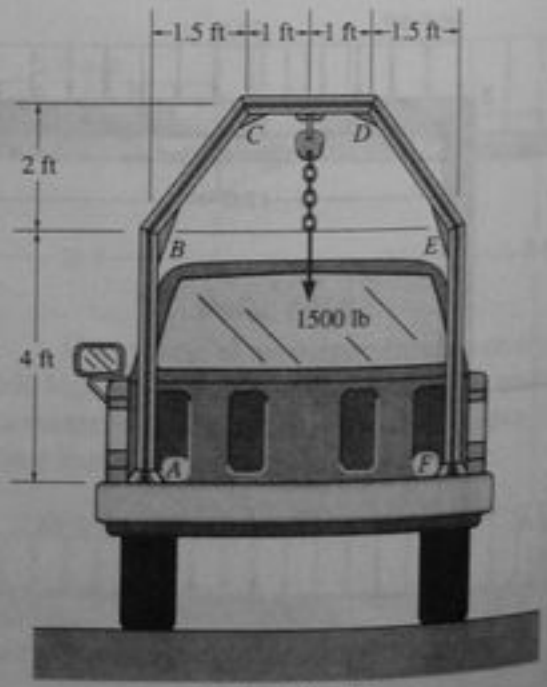
Prob. 10–13

10–14. Determine los momentos que actúan en los extremos de cada miembro. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I_{ABC} = 700$ in^4 e $I_{BD} = 1100$ in^4. Suponga que A y D están articulados y C está empotrado.



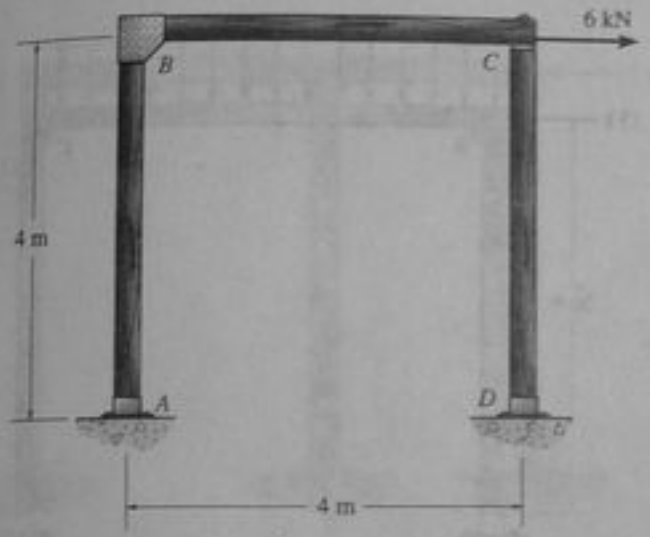
Prob. 10–14

10–15. El bastidor en la parte posterior del camión está hecho de segmentos de tubos soldados. Si la carga aplicada es de 1500 lb, determine los momentos en los nudos rígidos B, C, D y E. Suponga que los soportes en A y F están articulados. EI es constante.



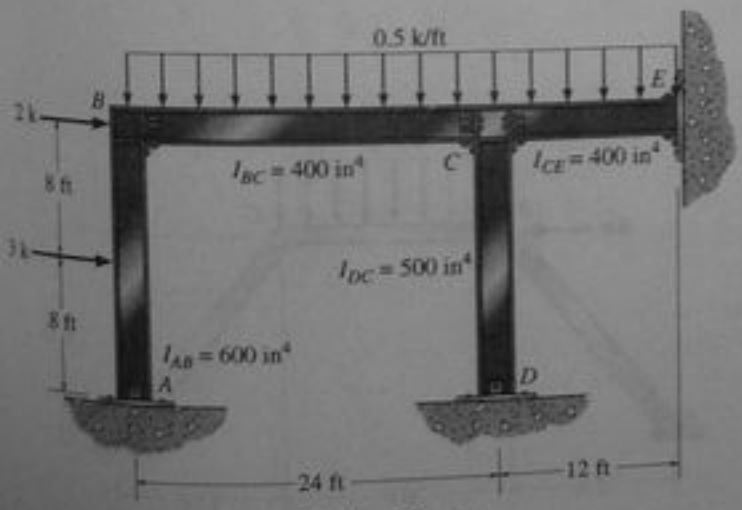
Prob. 10–15

*10–16. El marco de madera está sometido a la carga de 6 kN. Determine los momentos en los nudos rígidos *A*, *B* y *D*. El nudo en C está articulado. *EI* es constante.



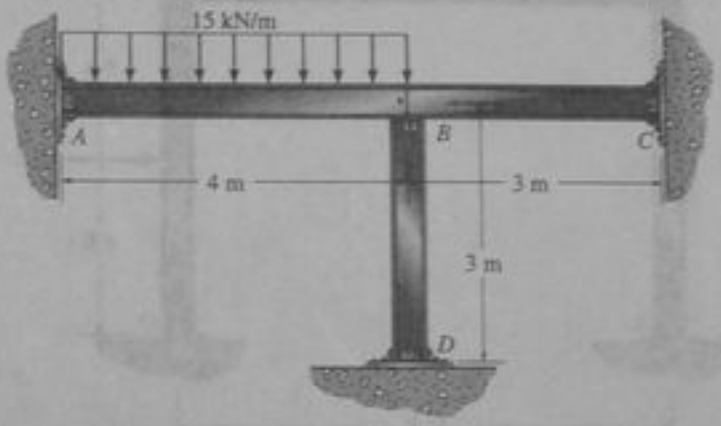
Prob. 10–16

10–17. Determine los momentos en cada nudo del marco y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes para el miembro *BCE*. Suponga que *B*, C y *E* son nudos rígidos y *A* y *D* son pasadores.



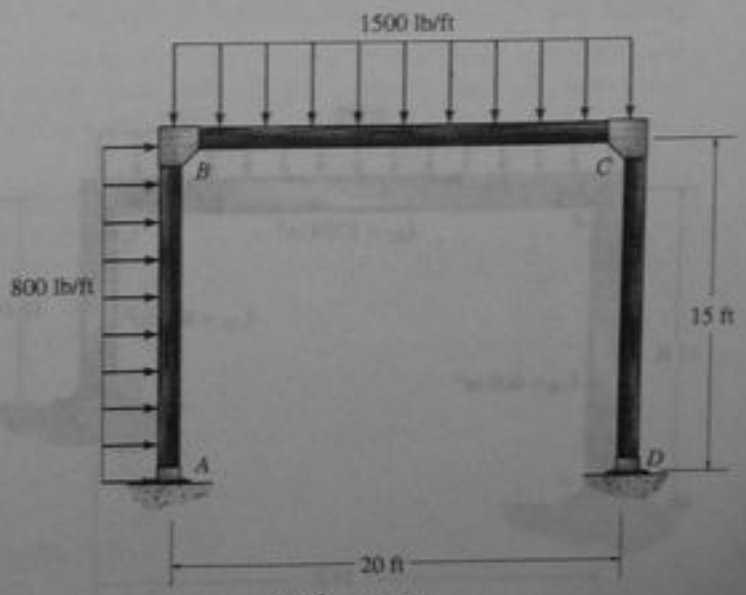
Prob. 10–17

10–18. Cuando se aplica la carga de 15 kN/m al marco de tres miembros, el soporte en *D* se asienta 10 mm. Determine el momento que actúa en cada uno de los soportes rígidos *A*, C y *D*. Los miembros están conectados por pasadores en *B*. $E = 200$ GPa e $I = 800(10^6)$ mm^4.



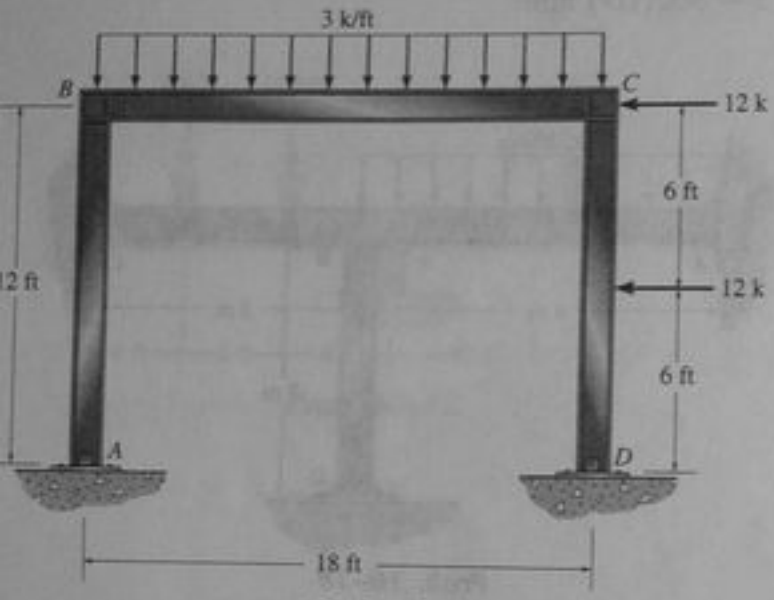
Prob. 10–18

10–19. Determine los momentos que actúan en los extremos de cada miembro. *EI* tiene el mismo valor en todos los miembros. Suponga que todos los nudos son rígidos.



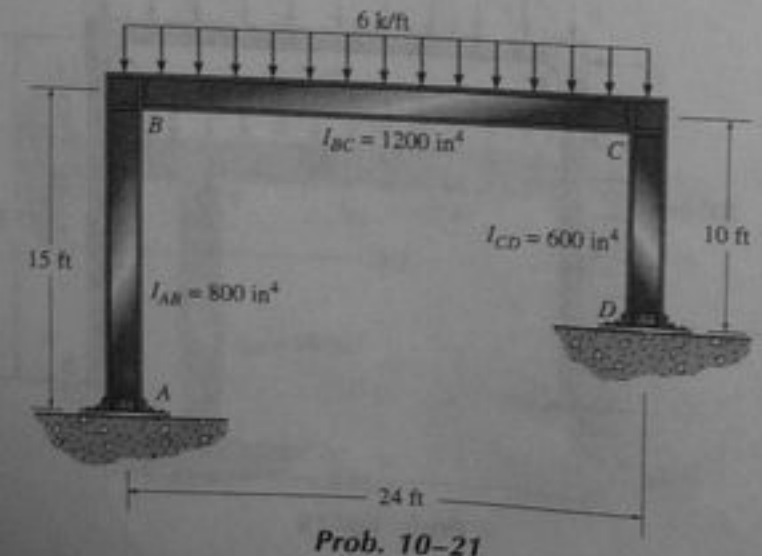
Prob. 10–19

*10–20. Determine los momentos en los extremos de cada miembro. Suponga que A y D son pasadores y B y C nudos rígidos. EI tiene el mismo valor en todos los miembros.



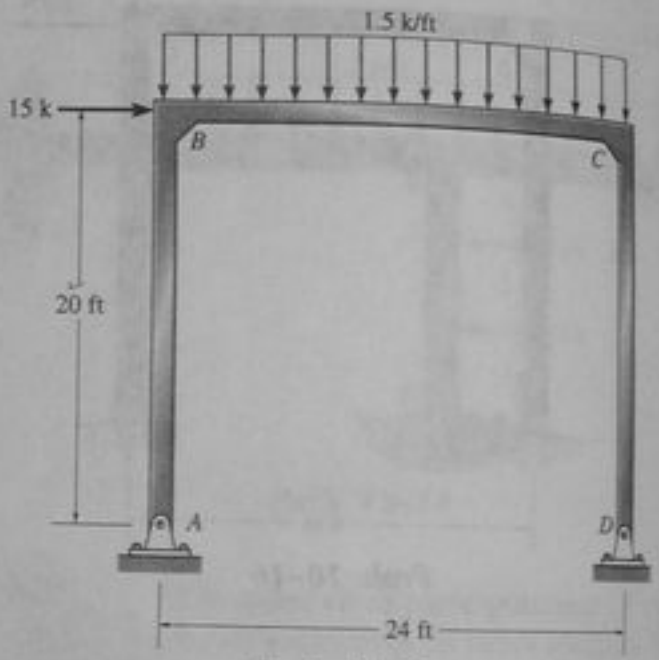
Prob. 10–20

10–21. Determine los momentos que actúan en los extremos de cada miembro. Suponga que los soportes en A y D son empotramientos. El momento de inercia de cada miembro se indica en la figura. $E = 29(10^3)$ ksi.



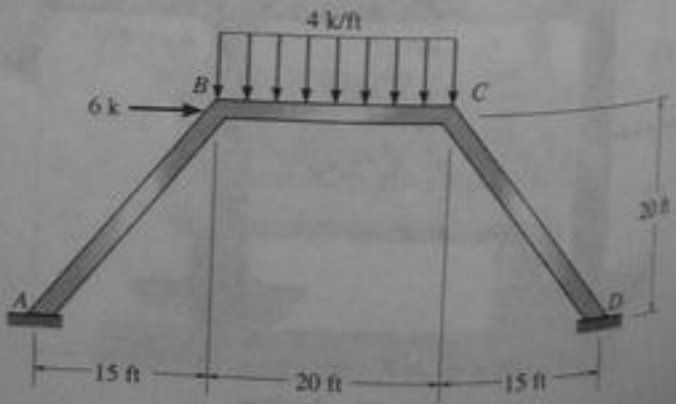
Prob. 10–21

10–22. Determine los momentos que actúan en los extremos de cada miembro del marco. EI tiene el mismo valor en todos los miembros.



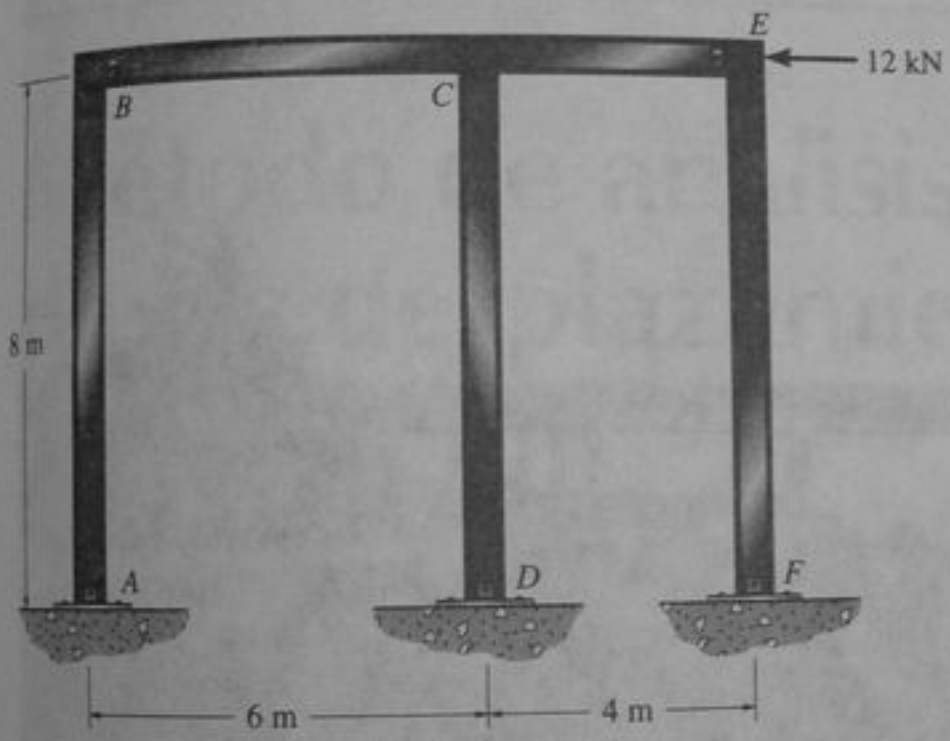
Prob. 10–22

10–23. Determine los momentos que actúan en los soportes A y D del marco con columnas inclinadas. Considere $E = 29(10^3)$ksi, $I = 600$ in^4.

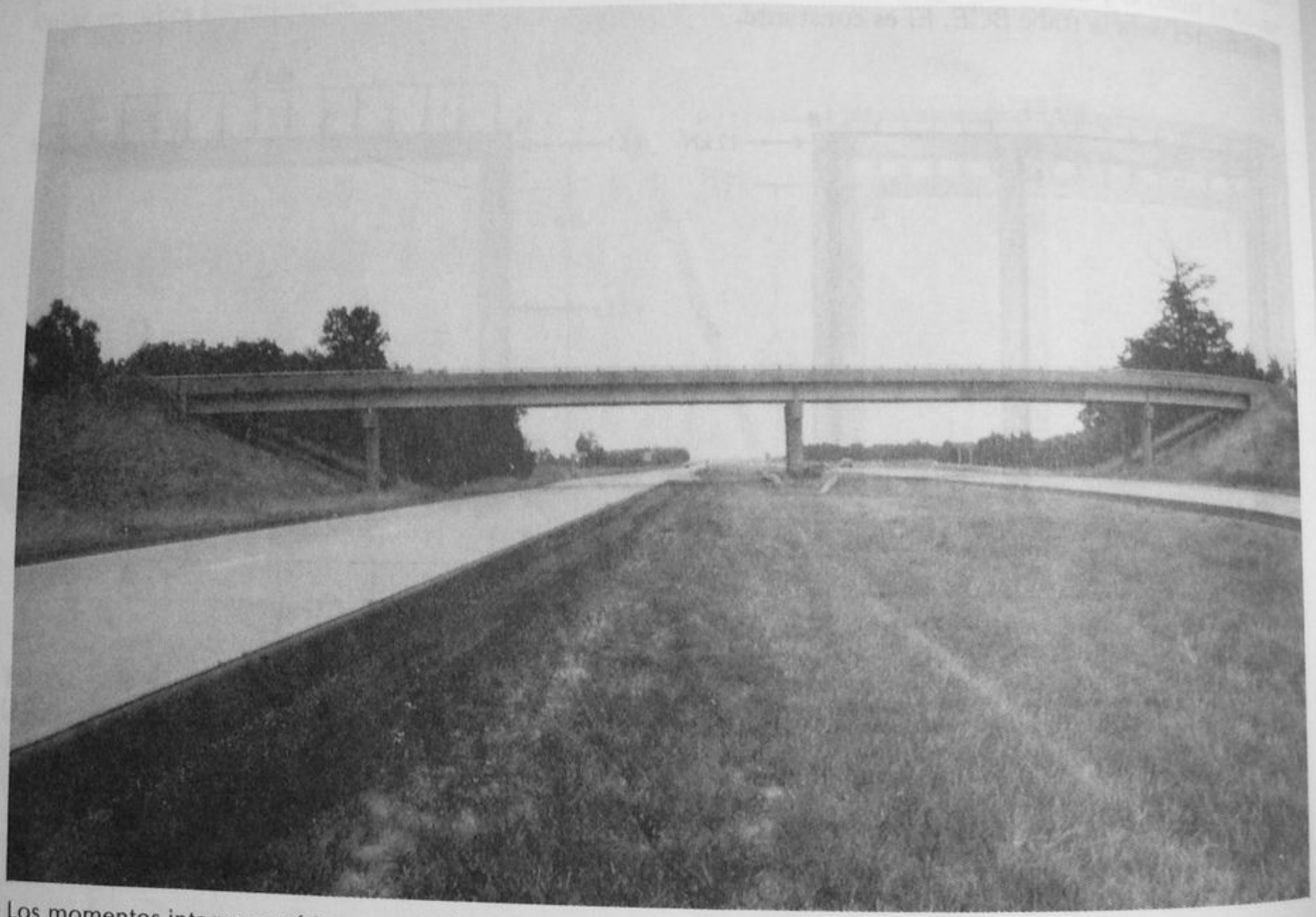


Prob. 10–23

*10–24. La carga de viento se transmite al marco a través del nudo E. Si A, B, E, D y F están articulados y C es un nudo rígido, determine los momentos en el nudo C y dibuje el diagrama de momentos flexionantes para la trabe BCE. EI es constante.



Prob. 10–24



Los momentos internos estáticamente indeterminados en trabes de puentes continuas sobre sus estribos pueden determinarse usando el método de distribución de momentos.

11

Método de análisis de los desplazamientos: distribución de momentos

El método de la distribución de momentos es un método de análisis de desplazamientos aplicable fácilmente una vez que se han determinado ciertas constantes. En este capítulo daremos primero las importantes definiciones y conceptos para la distribución de momentos y luego aplicaremos el método a la solución de problemas de vigas y marcos estáticamente indeterminados. La aplicación a marcos de niveles múltiples se verá en la última parte del capítulo.

11.1 Principios generales y definiciones

El método para analizar vigas y marcos usando la distribución de momentos fue desarrollado por Hardy Cross, quien era entonces profesor de ingeniería civil en la Universidad de Illinois. Cuando el método fue publicado en 1932, atrajo de inmediato la atención y ha sido reconocido como uno de los avances más notables en el análisis estructural durante el presente siglo.

Como se explicará luego en detalle, la distribución de momentos es un método de aproximaciones sucesivas que pueden llevarse a cualquier grado de exactitud deseada. Esencialmente, el método comienza suponiendo que cada nudo de la estructura está fijo. Luego, al soltar y bloquear cada nudo de manera sucesiva, los momentos internos en los nudos se "distribuyen" y balancean hasta que éstos han girado hasta alcanzar sus posiciones finales o casi finales. Se verá que

este proceso de cálculo es repetitivo y fácil de aplicar. Sin embargo, antes de explicar la técnica de la distribución de momentos, deben presentarse algunas definiciones y conceptos.

Convención de signos

Estableceremos la misma convención de signos que la usada para el método general de los desplazamientos y para las ecuaciones de pendiente-desviación: los *momentos que siguen el sentido de las manecillas del reloj* y que actúan *sobre el miembro* se consideran *positivos* y los *momentos en sentido contrario a las manecillas del reloj*, son *negativos*.

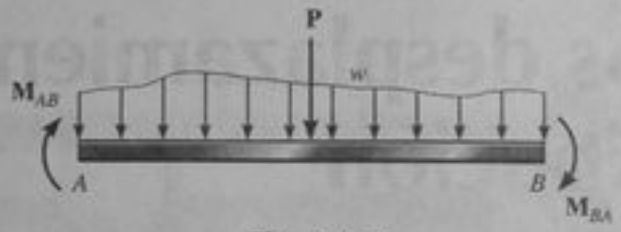


Fig. 11–1

Momentos de empotramiento (FEM)

Los momentos en los "muros" o empotramientos de un miembro cargado se llaman *momentos de empotramiento*. Estos momentos pueden determinarse con ayuda de la tabla dada en las páginas suplementarias al final del libro y dependen del tipo de carga que soporte el miembro. Por ejemplo, la viga cargada como se muestra en la figura 11–2, tiene momentos FEM = $PL/8 = 800(10)/8 = 1000\ \text{N} \cdot \text{m}$. Observamos la acción de esos momentos *sobre la viga* y, si aplicamos nuestra convención de signos, vemos que $M_{AB} = -1000\ \text{N} \cdot \text{m}$ y $M_{BA} = +1000\ \text{N} \cdot \text{m}$.

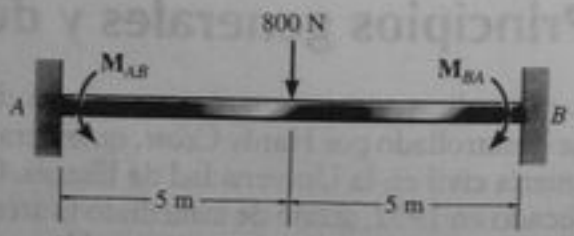


Fig. 11–2

Factor de rigidez de miembro

Consideremos la viga en la figura 11–3 que está articulada en un extremo y empotrada en el otro. Al aplicarle el momento **M**, su extremo *A* gira en un ángulo θ_A. En el capítulo 10 relacionamos M con θ_A con el uso del método de la viga conjugada. Eso condujo a la ecuación 10–1, esto es, $M = (4EI/L)\theta_A$. El término

Fig. 11–3

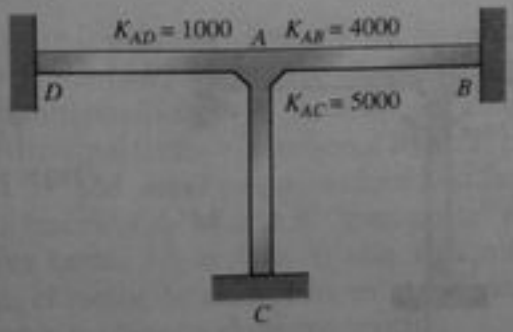
$$K = \frac{4EI}{L} \qquad (11\text{–}1)$$

Extremo alejado empotrado

se denomina *factor de rigidez* en A y puede definirse como el momento M requerido para hacer girar el extremo A de la viga en un ángulo $\theta_A = 1$ radián.

Factor de rigidez de nudo

Si varios miembros están rígidamente conectados a un nudo y cada uno de sus extremos alejados está empotrado, entonces, por el principio de superposición, *el factor de rigidez total en el nudo es la suma de los factores de rigidez de miembro en el nudo*, esto es, $K_T = \Sigma K$. Por ejemplo, considere el nudo A del marco en la figura 11–4*a*. El valor numérico de cada factor de rigidez de miembro se determina con la ecuación 11–1 y está dado en la figura. Si utilizamos esos valores, el factor de rigidez total del nudo A es $K_T = \Sigma K = 4000 + 5000 + 1000 = 10{,}000$. Este valor representa la magnitud del momento requerido para que el nudo gire en un ángulo de 1 radián.



(a)

Fig. 11–4

Factor de distribución (DF)

Si se aplica un momento **M** a un nudo conectado rígidamente, los miembros conectados contribuirán cada uno con una porción del momento resistente necesario para satisfacer el equilibrio por momento en el nudo. Esta fracción del momento resistente total suministrado por el miembro se llama *factor de distribución* (DF). Para obtener su valor, imagine que el nudo está conectado rígidamente a n miembros. Si un momento aplicado **M** ocasiona que el nudo gire en un ángulo θ, entonces cada miembro i girará en este mismo ángulo. Si el factor de rigidez del i-ésimo miembro es K_i, entonces el momento aportado por el miembro es $M_i = K_i\theta$. Como el equilibrio requiere que

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 + \cdots + M_i + \cdots + M_n \\ &= K_1\theta + K_2\theta + \cdots + K_i\theta + \cdots + K_n\theta = \theta\Sigma K_i \end{aligned}$$

el factor de distribución del i-ésimo miembro es entonces

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i\theta}{\theta\Sigma K_i}$$

Cancelando el término común θ, se ve que el factor de distribución para un miembro es igual al factor de rigidez del miembro dividido entre el factor de rigidez total del nudo; esto es, en general

$$\boxed{DF = \frac{K}{\Sigma K}} \qquad (11\text{–}2)$$

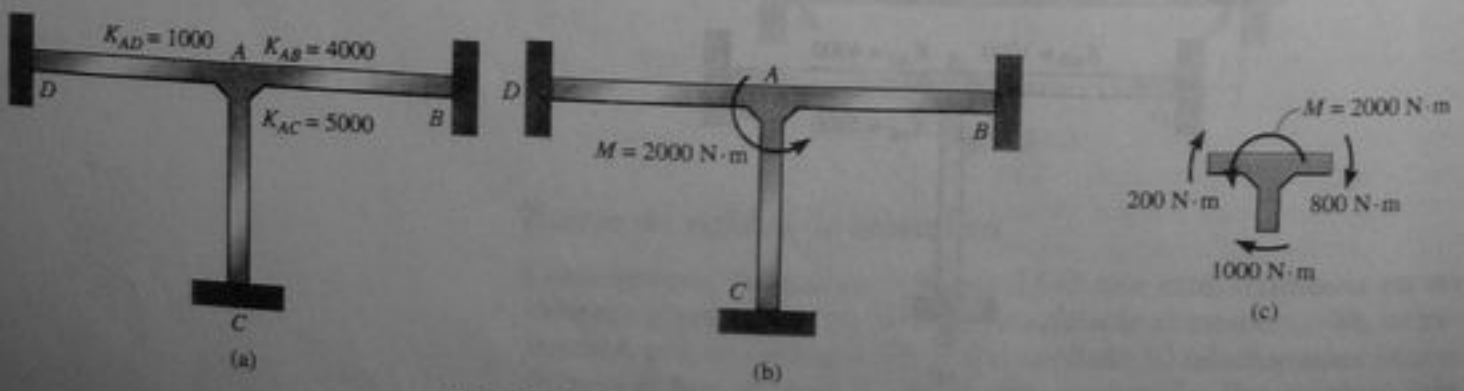


Fig. 11-4

Por ejemplo, los factores de distribución para los miembros *AB*, *AC* y *AD* en el nudo *A* en la figura 11–4*a* son

$$DF_{AB} = 4000/10{,}000 = 0.4$$
$$DF_{AC} = 5000/10{,}000 = 0.5$$
$$DF_{AD} = 1000/10{,}000 = 0.1$$

En consecuencia, si $M = 2000\ N \cdot m$ actúa en el nudo *A*, figura 11–4*b*, los momentos de equilibrio ejercidos por los miembros sobre el nudo, figura 11–4c, son

$$M_{AB} = 0.4(2000) = 800\ N \cdot m$$
$$M_{AC} = 0.5(2000) = 1000\ N \cdot m$$
$$M_{AD} = 0.1(2000) = 200\ N \cdot m$$

Factor de rigidez relativa del miembro

Cuando una viga o marco están hechos de un solo material, el módulo de elasticidad será el *mismo* para todos sus miembros. Si esto es así, el factor común $4E$ en la ecuación 11–1 se *cancelará* en el numerador y en el denominador de la ecuación 11–2 al determinar el factor de distribución de un nudo. Por tanto, es *más fácil* determinar sólo el *factor de rigidez relativa* del miembro,

$$K_R = \frac{I}{L} \qquad (11\text{–}3)$$

Extremo alejado empotrado

y usarlo para los cálculos del factor de distribución.

Fig. 11–3 (Repetida)

Factor de transporte

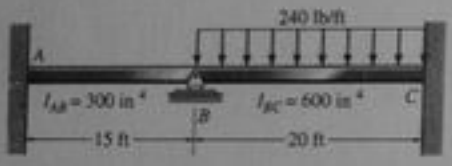
Considere nuevamente la viga en la figura 11–3. Se mostró en el capítulo 10 que $M_{AB} = (4EI/L)\theta_A$ (ecuación 10–1) y $M_{BA} = (2EI/L)\theta_A$ (ecuación 10–2). Despejando θ_A de estas dos ecuaciones, obtenemos $M_{BA} = M_{AB}/2$. En otras palabras, el momento **M** en el pasador, induce un momento $\mathbf{M'} = \frac{1}{2}\mathbf{M}$ en el empotramiento. El factor de transporte representa la fracción de **M** que se "transporta" del pasador al empotramiento. Por tanto, en el caso de una viga con su extremo alejado empotrado, el factor de transporte es $+\frac{1}{2}$. El signo + indica que ambos momentos actúan en el mismo sentido.

Las definiciones y resultados anteriores se usarán ahora para explicar el método de la distribución de momentos.

11.2 Distribución de momentos para vigas

La distribución de momentos se basa en el principio de empotrar y soltar sucesivamente los nudos de una estructura para permitir que los momentos en los nudos se distribuyan y se balanceen.*

Considere la viga con módulo de elasticidad constante E y con las dimensiones y carga mostradas en la figura 11–5*a*. Antes de empezar debemos primero determinar los factores de distribución en los dos extremos de cada claro. Con el uso de la ecuación 11–1, $K = 4EI/L$, los *factores de rigidez relativa* de esos extremos son



(a)

Fig. 11–5

$$(K_R)_{AB} = \frac{4E(300)}{15} = 4E(20)\ \text{in}^4/\text{ft} \quad (K_R)_{BC} = \frac{4E(600)}{20} = 4E(30)\ \text{in}^4/\text{ft}$$

Entonces, con la ecuación 11–2, $DF = K/\Sigma K$, para los extremos conectados al nudo B, tenemos

$$\text{DF}_{BA} = \frac{4E(20)}{4E(20) + 4E(30)} = 0.4$$

$$\text{DF}_{BC} = \frac{4E(30)}{4E(20) + 4E(30)} = 0.6$$

En los empotramientos, nudos A y C, los factores de distribución dependen del factor de rigidez del miembro y del "factor de rigidez" del muro. Como en teoría se necesitaría un momento de magnitud "infinita" para girar el muro en un radián, el factor de rigidez del muro es infinito. Entonces, para los nudos A y C, tenemos

$$\text{DF}_{AB} = \frac{4E(20)}{\infty + 4E(20)} = 0$$

$$\text{DF}_{CB} = \frac{4E(30)}{\infty + 4E(30)} = 0$$

Observe que los resultados anteriores también se podrían haber obtenido si se hubiese usado el factor de rigidez $K_R = I/L$ (ecuación 11–3) en los cálculos. Además, en tanto que se use un conjunto *consistente* de unidades para el factor de rigidez, el DF siempre será adimensional, y en un nudo, excepto cuando éste sea un empotramiento real, la suma de los factores de distribución siempre será igual a 1.

Una vez calculados los factores de distribución, determinamos los momentos de empotramiento. Sólo el claro BC está cargado y me-

*La mejor manera de explicar este método es mediante ejemplos.

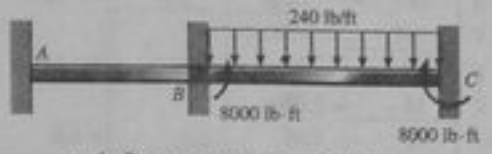
diante la tabla de las páginas suplementarias al final del libro, para una carga uniforme, obtenemos

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{240(20)^2}{12} = -8000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{240(20)^2}{12} = 8000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Comenzamos suponiendo que el nudo B está fijo o empotrado. El momento de empotramiento en B mantiene al claro BC en esta posición fija como se muestra en la figura 11–5*b*. Esto, por supuesto, no representa la situación real de equilibrio en B ya que los momentos a *cada lado* de este nudo deben ser iguales pero opuestos. Para corregirlo, aplicamos un momento igual pero opuesto de 8000 lb · ft al nudo y permitimos que éste gire libremente, figura 11–5*c*. Como consecuencia, porciones de este momento se distribuyen en los claros BC y BA de acuerdo con los factores de distribución (o de rigidez) de esos claros en el nudo. Específicamente, el momento en BC es $0.6(8000) = 4800$ lb · ft y el momento en BA es $0.4(8000) = 3200$ lb · ft. Finalmente, debido a la rotación liberada que se lleva a cabo en B, esos momentos deben "transportarse" ya que se desarrollan momentos en los extremos alejados del claro. Al utilizar el factor de transporte de +1/2, los resultados se muestran en la figura 11–5*d*.

Este ejemplo indica los pasos básicos necesarios para distribuir momentos en un nudo: Determine el momento de desequilibrio que actúa en el nudo inicialmente empotrado, suelte el nudo y aplique un momento igual pero opuesto al de desequilibrio, distribuya este momento entre los claros conectados y transporte el momento en cada claro hacia su otro extremo. Estos pasos se presentan usualmente en forma tabular, como se indica en la figura 11–5*e*. Aquí, la notación Dist, CO indica una línea donde los momentos se distribuyen y luego se transportan. En este caso particular, sólo *un ciclo* de distribución de momentos es necesario, ya que los soportes en A y C "absorben" los momentos y ningún nudo adicional tiene que ser balanceado o soltado para satisfacer el equilibrio del nudo. Una vez distribuidos de esta manera, los momentos en cada nudo se suman, dando los resultados finales mostrados en el último renglón de la tabla en la figura 11–5*e*. Note que el nudo B está ahora en equilibrio. Como M_{BC} es negativo, este momento se aplica al claro BC en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de los claros de la viga en la figura 11–5*f*. Con los momentos de extremo conocidos, las fuerzas cortantes de extremo se han calculado con las ecuaciones de equilibrio aplicadas a cada uno de esos claros.

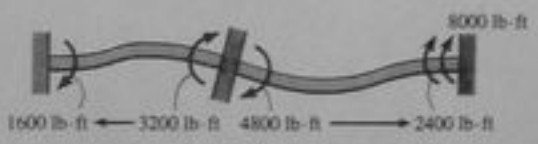


nudo B que se mantiene empotrado

(b)

momento correctivo aplicado al nudo B

(c)

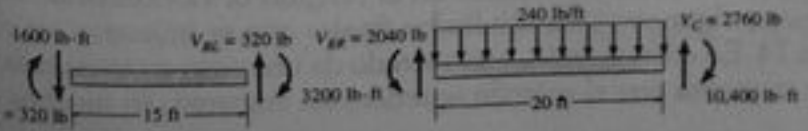


momento en B distribuido y transportado

(d)

Nudo	A	B		C
Miembro	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4	0.6	0
FEM			−8000	8000
Dist, CO	1600 ←	3200	4800 →	2400
ΣM	1600	3200	−3200	10,400

(e)



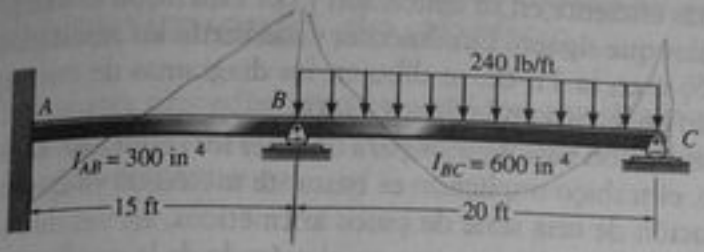
(f)

Considere ahora la misma viga, excepto que el soporte en C es un apoyo de balancín, figura 11–6*a*. En este caso sólo se tiene *un miembro* en el nudo C, por lo que el factor de distribución para el miembro *CB* en el nudo C es

$$DF_{CB} = \frac{30}{30} = 1$$

Los otros factores de distribución y momentos de empotramiento son los mismos que los calculados antes; están indicados en los renglones 1 y 2 de la tabla en la figura 11–6*b*. Inicialmente supondremos que los nudos *B* y C están empotrados. Comenzamos soltando el nudo C y co-locando un momento equilibrante de –8000 lb · ft en el nudo. El momento entero se distribuye en el miembro *CB*, pues (1)(–8000) lb · ft = –8000 lb · ft. La flecha en el renglón 3 indica que 1/2 (–8000) lb · ft = –4000 lb · ft han sido transportados al nudo *B* ya que se ha permitido que el nudo C gire libremente. El nudo C se *empotra de nuevo*. Como el momento total en C está *balanceado*, se traza una línea bajo el momento de –8000 lb · ft. Consideramos ahora el momento desbalanceado de –12,000 lb · ft en el nudo *B*. Aquí, por equilibrio, aplicamos un momento de +12,000 lb · ft y se suelta el nudo de manera que porciones del momento se distribuyen en *BA* y en *BC*, esto es, (0.4)(12,000) = 4800 lb · ft y (0.6)(12,000) = 7,200 lb · ft, como se muestra en el renglón 4. Observe que +1/2 de esos momentos deben transportarse al empotramiento en *A* y al rodillo C, ya que el nudo *B* ha girado. El nudo *B* se *vuelve a empotrar*. De nuevo, el nudo C se suelta y el momento desbalanceado en el rodillo se distribuye como se hizo antes. Los resultados se muestran en el renglón 5. Al empotrar y soltar sucesivamente los nudos *B* y C, se disminuye el tamaño del momento por balancear hasta que resulta insignificante respecto a la magnitud de los momentos iniciales, renglón 14. Cada uno de los pasos en los renglones 3 al 14 deben comprenderse con claridad. Se suman los momentos, y los resultados últimos se muestran en el renglón 15, donde se ve que los momentos finales satisfacen ahora el equilibrio en los nudos.

En vez de aplicar el proceso de distribución de momentos sucesivamente a cada nudo, como se ilustró aquí, es también posible aplicarlo a todos los nudos al *mismo tiempo*. Este procedimiento se muestra en la tabla en la figura 11–6*c*. En este caso, comenzamos empotrando todos los nudos y luego balanceando y distribuyendo los momentos de empotramiento en los nudos *B* y C, renglón 3. Se sueltan luego simultáneamente los nudos *B* y C (el nudo *A* siempre está empotrado) y los momentos se transportan al extremo de cada claro, renglón 4. De nuevo, los nudos se empotran y los momentos se balancean y se distribuyen, renglón 5. Al soltar los nudos se permite que los momentos se transporten, como se muestra en el renglón 6. Continuando de esta manera, obtenemos los resultados finales que se muestran en el renglón 24. En comparación, este método da una convergencia más lenta a la respuesta que el método anterior; sin embargo, en muchos casos



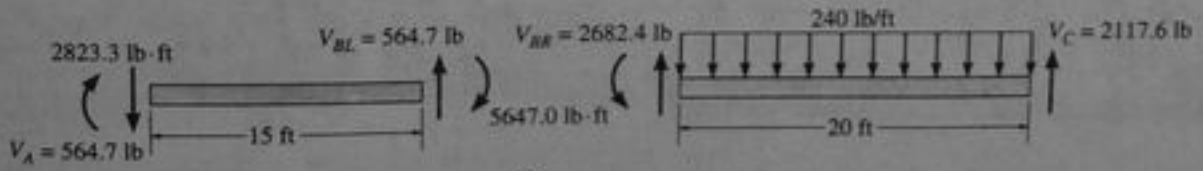
(a)

Nudo	A	B		C	
Miembro	AB	BA	BC	CB	
DF	0	0.4	0.6	1	1
FEM			−8000	8000	2
Dist.		3200	4800	−8000	3
CO	1600		−4000	2400	4
Dist.		1600	2400	−2400	5
CO	800		−1200	1200	6
Dist.		480	720	−1200	7
CO	240		−600	360	8
Dist.		240	360	−360	9
CO	120		−180	180	10
Dist.		72	108	−180	11
CO	36		−90	54	12
Dist.		36	54	−54	13
CO	18		−27	27	14
Dist.		10.9	16.2	−27	15
CO	5.4		−13.5	8.1	16
Dist.		5.4	8.1	−8.1	17
CO	2.7		−4.05	4.05	18
Dist.		1.62	2.43	−4.05	19
CO	0.81		−2.02	1.22	20
Dist.		0.80	1.22	−1.22	21
CO	0.40		−0.61	0.61	22
Dist.		0.24	0.37	−0.61	23
ΣM	2823	5647	−5647	0	24

(c)

Nudo	A	B		C	
Miembro	AB	BA	BC	CB	
DF	0	0.4	0.6	1	1
FEM			−8000	8000	2
			−4000 ←	−8000	3
	2400 ←	4800	7200	→ 3600	4
			−1800 ←	−3600	5
	360 ←	720	1080	→ 540	6
			−270 ←	−540	7
	54 ←	108	162	→ 81	8
			−40.5 ←	−81	9
	8.1 ←	16.2	24.3	→ 12.1	10
			−6.0 ←	−12.1	11
	1.2 ←	2.4	3.6	→ 1.8	12
			−0.9 ←	−1.8	13
		0.4	0.5		14
ΣM	2823.3	5647.0	−5647.0	0	15

(b)



(d)

Fig. 11–6

este método es más eficiente en su aplicación y por esta razón lo usaremos en los ejemplos que siguen. Finalmente, y mediante los resultados en la figura 11–6*b* o en la 11–6*c*, se dibujan los diagramas de cuerpo libre de cada claro de la viga en la figura 11–6*d*.

Aunque se necesitaron varios pasos para obtener los resultados finales en el ejemplo, el trabajo implicado es bastante metódico ya que se requiere la aplicación de una serie de pasos aritméticos, en vez de resolver un conjunto de ecuaciones como en el método de la pendiente-desviación. Sin embargo, debe quedar claro que el proceso fundamental de la distribución de momentos sigue las mismas líneas generales del método de los desplazamientos. Ahí el proceso consiste en establecer relaciones carga-desplazamiento en cada nudo y luego satisfacer los requisitos de equilibrio en éstos determinando el desplazamiento angular correcto en los nudos (compatibilidad). Sin embargo, aquí, el equilibrio y la compatibilidad de las rotaciones en los nudos se satisface *directamente* usando un proceso de "balanceo de los momentos" que incorpora las relaciones carga-deflexión. Es posible una simplificación adicional de la distribución de momentos que veremos en la siguiente sección.

Trabe remachada estáticamente indeterminada de puente ferrocarrilero soportada por pasadores. Note el uso de atirantadores verticales necesarios para soportar grandes fuerzas cortantes.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método general para determinar los momentos extremos sobre claros de vigas usando la distribución de momentos.

Factores de distribución y momentos de empotramiento Los nudos o nodos sobre la viga deben identificarse y los factores de rigidez de cada claro en los nudos deben calcularse. Con el uso de esos valores, los factores de distribución pueden determinarse con la ecuación 11–2 ($DF = K/\Sigma K$). Recuerde que $DF = 0$ para un empotramiento y que $DF = 1$ para un extremo articulado o soportado por un rodillo.

Los momentos de empotramiento para cada claro cargado se calculan mediante la tabla de las páginas suplementarias al final del libro. Los momentos de empotramiento positivos actúan en el sentido de las manecillas del reloj sobre el claro, y los negativos en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por conveniencia, esos valores pueden registrarse en forma tabular, similar a la mostrada en la figura 11–6c.

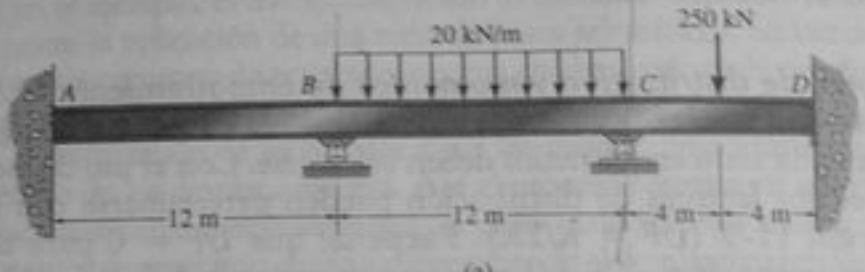
Proceso de distribución de momentos Suponga que todos los nudos, a los que están conectados miembros cuyos momentos deben determinarse, están inicialmente empotrados. Entonces:

1. Determine el momento necesario para equilibrar cada nudo (momento de desequilibrio).
2. Suelte los nudos y distribuya los momentos de desequilibrio (con signo negativo) en cada claro conectado a los nudos.
3. Transporte esos momentos en cada claro hacia su otro extremo, multiplicando cada momento por el factor de transporte que es igual a $+\frac{1}{2}$.

Al repetir este ciclo de soltar y empotrar los nudos, se encontrará que las correcciones a los momentos serán cada vez más pequeñas ya que la viga tiende a adquirir su forma deflexionada final. Cuando se obtiene un valor de corrección suficientemente pequeño, el proceso cíclico debe detenerse sin transportar los últimos momentos generados. Se suma entonces cada columna de momentos de empotramiento, de momentos distribuidos y de momentos transportados. Si esto se hace correctamente, se tendrá el equilibrio por momento en los nudos.

Ejemplo 11–1

Determine los momentos internos en cada soporte de la viga mostrada en la figura 11–7*a*. *EI* es constante.



(a)

Fig. 11–7

Solución

Primero deben calcularse los factores de distribución para cada nudo.*

$$(K_R)_{AB} = \frac{4EI}{12} \qquad (K_R)_{BC} = \frac{4EI}{12} \qquad (K_R)_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

Por tanto,

$$DF_{AB} = DF_{DC} = 0 \qquad DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \qquad DF_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

Los momentos de empotramiento son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-20(12)^2}{12} = -240\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CD} = -\frac{PL}{8} = \frac{-250(8)}{8} = -250\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

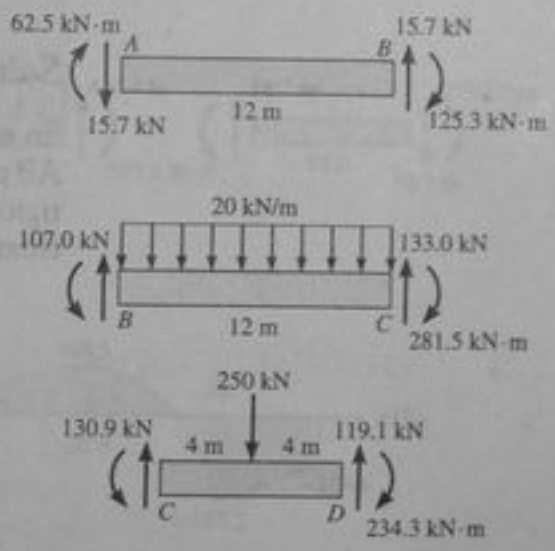
*Aquí hemos usado el factor de rigidez $4EI/L$; sin embargo, podría haberse usado también el factor de rigidez relativa I/L.

Comenzando con los momentos de empotramiento en el renglón 4, figura 11–7*b*, los momentos en los nudos *B* y C se distribuyen *simultáneamente*, renglón 5. Estos momentos se transportan entonces *simultáneamente* a los extremos respectivos de cada claro, renglón 6. Los momentos resultantes se distribuyen de nuevo simultáneamente y son transportados, renglones 7 y 8. El proceso se continúa hasta que los momentos resultantes hayan disminuido a una cantidad apropiada, renglón 13. Los momentos resultantes o finales se obtienen por adición de los momentos anteriores, renglón 14.

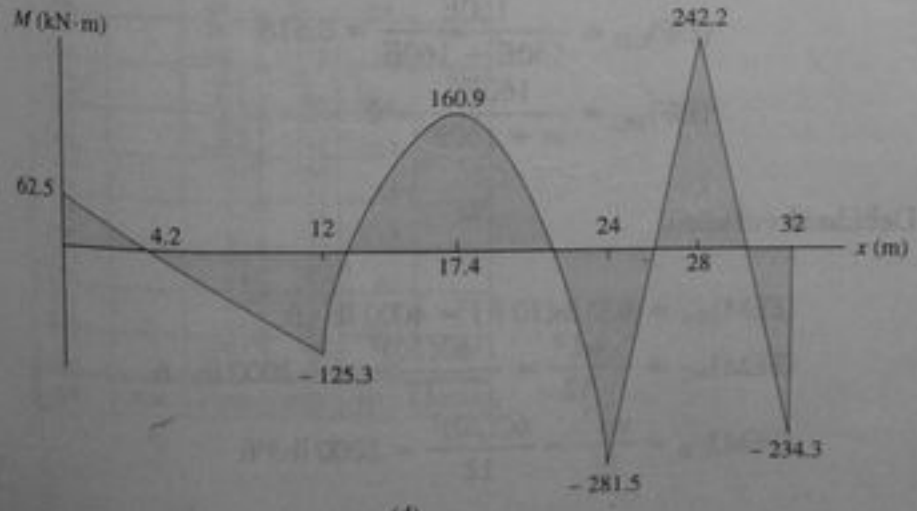
Colocando los momentos sobre cada claro de las vigas y aplicando las ecuaciones de equilibrio se obtienen las fuerzas cortantes en los extremos mostradas en la figura 11–7*c* así como el diagrama de momentos flexionantes para la viga entera, figura 11–7*d*.

Nudo	*A*	*B*		*C*		*D*	
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*DC*	2
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	0	3
FEM			−240	240	−250	250	4
Dist.		120	120	4	6		5
CO	60		2	60			6
Dist.		−1	−1	−24	−36	3	7
CO	−0.5		−12	−0.5			8
Dist.		6	6	0.2	0.3	−18	9
CO	3		0.1	3			10
Dist.		−0.05	−0.05	−1.2	−1.8	0.2	11
CO	−0.02		−0.6	−0.02			12
Dist.		0.3	0.3	0.01	0.01	−0.9	13
Σ*M*	62.5	125.3	−125.3	281.5	−281.5	234.3	14

(b)



(c)



(d)

Ejemplo 11–2

Determine el momento interno en cada soporte de la viga que se ilustra en la figura 11–8a. El momento de inercia de cada claro está indicado en la figura.

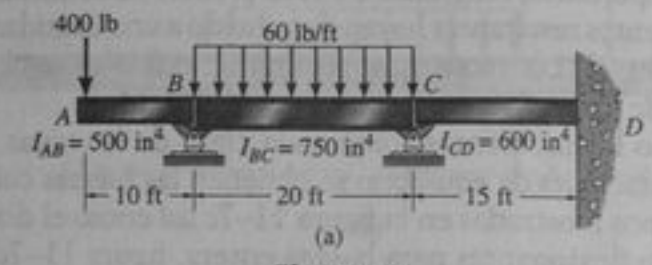


Fig. 11–8

Solución

En este problema no se distribuye un momento hacia el voladizo *AB* por lo que el factor de distribución $(DF)_{BA} = 0$. Los factores de rigidez, los factores de distribución y los momentos de empotramiento se calculan como sigue:

$$(K_R)_{BC} = \frac{4E(750)}{20} = 150E$$

$$(K_R)_{CD} = \frac{4E(600)}{15} = 160E$$

$$(DF)_{BC} = 1 - (DF)_{BA} = 1 - 0 = 1$$

$$(DF)_{CB} = \frac{150E}{150E + 160E} = 0.484$$

$$(DF)_{CD} = \frac{160E}{150E + 160E} = 0.516$$

$$(DF)_{DC} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

Debido al voladizo,

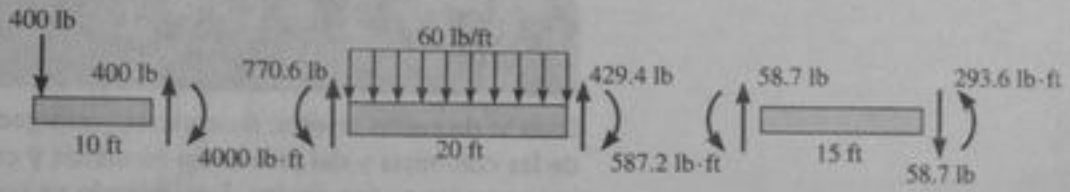
$$(FEM)_{BA} = 400 \text{ lb}(10 \text{ ft}) = 4000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

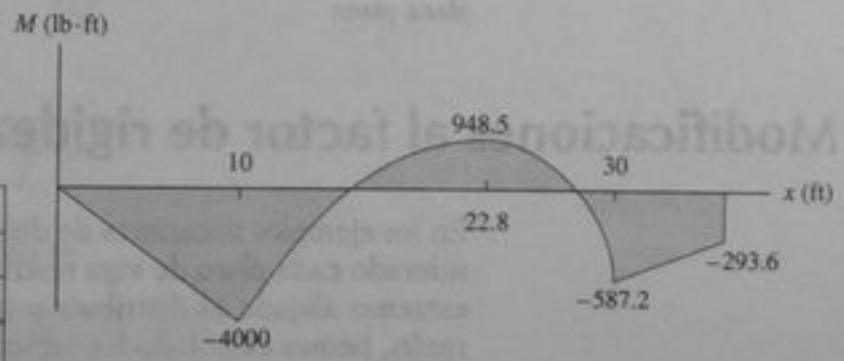
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{60(20)^2}{12} = -2000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{60(20)^2}{12} = 2000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Estos valores se indican en el cuarto renglón de la tabla, figura 11–8*b*. El tramo en voladizo requiere que el momento interno a la izquierda de *B* sea de +4000 lb · ft. El equilibrio en el nudo *B* requiere que se tenga un momento interno de –4000 lb · ft a la derecha de *B*. Como se muestra en el quinto renglón de la tabla, se agregan –2000 lb · ft a *BC* para satisfacer esta condición. Las operaciones de distribución y transporte se llevan a cabo de la manera usual, tal como se indica.

Como se conocen los momentos internos, puede construirse el diagrama de momentos flexionantes para la viga (figura 11–8*c*).





(c)

Nudo	*B*		*C*		*D*
Miembro	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*DC*
DF	0	1	0.484	0.516	0
FEM	4000	–2000	2000		
Dist.		–2000	–968	–1032	
CO		–484	–1000		–516
Dist.		484	484	516	
CO		242	242		258
Dist.		–242	–117.1	–124.9	
CO		–58.6	–121		–62.4
Dist.		58.6	58.6	62.4	
CO		29.3	29.3		31.2
Dist.		–29.3	–14.2	–15.1	
CO		–7.1	–14.6		–7.6
Dist.		7.1	7.1	7.5	
CO		3.6	3.6		3.8
Dist.		–3.6	–1.7	–1.9	
CO		–0.8	–1.8		–0.9
Dist.		0.8	0.9	0.9	
CO		0.4	0.4		0.4
Dist.		–0.4	–0.2	–0.2	
CO		–0.1	–0.2		–0.1
Dist.		0.1	0.1	0.1	
ΣM	4000	–4000	587.2	–587.2	–293.6

(b)

Edificio de varios niveles, de concreto reforzado. Obsérvese cómo las losas de las columnas y del piso están formadas y coladas juntas, de modo que aseguran los nudos rígidos. Este método se conoce como construcción de placa plana.

11.3 Modificaciones al factor de rigidez

En los ejemplos anteriores de distribución de momentos hemos considerado cada claro de viga restringido por un empotramiento en su extremo alejado al distribuir y transportar los momentos. Por esta razón, hemos calculado los factores de rigidez, los factores de distribución y los factores de transporte con base en el caso mostrado en la figura 11–9. Aquí, por supuesto, el factor de rigidez es $K = 4EI/L$ (ecuación 11–1) y el factor de transporte es $+1/2$.

En algunos casos es posible modificar el factor de rigidez de un claro particular de viga y simplificar así el proceso de distribución de momentos. Consideraremos ahora tres casos en que eso ocurre con frecuencia en la práctica.

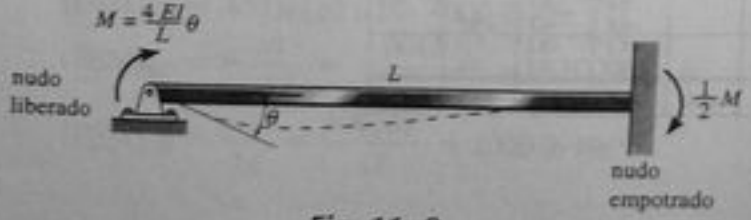


Fig. 11–9

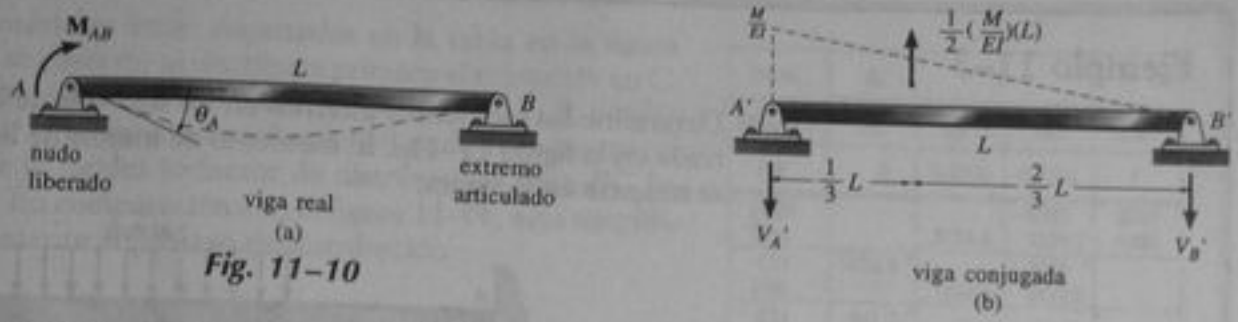


Fig. 11–10

Miembro articulado en el extremo alejado

Muchas vigas indeterminadas tienen el extremo alejado de su claro soportado por un pasador (o rodillo) como en el caso del nudo B en la figura 11–10*a*. Aquí, el momento aplicado **M** hace girar el extremo A en un ángulo θ. Para determinar θ, debe determinarse la fuerza cortante en la viga conjugada en A', figura 11–10*b*. Tenemos

$$\downarrow+\Sigma M_{B'} = 0; \qquad V_A'(L) - \frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)L\left(\frac{2}{3}L\right) = 0$$

$$V_A' = \theta = \frac{ML}{3EI}$$

o

$$M = \frac{3EI}{L}\theta$$

Así, el factor de rigidez para esta viga es

$$M = \frac{3EI}{L} \qquad (11\text{–}4)$$

Extremo alejado articulado o soportado por rodillo

Observe también que *el factor de transporte es cero* ya que el pasador en B no soporta un momento. En comparación, *si el extremo alejado está empotrado, el factor de rigidez* $K = 4EI/L$ *y éste tendrá que modificarse por 3/4 para modelar el caso en que el extremo alejado esté soportado por un pasador*. Si se considera esta modificación, el proceso de distribución de momentos se simplifica ya que el extremo con pasador no tiene que soltarse y empotrarse sucesivamente al distribuir los momentos. Además, como el extremo del claro está articulado, los momentos de empotramiento para el claro se calculan usando los valores de la columna derecha de la tabla en el forro interior de la cubierta. El siguiente ejemplo ilustra cómo aplicar esas simplificaciones.

Ejemplo 11–3

Determine los momentos internos en los soportes de la viga mostrada en la figura 11–11*a*. El momento de inercia de los dos claros se muestra en la figura.

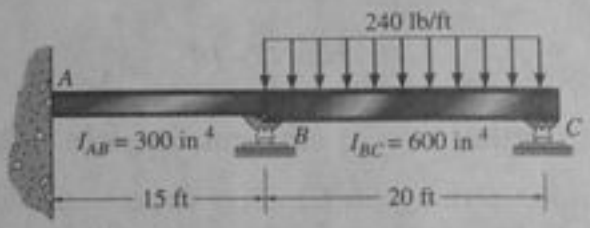


Fig. 11–11

Solución I

Como la viga está soportada por un rodillo en su extremo alejado C, la rigidez del claro BC se calculará de acuerdo con la ecuación 11–4, $K = 3EI/L$. Tenemos

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(300)}{15} = 80E$$
$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3E(600)}{20} = 90E$$

Entonces,

$$DF_{AB} = \frac{80E}{\infty + 80E} = 0$$
$$DF_{BA} = \frac{80E}{80E + 90E} = 0.4706$$
$$DF_{BC} = \frac{90E}{80E + 90E} = 0.5294$$
$$DF_{CB} = \frac{90E}{90E} = 1$$

Los momentos de empotramiento para el claro BC son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-240(20)^2}{12} = -8000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$
$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{240(20)^2}{12} = 8000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

Los datos anteriores están registrados en la tabla en la figura 11–11*b*. Como se observa, se distribuye primero el momento en *C*. Una vez que este momento se ha transportado al nudo *B*, resulta *innecesario* llevar el momento distribuido del nudo *B* de regreso al nudo *C*, ya que la rigidez (o factor de distribución) para *BC* ha sido *modificada*. En comparación con la figura 11–6*b*, esto simplifica considerablemente el proceso de distribución.

Nudo	*A*	*B*		*C*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM			−8000	8000
Dist.		3764.8	4235.2	−8000
CO	1882.4		−4000	
Dist.		1882.4	2117.6	
CO	941.2			
Σ*M*	2823.6	5647.2	−5647.2	0

(b)

Nudo	*A*	*B*		*C*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM			−12,000	
Dist.		5647.2	6352.8	
CO	2823.6			
Σ*M*	2823.6	5647.2	−5647.2	0

(c)

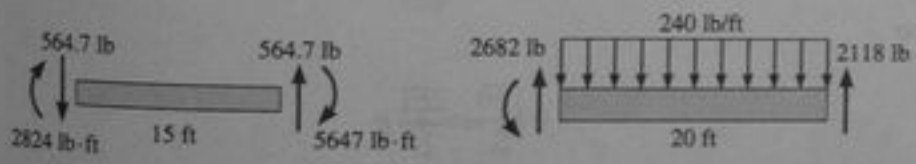
Solución II

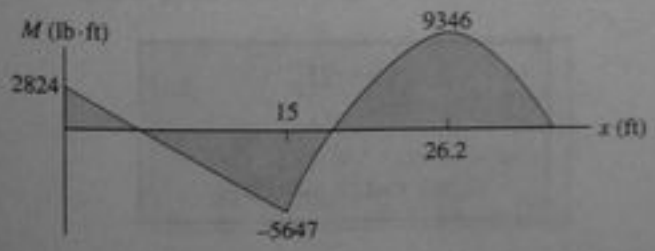
Una simplificación adicional del método de distribución en este problema es posible observando que puede usarse un *solo* momento de empotramiento para el claro extremo *BC*. Usando la columna derecha de la tabla que aparece en las páginas suplementarias al final del libro, para un claro con carga uniforme, un extremo empotrado y el otro articulado, tenemos

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = \frac{-240(20)^2}{8} = -12{,}000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Si se considera este valor total, se elimina la distribución de momentos en el nudo *C*, como se ve al comparar las tablas en las figuras 11–11*b* y 11–11*c*.

Con estos resultados, se muestran en la figura 11–11*d* las fuerzas cortantes en los extremos de las vigas y el diagrama de momentos flexionantes.





(d)

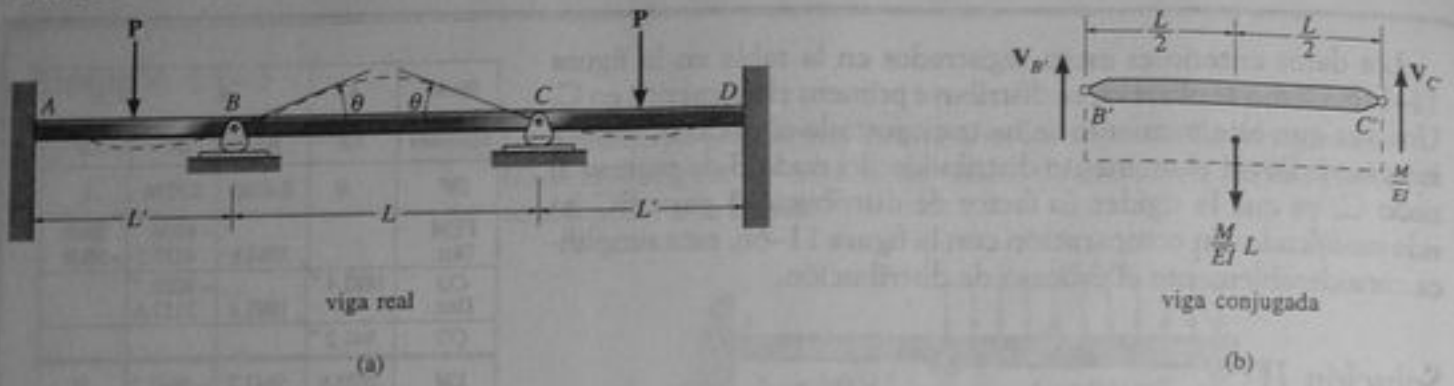


Fig. 11–12

Viga y carga simétricas

Si una viga es simétrica respecto a carga y geometría, su diagrama de momento flexionante será también simétrico. En consecuencia, puede hacerse una modificación del factor de rigidez para el claro central, de manera que los momentos en la viga sólo tengan que distribuirse en nudos que se encuentren en cada mitad de la viga. Para desarrollar la modificación apropiada del factor de rigidez, considere la viga mostrada en la figura 11–12*a*. Debido a la simetría, los momentos internos en *B* y *C* son iguales. Suponiendo que este valor sea **M**, la viga conjugada para el claro *BC* se muestra en la figura 11–12*b*. La pendiente θ en cada extremo es por tanto

$$\downarrow+\Sigma M_{C'} = 0; \qquad -V_{B'}(L) + \frac{M}{EI}(L)\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$V_{B'} = \theta = \frac{ML}{2EI}$$

o

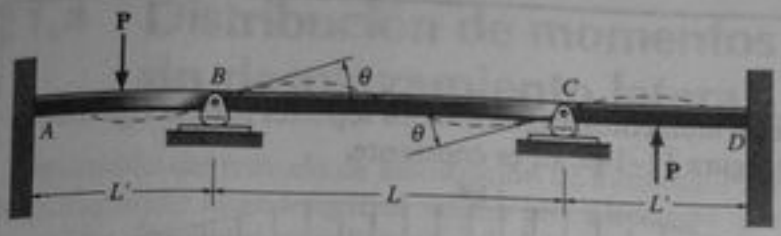
$$M = \frac{2EI}{L}\theta$$

El factor de rigidez para el claro central es entonces

$$K = \frac{2EI}{L} \qquad (11\text{–}5)$$

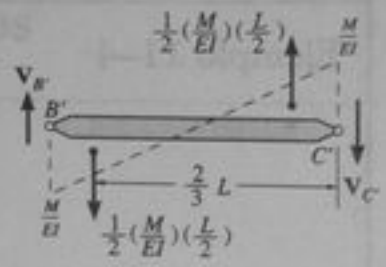
Viga y carga simétricas

Así entonces, pueden distribuirse los momentos de sólo la mitad de la viga si el factor de rigidez para el claro central se calcula usando la ecuación 11–5. *En comparación, el factor de rigidez del claro central será la mitad del usualmente determinado con el uso de* $K = 4EI/L$.



viga real

(a)



viga conjugada

(b)

Fig. 11–13

Viga simétrica y carga asimétrica

Si una viga simétrica está sometida a carga asimétrica, el diagrama de momento resultante será asimétrico. Como en el caso anterior, podemos modificar el factor de rigidez del claro central de manera que sólo la mitad de la viga tenga que considerarse en el análisis por distribución de momentos. Considere la viga en la figura 11–13*a*. La viga conjugada para su claro central *BC* se muestra en la figura 11–13*b*. Debido a la carga asimétrica, el momento interno en *B* es igual pero opuesto al de *C*. Suponiendo que este valor es **M**, la pendiente θ en cada extremo se determina como sigue:

$$\circlearrowleft +\Sigma M_{C'} = 0; \quad -V_{B'}(L) + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

$$V_{B'} = \theta = \frac{ML}{6EI}$$

o

$$M = \frac{6EI}{L}\theta$$

El factor de rigidez para el claro central es, entonces,

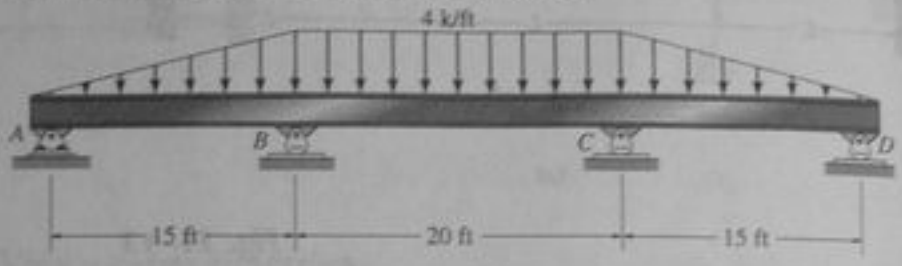
$$K = \frac{6EI}{L} \qquad (11\text{–}6)$$

Viga simétrica con carga asimétrica

Así, entonces, cuando el factor de rigidez para el claro central de la viga se calcula usando la ecuación 11–6, sólo los momentos en una mitad de la viga tienen que ser distribuidos. *Aquí, el factor de rigidez es una vez y media mayor que el determinado si se utiliza* $K = 4EI/L$.

Ejemplo 11–4

Determine los momentos internos en los soportes para la viga mostrada en la figura 11–14*a*. *EI* es constante.



(a)

Solución

Por inspección, la viga y la carga son simétricas. Aplicaremos entonces la ecuación 11–5, $K = 2EI/L$ para calcular el factor de rigidez del claro central *BC* y usaremos sólo la mitad izquierda de la viga para el análisis. El análisis puede reducirse aún más con el uso de la ecuación 11–4, $K = 3EI/L$, para calcular el factor de rigidez del segmento *AB*, ya que el extremo *A* está articulado. Además, la distribución de momentos en *A* puede pasarse por alto usando el momento de empotramiento para una carga triangular sobre un claro con un extremo empotrado y el otro articulado. Así entonces,

$$K_{AB} = \frac{3EI}{15} \qquad \text{(aplicando la ecuación 11–4)}$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{20} \qquad \text{(aplicando la ecuación 11–5)}$$

$$(\text{DF})_{AB} = \frac{3EI/15}{3EI/15} = 1$$

$$(\text{DF})_{BA} = \frac{3EI/15}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.667$$

$$(\text{DF})_{BC} = \frac{2EI/20}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.333$$

$$(\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{15} = \frac{4(15)^2}{15} = 60\ \text{k} \cdot \text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.3\ \text{k} \cdot \text{ft}$$

Los datos están registrados en la tabla en la figura 11–14*b*. Al calcular los factores de rigidez como se mostró arriba se reduce considerablemente el análisis, ya que sólo el nudo *B* debe balancearse y los transportes a los nudos *A* y *C* no son necesarios. Está claro que el nudo *C* se halla sometido al mismo momento interno de 108.9 k · ft.

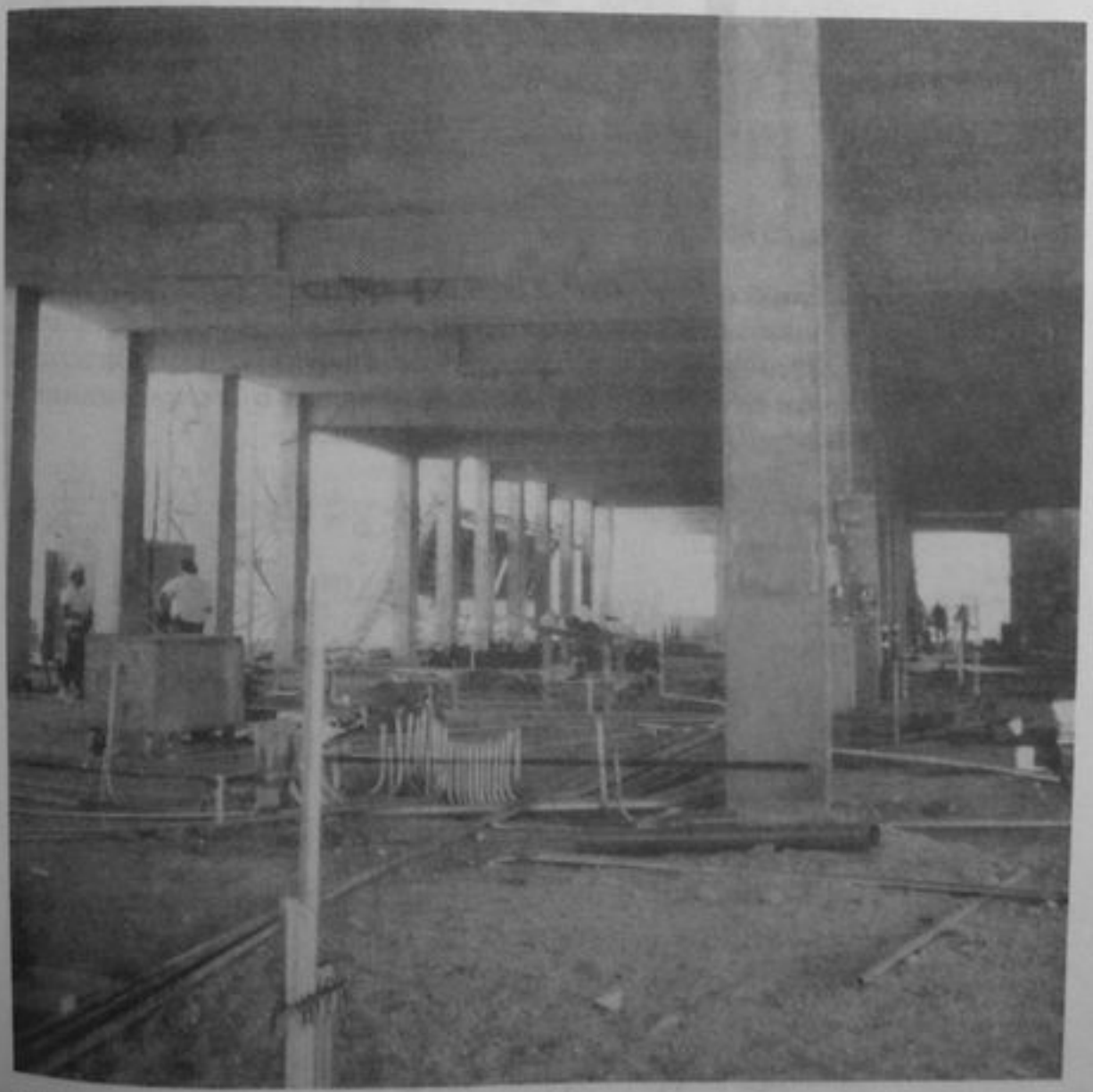
Fig. 11–14

Nudo	*A*	*B*	
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*
DF	1	0.667	0.333
FEM		60	−133.3
Dist.		48.9	24.4
Σ*M*	0	108.9	−108.9

(b)

11.4 Distribución de momentos para marcos sin desplazamiento lateral

La aplicación del método de distribución de momentos a marcos sin desplazamiento lateral sigue el mismo procedimiento que el usado para vigas. Para minimizar la posibilidad de errores, se sugiere que el análisis se disponga en forma tabular, como en los ejemplos previos. Además, la distribución de momentos puede acortarse si el factor de rigidez de un claro puede modificarse como se indicó en la sección anterior.



Estructura estáticamente indeterminada de un edificio de concreto.

Ejemplo 11–5

Determine los momentos internos en los nudos del marco mostrado en la figura 11–5*a*. *EI* es constante.

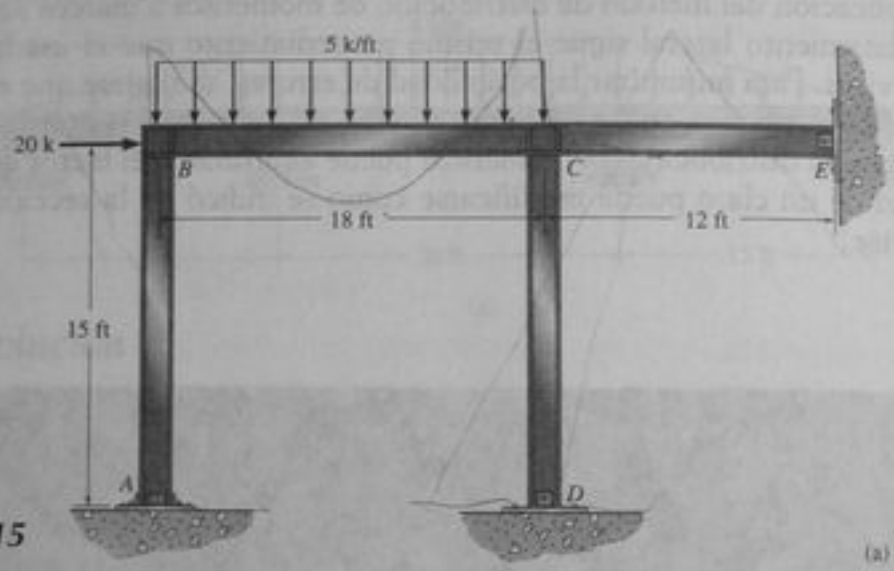


Fig. 11–15

Solución

Por inspección, el pasador en *E* impedirá el desplazamiento lateral del marco. Los factores de rigidez de *CD* y *CE* pueden calcularse con el uso de $K = 3EI/L$ ya que sus extremos alejados están articulados. La carga de 20 k no contribuye al momento de empotramiento ya que está aplicada en el nudo *B*. Entonces,

$$K_{AB} = \frac{4EI}{15} \qquad K_{BC} = \frac{4EI}{18} \qquad K_{CD} = \frac{3EI}{15} \qquad K_{CE} = \frac{3EI}{12}$$

$$(DF)_{AB} = 0$$

$$(DF)_{BA} = \frac{4EI/15}{4EI/15 + 4EI/18} = 0.545$$

$$(DF)_{BC} = 1 - 0.545 = 0.455$$

$$(DF)_{CB} = \frac{4EI/18}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.330$$

$$(DF)_{CD} = \frac{3EI/15}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.298$$

$$(DF)_{CE} = 1 - 0.330 - 0.298 = 0.372$$

$$(DF)_{DC} = 1 \quad (DF)_{EC} = 1$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-5(18)^2}{12} = -135\ \text{k} \cdot \text{ft}$$

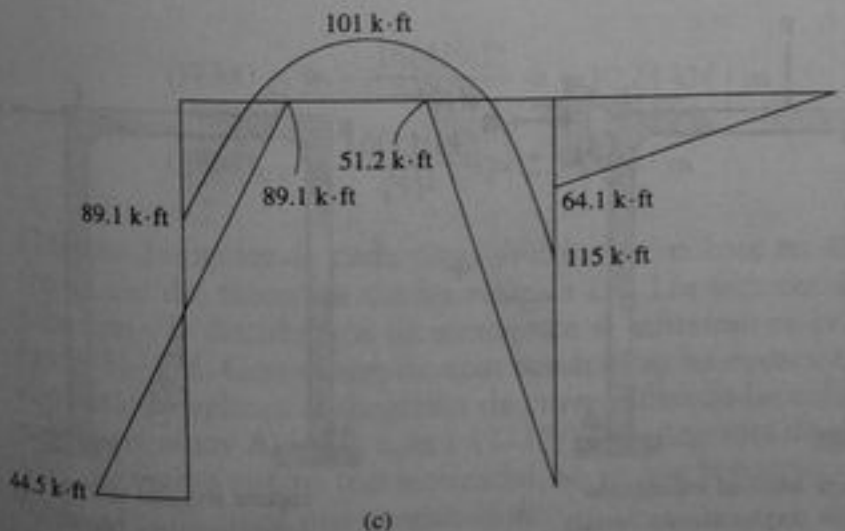
$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{5(18)^2}{12} = 135\ \text{k} \cdot \text{ft}$$

Los datos se muestran en la tabla en la figura 11–15*b*. Aquí, la distribución de momentos se alterna sucesivamente entre los nudos *B* y *C*. Los momentos finales se muestran en el último renglón.

Con estos datos se construye el diagrama de momentos flexionantes que aparece en la figura 11–15*c*.

Nudo	*A*	*B*		*C*			*D*	*E*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*CE*	*DC*	*EC*
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM			−135	135				
Dist.		73.6	61.4	−44.6	−40.2	−50.2		
CO	36.8		−22.3	30.7				
Dist.		12.2	10.1	−10.1	−9.1	−11.5		
CO	6.1		−5.1	5.1				
Dist.		2.8	2.3	−1.7	−1.5	−1.9		
CO	1.4		−0.8	1.2				
Dist.		0.4	0.4	−0.4	−0.4	−0.4		
CO	0.2		−0.2	0.2				
Dist.		0.1	0.1	−0.1	0.0	−0.1		
Σ*M*	44.5	89.1	−89.1	115	−51.2	−64.1		

(b)



(c)

11.5 Distribución de momentos para marcos con desplazamiento lateral

Ya vimos en la sección 10.5 que los marcos no simétricos o sometidos a cargas no simétricas tienen la tendencia a desplazarse lateralmente. Un ejemplo de un caso semejante se muestra en la figura 11–16*a*. Aquí, la carga aplicada **P** generará momentos desiguales en los nudos *B* y *C* de modo que el marco se desplazará en una distancia Δ hacia la derecha. Para determinar esta deflexión y los momentos internos en los nudos mediante la distribución de momentos, usaremos el principio de superposición. El marco en la figura 11–16*b* se considera primero fijo respecto a desplazamiento lateral por medio de la aplicación de un soporte artificial en *C*. Se aplica la distribución de momentos y luego, por estática, se determina la fuerza restrictiva **R** en este soporte. Se aplica luego la misma fuerza, pero opuesta, al marco, figura 11–16*c*, y se calculan los momentos en el marco. Un método para efectuar este último paso requiere *suponer* primero un valor numérico para uno de los momentos internos, digamos $\mathbf{M}'_{BA}$. Mediante la distribución de momentos y la estática, puede determinarse la deflexión Δ′ y la fuerza externa **R′** correspondiente al valor supuesto de $\mathbf{M}'_{BA}$. Como sólo se tienen deformaciones elásticas, la fuerza **R′** desarrolla momentos en el marco que son *proporcionales* a los desarrollados por **R**. Por ejemplo, si $\mathbf{M}'_{BA}$ y **R′** se conocen, el momento en *B* desarrollado por **R** será $M_{BA} = R(M'_{BA}/R')$. La suma de los momentos en los nudos para ambos casos, figura 11–16*b* y *c*, dará los momentos reales en el marco, figura 11–16*a*.

La aplicación de este procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos.

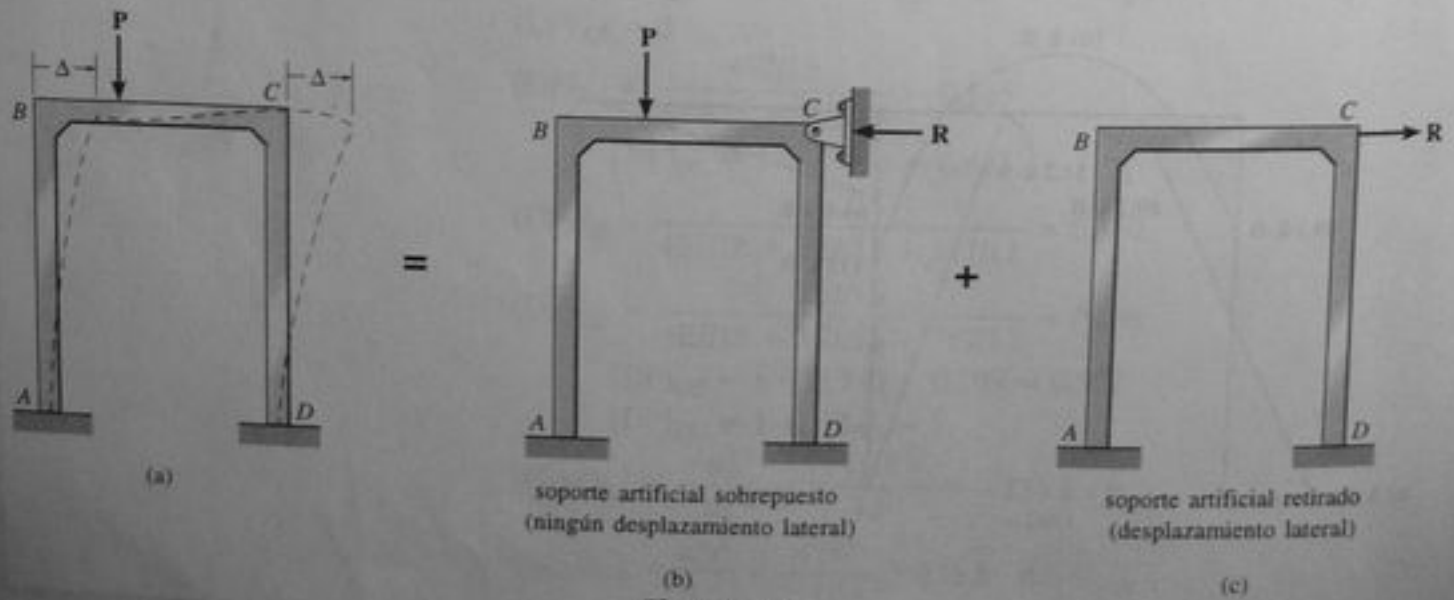


Fig. 11–16

Ejemplo 11–6

Determine los momentos en cada nudo del marco mostrado en la figura 11–17*a*. *EI* es constante.

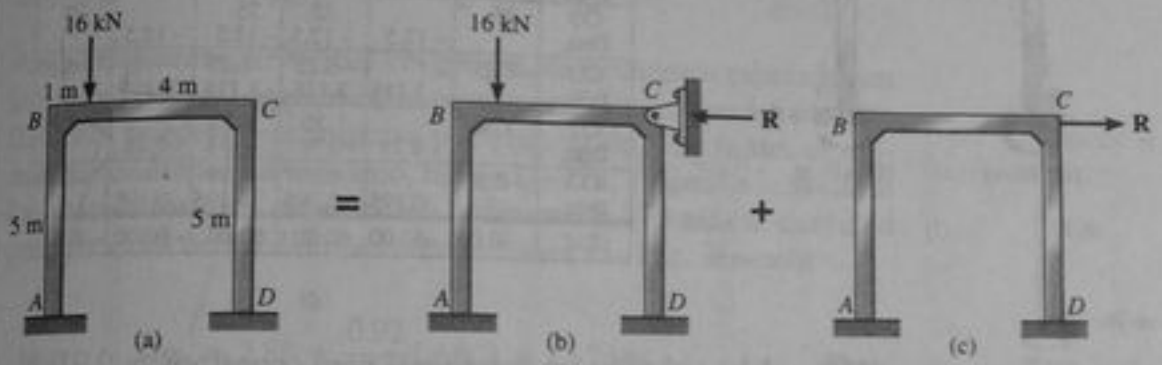


Fig. 11–17

Nudo	*A*	*B*		*C*		*D*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*DC*
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM			−10.24	2.56		
Dist.		5.12	5.12	−1.28	−1.28	
CO	2.56		−0.64	2.56		−0.64
Dist.		0.32	0.32	−1.28	−1.28	
CO	0.16		−0.64	0.16		−0.64
Dist.		0.32	0.32	−0.08	−0.08	
CO	0.16		−0.04	0.16		−0.04
Dist.		0.02	0.02	−0.08	−0.08	
Σ*M*	2.88	5.78	−5.78	2.72	−2.72	−1.32

(d)

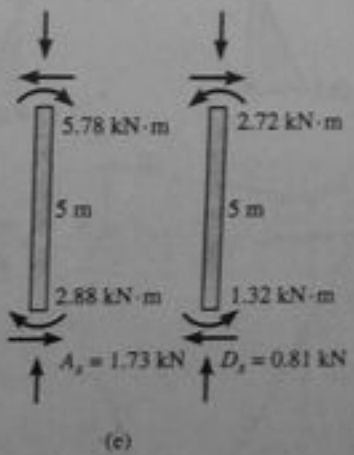
Solución

Primero consideramos que el marco está sujeto sin tener capacidad de desplazarse lateralmente como se muestra en la figura 11–17*b*.

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{16(4)^2(1)}{(5)^2} = -10.24\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{16(1)^2(4)}{(5)^2} = 2.56\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

El factor de rigidez de cada claro se calcula con base en $4EI/L$ o con el uso del factor de rigidez relativa I/L. Los factores de distribución y la distribución de momentos se muestran en la tabla, figura 11–17*d*. Con el uso de esos resultados, las ecuaciones de equilibrio se aplican al diagrama de cuerpo libre de las columnas para determinar $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{D}_x$, figura 11–17*e*. Del diagrama de cuerpo libre del marco entero (no mostrado), se ve que la restricción **R**, figura 11–17*b*, tiene una magnitud de

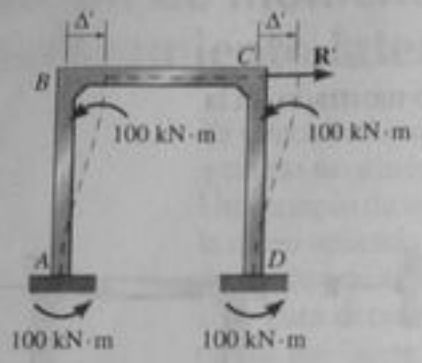


(e)

(continúa)

$$\Sigma F_x = 0; \qquad R = 1.73 - 0.81 = 0.92\ \text{kN}$$

Ejemplo 11–6 (continuación)



(f)

Nudo	A	B		C		D
Miembro	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM	−100	−100			−100	−100
Dist.		50	50	50	50	
CO	25		25	25		25
Dist.		−12.5	−12.5	12.5	−12.5	
CO	−6.25		−6.25	−6.25		−6.25
Dist.		3.125	3.125	3.125	3.125	
CO	1.56		1.56	1.56		1.56
Dist.		−0.78	−0.78	−0.78	−0.78	
CO	−0.39		−0.39	−0.39		−0.39
Dist.		0.195	0.195	0.195	0.195	
ΣM	−80.00	−60.00	60.00	60.00	−60.00	−80.00

(g)

Ahora debe aplicarse un valor igual pero opuesto $R = 0.92\text{kN}$ al marco en C y calcularse los momentos internos, figura 11–17c. Para resolver el problema de calcular esos momentos, supondremos una fuerza **R'** aplicada en C que ocasiona que el marco se desplace en una distancia Δ', como se muestra en la figura 11–17*f*. Aquí, los nudos *B* y *C* *están impedidos temporalmente de girar* y, en consecuencia, los momentos de empotramiento en los extremos de las columnas se determinan con las fórmulas para deflexiones dadas en el forro interior de la cubierta, esto es,

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

Como tanto *B* como *C* se desplazan en una misma distancia Δ' y *AB* y *DC* tienen las mismas *E*, *I* y *L*, el momento de empotramiento en *AB* será el *mismo* que en *DC*. Como se muestra en la figura 11–17*f*, *suponemos* arbitrariamente que este momento de empotramiento es*

$$(\text{FEM})_{AB} = (\text{FEM})_{BA} = (\text{FEM})_{CD} = (\text{FEM})_{DC} = -100\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Un *signo negativo* es necesario ya que el momento debe actuar en *sentido contrario a las manecillas del reloj* sobre la columna para que la deflexión Δ' sea hacia la derecha. Puede ahora determinarse el valor de **R'** asociado con este momento de −100 kN · m. La distribución de momentos de los momentos de empotramiento se muestra en la figura 11–17*g*.

*Si se da el valor de *E*, podríamos también especificar un valor arbitrario para Δ' y luego calcular el valor numérico del $FEM = 6EI\Delta'/L^2$. Sin embargo, el método usado arriba, donde se supone el *FEM*, es más eficiente.

Las reacciones horizontales en A y D se calculan con las ecuaciones de equilibrio, figura 11–17*h*. Así entonces, para el marco entero se requiere que

$$\Sigma F_x = 0; \qquad R' = 28 + 28 = 56.0 \text{ kN}$$

Por consiguiente, $R' = 56.0$ kN genera los momentos tabulados en la figura 11–17*g*. Los momentos correspondientes causados por $R = 0.92$ kN pueden determinarse por proporción. Por tanto, el momento resultante en el marco, figura 11–17*a*, es igual a la *suma* de los calculados para el marco en la figura 11–17*b* más la cantidad proporcional de los del marco en la figura 11–17*c*. Tenemos

$$M_{AB} = 2.88 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = 1.57 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

$$M_{BA} = 5.78 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = 4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

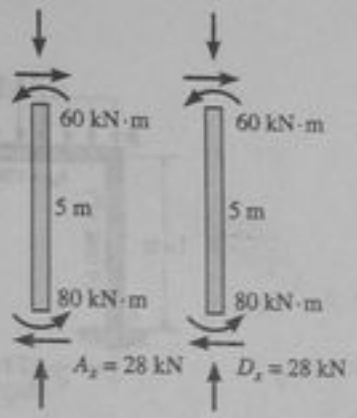
$$M_{BC} = -5.78 + \frac{0.92}{56.0}(60) = -4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

$$M_{CB} = 2.72 + \frac{0.92}{56.0}(60) = 3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

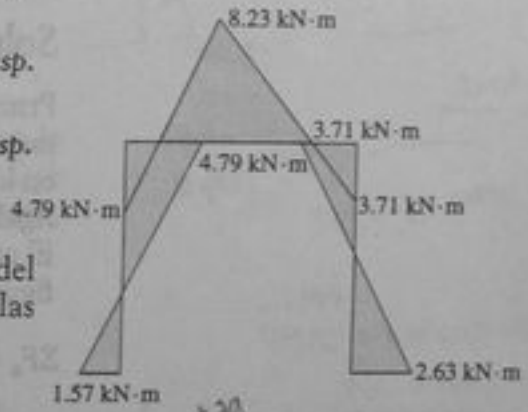
$$M_{CD} = -2.72 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = -3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

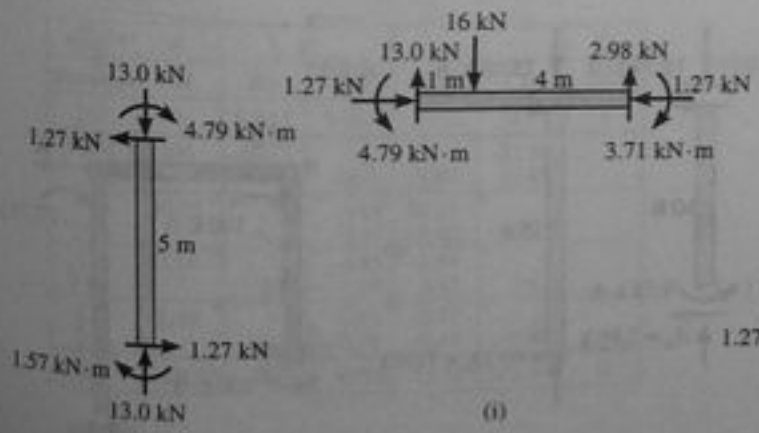
$$M_{DC} = -1.32 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = -2.63 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Con estos resultados, las reacciones sobre cada miembro del marco y su diagrama de momento flexionante se muestran en las figuras 11–17*i* y 11–17*j*, respectivamente.

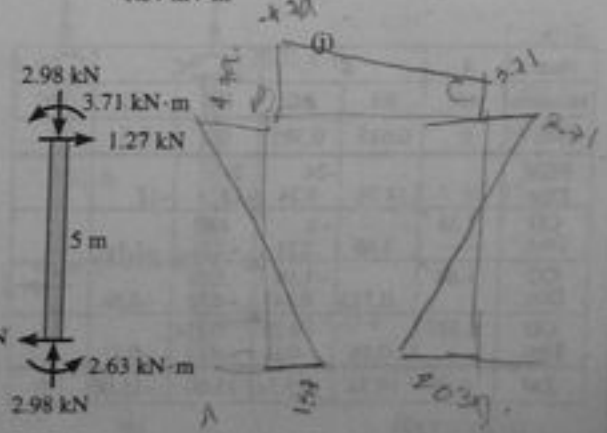


(h)





(i)



(j)

Ejemplo 11–7

Determine los momentos en cada nudo del marco mostrado en la figura 11–18*a*. El momento de inercia de cada miembro se indica en la figura.

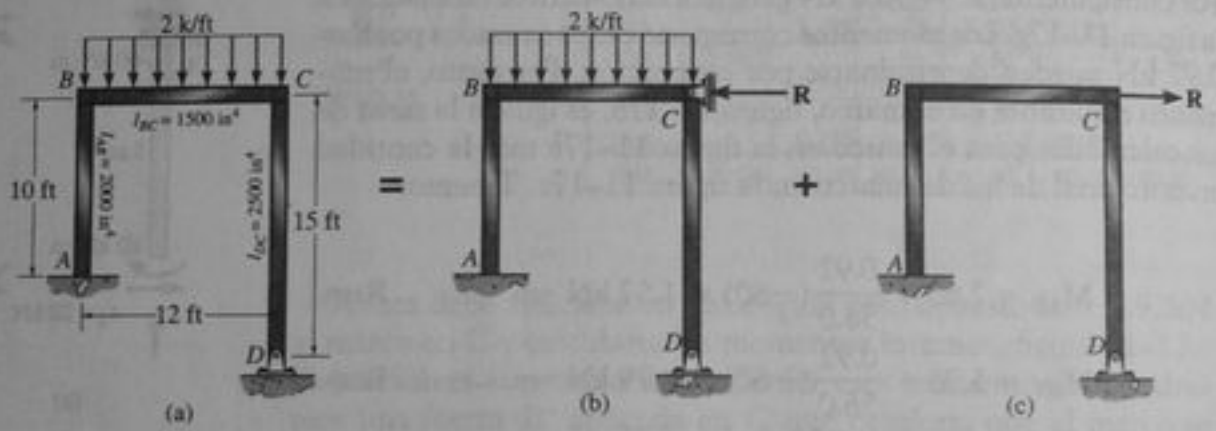


Fig. 11–18

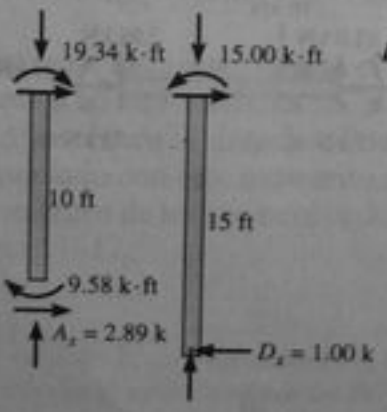
Solución

Primero se impide el desplazamiento lateral del marco como se muestra en la figura 11–18*b*. Los momentos internos se calculan en los nudos como se indica en la figura 11–18*d*. Aquí, el factor de rigidez de *CD* se calculó mediante $3EI/L$ ya que *D* está articulado. El cálculo de las reacciones horizontales en *A* y *D* se muestra en la figura 11–18*e*. Así, entonces, para el marco entero,

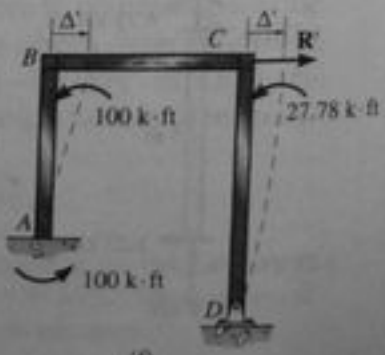
$$\Sigma F_x = 0; \qquad R = 2.89 - 1.00 = 1.89 \text{ k}$$

Nudo	*A*	*B*		*C*		*D*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*DC*
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM			−24	24		
Dist.		14.76	9.24	−12	−12	
CO	7.38		−6	4.62		
Dist.		3.69	2.31	−2.31	−2.31	
CO	1.84		−1.16	1.16		
Dist.		0.713	0.447	−0.58	−0.58	
CO	0.357		−0.29	0.224		
Dist.		0.18	0.11	−0.11	−0.11	
ΣM	9.58	19.34	−19.34	15.00	−15.00	0

(d)



(e)



(f)

Se aplica ahora la fuerza opuesta al marco como se muestra en la figura 11–18c. Igual que en el ejemplo anterior, consideraremos una fuerza $\mathbf{R}'$ que actúa como se muestra en la figura 11–18*f*. Los nudos *B* y *C* se desplazan entonces en la misma distancia Δ'. Los momentos de empotramiento para *BA* son

$$(\text{FEM})_{AB} = (\text{FEM})_{BA} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = -\frac{6E(2000)\Delta'}{(10)^2}$$

Para *CD*, el valor leído en el forro interior de la cubierta es

$$(\text{FEM})_{CD} = -\frac{3EI\Delta}{L^2} = -\frac{3E(2500)\Delta'}{(15)^2}$$

Suponiendo que el *FEM* para *AB* es –100 k · ft, como se muestra en la figura 11–18*f*, el *correspondiente* FEM en *C*, que genera la *misma* Δ', se encuentra por proporción, esto es,

$$\Delta' = \frac{100(10)^2}{6E(2000)} = -\frac{(\text{FEM})_{CD}(15)^2}{3E(2500)}$$

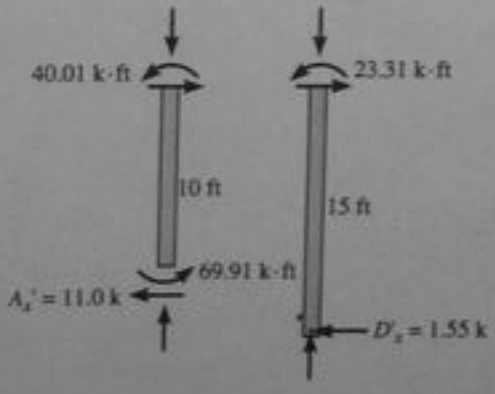
$$(\text{FEM})_{CD} = -27.78 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

La distribución de momentos para esos *FEM* está tabulada en la figura 11–18*g*. El cálculo de las reacciones horizontales en *A* y *D* se muestra en la figura 11–18*h*. Así, entonces, para el marco entero,

$$\Sigma F_x = 0; \qquad R' = 11.0 + 1.55 = 12.55 \text{ k}$$

Nudo	*A*	*B*		*C*		*D*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*DC*
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM	–100	–100			–27.78	
Dist.		61.5	38.5	13.89	13.89	
CO	30.75		6.94	19.25		
Dist.		–4.27	–2.67	–9.625	–9.625	
CO	–2.14		–4.81	–1.34		
Dist.		2.96	1.85	0.67	0.67	
CO	1.48		0.33	0.92		
Dist.		–0.20	–0.13	–0.46	–0.46	
ΣM	–69.91	–40.01	40.01	23.31	–23.31	0

(g)



(h)

(continúa)

Ejemplo 11–7 (continuación)

Los momentos resultantes en el marco son, entonces,

$$M_{AB} = 9.58 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(-69.91) = -0.948\ \text{k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

$$M_{BA} = 19.34 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(-40.01) = 13.3\ \text{k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

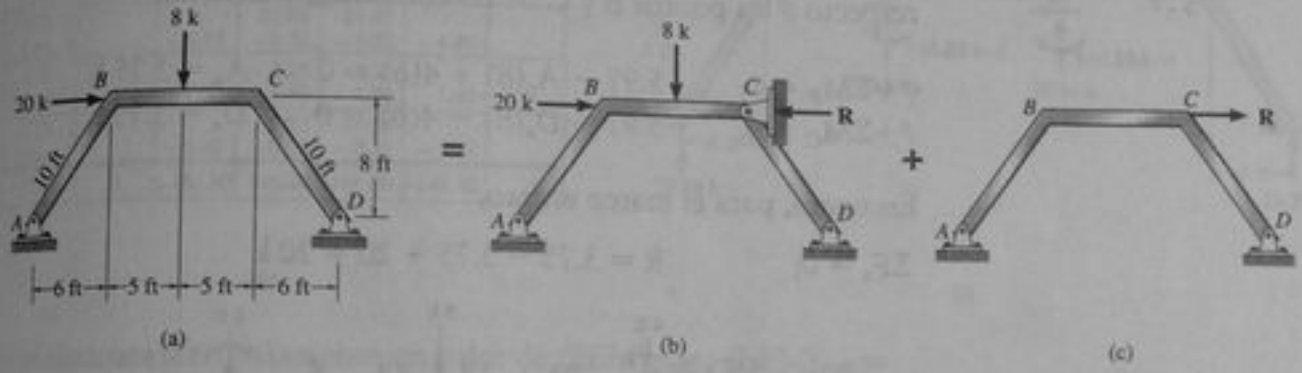
$$M_{BC} = -19.34 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(40.01) = -13.3\ \text{k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

$$M_{CB} = 15.00 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(23.31) = 18.5\ \text{k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

$$M_{CD} = -15.00 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(-23.31) = -18.5\ \text{k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

Ejemplo 11–8

Determine los momentos en cada nudo del marco mostrado en la figura 11–19*a*. *EI* es constante.



Solución

Primero se impide el desplazamiento lateral por medio de la fuerza restrictiva **R**, figura 11–19*b*. Los momentos de empotramientos para el miembro *BC* son

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{8(10)}{8} = -10\,\text{k}\cdot\text{ft} \qquad (\text{FEM})_{CB} = \frac{8(10)}{8} = 10\,\text{k}\cdot\text{ft}$$

Como los claros *AB* y *DC* están articulados en sus extremos, el factor de rigidez se calcula mediante $3EI/L$. La distribución de momentos se muestra en la figura 11–19*d*.

Fig. 11–19

Nudo	*A*	*B*		*C*		*D*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*	*CD*	*DC*
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM			−10	10		
Dist.		4.29	5.71	−5.71	−4.29	
CO			−2.86	2.86		
Dist.		1.23	1.63	−1.63	−1.23	
CO			−0.82	0.82		
Dist.		0.35	0.47	−0.47	−0.35	
CO			−0.24	0.24		
Dist.		0.10	0.13	−0.13	−0.10	
ΣM	0	5.97	−5.97	5.97	−5.97	0

(d)

(continúa)

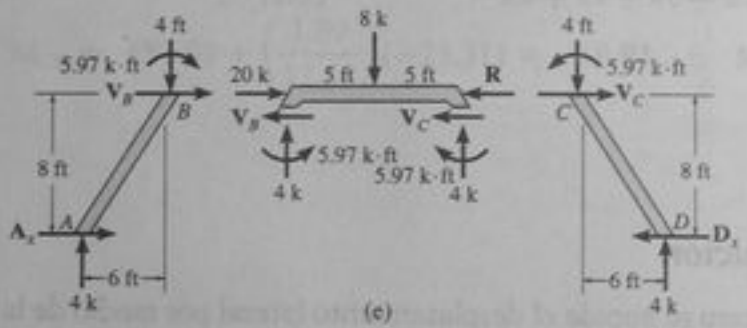
Ejemplo 11–8 (continuación)

Con el uso de estos resultados deben calcularse las *reacciones horizontales* en A y D. Esto se lleva a cabo mediante un análisis de equilibrio de *cada miembro*, figura 11–19e. Sumamos momentos respecto a los puntos B y C de las columnas, y tenemos

$$\curvearrowright+\Sigma M_B = 0; \quad 5.97 - A_x(8) + 4(6) = 0 \quad A_x = 3.75\ \text{k}$$
$$\curvearrowright+\Sigma M_C = 0; \quad -5.97 + D_x(8) - 4(6) = 0 \quad D_x = 3.75\ \text{k}$$

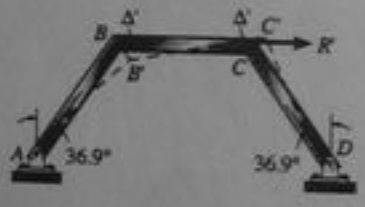
Entonces, para el marco entero,

$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 3.75 - 3.75 + 20 = 20\ \text{k}$$

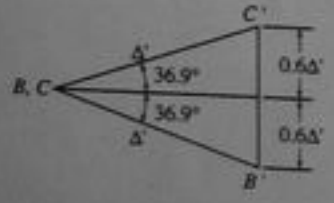


(e)

Se aplica ahora al marco la fuerza opuesta **R** como se muestra en la figura 11–19c. Para determinar los momentos internos desarrollados por **R** consideraremos primero la fuerza **R'** que actúa como se muestra en la figura 11–19f. Aquí, las líneas punteadas no representan la deformación de los miembros del marco; más bien, se construyen como líneas rectas extendidas hasta las posiciones finales B' y C' de los puntos B y C, respectivamente. Debido a la simetría del marco, el desplazamiento $BB' = CC' = \Delta'$. Además, esos desplazamientos ocasionan que BC gire. La distancia vertical entre B' y C' es $1.2\Delta'$, como se muestra en el diagrama de desplazamientos, figura 11–19g. Como cada claro sufre desplazamientos que ocasionan que los claros giren, se inducen momentos de empotramiento en los claros. Estos momentos son:



(f)



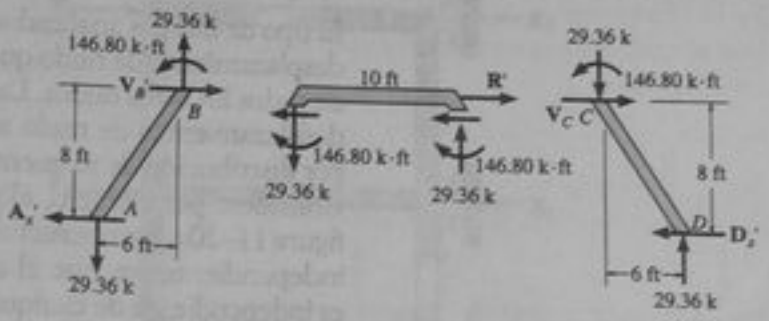
(g)

$$(\text{FEM})_{BA} = (\text{FEM})_{CD} = -\frac{3EI\Delta'}{(10)^2}$$
$$(\text{FEM})_{BC} = (\text{FEM})_{CB} = \frac{6EI(1.2\Delta')}{(10)^2}$$

Nótese que para BA y CD, los momentos son *negativos* ya que la rotación horaria del claro ocasiona un momento *en sentido contrario a las manecillas del reloj de empotramiento*. (Vea la tabla de momentos de empotramiento en el forro interior de la cubierta.)

Nudo	A	B		C		D
Miembro	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM		−100	240	240	−100	
Dist.		−60.06	−79.94	−79.94	−60.06	
CO			−39.97	−39.97		
Dist.		17.15	22.82	22.82	17.15	
CO			11.41	11.41		
Dist.		−4.89	−6.52	−6.52	−4.89	
CO			−3.26	−3.26		
Dist.		1.40	1.86	1.86	1.40	
CO			0.93	0.93		
Dist.		−0.40	−0.53	−0.53	−0.40	
ΣM	0	−146.80	146.80	146.80	−146.80	0

(h)



(i)

Si asignamos arbitrariamente un valor de $(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -100$ k · ft, entonces, al igualar Δ' en las fórmulas anteriores, obtenemos $(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 240$ k · ft. Estos momentos se aplican al marco y se distribuyen, figura 11–19*h*. Usando esos resultados, el análisis de equilibrio se muestra en la figura 11–19*i*. Para cada columna, tenemos

$$\curvearrowright +\Sigma M_B = 0; \quad A_x'(8) - 29.36(6) - 146.80 = 0 \qquad A_x' = 40.37 \text{ k}$$
$$\curvearrowright +\Sigma M_C = 0; \quad D_x'(8) - 29.36(6) - 146.80 = 0 \qquad D_x' = 40.37 \text{ k}$$

Así entonces, para el marco entero,

$$\Sigma F_x = 0; \qquad R' = 40.37 + 40.37 = 80.74 \text{ k}$$

Los momentos resultantes en el marco son entonces

$$M_{BA} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -30.4 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{BC} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 30.4 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CB} = 5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 42.3 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$
$$M_{CD} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -42.3 \text{ k} \cdot \text{ft} \quad \textit{Resp.}$$

11.6 Distribución de momentos para marcos de varios niveles

El tipo de marcos analizados en la sección anterior tienen todos un solo desplazamiento de nudo que puede relacionarse con el desplazamiento de todos los otros nudos. Las estructuras de varios niveles tienen varios desplazamientos de nudo *independientes* y en consecuencia el análisis por distribución de momentos implicará un mayor número de cálculos. Considere por ejemplo, el marco de dos niveles que se muestra en la figura 11–20*a*. Esta estructura puede tener dos desplazamientos de nudos independientes ya que el desplazamiento lateral Δ_1 del primer nivel es independiente de cualquier desplazamiento Δ_2 del segundo nivel. Estos desplazamientos no se conocen inicialmente por lo que el análisis debe efectuarse con base en la superposición, vista previamente. En este caso, se aplican dos fuerzas restrictivas $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, figura 11–20*b*, se determinan los momentos de empotramiento y se distribuyen. Mediante las ecuaciones de equilibrio, se determinan los valores numéricos de $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. A continuación, se retira la fuerza restrictiva del primer nivel y se le da a este nivel un desplazamiento Δ'. Este desplazamiento genera momentos de empotramiento en el marco a los que pueden asignárseles valores numéricos específicos. Distribuyendo esos momentos y usando las ecuaciones de equilibrio, pueden determinarse los valores numéricos asociados de $\mathbf{R}'_1$ y $\mathbf{R}'_2$. De manera similar, al segundo nivel se le da un desplazamiento Δ'', figura 11–20*d*. Suponiendo valores numéricos para los momentos de empotramiento, la distribución de momentos y el análisis del equilibrio dará valores específicos para $\mathbf{R}''_1$ y $\mathbf{R}''_2$. Como los dos últimos pasos asociados con la figura 11–20*c* y *d* dependen de valores *supuestos* para los momentos de empotramiento, deben aplicarse factores correctivos C' y C'' a los momentos distribuidos. Con referencia a las fuerzas restrictivas en la figura 11–20, se requiere

$$0 = -R_2 - C'R'_2 + C''R''_2$$
$$0 = -R_1 + C'R'_1 - C''R''_1$$

La solución simultánea de estas ecuaciones dará los valores de C' y C''. Estos factores de corrección se multiplican entonces por los momentos internos de nudo encontrados en la distribución de momentos en las figuras 11–20*c* y *d*. Los momentos resultantes se encuentran luego sumando esos momentos corregidos a los obtenidos para el marco en la figura 11–20*b*.

Otros tipos de marcos con desplazamientos de nudo independientes pueden analizarse mediante este mismo procedimiento; sin embargo, debe quedar claro que este método requiere de una buena cantidad de cálculos. Si bien algunas técnicas han sido desarrolladas para reducir el número de cálculos, es mejor resolver este tipo de problemas con ayuda de una computadora, con el uso, de preferencia, del análisis matricial. Las técnicas para ello se verán en el capítulo 15.

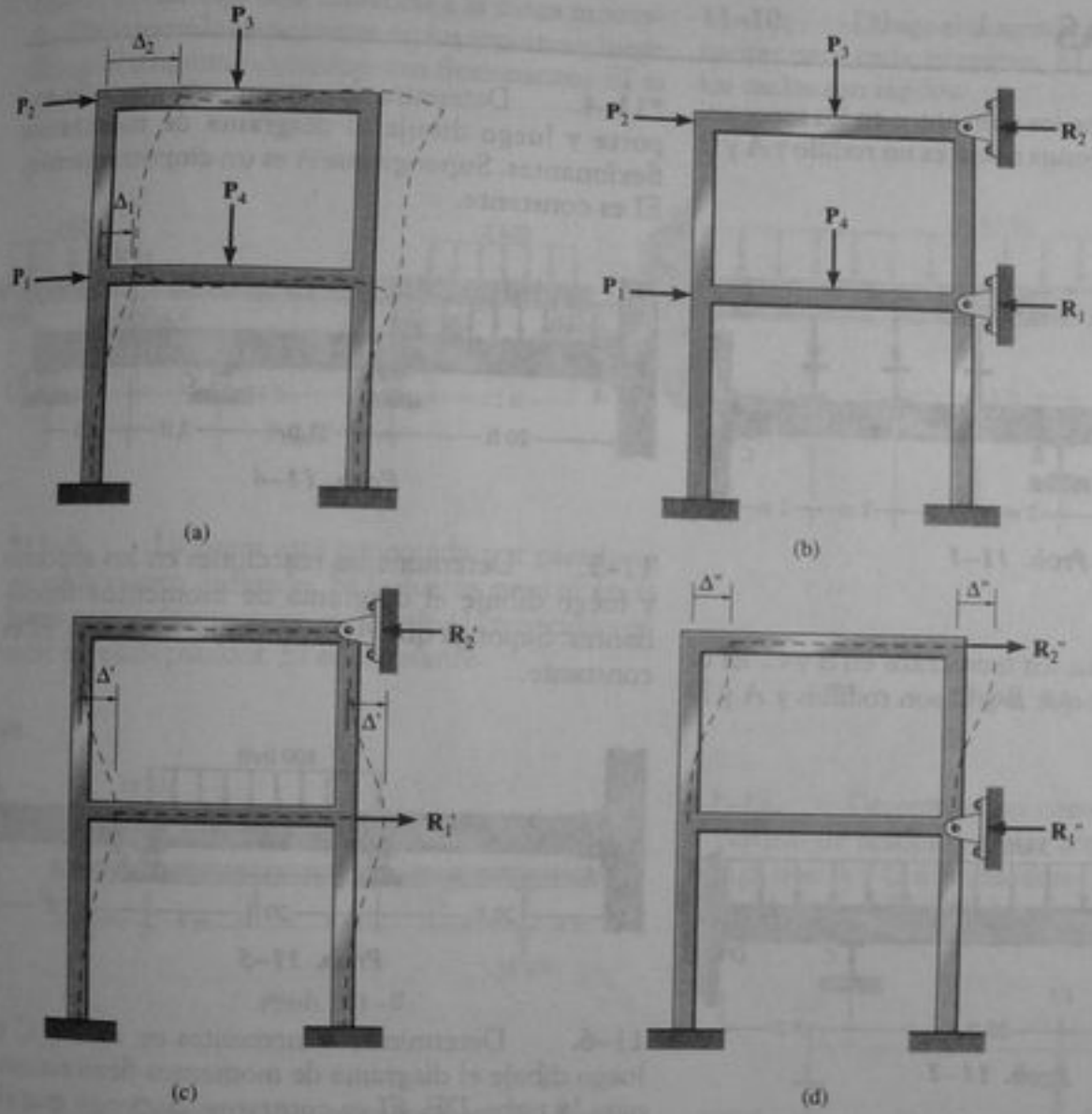


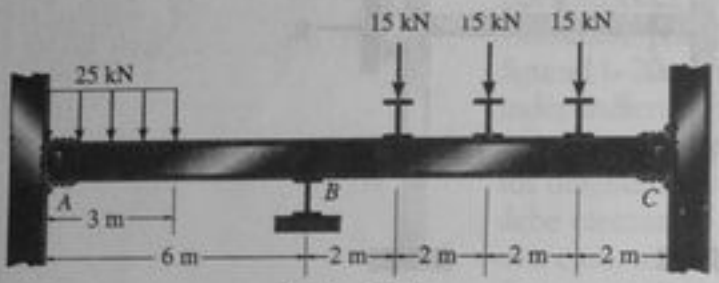
Fig. 11–20

BIBLIOGRAFÍA

Gross, H., "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 56, 1930, p. 919–28.

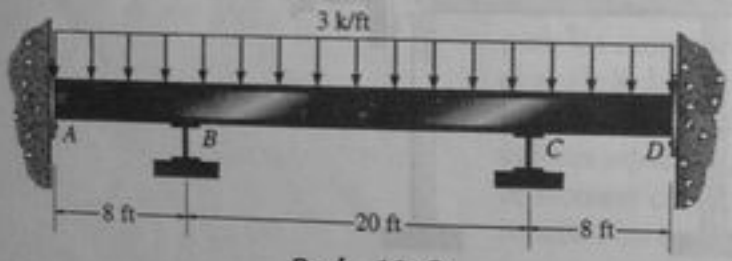
PROBLEMAS

11–1. Determine los momentos en los soportes. *EI* es constante. Suponga que *B* es un rodillo y *A* y *C* empotramientos.



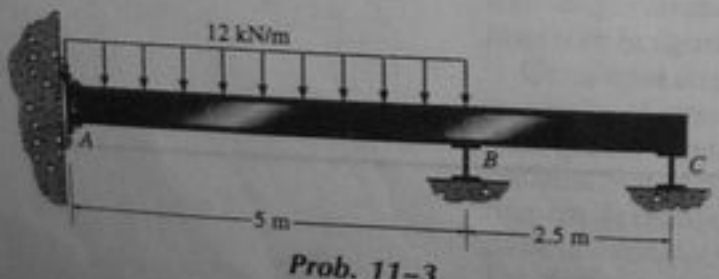
Prob. 11–1

11–2. Determine los momentos en *B* y *C*. *EI* es constante. Suponga que *B* y *C* son rodillos y *A* y *D* articulaciones.



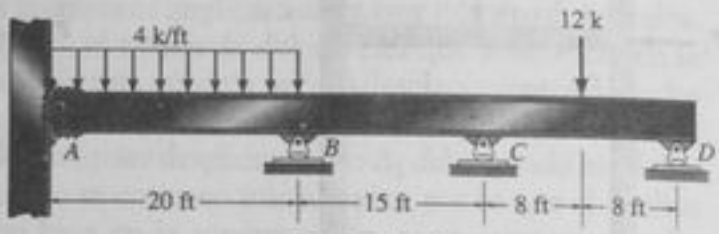
Prob. 11–2

11–3. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que *B* y *C* son rodillos y *A* un empotramiento. *EI* es constante.



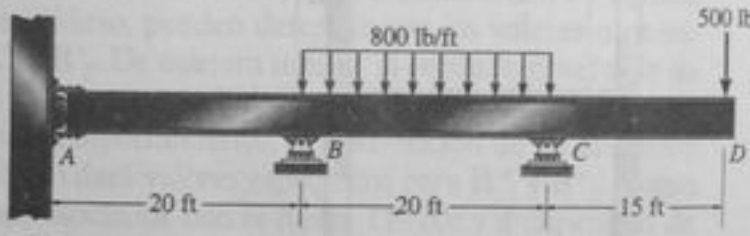
Prob. 11–3

***11–4.** Determine los momentos en cada soporte y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes. Suponga que *A* es un empotramiento. *EI* es constante.



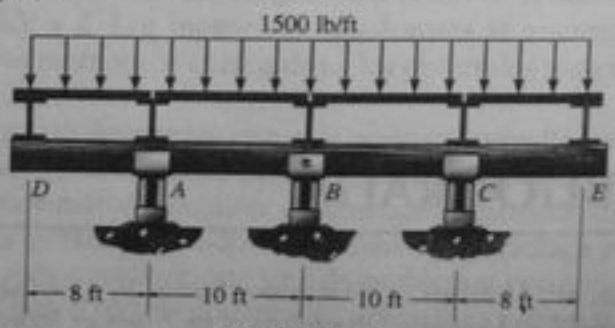
Prob. 11–4

11–5. Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes. Suponga que *A* es un empotramiento. *EI* es constante.



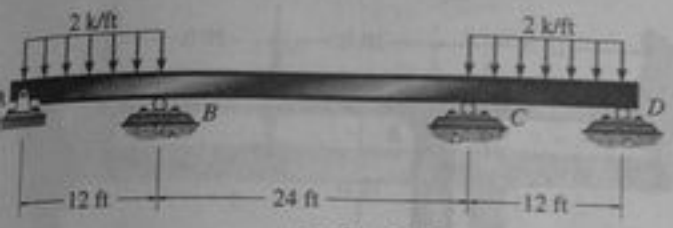
Prob. 11–5

11–6. Determine los momentos en *A*, *B* y *C* y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes para la trabe *DE*. *EI* es constante. Suponga que el soporte en *B* es un pasador y *A* y *C* rodillos. La carga distribuida descansa sobre tablones de piso simplemente apoyados que transmiten la carga a las vigas de piso.



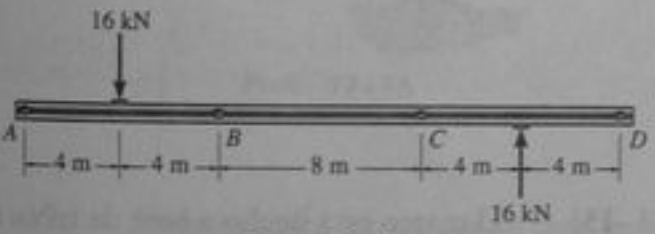
Prob. 11–6

11–7. La viga está sometida a la carga mostrada. Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes. *EI* es constante.



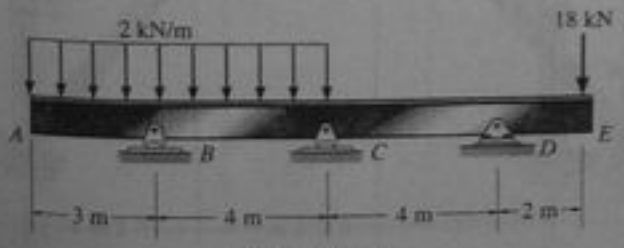
Prob. 11–7

***11–8.** La barra está conectada por pasadores en cada punto indicado. Si la fuerza normal en la barra puede despreciarse, determine la reacción vertical en cada pasador. *EI* es constante.



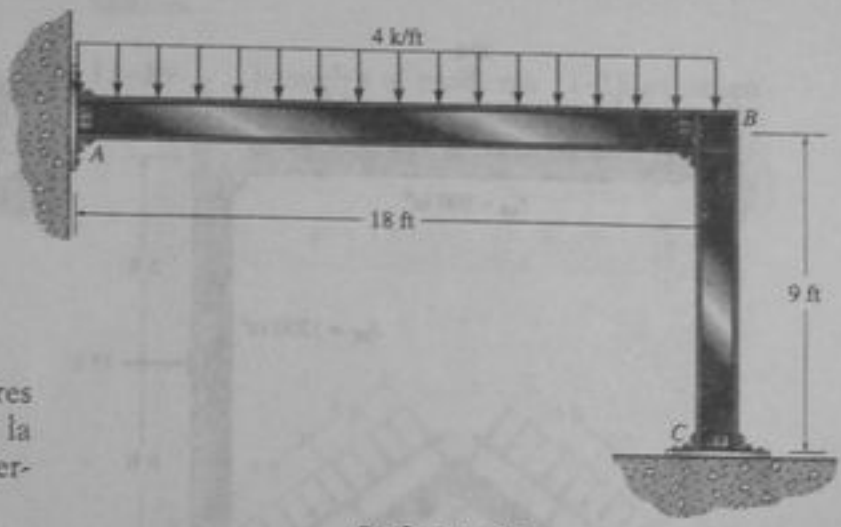
Prob. 11–8

11–9. Determine los momentos en A, B y C y luego dibuje el diagrama de momentos flexionantes. *EI* es constante.



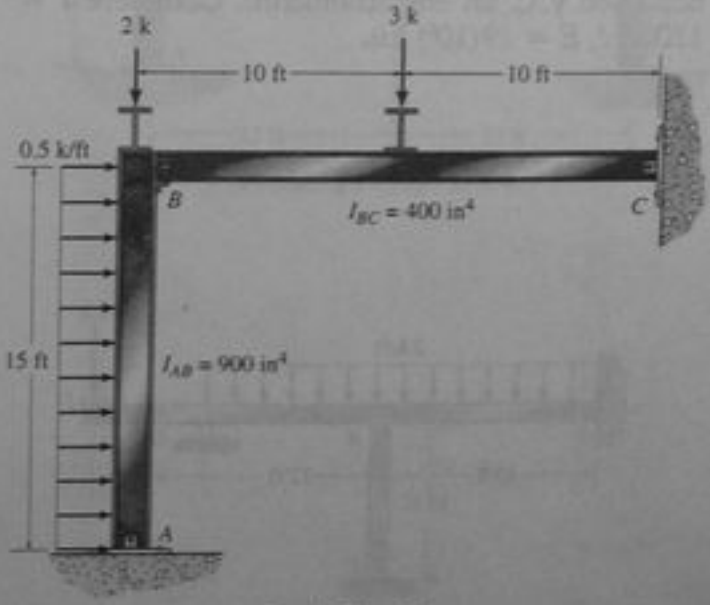
Prob. 11–9

11–10. Dibuje el diagrama de momentos flexionantes para cada miembro. *EI* es constante. Todos los nudos son rígidos.



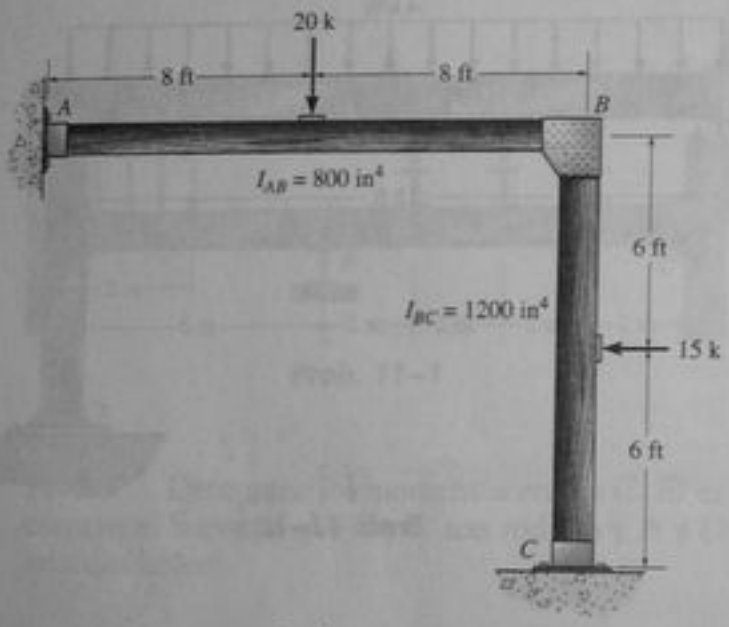
Prob. 11–10

11–11. Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en las conexiones A y B. Suponga que A y C son pasadores y B un nudo rígido. Considere $E = 29(10^3)$ ksi.



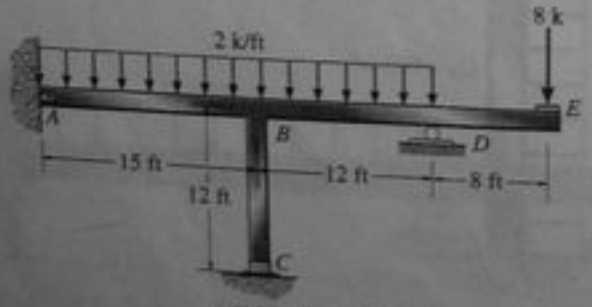
Prob. 11–11

*11–12. Determine los momentos en los extremos de cada miembro. Los miembros están rígidamente conectados en los soportes y en el nudo *B*. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. El momento de inercia de cada miembro se indica en la figura.



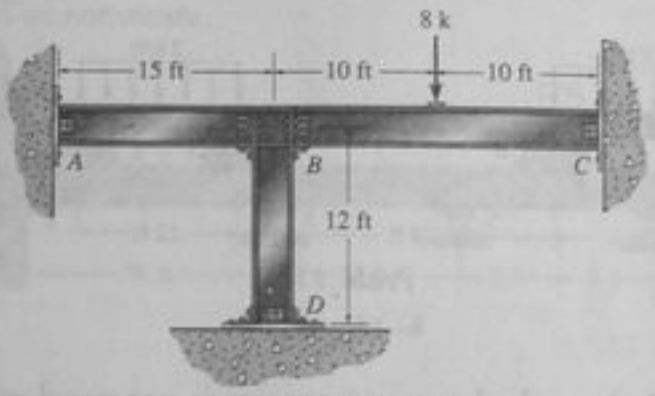
Prob. 11–12

11–13. Determine los momentos internos en los soportes y dibuje el diagrama de momentos flexionantes para *ABDE*. Suponga que *A* es una articulación y *C* un empotramiento. Considere $I = 1200$ in^4, $E = 29(10^3)$ ksi.



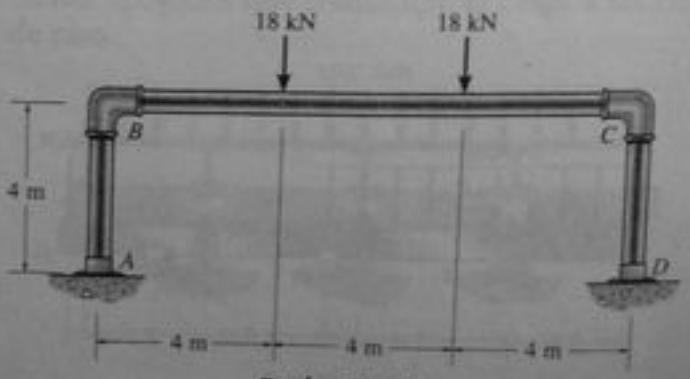
Prob. 11–13

11–14. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que *A* y *C* están articulados y que *B* y *D* están rígidamente conectados. *EI* es constante en toda la estructura.



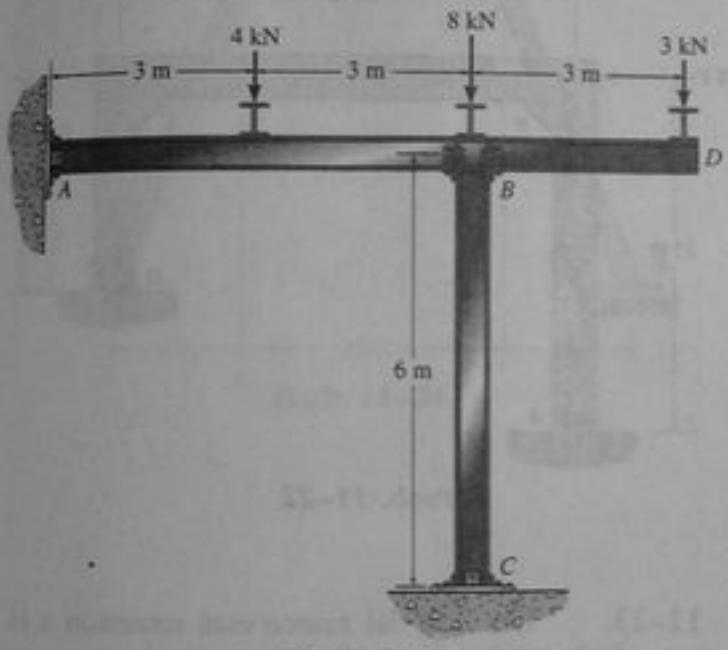
Prob. 11–14

11–15. El marco está hecho a base de tubos rígidamente conectados. Con las cargas mostradas, determine los momentos desarrollados en cada nudo. *EI* es constante.



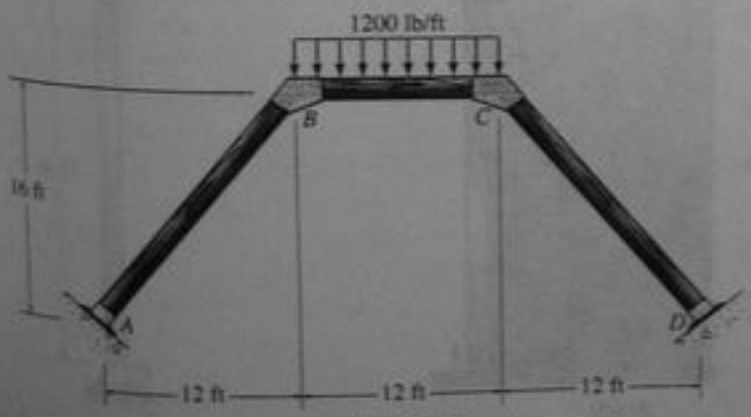
Prob. 11–15

*11–16. Determine los momentos en los extremos de cada miembro del marco. Los soportes en A y C y el nudo B están rígidamente conectados. Considere EI igual para todos los miembros.



Prob. 11–16

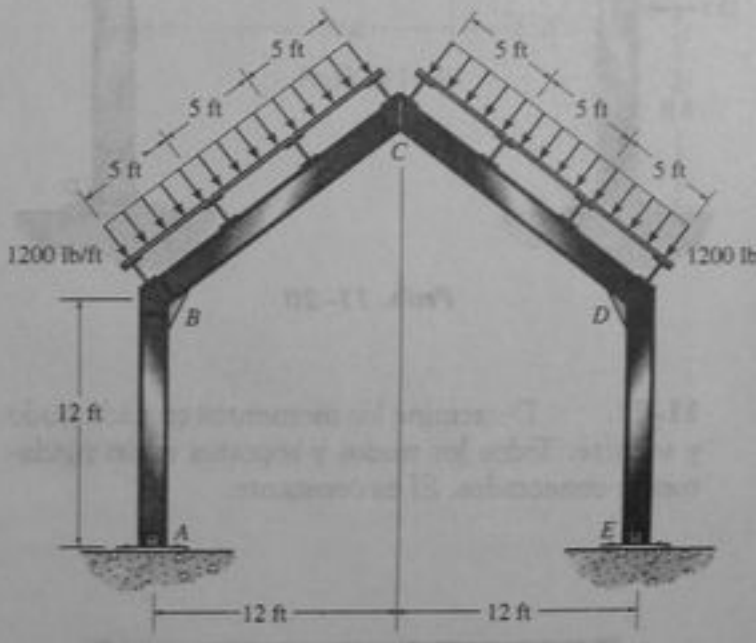
11–17. Determine los momentos en cada nudo y soporte del marco con columnas inclinadas. EI es constante. Los soportes y los nudos están rígidamente conectados.



Prob. 11–17

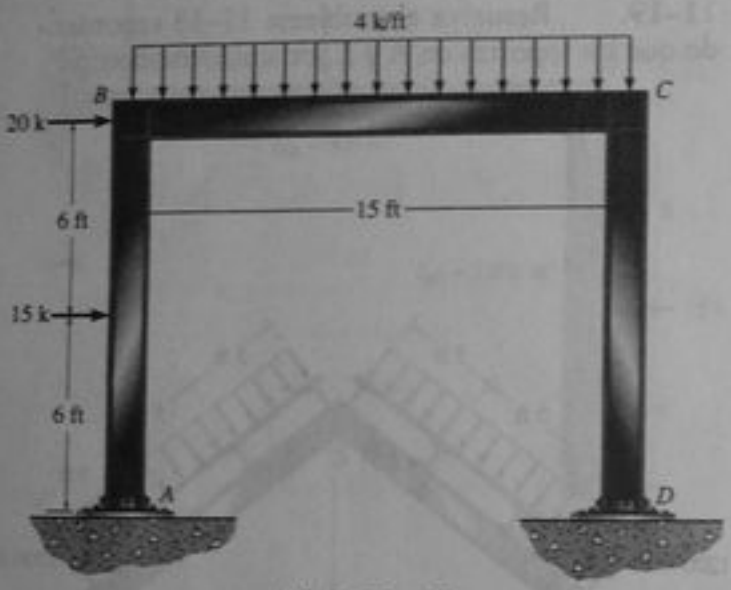
11–18. Determine los momentos en cada nudo del marco a dos aguas. EI es constante. La carga del techo se transmite a cada uno de los largueros por medio de secciones de la cubierta simplemente apoyadas. Suponga que los soportes en A y E son pasadores.

11–19. Resuelva el problema 11–18 suponiendo que los soportes en A y E son empotramientos.



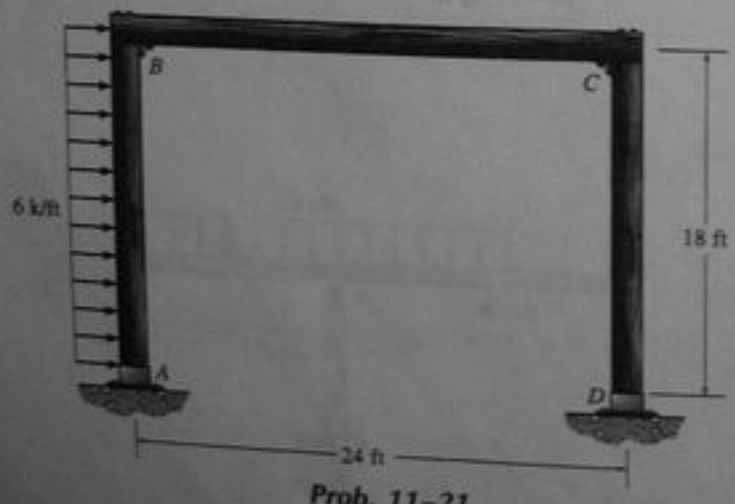
Probs. 11–18/11–19

*11–20. Determine los momentos en los extremos de cada miembro del marco. Los miembros están rígidamente conectados en los soportes y nudos. *EI* es constante en toda la estructura.



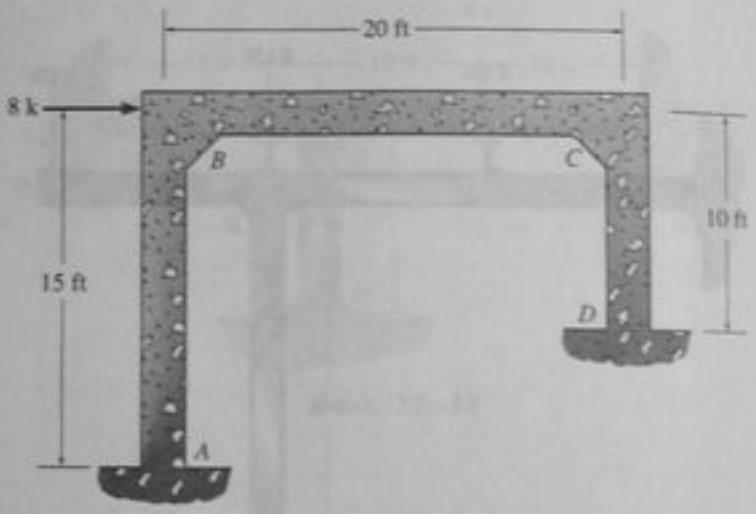
Prob. 11–20

11–21. Determine los momentos en cada nudo y soporte. Todos los nudos y soportes están rígidamente conectados. *EI* es constante.



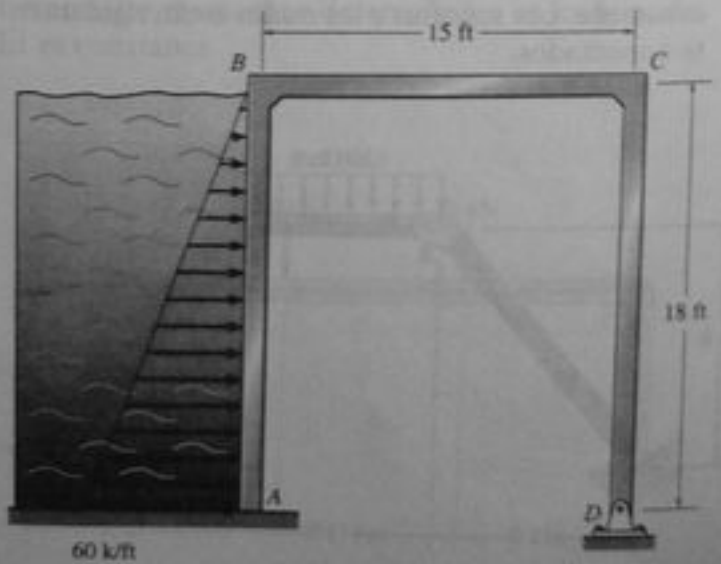
Prob. 11–21

11–22. Determine los momentos en cada nudo y soporte. *EI* es constante.



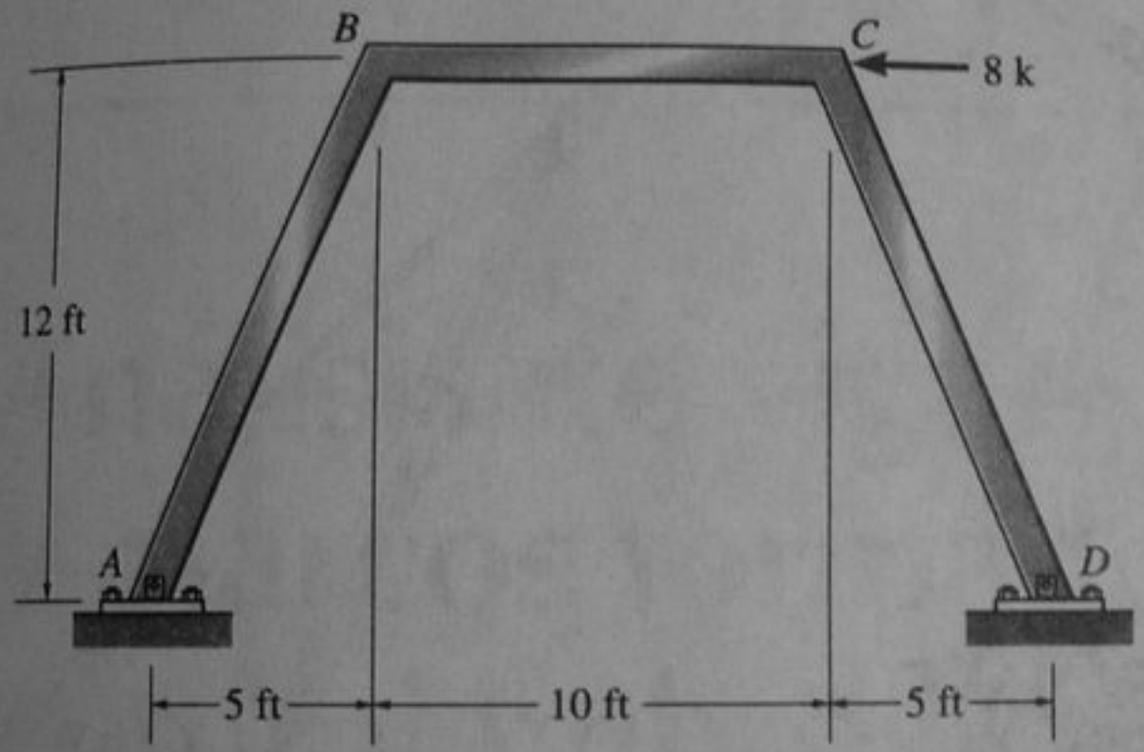
Prob. 11–22

11–23. Un lado del marco está sometido a la carga hidrostática mostrada. Determine los momentos en cada nudo y soporte. *EI* es constante.



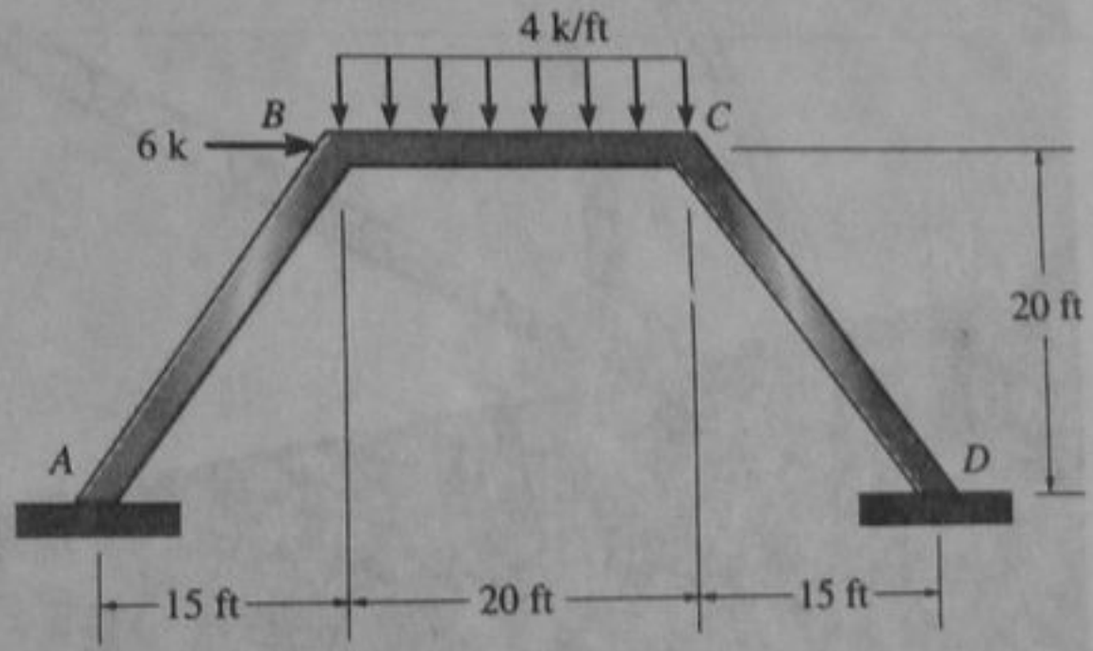
Prob. 11–23

*11–24. Determine el momento en cada nudo del marco con columnas inclinadas. Los soportes en A y D son pasadores. EI es constante.

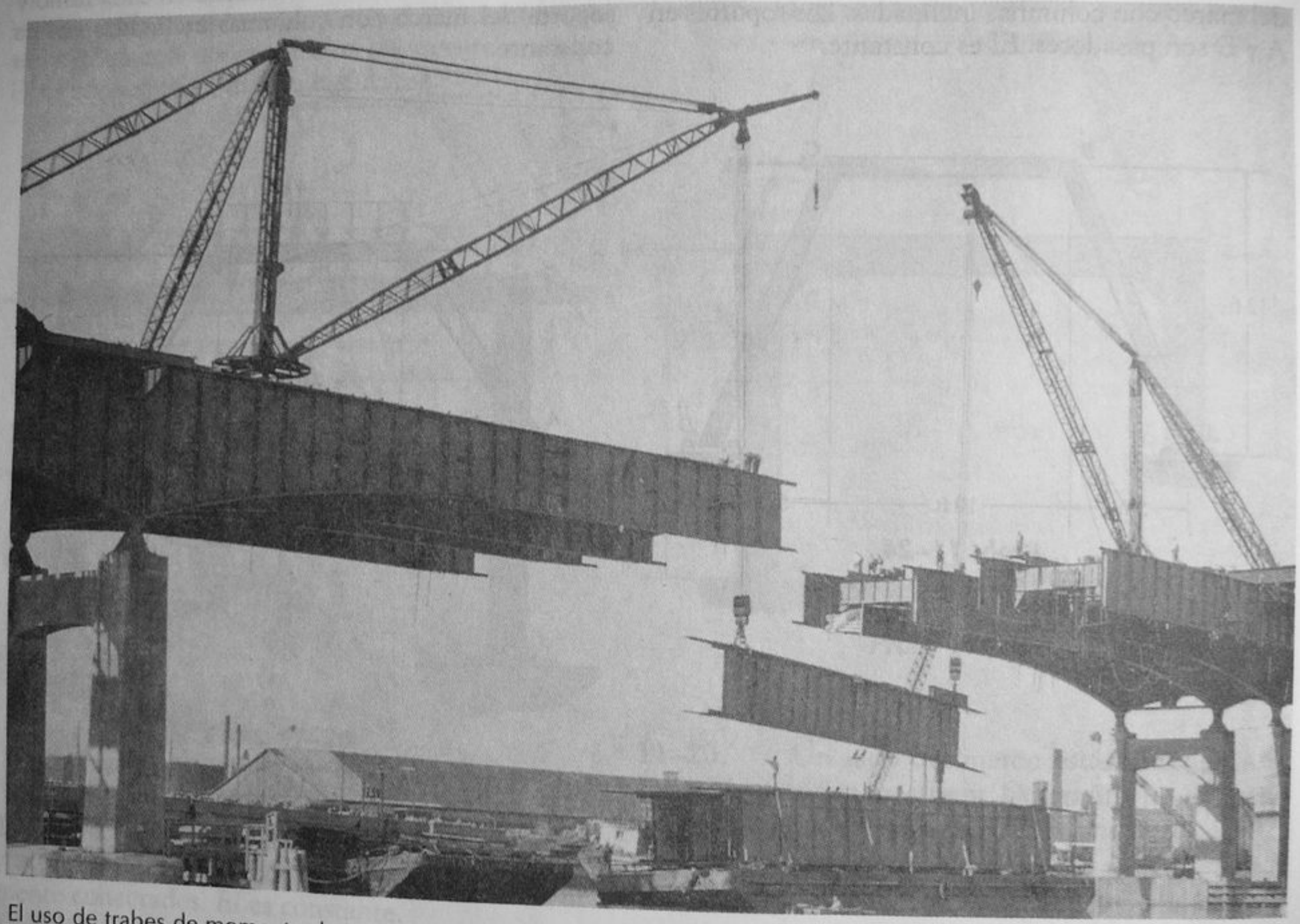


Prob. 11–24

11–25. Determine el momento en cada nudo y soporte del marco con columnas inclinadas. EI es constante.



Prob. 11–25



El uso de trabes de momento de inercia variable ha reducido considerablemente la carga por peso propio de este claro de puente. (Fotografía por cortesía de la Bethlehem Steel.)

12

Análisis de vigas y marcos formados con miembros no prismáticos

En capítulos previos hemos considerado el análisis indeterminado de vigas y marcos compuestos por miembros prismáticos, esto es, miembros con momento de inercia *constante*. A menudo, para ahorrar material, las trabes usadas para grandes claros de puentes y edificios se diseñan con momento de inercia variable. En este capítulo aplicaremos los métodos de pendiente-desviación y distribución de momentos al análisis de vigas y marcos compuestos con miembros no prismáticos. En realidad, los procedimientos generales de aplicación de esos métodos son idénticos a los presentados en los dos capítulos anteriores. Sin embargo, aquí debemos desarrollar factores de transporte, de rigidez y momentos de empotramiento apropiados, cada uno de los cuales depende de la geometría de la sección transversal del miembro. Un procedimiento numérico general para esto será desarrollado primero con el uso del método de la viga conjugada. Se explicará luego el uso de las tablas para el cálculo de esos valores. Finalmente, se verá el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas con los métodos de pendiente-desviación y de distribución de momentos.

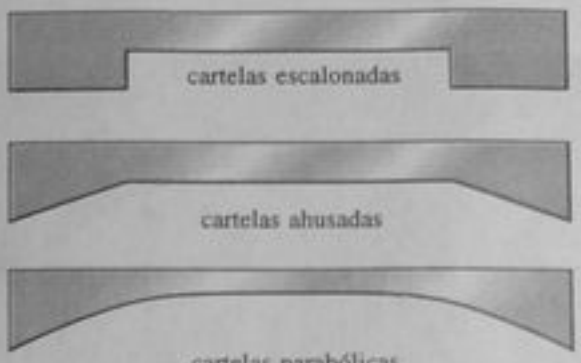


Fig. 12–1

12.1 Deflexiones de miembros no prismáticos

Las formas más comunes de miembros estructurales no prismáticos tienen cartelas que son escalonadas, ahusadas o parabólicas, figura 12–1. Podemos usar el principio del trabajo virtual o el teorema de Castigliano como se vio en el capítulo 8 para calcular sus deflexiones. Las ecuaciones son

$$\Delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI}\,dx \qquad \text{o} \qquad \Delta = \int_0^l \frac{\partial M}{\partial P}\frac{M}{EI}\,dx$$

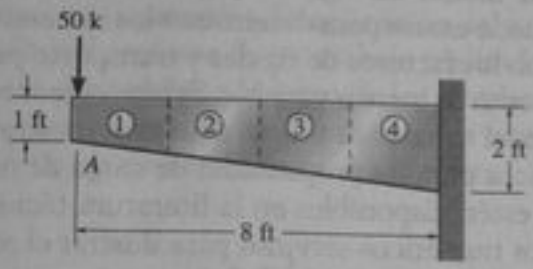
Para un miembro no prismático, la integración requiere que I se exprese como función de la coordenada x de la longitud. En consecuencia, la geometría y carga del miembro puede requerir el cálculo de una integral imposible de calcular en forma cerrada; por ello, tendrá que usarse la regla de Simpson o alguna otra técnica numérica para llevar a cabo la integración.

Es posible también usar un procedimiento geométrico como los teoremas de área-momento o el método de la viga conjugada para determinar la deflexión de un miembro no prismático. El ejemplo siguiente ilustra el uso del método de la viga conjugada.

Un estribo de concreto reforzado con viga acartelada se usa para soportar las trabes de acero del paso a desnivel carretero.

Ejemplo 12–1

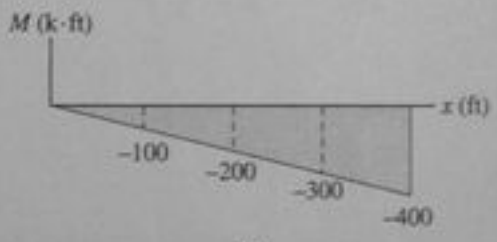
Use el método de la viga conjugada para determinar la deflexión del extremo A de la viga ahusada mostrada en la figura 12–2*a*. Suponga que la viga tiene un ancho de 1 ft y $E = 4000$ ksi.



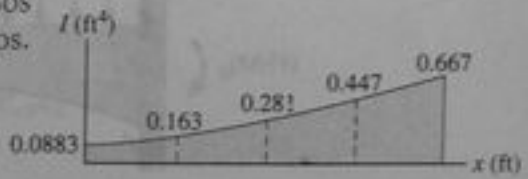
(a)

Solución

La viga será segmentada cada 2 ft e identificaremos los segmentos numéricamente como se muestra en la figura 12–2*a*. El diagrama de momentos se muestra en la figura 12–2*b*. El momento de inercia se calcula con el uso de $I = \frac{1}{12}bh^3$ en los extremos de los intervalos de 2 ft y están registrados en la figura 12–2*c*. De los datos, se determina el diagrama M/EI y se muestra sobre la viga conjugada en la figura 12–2*d*. Queremos encontrar $\Delta_A = M_{A'}$. Para ello, se supone que la carga consiste (aproximadamente) en siete áreas triangulares indicadas por las líneas punteadas. Se ve que hay *tres pares* de triángulos, cada par con una "base" *vertical* común y la misma "altura" horizontal de 2 ft. La posición del centroide de esos pares y del triángulo más a la derecha está indicada por puntos. Por lo tanto,



(b)

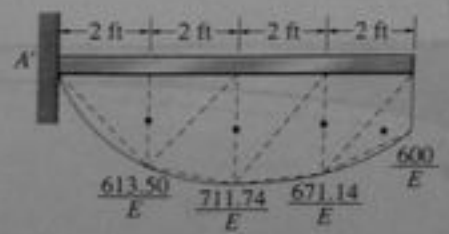


(c)

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{A'} = 0;$$

$$\Delta_A = M_{A'} = \frac{1}{2}\left(\frac{613.50}{E}\right)(4)(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{711.74}{E}\right)(4)(4) + \frac{1}{2}\left(\frac{671.14}{E}\right)(4)(6) + \frac{1}{2}\left(\frac{600}{E}\right)(2)(7.33)$$

$$= \frac{20{,}599.6}{E}$$



(d)

Fig. 12–2

Sustituimos $E = 4000$ k/in² (144 in²/ft²) y tenemos

$$\Delta_A = 0.0358 \text{ ft} = 0.429 \text{ in.} \qquad \textit{Resp.}$$

12.2 Análisis de propiedades de carga de miembros no prismáticos con el método de la viga conjugada

Un análisis por medio de viga conjugada es un método numérico práctico que puede usarse para determinar los momentos de empotramiento así como los factores de rigidez y transporte para un miembro que tiene momento de inercia variable. Si bien el procedimiento puede ser algo tedioso, el método se ilustra aquí para mostrar cómo obtener valores numéricos para las propiedades de carga de un miembro particular que no estén disponibles en la literatura técnica publicada.

Dos ejemplos numéricos servirán para ilustrar el método. Respecto a esto, recuerde las siguientes definiciones.

Momentos de empotramiento (FEM): Reacciones de momento de extremo de una viga supuesta empotrada, figura 12–3*a*.

Factor de rigidez (K): Magnitud del momento que debe aplicarse al extremo de una viga para que éste gire un ángulo $\theta = 1$ rad. El momento se aplica en el soporte de pasador de la viga, mientras el otro se supone empotrado, figura 12–3*b*.*

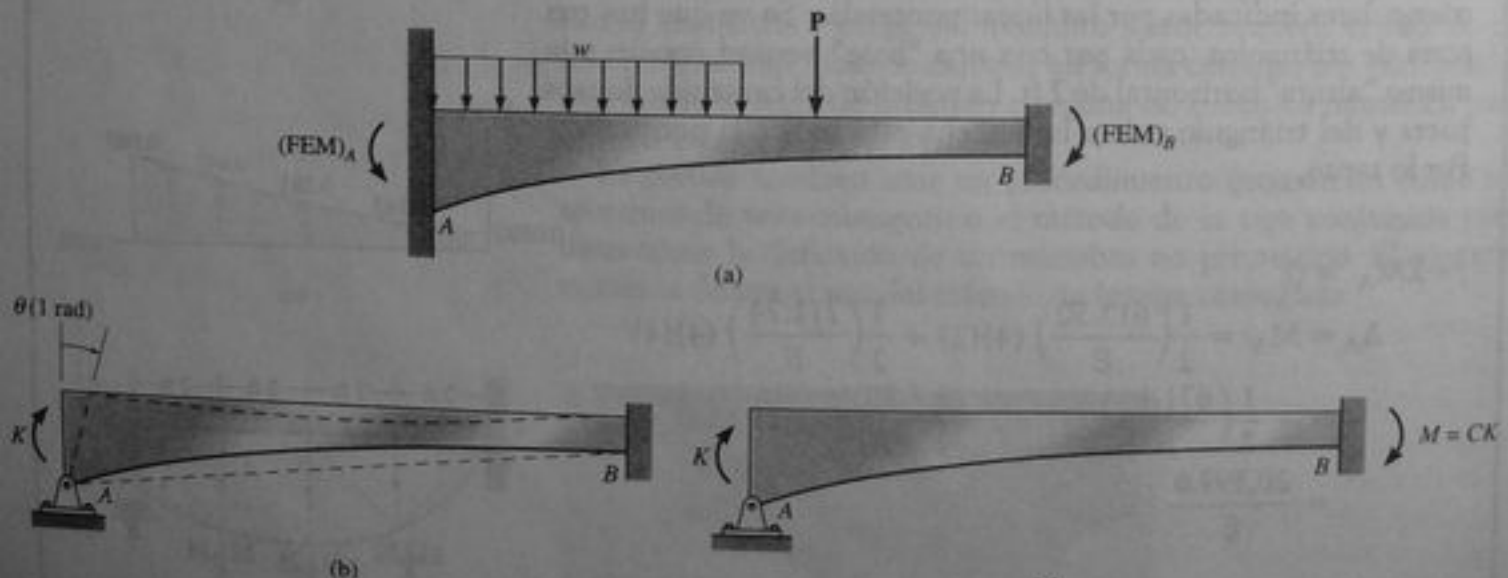


Fig. 12–3

* Con fines ilustrativos, el ángulo $\theta = 1$ rad (57.3°) no está dibujado a escala sobre la viga.

Factor de transporte (COF): Fracción numérica (C) del momento que se "transporta" del extremo soportado por pasador al empotramiento, figura 12–3c.

Los cálculos de los factores de rigidez y transporte pueden verificarse, en parte, notando una importante relación que existe entre ellos. Respecto a esto, considere la viga en la figura 12–4 sometida a las cargas y deflexiones mostradas. La aplicación del teorema recíproco de Maxwell–Betti† requiere que el trabajo realizado por las cargas en la figura 12–4*a* que actúan a lo largo de los desplazamientos en la figura 12–4*b* sea igual al trabajo de las cargas en la figura 12–4*b* y que actúan a lo largo de los deplazamientos en la figura 12–4*a*, esto es,

$$U_{AB} = U_{BA}$$
$$K_A(0) + C_{AB}K_A(1) = C_{BA}K_B(1) + K_B(0)$$

o

$$C_{AB}K_A = C_{BA}K_B \qquad (12–1)$$

Entonces, una vez determinados, los factores de rigidez y transporte deben satisfacer la ecuación 12–1.

Las columnas acarteladas de este puente carretero proporcionan un soporte rígido para las trabes laterales.

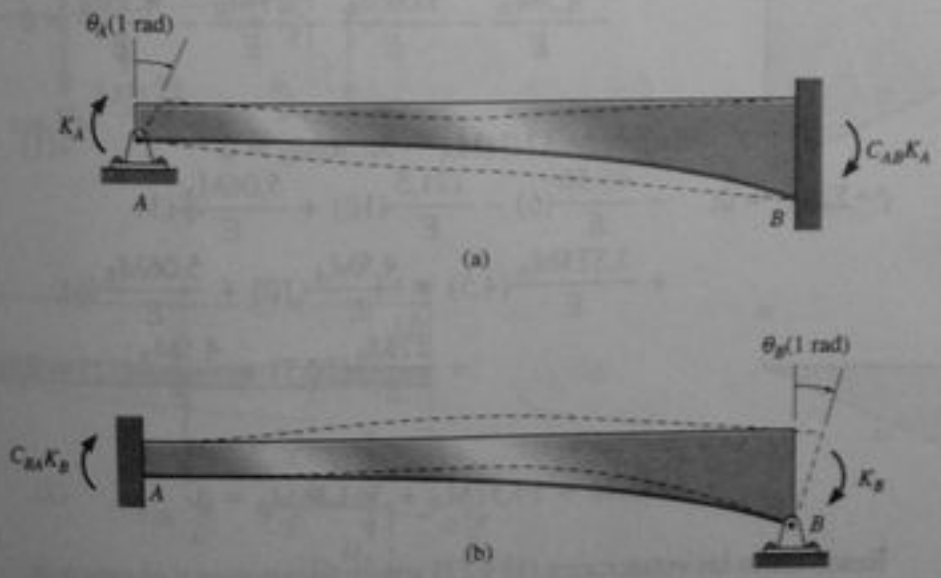


Fig. 12–4

†Véase la sección 9.3.

Ejemplo 12–2

Determine los momentos de empotramiento para la viga mostrada en la figura 12–5*a*. La sección transversal tiene un ancho constante de 1 ft. E es constante.

Solución

Como los soportes de la viga real en A y B son empotramientos, la viga conjugada está libre en sus extremos A' y B'. Los diagramas de momento se trazarán por partes, usando el método de superposición visto en la sección 4.5. Las partes mostradas en las figuras 12–5*b* a la 12–5*d*, representan los diagramas de momento para una viga simplemente apoyada cargada con una fuerza concentrada de 3 k y cada uno de los momentos de extremo $\mathbf{M}_A$ y $\mathbf{M}_B$. Para el claro AC, $I_{AC} = \frac{1}{12}(1)(2)^3 = 0.667\ \text{ft}^4$ y para el claro CB, $I_{CB} = \frac{1}{12}(1)(1)^3 = 0.0833\ \text{ft}^4$. Con esos valores, los diagramas (cargas) M/EI sobre la viga conjugada se muestran a la izquierda en las figuras 12–5*b* a la 12–5*d*. Las fuerzas resultantes ocasionadas por esas cargas "distribuidas" ya han sido calculadas y se muestran también en la figura. Como la pendiente y deflexión en el extremo A (o B) de la viga real son iguales a cero, se requiere

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \frac{45.56}{E} + \frac{121.5}{E} - \frac{5.06M_A}{E} - \frac{3.375M_A}{E} - \frac{4.5M_A}{E} - \frac{5.06M_B}{E} - \frac{27M_B}{E} - \frac{4.5M_B}{E} = 0$$

o

$$167.06 - 12.94M_A - 36.56M_B = 0 \qquad (1)$$

$$\curvearrowright +\Sigma M_{A'} = 0; \quad -\frac{45.56}{E}(6) - \frac{121.5}{E}(10) + \frac{5.06M_A}{E}(3) + \frac{3.375M_A}{E}(4.5) + \frac{4.5M_A}{E}(10) + \frac{5.06M_B}{E}(6) + \frac{27M_B}{E}(10.5) + \frac{4.5M_B}{E}(11) = 0$$

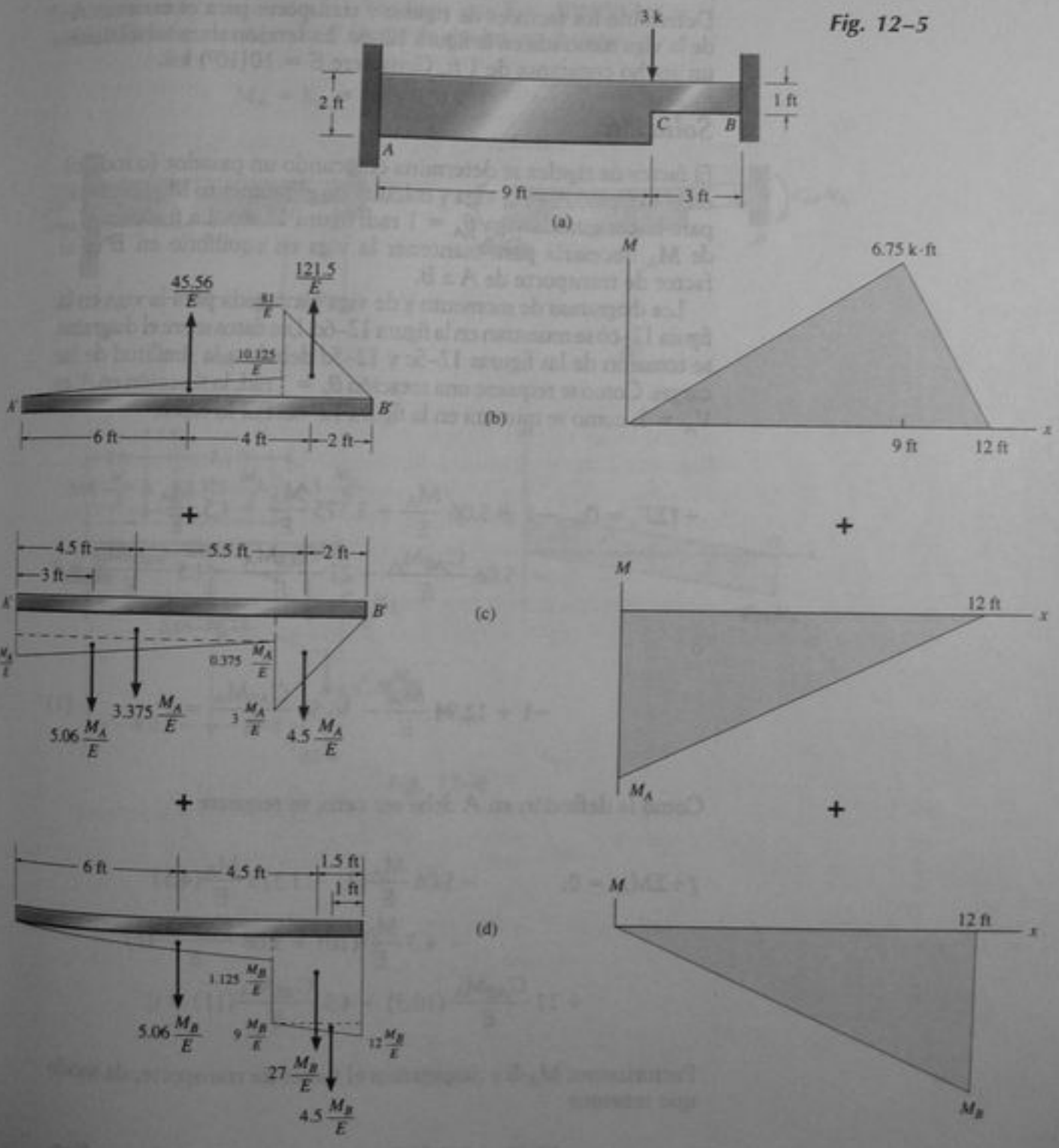
o

$$-1488.36 + 75.37M_A + 363.36M_B = 0 \qquad (2)$$

Resolvemos las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente y obtenemos

$$M_A = (\text{FEM})_{AB} = 3.23\ \text{k}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$
$$M_B = (\text{FEM})_{BA} = 3.43\ \text{k}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 12–5


3 k
2 ft
1 ft
A
C
B
9 ft
3 ft
(a)
45.56/E
121.5/E
81/E
10.125/E
A'
B'
6 ft
4 ft
2 ft
(b)
M
6.75 k-ft
9 ft
12 ft
x
+
4.5 ft
5.5 ft
2 ft
3 ft
0.375 M_A/E
5.06 M_A/E
3.375 M_A/E
3 M_A/E
4.5 M_A/E
(c)
M
12 ft
x
M_A
+
6 ft
4.5 ft
1.5 ft
1 ft
1.125 M_B/E
5.06 M_B/E
9 M_B/E
12 M_B/E
27 M_B/E
4.5 M_B/E
(d)
M
12 ft
x
M_B

Ejemplo 12–3

Determine los factores de rigidez y transporte para el extremo A de la viga mostrada en la figura 12–6*a*. La sección transversal tiene un ancho constante de 1 ft. Considere $E = 10(10^3)$ ksi.

Solución

El factor de rigidez se determina colocando un pasador (o rodillo) en el extremo A de la viga y calculando el momento $\mathbf{M}_A$ necesario para hacer girar la viga $\theta_A = 1$ rad, figura 12–6*b*. La fracción C_{AB} de $\mathbf{M}_A$ necesaria para mantener la viga en equilibrio en B es el factor de transporte de A a B.

Los diagramas de momento y de viga conjugada para la viga en la figura 12–6*b* se muestran en la figura 12–6c. Los datos sobre el diagrama se tomaron de las figuras 12–5c y 12–5*d* debido a la similitud de las cargas. Como se requiere una rotación $\theta_A = 1$ rad, la reacción en A' es $V_{A'} = 1$, como se muestra en la figura 12–6c. Por lo tanto,

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad -1 + 5.06\frac{M_A}{E} + 3.375\frac{M_A}{E} + 4.5\frac{M_A}{E} - 5.06\frac{C_{AB}M_A}{E} - 27\frac{C_{AB}M_A}{E} - 4.5\frac{C_{AB}M_A}{E} = 0$$

o

$$-1 + 12.94\frac{M_A}{E} - 36.56\frac{C_{AB}M_A}{E} = 0 \qquad (1)$$

Como la deflexión en A debe ser cero, se requiere

$$\curvearrowleft +\Sigma M_{A'} = 0; \quad -5.06\frac{M_A}{E}(3) - 3.375\frac{M_A}{E}(4.5) - 4.5\frac{M_A}{E}(10) + 5.06\frac{C_{AB}M_A}{E}(6) + 27\frac{C_{AB}M_A}{E}(10.5) + 4.5\frac{C_{AB}M_A}{E}(11) = 0$$

Factorizamos M_A/E y despejamos el factor de transporte, de modo que tenemos

$$-75.37 + 363.36C_{AB} = 0 \qquad C_{AB} = 0.207 \qquad \textit{Resp.}$$

Sustituimos en la ecuación (1), hacemos que $E = 10(10^3)$ ksi = $1440(10^3)$ ksf y, despejando el factor de rigidez, se obtiene

$$M_A = K_A = 268(10^3)\ \text{k} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

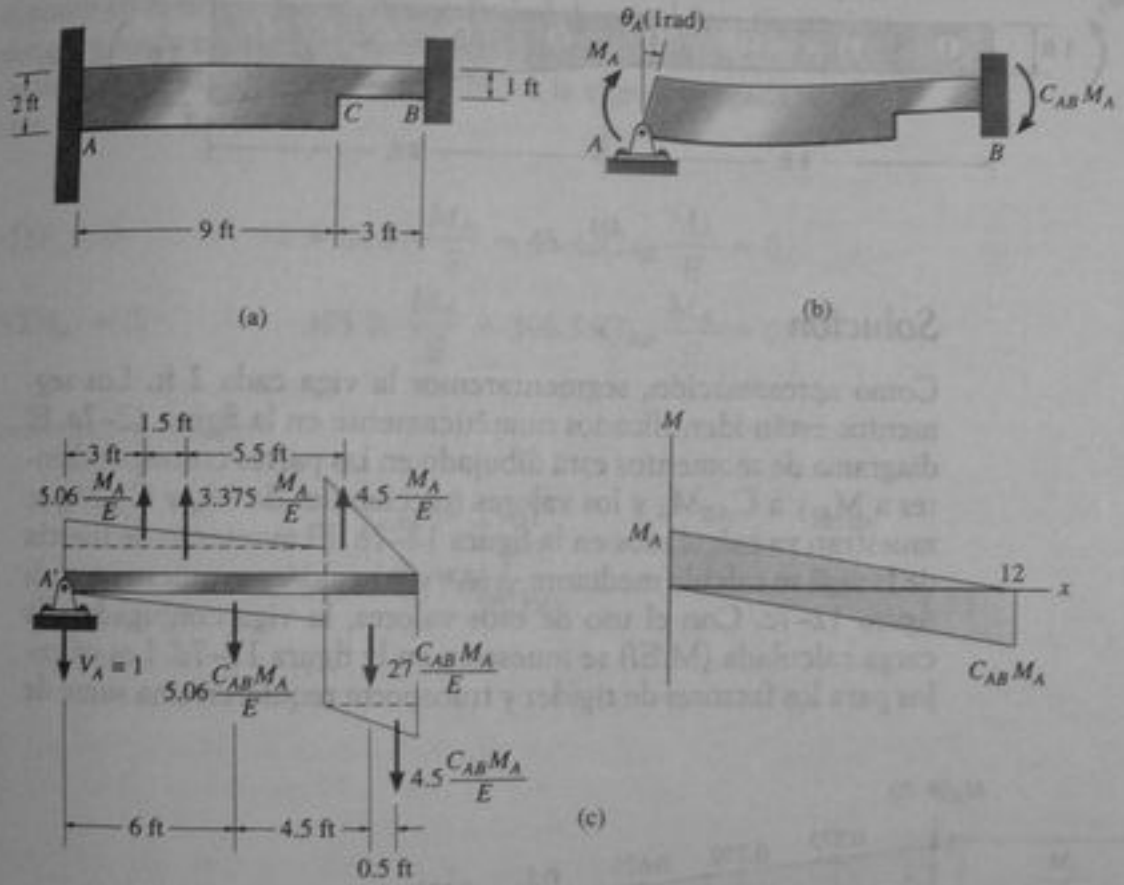
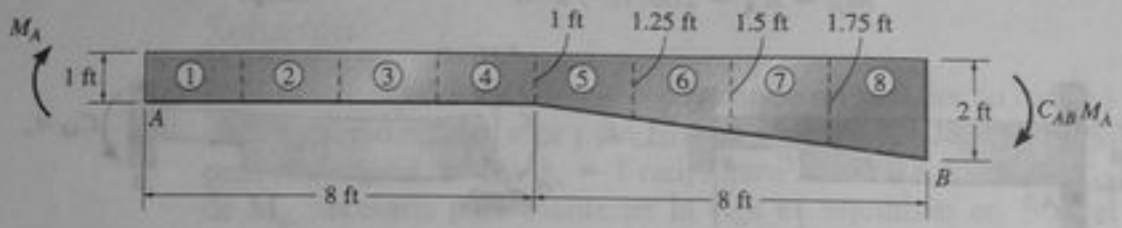


Fig. 12–6

Ejemplo 12–4

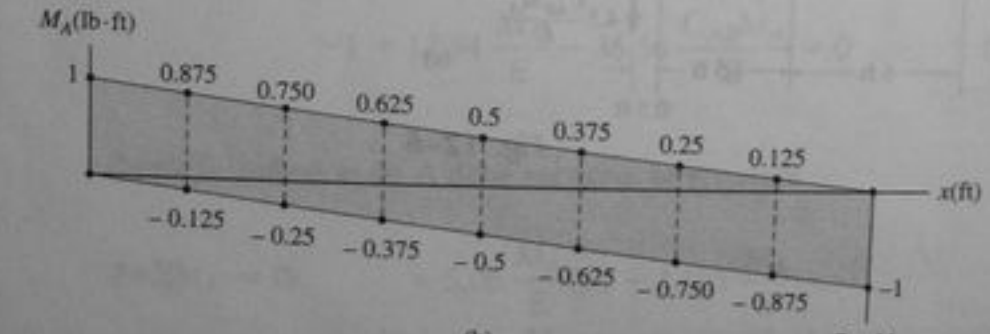
Determine los factores de rigidez y transporte para el extremo A de la viga ahusada que se muestra en la figura 12–7*a*. El área transversal tiene un ancho constante de 1 ft. *E* es constante.



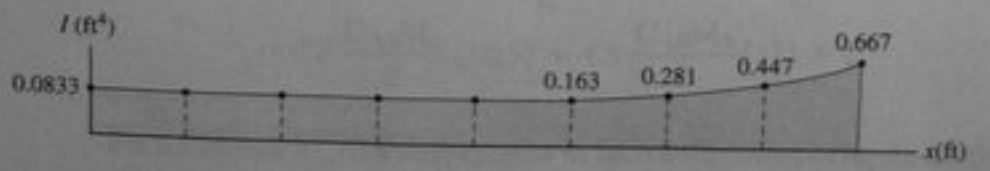
(a)

Solución

Como aproximación, segmentaremos la viga cada 2 ft. Los segmentos están identificados numéricamente en la figura 12–7*a*. El diagrama de momentos está dibujado en las partes correspondientes a M_A y a $C_{AB}M_A$ y los valores fraccionales de M_A y $C_{AB}M_A$ se muestran ya calculados en la figura 12–7*b*. El momento de inercia de la viga se calcula mediante $\frac{1}{12}bh^3$ y los valores se muestran en la figura 12–7*c*. Con el uso de esos valores, la viga conjugada y la carga calculada (*M*/*EI*) se muestran en la figura 12–7*d*. Los cálculos para los factores de rigidez y transporte requieren una suma de



(b)



(c)

Fig. 12–7

fuerzas verticales y de momentos respecto a A'. Con el fin de simplificar, la carga "distribuida" se descompone en triángulos como se muestra en la figura con las líneas punteadas. Se notará que cada par de triángulos tiene una "base" vertical común y una "altura" horizontal (2 ft). El centroide de esos pares está indicado por un punto en la figura. Los valores calculados para el área (fuerza) y momento están tabulados en la figura 12–7*e*. Con estos resultados y aplicando las ecuaciones de equilibrio a la viga conjugada se obtiene

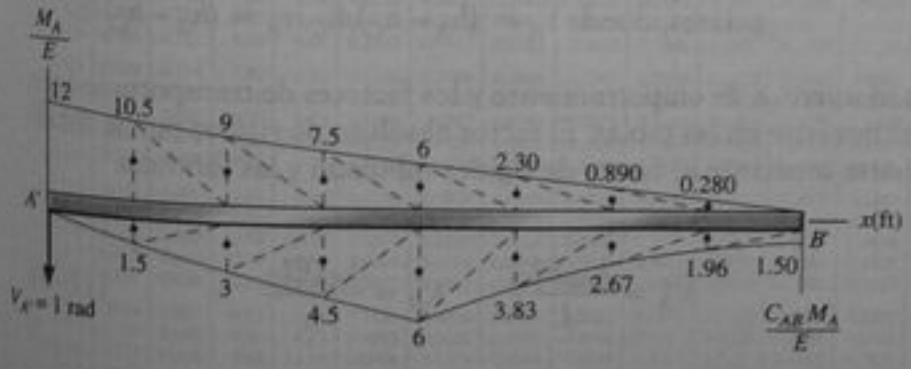
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -1 + 84.94\frac{M_A}{E} - 48.42C_{AB}\frac{M_A}{E} = 0$$

$$\curvearrowright +\Sigma M_{A'} = 0; \qquad -383.20\frac{M_A}{E} + 398.56C_{AB}\frac{M_A}{E} = 0$$

Resolvemos y resulta

$$C_{AB} = 0.961 \qquad \textit{Resp.}$$

$$K_A = M_A = \frac{E}{38.39} \qquad \textit{Resp.}$$



(d)

	$\frac{M_A}{E}$		$\frac{C_{AB}M_A}{E}$	
	Area	Momento respecto a A'	Area	Momento respecto a A'
	12	8	3	6
	21.0	42	6	24
	18	72	9	54
	15	90	12	96
	12	96	7.66	76.6
	4.6	46	5.34	64.08
	1.78	21.36	3.92	54.88
	0.56	7.84	1.50	23.00
Σ	84.94	383.20	48.42	398.56

(e)

12.3 Propiedades de carga de miembros no prismáticos disponibles en publicaciones

Como se indicó en la sección anterior, se requiere una gran cantidad de trabajo en la determinación de los momentos de empotramiento, factores de rigidez y transporte para miembros no prismáticos. En consecuencia, se han elaborado tablas y gráficas para determinar estos datos para las formas comunes usadas en el diseño estructural. Una fuente al respecto es el *Handbook of Frame Constants*, publicado por la Portland Cement Association.* Una porción de estas tablas, tomadas de este Manual, se reproduce aquí en las tablas 12–1 y 12–2. La nomenclatura en las tablas se define como sigue:

a_A, a_B = razón de la longitud de la cartela en el extremo A y B a la longitud del claro
b = razón de la distancia de la carga concentrada al extremo A a la longitud del claro
C_{AB}, C_{BA} = factores de transporte del miembro AB en los extremos A y B, respectivamente
h_A, h_B = peralte del miembro en los extremos A y B, respectivamente
h_C = peralte del miembro en la sección mínima
I_C = momento de inercia de la sección donde el peralte es mínimo
k_{AB}, k_{BA} = factor de rigidez en los extremos A y B, respectivamente
L = longitud del miembro
M_{AB}, M_{BA} = momento de empotramiento en los extremos A y B, respectivamente; dado en las tablas para carga uniforme w o una fuerza concentrada P
r_A, r_B = razón para las áreas de secciones transversales rectangulares, donde $r_A = (h_A - h_C)/h_C$, $r_B = (h_B - h_C)/h_C$

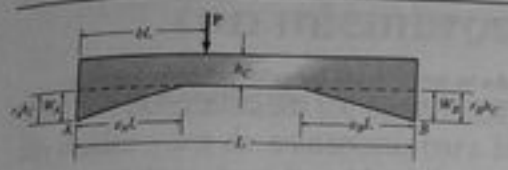
Los momentos de empotramiento y los factores de transporte se leen directamente en las tablas. El factor absoluto de rigidez puede determinarse mediante el factor de rigidez tabulado y las fórmulas

$$K_A = \frac{k_{AB} E I_C}{L} \qquad K_B = \frac{k_{BA} E I_C}{L} \tag{12–2}$$

El uso de las tablas se ilustrará en el ejemplo 12–5.

*Vea las referencias al final de capítulo.

Tabla 12–1 Cartelas rectas de ancho constante



Nota: Todos los factores de transporte y los coeficientes de momento de empotramiento son negativos y todos los factores de rigidez son positivos.

Cartela derecha		Factores de transporte		Factores de rigidez		FEM por carga uniforme = Coef. × wL^2		FEM por carga concentrada = Coef. × PL								Carga por cartela			
								b								Izquierda		Derecha	
								0.1		0.3		0.5		0.7		0.9		FEM = Coef. × $W_A L$		FEM = Coef. × $W_B L$	
a_B	r_B	C_{AB}	C_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}
$a_A = 0.3$ a_B = variable $r_A = 1.0$ r_B = variable																			
0.1	0.4	0.499	0.784	8.79	5.60	0.1237	0.0728	0.0940	0.0030	0.2216	0.0337	0.2036	0.1025	0.0981	0.1466	0.0100	0.0867	0.0134	0.0007	0.0001	0.0016
	0.6	0.515	0.782	8.95	5.89	0.1213	0.0759	0.0938	0.0032	0.2203	0.0355	0.2000	0.1074	0.0931	0.1532	0.0079	0.0893	0.0134	0.0008	0.0001	0.0016
	1.0	0.535	0.779	9.18	6.31	0.1181	0.0803	0.0937	0.0033	0.2175	0.0378	0.1951	0.1143	0.0864	0.1622	0.0054	0.0928	0.0133	0.0008	0.0000	0.0016
	1.5	0.551	0.777	9.35	6.64	0.1157	0.0836	0.0935	0.0035	0.2123	0.0396	0.1910	0.1196	0.0813	0.1693	0.0035	0.0952	0.0133	0.0009	0.0000	0.0016
	2.0	0.561	0.775	9.46	6.85	0.1141	0.0857	0.0935	0.0037	0.2162	0.0411	0.1885	0.1230	0.0781	0.1737	0.0025	0.0966	0.0133	0.0009	0.0000	0.0017
0.2	0.4	0.543	0.766	9.19	6.52	0.1194	0.0791	0.0935	0.0034	0.2185	0.0384	0.1955	0.1147	0.0889	0.1601	0.0096	0.0870	0.0133	0.0008	0.0006	0.0058
	0.6	0.576	0.758	9.53	7.24	0.1152	0.0851	0.0934	0.0038	0.2158	0.0422	0.1883	0.1250	0.0798	0.1729	0.0075	0.0898	0.0133	0.0009	0.0005	0.0060
	1.0	0.622	0.748	10.06	8.37	0.1089	0.0942	0.0931	0.0042	0.2118	0.0480	0.1771	0.1411	0.0668	0.1919	0.0047	0.0935	0.0132	0.0011	0.0004	0.0062
	1.5	0.660	0.740	10.52	9.38	0.1037	0.1018	0.0927	0.0047	0.2085	0.0530	0.1678	0.1550	0.0559	0.2078	0.0028	0.0961	0.0130	0.0012	0.0002	0.0064
	2.0	0.684	0.734	10.83	10.09	0.1002	0.1069	0.0924	0.0050	0.2062	0.0565	0.1614	0.1645	0.0487	0.2185	0.0019	0.0974	0.0129	0.0013	0.0001	0.0065
0.3	0.4	0.579	0.741	9.47	7.40	0.1175	0.0822	0.0934	0.0037	0.2164	0.0419	0.1909	0.1225	0.0856	0.1649	0.0100	0.0861	0.0133	0.0009	0.0022	0.0118
	0.6	0.629	0.726	9.98	8.64	0.1120	0.0902	0.0931	0.0042	0.2126	0.0477	0.1808	0.1379	0.0747	0.1807	0.0080	0.0888	0.0132	0.0010	0.0018	0.0124
	1.0	0.705	0.705	10.85	10.85	0.1034	0.1034	0.0924	0.0052	0.2063	0.0577	0.1640	0.1640	0.0577	0.2063	0.0052	0.0924	0.0131	0.0013	0.0013	0.0131
	1.5	0.771	0.689	11.70	13.10	0.0956	0.1157	0.0917	0.0062	0.2002	0.0675	0.1483	0.1892	0.0428	0.2294	0.0033	0.0953	0.0129	0.0015	0.0008	0.0137
	2.0	0.817	0.678	12.33	14.85	0.0901	0.1246	0.0913	0.0069	0.1957	0.0750	0.1368	0.2080	0.0326	0.2455	0.0022	0.0968	0.0128	0.0017	0.0006	0.0141
0.4	0.4	0.604	0.713	9.64	8.16	0.1167	0.0826	0.0933	0.0040	0.2153	0.0440	0.1883	0.1260	0.0851	0.1626	0.0104	0.0849	0.0133	0.0009	0.0052	0.0186
	0.6	0.669	0.689	10.28	9.97	0.1109	0.0915	0.0930	0.0047	0.2107	0.0515	0.1766	0.1444	0.0743	0.1779	0.0084	0.0874	0.0132	0.0011	0.0044	0.0196
	1.0	0.777	0.657	11.46	13.55	0.1010	0.1071	0.0922	0.0058	0.2022	0.0655	0.1560	0.1784	0.0572	0.2033	0.0059	0.0910	0.0130	0.0015	0.0033	0.0212
	1.5	0.828	0.631	12.74	17.22	0.0914	0.1232	0.0910	0.0075	0.1933	0.0811	0.1349	0.2148	0.0420	0.2272	0.0039	0.0938	0.0128	0.0019	0.0024	0.0227
	2.0	0.952	0.614	13.80	21.39	0.0841	0.1360	0.0904	0.0089	0.1861	0.0948	0.1182	0.2448	0.0315	0.2444	0.0026	0.0955	0.0126	0.0022	0.0017	0.0237
0.5	0.4	0.616	0.686	9.75	8.76	0.1161	0.0818	0.0932	0.0041	0.2144	0.0449	0.1864	0.1255	0.0846	0.1587	0.0107	0.0840	0.0133	0.0010	0.0097	0.0254
	0.6	0.692	0.653	10.46	11.09	0.1101	0.0905	0.0931	0.0049	0.2094	0.0532	0.1740	0.1444	0.0743	0.1723	0.0087	0.0863	0.0131	0.0012	0.0085	0.0270
	1.0	0.827	0.607	11.85	16.13	0.0999	0.1066	0.0920	0.0064	0.1997	0.0699	0.1521	0.1803	0.0579	0.1952	0.0063	0.0894	0.0129	0.0016	0.0067	0.0295
	1.5	0.966	0.572	13.49	22.79	0.0896	0.1246	0.0905	0.0086	0.1889	0.0907	0.1289	0.2219	0.0439	0.2173	0.0044	0.0923	0.0126	0.0022	0.0051	0.0320
	2.0	1.076	0.548	14.99	29.43	0.0814	0.1401	0.0898	0.0106	0.1790	0.1116	0.1095	0.2587	0.0339	0.2342	0.0031	0.0940	0.0124	0.0026	0.0039	0.0339
$a_A = 0.2$ a_B = variable $r_A = 1.5$ r_B = variable																			
0.1	0.4	0.523	0.730	7.63	5.46	0.1205	0.0736	0.0967	0.0016	0.2212	0.0335	0.1924	0.1060	0.0906	0.1491	0.0090	0.0870	0.0064	0.0001	0.0001	0.0016
	0.6	0.539	0.728	7.77	5.75	0.1184	0.0767	0.0967	0.0017	0.2201	0.0351	0.1889	0.1109	0.0861	0.1556	0.0072	0.0896	0.0064	0.0001	0.0001	0.0016
	1.0	0.560	0.726	7.96	6.14	0.1154	0.0810	0.0966	0.0018	0.2186	0.0373	0.1842	0.1178	0.0799	0.1646	0.0049	0.0929	0.0064	0.0001	0.0000	0.0016
	1.5	0.577	0.724	8.10	6.46	0.1132	0.0843	0.0965	0.0019	0.2174	0.0390	0.1806	0.1232	0.0751	0.1716	0.0032	0.0953	0.0064	0.0001	0.0000	0.0016
	2.0	0.587	0.722	8.19	6.66	0.1118	0.0863	0.0965	0.0019	0.2166	0.0402	0.1782	0.1265	0.0721	0.1760	0.0023	0.0966	0.0064	0.0001	0.0000	0.0017
0.2	0.4	0.569	0.714	7.97	6.35	0.1166	0.0799	0.0966	0.0019	0.2186	0.0377	0.1847	0.1183	0.0821	0.1626	0.0088	0.0873	0.0064	0.0001	0.0006	0.0058
	0.6	0.603	0.707	8.26	7.04	0.1127	0.0858	0.0965	0.0021	0.2163	0.0413	0.1778	0.1288	0.0736	0.1752	0.0068	0.0901	0.0064	0.0001	0.0005	0.0060
	1.0	0.652	0.698	8.70	8.12	0.1069	0.0947	0.0963	0.0023	0.2127	0.0468	0.1675	0.1449	0.0616	0.1940	0.0043	0.0937	0.0064	0.0002	0.0004	0.0062
	1.5	0.691	0.691	9.08	9.08	0.1021	0.1021	0.0962	0.0025	0.2097	0.0515	0.1587	0.1587	0.0515	0.2097	0.0025	0.0962	0.0064	0.0002	0.0002	0.0064
	2.0	0.716	0.686	9.34	9.75	0.0990	0.1071	0.0960	0.0028	0.2077	0.0547	0.1528	0.1661	0.0449	0.2202	0.0017	0.0975	0.0064	0.0002	0.0001	0.0065
0.3	0.4	0.607	0.692	8.21	7.21	0.1148	0.0829	0.0965	0.0021	0.2168	0.0409	0.1801	0.1263	0.0789	0.1674	0.0091	0.0866	0.0064	0.0002	0.0020	0.0118
	0.6	0.659	0.678	8.65	8.40	0.1098	0.0907	0.0964	0.0024	0.2135	0.0464	0.1706	0.1418	0.0688	0.1831	0.0072	0.0892	0.0064	0.0002	0.0017	0.0123
	1.0	0.740	0.660	9.38	10.52	0.1018	0.1037	0.0961	0.0028	0.2078	0.0559	0.1550	0.1678	0.0530	0.2085	0.0047	0.0927	0.0064	0.0002	0.0012	0.0130
	1.5	0.809	0.645	10.09	12.66	0.0947	0.1156	0.0958	0.0033	0.2024	0.0651	0.1403	0.1928	0.0393	0.2311	0.0029	0.0950	0.0063	0.0003	0.0008	0.0137
	2.0	0.852	0.636	10.62	14.32	0.0897	0.1242	0.0955	0.0038	0.1985	0.0720	0.1296	0.2119	0.0299	0.2469	0.0020	0.0968	0.0063	0.0003	0.0005	0.0141
0.4	0.4	0.634	0.667	8.37	7.96	0.1141	0.0833	0.0964	0.0022	0.2158	0.0429	0.1779	0.1297	0.0787	0.1650	0.0095	0.0853	0.0064	0.0002	0.0048	0.0188
	0.6	0.703	0.645	8.91	9.71	0.1087	0.0920	0.0962	0.0026	0.2117	0.0500	0.1669	0.1482	0.0686	0.1802	0.0077	0.0877	0.0064	0.0002	0.0041	0.0197
	1.0	0.817	0.616	9.92	13.17	0.0996	0.1073	0.0958	0.0033	0.2043	0.0633	0.1475	0.1821	0.0528	0.2054	0.0053	0.0912	0.0064	0.0002	0.0030	0.0213
	1.5	0.924	0.593	11.02	17.18	0.0908	0.1229	0.0954	0.0042	0.1964	0.0780	0.1278	0.2182	0.0387	0.2289	0.0036	0.0936	0.0063	0.0003	0.0022	0.0228
	2.0	1.003	0.578	11.93	20.70	0.0842	0.1351	0.0950	0.0049	0.1900	0.0904	0.1121	0.2479	0.0290	0.2459	0.0025	0.0956	0.0063	0.0004	0.0016	0.0238
0.5	0.4	0.649	0.641	8.46	8.57	0.1137	0.0823	0.0964	0.0022	0.2151	0.0437	0.1763	0.1290	0.0785	0.1610	0.0097	0.0843	0.0064	0.0002	0.0090	0.0257
	0.6	0.731	0.612	9.08	10.84	0.1081	0.0908	0.0961	0.0027	0.2106	0.0516	0.1647	0.1478	0.0688	0.1744	0.0080	0.0865	0.0064	0.0002	0.0059	0.0272
	1.0	0.825	0.571	10.29	15.76	0.0989	0.1065	0.0956	0.0037	0.2021	0.0677	0.1442	0.1836	0.0540	0.1969	0.0058	0.0897	0.0063	0.0003	0.0062	0.0297
	1.5	1.023	0.539	11.73	22.25	0.0895	0.1237	0.0951	0.0048	0.1924	0.0874	0.1225	0.2247	0.0408	0.2189	0.0041	0.0923	0.0062	0.0004	0.0047	0.0322
	2.0	1.141	0.519	13.06	28.75	0.0820	0.1385	0.0945	0.0060	0.1836	0.1060	0.1044	0.2609	0.0316	0.2355	0.0030	0.0941	0.0062	0.0005	0.0037	0.0341

Tabla 12–2 Cartelas parabólica de ancho constante

Nota: Todos los factores de transporte y los coeficientes de momento de empotramiento son negativos y todos los factores de rigidez son positivos.

Cartela derecha		Factores de transporte		Factores de rigidez		FEM por carga uniforme = Coef. × wL^2		FEM por carga concentrada = Coef. × PL										Carga por cartela			
								b										Izquierda		Derecha	
								0.1		0.3		0.5		0.7		0.9		FEM = Coef. × $W'_A L$		FEM = Coef. × $W'_B L$	
α_B	η_B	C_{AB}	C_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}
$\alpha_A = 0.2$ α_B = variable $\eta_A = 1.0$ η_B = variable																					
0.1	0.4	0.523	0.635	5.92	4.87	0.1053	0.0786	0.0940	0.0030	0.1914	0.0460	0.1628	0.1162	0.0778	0.1508	0.0084	0.0861	0.0032	0.0001	0.0000	0.0008
	0.6	0.535	0.634	5.98	5.05	0.1038	0.0810	0.0939	0.0031	0.1905	0.0476	0.1605	0.1200	0.0749	0.1555	0.0071	0.0881	0.0032	0.0001	0.0000	0.0008
	1.0	0.552	0.633	6.07	5.30	0.1018	0.0844	0.0938	0.0033	0.1892	0.0498	0.1572	0.1255	0.0708	0.1622	0.0054	0.0908	0.0032	0.0001	0.0000	0.0008
	1.5	0.566	0.631	6.15	5.51	0.1001	0.0873	0.0938	0.0034	0.1881	0.0516	0.1545	0.1300	0.0675	0.1677	0.0042	0.0929	0.0032	0.0001	0.0000	0.0008
	2.0	0.575	0.630	6.20	5.65	0.0990	0.0891	0.0937	0.0035	0.1873	0.0529	0.1526	0.1331	0.0653	0.1715	0.0034	0.0943	0.0032	0.0001	0.0000	0.0008
0.2	0.4	0.558	0.627	6.08	5.40	0.1022	0.0841	0.0938	0.0033	0.1891	0.0502	0.1572	0.1261	0.0715	0.1618	0.0073	0.0877	0.0032	0.0001	0.0002	0.0030
	0.6	0.582	0.624	6.21	5.80	0.0995	0.0887	0.0936	0.0036	0.1872	0.0535	0.1527	0.1339	0.0663	0.1708	0.0058	0.0902	0.0032	0.0001	0.0002	0.0031
	1.0	0.619	0.619	6.41	6.41	0.0956	0.0956	0.0935	0.0038	0.1844	0.0584	0.1459	0.1459	0.0584	0.1844	0.0038	0.0935	0.0032	0.0001	0.0001	0.0032
	1.5	0.649	0.614	6.59	6.97	0.0921	0.1015	0.0933	0.0041	0.1819	0.0628	0.1399	0.1563	0.0518	0.1962	0.0025	0.0958	0.0032	0.0001	0.0001	0.0032
	2.0	0.671	0.611	6.71	7.38	0.0899	0.1056	0.0932	0.0044	0.1801	0.0660	0.1358	0.1638	0.0472	0.2042	0.0017	0.0971	0.0032	0.0001	0.0000	0.0033
0.3	0.4	0.588	0.616	6.22	5.93	0.1002	0.0877	0.0937	0.0035	0.1873	0.0537	0.1532	0.1339	0.0678	0.1686	0.0073	0.0877	0.0032	0.0001	0.0007	0.0063
	0.6	0.625	0.609	6.41	6.58	0.0966	0.0942	0.0935	0.0039	0.1845	0.0587	0.1467	0.1455	0.0609	0.1808	0.0057	0.0902	0.0032	0.0001	0.0005	0.0065
	1.0	0.683	0.598	6.73	7.68	0.0911	0.1042	0.0932	0.0044	0.1801	0.0669	0.1365	0.1643	0.0502	0.2000	0.0037	0.0936	0.0031	0.0001	0.0004	0.0068
	1.5	0.735	0.589	7.02	8.76	0.0862	0.1133	0.0929	0.0050	0.1760	0.0746	0.1272	0.1819	0.0410	0.2170	0.0023	0.0959	0.0031	0.0001	0.0003	0.0070
	2.0	0.772	0.582	7.25	9.61	0.0827	0.1198	0.0927	0.0054	0.1730	0.0805	0.1203	0.1951	0.0345	0.2293	0.0016	0.0972	0.0031	0.0001	0.0002	0.0072
0.4	0.4	0.613	0.603	6.32	6.42	0.0990	0.0899	0.0936	0.0037	0.1860	0.0565	0.1505	0.1393	0.0660	0.1713	0.0074	0.0873	0.0032	0.0001	0.0016	0.0104
	0.6	0.663	0.591	6.57	7.36	0.0949	0.0975	0.0934	0.0042	0.1825	0.0632	0.1426	0.1540	0.0584	0.1849	0.0058	0.0898	0.0032	0.0001	0.0013	0.0109
	1.0	0.743	0.574	7.00	9.07	0.0882	0.1100	0.0930	0.0050	0.1766	0.0745	0.1295	0.1791	0.0482	0.2070	0.0039	0.0931	0.0031	0.0001	0.0008	0.0117
	1.5	0.818	0.558	7.43	10.89	0.0820	0.1220	0.0925	0.0058	0.1709	0.0861	0.1169	0.2040	0.0356	0.2269	0.0025	0.0955	0.0031	0.0002	0.0007	0.0120
	2.0	0.875	0.548	7.78	12.43	0.0775	0.1311	0.0922	0.0065	0.1663	0.0955	0.1075	0.2238	0.0282	0.2412	0.0017	0.0969	0.0031	0.0002	0.0005	0.0123
0.5	0.4	0.632	0.589	6.38	6.86	0.0985	0.0911	0.0935	0.0039	0.1858	0.0585	0.1487	0.1425	0.0658	0.1713	0.0075	0.0869	0.0032	0.0001	0.0030	0.0150
	0.6	0.695	0.571	6.65	8.10	0.0939	0.0995	0.0932	0.0045	0.1808	0.0662	0.1397	0.1592	0.0575	0.1866	0.0059	0.0894	0.0032	0.0001	0.0026	0.0157
	1.0	0.796	0.547	7.22	10.51	0.0865	0.1138	0.0928	0.0056	0.1740	0.0809	0.1245	0.1890	0.0448	0.2079	0.0040	0.0926	0.0031	0.0001	0.0020	0.0168
	1.5	0.895	0.522	7.79	13.30	0.0793	0.1277	0.0922	0.0067	0.1655	0.0963	0.1095	0.2197	0.0339	0.2285	0.0026	0.0950	0.0031	0.0002	0.0014	0.0179
	2.0	0.970	0.507	8.23	15.80	0.0736	0.1386	0.0917	0.0077	0.1604	0.1098	0.0978	0.2453	0.0263	0.2435	0.0018	0.0966	0.0031	0.0002	0.0011	0.0185
$\alpha_A = 0.5$ α_B = variable $\eta_A = 1.0$ η_B = variable																					
0.1	0.4	0.456	0.818	9.56	5.36	0.1253	0.0698	0.0932	0.0031	0.2152	0.0340	0.2085	0.0971	0.1060	0.1398	0.0120	0.0846	0.0171	0.0017	0.0000	0.0008
	0.6	0.471	0.817	9.67	5.57	0.1236	0.0725	0.0932	0.0032	0.2140	0.0357	0.2059	0.1008	0.1024	0.1447	0.0102	0.0870	0.0170	0.0015	0.0000	0.0008
	1.0	0.489	0.816	9.84	5.88	0.1215	0.0757	0.0931	0.0033	0.2129	0.0378	0.2023	0.1057	0.0975	0.1512	0.0077	0.0899	0.0170	0.0016	0.0000	0.0008
	1.5	0.499	0.814	10.00	6.11	0.1192	0.0787	0.0930	0.0035	0.2118	0.0392	0.1990	0.1099	0.0928	0.1571	0.0059	0.0922	0.0169	0.0019	0.0000	0.0008
	2.0	0.506	0.812	10.10	6.30	0.1175	0.0805	0.0928	0.0037	0.2115	0.0396	0.1968	0.1127	0.0900	0.1610	0.0047	0.0937	0.0168	0.0019	0.0000	0.0008
0.2	0.4	0.488	0.807	9.85	5.97	0.1214	0.0753	0.0929	0.0034	0.2131	0.0371	0.2021	0.1061	0.0979	0.1506	0.0105	0.0863	0.0171	0.0017	0.0003	0.0030
	0.6	0.515	0.803	10.10	6.45	0.1183	0.0795	0.0928	0.0036	0.2110	0.0404	0.1969	0.1136	0.0917	0.1600	0.0083	0.0892	0.0170	0.0018	0.0002	0.0030
	1.0	0.547	0.796	10.51	7.22	0.1138	0.0865	0.0926	0.0040	0.2079	0.0448	0.1890	0.1245	0.0839	0.1740	0.0056	0.0928	0.0168	0.0020	0.0001	0.0031
	1.5	0.571	0.786	10.90	7.90	0.1093	0.0922	0.0923	0.0043	0.2055	0.0485	0.1818	0.1344	0.0719	0.1862	0.0035	0.0951	0.0167	0.0021	0.0001	0.0032
	2.0	0.590	0.784	11.17	8.40	0.1063	0.0961	0.0922	0.0046	0.2041	0.0506	0.1764	0.1417	0.0661	0.1948	0.0025	0.0968	0.0166	0.0022	0.0001	0.0032
0.3	0.4	0.513	0.791	10.08	6.55	0.1191	0.0786	0.0928	0.0037	0.2111	0.0400	0.1974	0.1132	0.0932	0.1526	0.0103	0.0863	0.0170	0.0018	0.0009	0.0062
	0.6	0.551	0.784	10.47	7.35	0.1150	0.0848	0.0926	0.0040	0.2083	0.0446	0.1901	0.1241	0.0842	0.1697	0.0082	0.0890	0.0168	0.0020	0.0008	0.0064
	1.0	0.601	0.766	11.12	8.74	0.1088	0.0943	0.0922	0.0046	0.2036	0.0515	0.1779	0.1414	0.0703	0.1899	0.0055	0.0926	0.0167	0.0022	0.0005	0.0067
	1.5	0.642	0.751	11.74	10.08	0.1021	0.1036	0.0917	0.0053	0.1995	0.0581	0.1665	0.1583	0.0576	0.2079	0.0033	0.0953	0.0165	0.0024	0.0003	0.0069
	2.0	0.677	0.744	12.25	11.15	0.0977	0.1100	0.0914	0.0057	0.1965	0.0628	0.1578	0.1714	0.0485	0.2208	0.0024	0.0969	0.0163	0.0026	0.0003	0.0071
0.4	0.4	0.537	0.774	10.30	7.17	0.1178	0.0802	0.0927	0.0039	0.2092	0.0422	0.1946	0.1178	0.0906	0.1600	0.0105	0.0859	0.0169	0.0018	0.0022	0.0102
	0.6	0.583	0.759	10.80	8.28	0.1128	0.0874	0.0924	0.0043	0.2061	0.0482	0.1853	0.1317	0.0809	0.1736	0.0084	0.0883	0.0167	0.0020	0.0019	0.0107
	1.0	0.633	0.731	11.62	10.37	0.1050	0.0994	0.0918	0.0052	0.1999	0.0578	0.1698	0.1551	0.0652	0.1965	0.0056	0.0920	0.0165	0.0024	0.0013	0.0114
	1.5	0.717	0.710	12.50	12.60	0.0971	0.1117	0.0911	0.0062	0.1941	0.0677	0.1543	0.1792	0.0506	0.2178	0.0037	0.0946	0.0160	0.0027	0.0010	0.0118
	2.0	0.764	0.698	13.25	14.55	0.0915	0.1206	0.0907	0.0070	0.1894	0.0756	0.1420	0.1987	0.0403	0.2330	0.0024	0.0963	0.0161	0.0030	0.0008	0.0122
0.5	0.4	0.554	0.753	10.42	7.66	0.1170	0.0811	0.0926	0.0040	0.2087	0.0442	0.1924	0.1205	0.0898	0.1595	0.0107	0.0853	0.0169	0.0020	0.0042	0.0143
	0.6	0.606	0.730	10.96	9.12	0.1115	0.0889	0.0922	0.0046	0.2045	0.0506	0.1820	0.1362	0.0791	0.1738	0.0086	0.0878	0.0167	0.0022	0.0036	0.0152
	1.0	0.694	0.694	12.03	12.03	0.1025	0.1025	0.0915	0.0057	0.1970	0.0626	0.1639	0.1639	0.0626	0.1970	0.0057	0.0915	0.0164	0.0028	0.0029	0.0164
	1.5	0.781	0.664	13.12	15.47	0.0937	0.1161	0.0908	0.0070	0.1891	0.0759	0.1456	0.1939	0.0479	0.2187	0.0039	0.0940	0.0160	0.0034	0.0021	0.0174
	2.0	0.850	0.642	14.09	18.64	0.0870	0.1275	0.0901	0.0082	0.1825	0.0877	0.1307	0.2193	0.0376	0.2348	0.0027	0.0957	0.0157	0.0039	0.0016	0.0181

12.4 Distribución de momentos para estructuras con miembros no prismáticos

Una vez determinados los momentos de empotramiento, los factores de rigidez y los de transporte para los miembros no prismáticos de una estructura, la aplicación del método de distribución de momentos sigue el mismo procedimiento descrito en el capítulo 11. Respecto a esto, recuerde que la distribución de momentos puede acortarse si el factor de rigidez de un miembro se modifica para tomar en cuenta la condición de soporte articulado y la simetría o antisimetría de la estructura. Modificaciones similares pueden hacerse en los miembros no prismáticos.

Viga articulada en su extremo lejano

Considere la viga en la figura 12–8*a* que está articulada en su extremo alejado *B*. El factor de rigidez absoluta K'_A es el momento aplicado en *A* de modo que este extremo gira un ángulo $\theta_A = 1$ rad. Puede determinarse como sigue. Suponga primero que *B* está temporalmente empotrado y que se aplica un momento K_A en *A*, figura 12–8*b*. El momento inducido en *B* es $C_{AB}K_A$, donde C_{AB} es el factor de transporte de *A* a *B*. Luego, como *B* no está empotrado, la aplicación del momento opuesto $C_{AB}K_A$ a la viga, figura 12–8*c*, inducirá un momento $C_{BA}C_{AB}K_A$ en el extremo *A*. Por superposición, el resultado de esas dos aplicaciones de momentos dará la viga cargada como se muestra en la figura 12–8*a*. Puede verse entonces que el factor de rigidez absoluta de la viga en *A* es

$$K'_A = K_A(1 - C_{AB}C_{BA}) \qquad (12\text{–}3)$$

Aquí, K_A es el factor de rigidez absoluta de la viga, suponiendo que ésta está empotrada en el extremo alejado *B*. Por ejemplo, en el caso de una viga prismática, $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = C_{BA} = \frac{1}{2}$. Sustituyendo en la ecuación 12–3 se obtiene $K'_A = 3EI/L$, valor igual al dado por la ecuación 11–4.

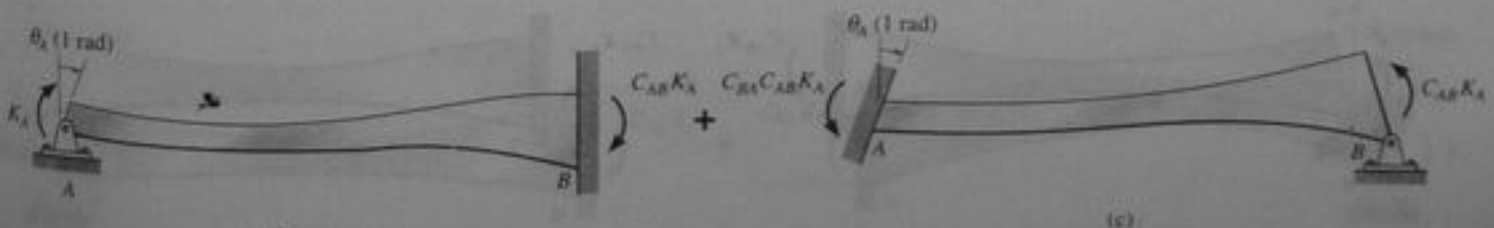


Fig. 12–8

Viga y carga simétricas

Aquí debemos determinar el momento K'_A necesario para girar el extremo A $\theta_A = +1$ rad en tanto que $\theta_B = -1$ rad, figura 12–9*a*. En este caso suponemos primero que el extremo B está empotrado y aplicamos el momento K_A en A, figura 12–9*b*. Luego aplicamos un momento negativo K_B en el extremo B suponiendo que el extremo A está empotrado. Esto da un momento $C_{BA}K_B$ en el extremo A como se muestra en la figura 12–9*c*. La superposición de esas dos aplicaciones de momento en A da los resultados mostrados en la figura 12–9*a*. Se requiere

$$K'_A = K_A - C_{BA}K_B$$

Usando la ecuación 12–1 ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$), podemos también escribir

$$\boxed{K'_A = K_A(1 - C_{AB})} \qquad (12\text{–}4)$$

En el caso de una viga prismática, $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = \frac{1}{2}$, por lo que $K'_A = 2EI/L$, es el mismo valor que el dado por la ecuación 11–5.

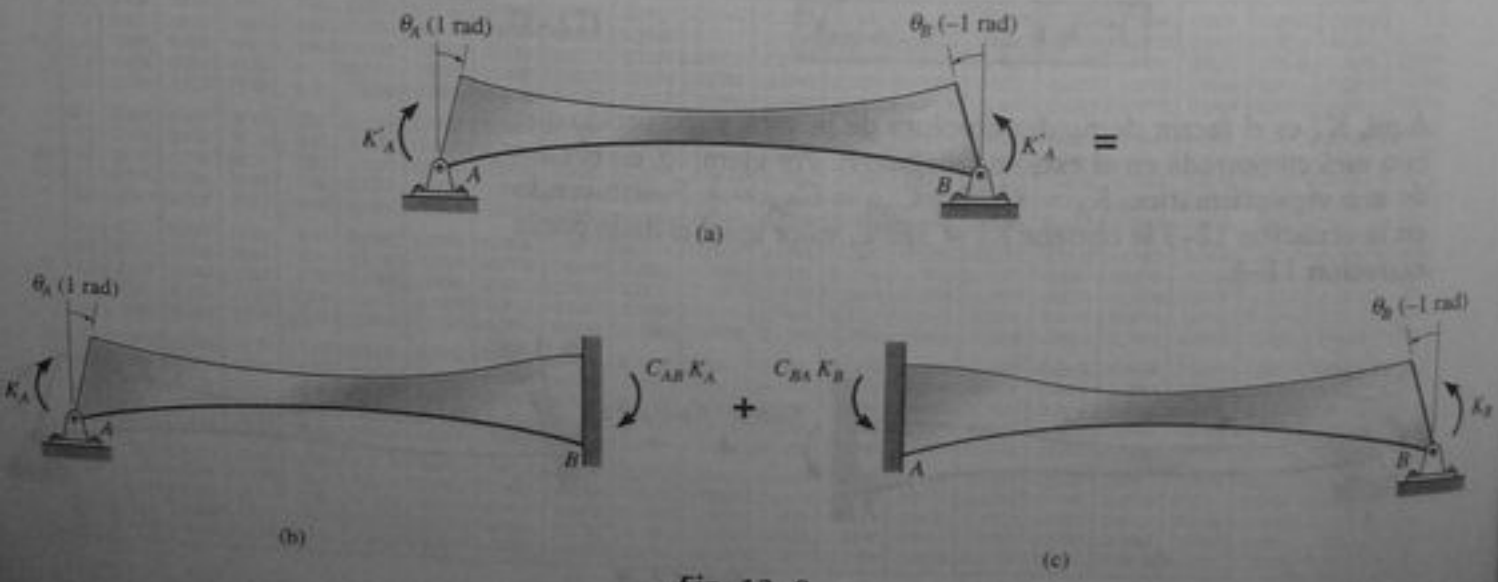


Fig. 12–9

Viga simétrica y carga asimétrica

En el caso de una viga simétrica con carga asimétrica, debemos determinar K'_A de modo que ocurran rotaciones iguales en los extremos de la viga, figura 12–10*a*. Para ello, empotramos primero el extremo *B* y aplicamos el momento K_A en *A*, figura 12–10*b*. Igualmente, la aplicación de K_B en el extremo *B* mientras el extremo *A* está empotrado, se muestra en la figura 12–10c. La superposición de ambos casos da los resultados de la figura 12–10*a*. Por tanto,

$$K'_A = K_A + C_{BA}K_B$$

o por medio de la ecuación 12–1 ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$), tenemos para la rigidez absoluta

$$\boxed{K'_A = K_A(1 + C_{AB})} \qquad (12–5)$$

Sustituyendo los datos para un miembro prismático, $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = \frac{1}{2}$, se obtiene $K'_A = 6EI/L$, que es el mismo valor que el dado por la ecuación 11–6.

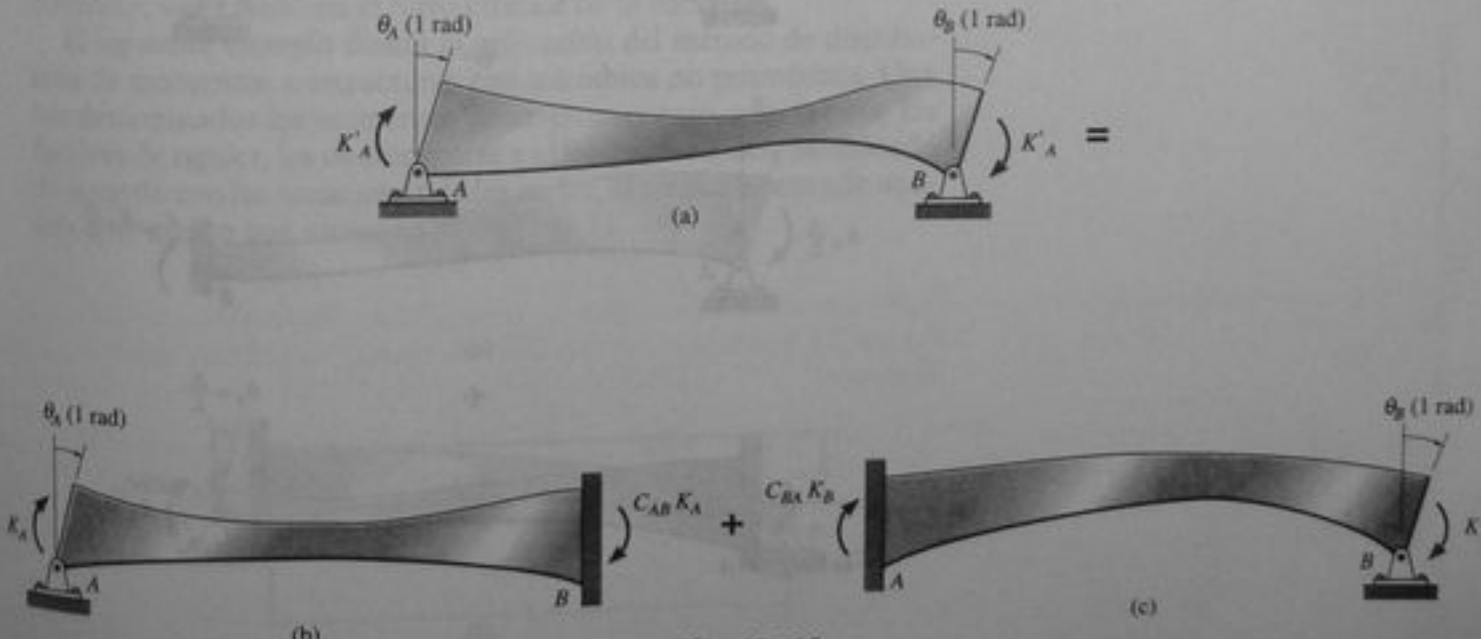


Fig. 12–10

Traslación relativa de los nudos de una viga

En un miembro no prismático se desarrollan momentos de empotramiento si en éste ocurre una traslación relativa Δ entre sus extremos A y B, figura 12–11*a*. Para determinar esos momentos, procederemos como sigue. Consideramos primero que los extremos A y B están articulados y permitimos que la viga se desplace una distancia Δ tal que las rotaciones en los extremos son $\theta_A = \theta_B = \Delta/L$, figura 12–11*b*. Luego suponemos que B está empotrado y aplicamos un momento $M'_A = -K_A(\Delta/L)$ al extremo A de manera que se genera el giro $\theta_A = -\Delta/L$, figura 12–11*c*. Finalmente, suponemos que A está empotrado y aplicamos un momento $M'_B = -K_B(\Delta/L)$ al extremo B de manera que se genera el giro $\theta_B = -\Delta/L$, figura 12–11*d*. Como la

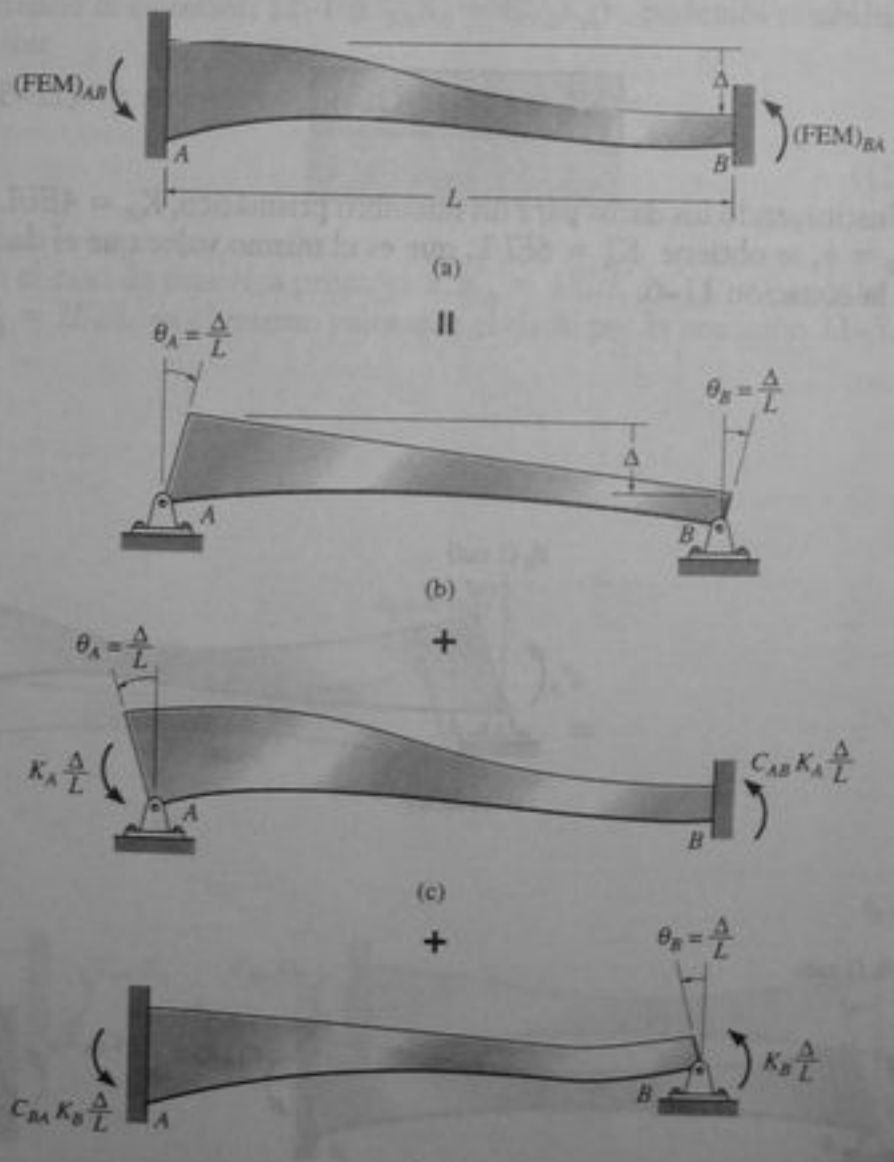


Fig. 12–11

suma total de esas tres operaciones da la condición mostrada en la figura 12–11*a*, tenemos en *A*

$$(\text{FEM})_{AB} = -K_A\frac{\Delta}{L} - C_{BA}K_B\frac{\Delta}{L}$$

Aplicando la ecuación 12–1 ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$), se obtiene

$$(\text{FEM})_{AB} = -K_A\frac{\Delta}{L}(1 + C_{AB}) \qquad (12\text{–}6)$$

Una expresión similar puede escribirse para el extremo *B*. Recuerde que para un miembro prismático $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = \frac{1}{2}$. Entonces, $(\text{FEM})_{AB} = -6EI\Delta/L^2$, valor igual al dado por la ecuación 10–5.

Si el extremo *B* está articulado en vez de empotrado, figura 12–12, el momento de empotramiento en *A* puede determinarse de manera similar a como se hizo arriba. El resultado es

$$(\text{FEM})'_{AB} = -K_A\frac{\Delta}{L}(1 - C_{AB}C_{BA}) \qquad (12\text{–}7)$$

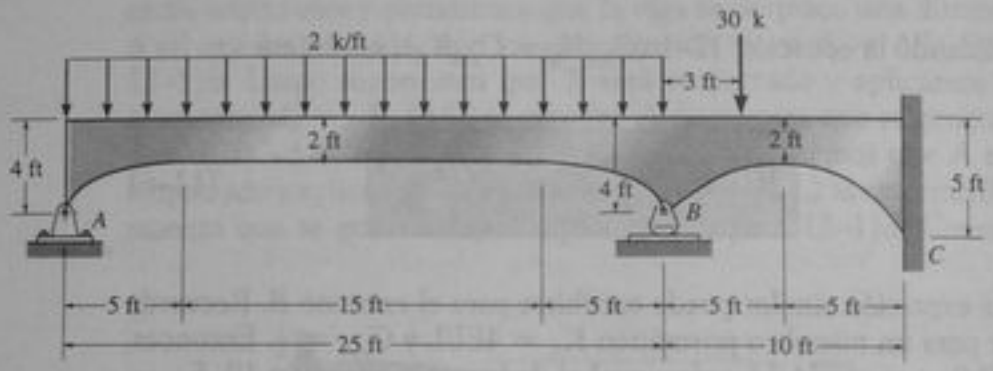
Se ve que para un miembro prismático, esta ecuación da $(\text{FEM})_{AB} = -3EI\Delta/L^2$, valor dado en el forro interior de la cubierta.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del método de distribución de momentos a estructuras con miembros no prismáticos. Una vez determinados los momentos de empotramiento, a la vez que los factores de rigidez, los de transporte y el factor de rigidez, modificado de acuerdo con las ecuaciones dadas arriba, el procedimiento de análisis es el mismo que vimos en el capítulo 11.

Fig. 12–12

Ejemplo 12–5

Determine los momentos internos en los soportes de la viga ilustrada en la figura 12–13*a*. La viga tiene un ancho de 1 ft y E es constante.



(a)

Fig. 12–13

Solución

Como las cartelas son parabólicas, usaremos la tabla 12–2 para obtener las propiedades de distribución de momentos de la viga.

Claro AB

$$a_A = a_B = \frac{5}{25} = 0.2 \qquad r_A = r_B = \frac{4-2}{2} = 1.0$$

Entramos a la tabla 12–2 con estas razones y encontramos

$$C_{AB} = C_{BA} = 0.619$$
$$k_{AB} = k_{BA} = 6.41$$

Utilizamos las ecuaciones 12–2,

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{6.41E\,(\frac{1}{12})(1)(2)^3}{25} = 0.171E$$

Dado que el extremo alejado del claro *BA* está articulado, modificaremos el factor de rigidez de *BA* por medio de la ecuación 12–3. Tenemos

$$K'_{BA} = K_{BA}(1 - C_{AB}C_{BA}) = 0.171E[1 - 0.619(0.619)] = 0.105E$$

Carga uniforme, tabla 12–2,

$$(\text{FEM})_{AB} = -(0.0956)(2)(25)^2 = -119.50\ \text{k}\cdot\text{ft}$$
$$(\text{FEM})_{BA} = 119.50\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

Claro *BC*

$$a_B = a_C = \frac{5}{10} = 0.5 \qquad r_B = \frac{4-2}{2} = 1.0$$
$$r_C = \frac{5-2}{2} = 1.5$$

De la tabla 12–2, encontramos

$$C_{BC} = 0.781 \qquad C_{CB} = 0.664$$
$$k_{BC} = 13.12 \qquad k_{CB} = 15.47$$

Entonces, de las ecuaciones 12–2,

$$K_{BC} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{13.12E\,(\frac{1}{12})(1)(2)^3}{10} = 0.875E$$
$$K_{CB} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{15.47E\,(\frac{1}{12})(1)(2)^3}{10} = 1.031E$$

Carga concentrada:

$$b = \frac{3}{10} = 0.3$$
$$(\text{FEM})_{BC} = -0.1891(30)(10) = -56.73\ \text{k}\cdot\text{ft}$$
$$(\text{FEM})_{CB} = 0.0759(30)(10) = 22.77\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

Con el uso de los valores anteriores para los factores de rigidez, los factores de distribución se calculan y registran en la tabla, figura 12–13*b*. La distribución de momentos sigue el mismo procedimiento delineado en el capítulo 11. Los resultados en k·ft se muestran en el último renglón de la tabla.

Nudo	*A*	*B*		*C*
Miembro	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*
K	0.171*E*	0.105*E*	0.875*E*	1.031*E*
DF	1	0.107	0.893	0
COF	0.619	0.619	0.781	0.664
FEM	−119.50	119.50	−56.73	22.77
Dist.	+119.50	−6.72	−56.05	
CO		73.97		−43.78
Dist.		−7.91	−66.06	
CO				−51.59
Σ*M*	0	178.84	−178.84	−72.60

(b)

12.5 Ecuaciones pendiente-desviación para miembros no prismáticos

Las ecuaciones de pendiente-desviación para miembros prismáticos se obtuvieron en el capítulo 10. En esta sección generalizaremos la forma de esas ecuaciones de manera que sean aplicables también a miembros no prismáticos. Para hacer esto, usaremos los resultados de la sección anterior y procederemos a formular las ecuaciones de la misma manera que se hizo en el capítulo 10, esto es, considerando los efectos causados por las cargas, el desplazamiento relativo de los nudos y la rotación de cada nudo por separado y luego sobreponiendo los resultados individuales.

Cargas. Las cargas se especifican por los momentos de empotramiento $(FEM)_{AB}$ y $(FEM)_{BA}$ que actúan en los extremos A y B del claro. Los momentos positivos actúan en sentido de las manecillas del reloj.

Traslación relativa de los nudos. Cuando ocurre un desplazamiento relativo Δ entre los nudos, los momentos inducidos se determinan con la ecuación 12–6. En el extremo A este momento es $-[K_A\Delta/L](1 + C_{AB})$ y en el extremo B es $-[K_B\Delta/L](1 + C_{BA})$.

Rotación en A. Si el extremo A gira θ_A, el momento requerido en el claro en A es $K_A\theta_A$. Este momento induce un momento de $C_{AB}K_A\theta_A = C_{BA}K_B\theta_A$ en el extremo B.

Rotación en B. Si el extremo B gira θ_B, un momento de $K_B\,\theta_B$ debe actuar en el extremo B y el momento inducido en el extremo A es $C_{BA}K_B\theta_B = C_{AB}K_A\theta_B$.

El total de los momentos de extremo causados por esos efectos da las ecuaciones generalizadas de pendiente-desviación, que pueden escribirse como

$$M_{AB} = K_A\left[\theta_A + C_{AB}\theta_B - \frac{\Delta}{L}(1 + C_{AB})\right] + (FEM)_{AB}$$

$$M_{BA} = K_B\left[\theta_B + C_{BA}\theta_A - \frac{\Delta}{L}(1 + C_{BA})\right] + (FEM)_{BA}$$

Como estas dos ecuaciones son similares, podemos expresarlas como una sola ecuación. Si llamamos a un extremo del claro, extremo cercano (N) y al otro extremo, extremo alejado (F), y si representamos la rotación del miembro con $\psi = \Delta/L$, tenemos

$$M_N = K_N(\theta_N + C_N\theta_F - \psi(1 + C_N)) + (FEM)_N \qquad (12\text{–}8)$$

Aquí

M_N = momento interno en el extremo cercano del claro; este momento es positivo cuando actúa en sentido de las manecillas del reloj sobre el claro

K_N = rigidez absoluta del extremo cercano determinado por tablas o por cálculo

θ_N, θ_F = pendientes cercana y alejada del claro en los soportes; los ángulos se miden en *radianes* y son *positivos cuando siguen el sentido de las manecillas del reloj*

ψ = rotación de la cuerda del claro debido a un desplazamiento lineal; $\psi = \Delta/L$; este ángulo se mide en radianes y es positivo cuando sigue el sentido de las manecillas del reloj

$(FEM)_N$ = momento de empotramiento en el soporte del extremo cercano; el momento es positivo al actuar en sentido de las manecillas del reloj sobre el claro y se obtiene de tablas o por cálculo

La aplicación de la ecuación es a lo largo de las mismas líneas vistas en el capítulo 10 por lo que no se verá aquí. En particular, observe que la ecuación 12–8 se reduce a la ecuación 10–8 cuando se aplica a miembros que son prismáticos.

Puente carretero continuo de concreto reforzado.

BIBLIOGRAFÍA

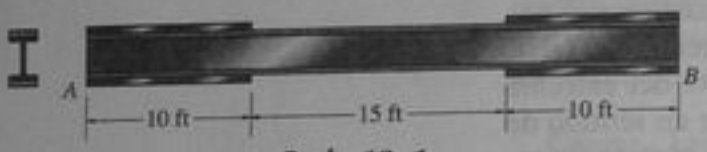
Coughey, R. A. and R. S. Cebula, "Constants for Design of Continuous Girders with Abrupt Changes in Moments of Inertia," *Bulletin 176*, Iowa Engineering Experiment Station, Ames, Iowa.

Handbook of Frame Constants, Portland Cement Association, Chicago, 1958.

Lauson, P., "Calculation of Continuous Beams of Variable Section," *Engineering News-Record*, April 15, 1926, p. 604.

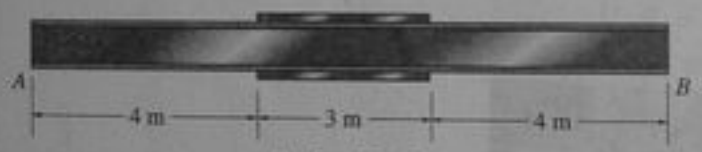
PROBLEMAS

12–1. Determine en forma aproximada los factores de rigidez y transporte para la viga de acero que tiene un momento de inercia de 600 in^4 y un peralte de 10 in. La viga está parcialmente reforzada por una cubreplaca de 1 in × 10 in en cada extremo. Considere $E = 29(10^3)$ ksi.



Prob. 12–1

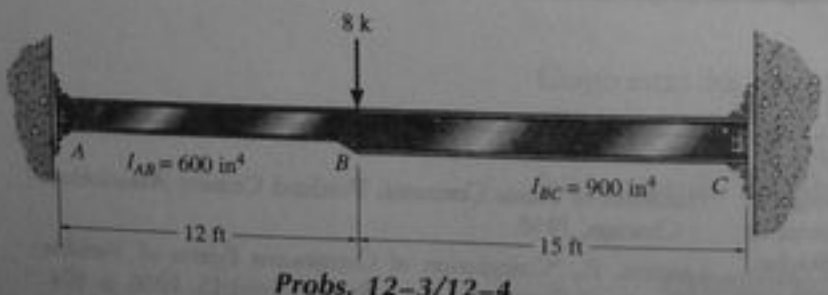
12–2. Determine en forma aproximada los factores de rigidez y transporte de la viga de acero que tiene un momento de inercia de $94.9(10^6)$ mm^4 y un peralte de 222 mm. La viga está parcialmente reforzada por una cubreplaca de 15 mm × 200 mm en cada extremo. Considere $E = 200$ GPa.



Prob. 12–2

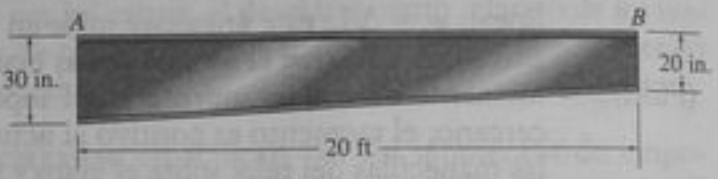
12–3. Determine los momentos de empotramiento en A y C para la viga compuesta. $E = 29(10^3)$ ksi.

***12–4.** Determine la rigidez K_A y el factor de transporte C_{AC} para la viga. A y C son empotramientos.



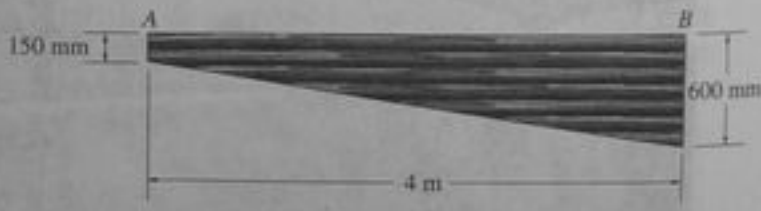
Probs. 12–3/12–4

12–5. La viga ahusada está hecha de acero con alma de 1/2 in soldada a los patines que son de 8 in × 1 in. Determine aproximadamente los factores de transporte y rigidez en los extremos A y B. Considere segmentos de viga de 4 ft para los cálculos. Considere $E = 29(10^3)$ ksi.



Prob. 12–5

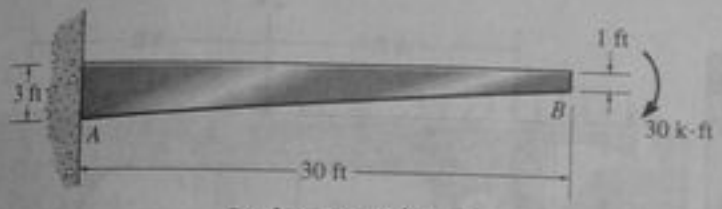
12–6. Determine aproximadamente los factores de rigidez y transporte para la viga de madera laminada. Considere $E = 11$ GPa. La viga tiene un ancho de 300 mm. Considere segmentos de viga de 1 m para los cálculos.



Prob. 12–6

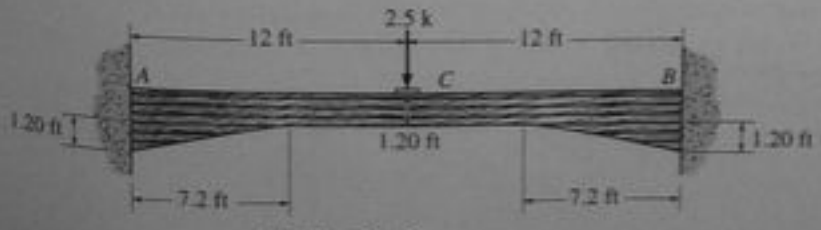
12–7. Determine la pendiente en el extremo B de la viga en voladizo. La sección transversal rectangular tiene un ancho constante de 1 ft. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. Considere segmentos de viga de 5 ft para los cálculos.

***12–8.** Determine aproximadamente los factores de rigidez y transporte para el extremo B de la viga.



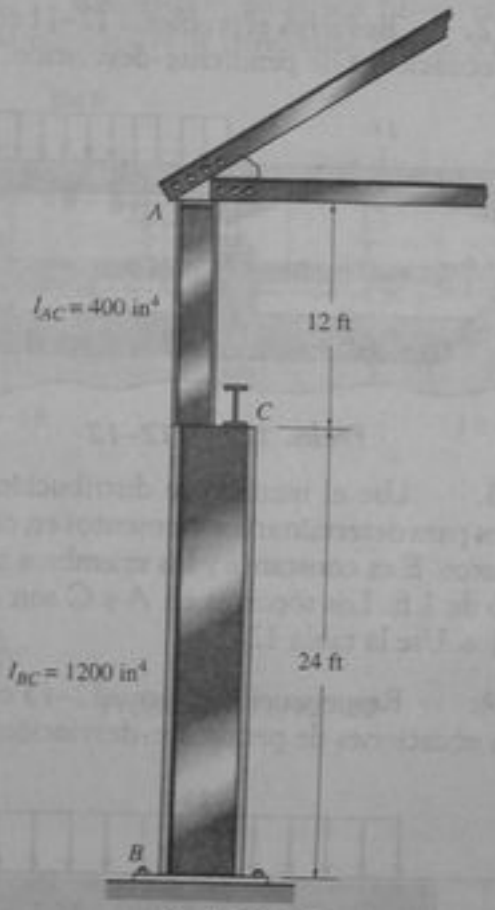
Probs. 12–7/12–8

12–9. Dibuje el diagrama de momentos para la viga de cartelas rectas doblemente empotrada. $E = 1.9(10^3)$ ksi.



Prob. 12–9

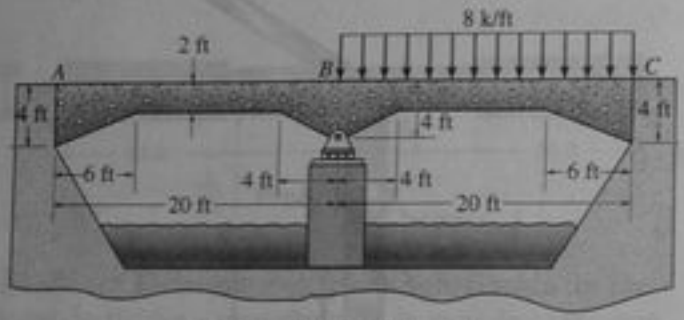
12–10. La columna AB sirve para soportar una viga carril en un edificio industrial. Determine los factores de rigidez y transporte en los extremos A y B. $E = 29(10^3)$ ksi.



Prob. 12–10

12–11. Determine los momentos en *A*, *B* y *C* por el método de distribución de momentos. Use la tabla 12–1 para determinar las propiedades requeridas de la viga. *E* es constante. Suponga que los soportes en *A* y *C* son empotramientos y que el soporte de rodillo en *B* está sobre una base rígida. La trabe tiene un ancho de 1 ft.

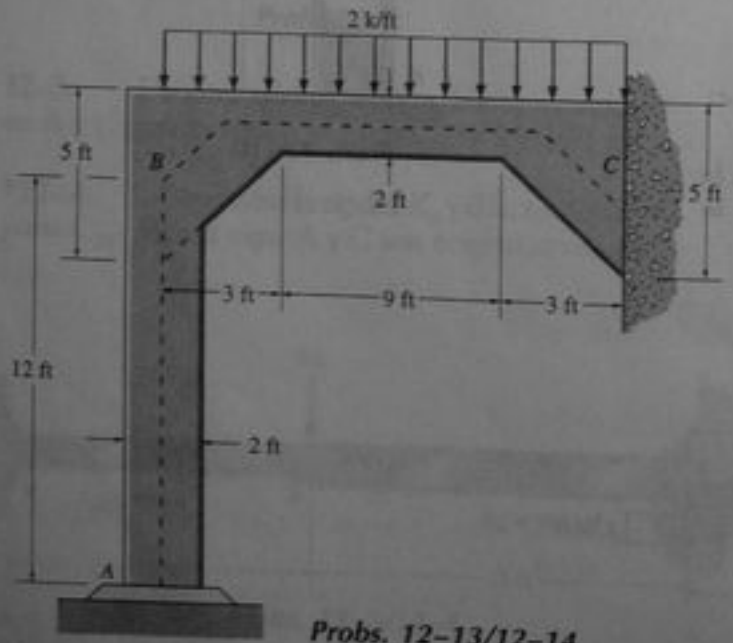
***12–12.** Resuelva el problema 12–11 con el uso de las ecuaciones de pendiente-desviación.



Probs. 12–11/12–12

12–13. Use el método de distribución de momentos para determinar los momentos en cada nudo del marco. *E* es constante y los miembros tienen un ancho de 1 ft. Los soportes en *A* y *C* son empotramientos. Use la tabla 12–1.

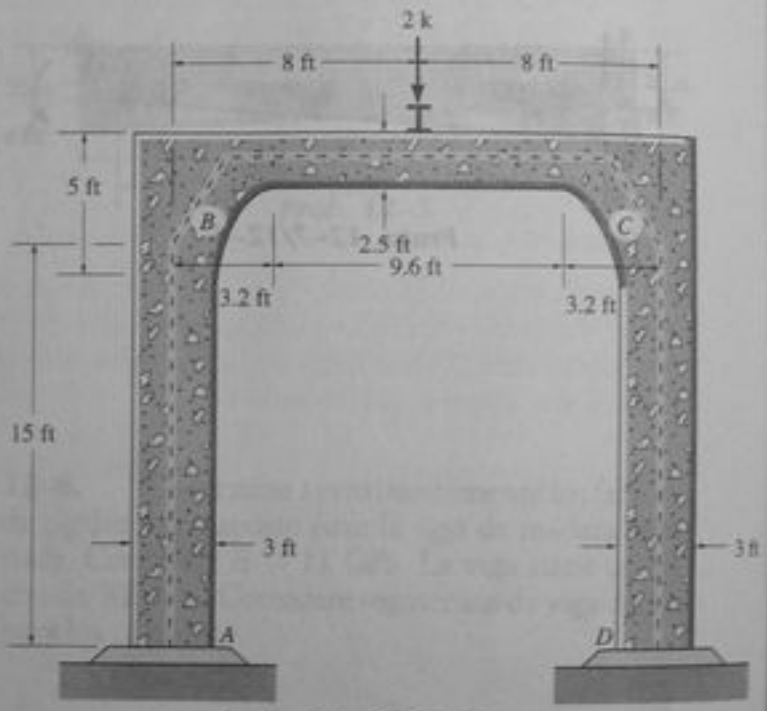
12–14. Resuelva el problema 12–13 con el uso de las ecuaciones de pendiente-desviación.



Probs. 12–13/12–14

12–15. Use el método de distribución de momentos para determinar los momentos en cada nudo del marco simétrico de cartelas parabólicas de puente. *E* es constante. Use la tabla 12–1 para calcular las constantes necesarias del marco. Los miembros tienen un ancho de 1 ft.

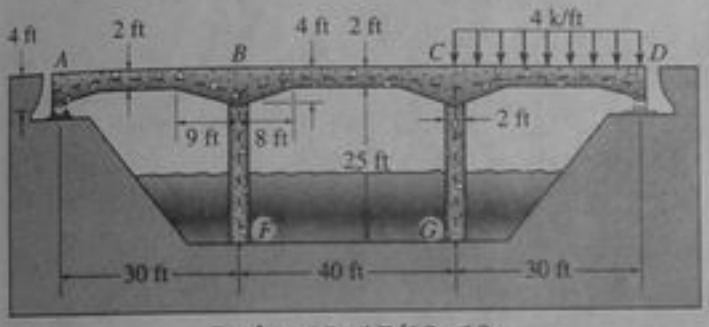
***12–16.** Resuelva el problema 12–15 usando las ecuaciones de pendiente-desviación.



Probs. 12–15/12–16

12–17. Use el método de distribución de momentos para determinar los momentos en cada nudo del marco simétrico de puente. E es constante. Use la tabla 12–1 para calcular las constantes necesarias del marco. Los miembros tienen cada uno 1 ft de ancho.

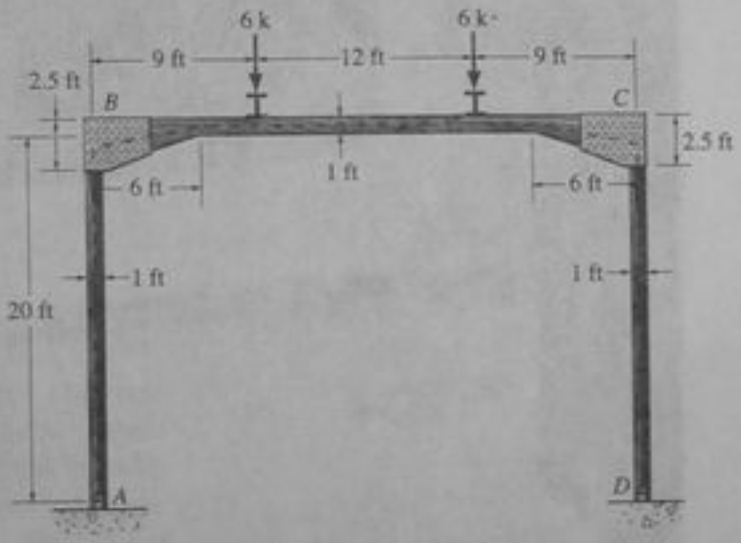
12–18. Resuelva el problema 12–17 por medio de las ecuaciones de pendiente-desviación.



Probs. 12–17/12–18

12–19. Use el método de distribución de momentos para determinar los momentos en cada nudo del marco. Suponga que E es constante y que los miembros tienen un ancho de 1 ft. Los soportes en A y C están articulados y los nudos en B y D están rígidamente conectados. Use la tabla 12–1.

***12–20.** Resuelva el problema 12–19 por medio de las ecuaciones de pendiente-desviación.



Probs. 12–19/12–20

El álgebra matricial desempeña un papel importante en el análisis de estructuras por computadora. Algunos programas proporcionan gráficas de las deflexiones, como se ilustra aquí en la pantalla de esta microcomputadora.

13

Álgebra matricial para el análisis estructural

Con la reciente accesibilidad de las microcomputadoras, la aplicación del álgebra matricial al análisis de estructuras se ha generalizado ampliamente. El álgebra matricial proporciona una herramienta adecuada para el análisis ya que es relativamente fácil formular la solución en una forma concisa y luego efectuar las manipulaciones matriciales por medio de una computadora. Por esto, es importante que el ingeniero estructural esté familiarizado con las operaciones fundamentales de este tipo de matemáticas.

13.1 Definiciones básicas y tipos de matrices

Matriz

La *matriz* es un arreglo rectangular de números en m renglones y n columnas. Los números, llamados elementos, se ordenan entre paréntesis rectangulares. Por ejemplo, la matriz **A** se escribe como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se dice que una matriz semejante tiene un *orden* de $m \times n$ (m por n). Note que el primer subíndice de un elemento denota su posición de renglón y el segundo subíndice denota su posición de columna. En general, a_{ij} es el elemento localizado en el renglón i-ésimo y en la columna j-ésima.

Matriz renglón

Si la matriz consiste sólo en elementos en un solo renglón, se llama *matriz renglón*. Por ejemplo, una matriz renglón $1 \times n$ se escribe como

$$\mathbf{A} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

Aquí se usa sólo un subíndice para denotar un elemento ya que el subíndice de renglón siempre se sobreentiende que es igual a 1, esto es, $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{12}$, etcétera.

Matriz columna

Una matriz con elementos dispuestos en una sola columna se llama *matriz columna*. La matriz columna $m \times 1$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Aquí la notación de subíndices simboliza $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{21}$, etcétera.

Matriz cuadrada

Cuando el número de renglones en una matriz es igual al número de columnas, la matriz se denomina *matriz cuadrada*. Una matriz cuadrada de $n \times n$ sería

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Cuando todos los elementos de una matriz cuadrada son ceros excepto los de la diagonal principal, que va de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha, la matriz se llama *matriz diagonal*. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz unitaria o matriz identidad

La *matriz unitaria* o *matriz identidad* es una matriz diagonal en que todos los elementos de la diagonal son iguales a 1. Por ejemplo,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Si todos los elementos de la matriz son ceros, $a_{ij} = 0$, la matriz se denomina *matriz nula*. Por ejemplo,

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

Una *matriz cuadrada* es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

13.2 Operaciones con matrices

Igualdad de matrices

Se dice que las matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y cada uno de sus elementos correspondientes son iguales, esto es, $a_{ij} = b_{ij}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Adición y sustracción de matrices

Dos matrices pueden sumarse o restarse entre sí cuando son del mismo orden. El resultado se obtiene sumando o bien restando los elementos correspondientes. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicación por un escalar

Cuando una matriz se multiplica por un escalar, cada uno de sus elementos se multiplica por el escalar. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad k = -6$$

entonces

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -24 & -6 \\ -36 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicación matricial

Dos matrices **A** y **B** pueden multiplicarse entre sí sólo si son *conformables*. Esta condición se satisface si el número de *columnas* en **A** es igual al número de *renglones* en **B**. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

entonces **AB** puede determinarse ya que **A** tiene dos columnas y **B** tiene dos renglones. Sin embargo, note que **BA** no es posible. ¿Por qué? Se verá abajo que la multiplicación de la matriz **A** de orden $(m \times n)$ por la matriz **B** de orden $(n \times q)$ da una matriz **C** de orden $(m \times q)$, esto es,

$$\underset{(m \times n)}{\mathbf{A}} \quad \underset{(n \times q)}{\mathbf{B}} = \underset{(m \times q)}{\mathbf{C}} \tag{13-1}$$

Los elementos de la matriz **C** se encuentran usando los elementos a_{ij} de **A** y b_{ij} de **B** como sigue:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{13-2}$$

La metodología de esta fórmula puede explicarse con unos pocos ejemplos. Considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Por inspección, el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es posible, ya que las matrices son conformables, esto es, **A** tiene tres columnas y **B** tiene tres renglones. Según la ecuación 13–1, la multiplicación dará la matriz **C** con dos renglones y una columna. Los resultados se obtienen como sigue:

c_{11}: Multiplique los elementos en el primer renglón de **A** por los elementos correspondientes en la columna de **B** y sume los resultados; esto es,

$$c_{11} = c_1 = 2(2) + 4(6) + 3(7) = 49$$

c_{21}: Multiplique los elementos en el segundo renglón de **A** por los elementos correspondientes en la columna de **B** y sume los resultados; esto es,

$$c_{21} = c_2 = -1(2) + 6(6) + 1(7) = 41$$

Entonces,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 49 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Como segundo ejemplo, considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Aquí, el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ también puede encontrarse ya que **A** tiene dos columnas y **B** tiene dos renglones. La matriz resultante **C** tendrá tres renglones y dos columnas. Los elementos se obtienen como sigue:

$c_{11} = 5(2) + 3(-3) = 1$	(primer renglón de **A** por primera columna de **B**)
$c_{12} = 5(7) + 3(4) = 47$	(primer renglón de **A** por segunda columna de **B**)
$c_{21} = 4(2) + 1(-3) = 5$	(segundo renglón de **A** por primera columna de **B**)
$c_{22} = 4(7) + 1(4) = 32$	(segundo renglón de **A** por segunda columna de **B**)
$c_{31} = -2(2) + 8(-3) = -28$	(tercer renglón de **A** por primera columna de **B**)
$c_{32} = -2(7) + 8(4) = 18$	(tercer renglón de **A** por segunda columna de **B**)

Este esquema de multiplicación sigue la aplicación de la ecuación 13–2. Así,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 47 \\ 5 & 32 \\ -28 & 18 \end{bmatrix}$$

Note también que **BA** no existe, ya que escritas de esta manera, las matrices no son conformables.

Las siguientes reglas son aplicables a la multiplicación de matrices.

1. A menos que las matrices sean diagonales, el producto de dos matrices en general no es conmutativo:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{13–3}$$

2. La ley distributiva es válida:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{13–4}$$

3. La ley asociativa es válida:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{13–5}$$

Matriz transpuesta

Una matriz puede ser transpuesta intercambiando sus renglones por sus columnas. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

Entonces,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Note que **AB** no es conformable por lo que el producto no existe. (**A** tiene tres columnas y **B** tiene un renglón.) Alternativamente, la multiplicación $\mathbf{AB}^T$ es posible ya que aquí las matrices son conformables (**A** tiene tres columnas y $\mathbf{B}^T$ tiene tres renglones). Las siguientes propiedades para matrices transpuestas son válidas:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \tag{13–6}$$
$$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T \tag{13–7}$$
$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{13–8}$$

Esta última identidad se ilustrará con un ejemplo. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación 13–8,

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 28 & 28 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix}$$

Subdivisión de una matriz

Una matriz puede descomponerse en submatrices por subdivisión. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Aquí, las submatrices son

$$\mathbf{A}_{11} = [a_{11}] \qquad \mathbf{A}_{12} = [a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Las reglas del álgebra matricial se aplican a las matrices subdivididas siempre que la subdivisión sea conformable. Por ejemplo, las submatrices correspondientes de **A** y **B** pueden sumarse o restarse, siempre que tengan un número igual de renglones y columnas. Igualmente, la multiplicación matricial es posible si el número respectivo de columnas y renglones de **A** y **B** y de sus submatrices es igual. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ \hline 6 & 3 & 8 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ \hline 7 & 4 \end{array}\right]$$

Aquí, el producto **AB** existe, ya que el número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B** (tres). Igualmente, las matrices subdivididas son conformables para la multiplicación, ya que **A** está subdividida en dos columnas y **B** está subdividida en dos renglones, esto es,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de las submatrices resulta ser

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} [7 \quad 4] = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} = [6 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = [12 \quad 18]$$

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = [8][7 \quad 4] = [56 \quad 32]$$

Así, entonces,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix} \\ [12 \quad 18] + [56 \quad 32] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -39 & -18 \\ 68 & 50 \end{bmatrix}$$

13.3 Determinantes

En la sección siguiente veremos como invertir una matriz; ya que esta operación requiere el cálculo del determinante de la matriz, analizaremos ahora algunas de las propiedades básicas de los determinantes.

Un determinante es un arreglo cuadrado de números escrito entre barras verticales. Por ejemplo, un determinante de orden n-ésimo, con n renglones y n columnas se escribe como

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (13\text{–}9)$$

La evaluación de este determinante conduce a un valor numérico único que puede obtenerse mediante la *expansión* o *desarrollo de Laplace*. Este método hace uso tanto de los menores como de los cofactores del determinante. Específicamente, cada elemento a_{ij} de un determinante de orden n tiene un *menor* M_{ij} que es un determinante de orden $n - 1$. Este determinante (menor) resulta cuando se cancela el renglón i-ésimo y la columna j-ésima en que está contenido el elemento a_{ij}. Si el menor se multiplica por $(-1)^{i+j}$, el resultado se llama cofactor de a_{ij} y se denota por

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \tag{13–10}$$

Por ejemplo, considere el determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los cofactores para los elementos en el primer renglón son

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|C_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|C_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La expansión de Laplace para un determinante de orden n, ecuación 13–9, establece que el valor numérico del determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier renglón o columna y sus respectivos cofactores, esto es,

$$D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \text{o } n)$$

o

$$D = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \text{o } n) \tag{13–11}$$

Se ve que debido a los cofactores el número D se define en términos de n determinantes (cofactores), cada uno de orden $n - 1$. Cada uno de estos determinantes puede calcularse mediante la misma fórmula, según la cual se deben calcular $(n - 1)$ determinantes de orden $(n - 2)$, etc. El proceso de cálculo continúa hasta que los determinantes por calcularse quedan reducidos al segundo orden, en donde los cofactores de los elementos son simples elementos de $|D|$. Considere, por ejemplo, el siguiente determinante de segundo orden

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Podemos evaluar $|D|$ según el renglón superior de elementos, lo que da

$$D = 3(-1)^{1+1}(2) + 5(-1)^{1+2}(-1) = 11$$

O, por ejemplo, según la segunda columna de elementos, tenemos

$$D = 5(-1)^{1+2}(-1) + 2(-1)^{2+2}(3) = 11$$

En vez de usar las ecuaciones 13–11, es más fácil evaluar el determinante de segundo orden multiplicando los elementos arriba a la izquierda y abajo a la derecha de la diagonal principal y restar de ahí el producto de los elementos arriba a la derecha y abajo a la izquierda de la diagonal secundaria, esto es, de acuerdo con el recorrido de la flecha en el esquema siguiente:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 5(-1) = 11$$

Considere ahora el determinante de tercer orden

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Mediante la ecuación 13–11, podemos calcular $|D|$ con el uso de los elementos a lo largo del renglón superior, lo que da

$$D = (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4 - 0) - 3(8 + 6) - 1(0 + 2) = -40$$

Es posible también calcular $|D|$ con el uso de los elementos a lo largo de la primera columna, esto es,

$$D = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4 - 0) - 4(6 - 0) - 1(18 + 2) = -40$$

Como ejercicio, trate de calcular $|D|$ con el uso de los elementos a lo largo del segundo renglón.

13.4 Inversa de una matriz

Considere el conjunto siguiente de tres ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

que puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad (13\text{–}12)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{C} \tag{13–13}$$

Podría pensarse que una solución para x se obtendría dividiendo C entre A; sin embargo, la división no es posible en el álgebra matricial. En vez de esto, se multiplica por la inversa de la matriz. La *inversa* de la matriz A es otra matriz del mismo orden y se escribe simbólicamente como $\mathbf{A}^{-1}$. Tiene la siguiente propiedad,

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

donde I es una matriz identidad. Multiplicamos ambos lados de la ecuación 13–13 por $\mathbf{A}^{-1}$ y obtenemos

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

Como $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, tenemos

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \tag{13–14}$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ puede obtenerse, es posible una solución para x.

Para cálculos a mano, el método usado para formular $\mathbf{A}^{-1}$ puede desarrollarse con el uso de la regla de Cramer. El desarrollo no se dará aquí; sólo se darán los resultados.* Respecto a esto, los elementos en las matrices de la ecuación 13–14 pueden escribirse como

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{13–15}$$

Aquí, $|A|$ es una evaluación del determinante de los coeficientes de A que se obtiene mediante la expansión de Laplace vista en la sección 13.3. La matriz cuadrada que contiene los cofactores de C_{ij} se llama *matriz adjunta*. Por comparación puede verse que la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ se obtiene de A reemplazando primero cada elemento a_{ij} por su cofactor $|C_{ij}|$, y luego transponiendo la matriz resultante, lo que da la matriz adjunta y finalmente multiplicando la matriz adjunta por $1/|A|$.

*Véase Kreyszig en las referencias.

Para ilustrar cómo obtener $\mathbf{A}^{-1}$ numéricamente, consideraremos la solución del siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned} \tag{13–16}$$

Aquí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz de cofactores para $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Evaluando los determinantes, la matriz adjunta es

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

La inversa de $\mathbf{A}$ es, por lo tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución de las ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -\tfrac{1}{6}[(-4)(-1) + 0(-1) + (-2)(5)] = 1$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{6}[(-1)(-1) + (-3)(-1) + (-2)(5)] = 1$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{6}[(-3)(-1) + (-3)(-1) + (0)(5)] = -1$$

Está claro que los cálculos numéricos son bastante extensos para grandes conjuntos de ecuaciones. Por esta razón, se usan computadoras en el análisis estructural para determinar las inversas de matrices.

13.5 Método de Gauss para resolver ecuaciones simultáneas

Cuando tienen que resolverse muchas ecuaciones lineales simultáneas, puede usarse el método de eliminación de Gauss debido a su eficiencia numérica. La aplicación de este método requiere despejar de un conjunto de n ecuaciones una incógnita, digamos x_1, en términos de todas las otras incógnitas, $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Si sustituimos la así llamada *ecuación pivote* en las ecuaciones restantes nos deja con un conjunto de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas. Si repetimos el proceso, esto es, despejando x_2 de esas ecuaciones en términos de las $n - 2$ incógnitas restantes $x_3, x_4, \ldots, x_n$, se obtiene la segunda ecuación pivote. Esta ecuación se sustituye entonces en las otras ecuaciones, lo que nos deja con un conjunto de $n - 3$ ecuaciones con $n - 3$ incógnitas. El proceso se repite hasta que queda una ecuación pivote con una sola incógnita, que se resuelve directamente. Las otras incógnitas se determinan entonces por sustitución hacia atrás en las otras ecuaciones pivote. Para mejorar la exactitud de la solución, al desarrollar cada ecuación pivote, se debe seleccionar la ecuación del conjunto que tenga el coeficiente numérico *más grande* para la incógnita que tratamos de eliminar. Este proceso se ilustrará a continuación por medio de un ejemplo.

Resuelva el siguiente conjunto de ecuaciones por medio del método de eliminación de Gauss:

$$-2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2 \qquad (13\text{–}17)$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \qquad (13\text{–}18)$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \qquad (13\text{–}19)$$

Comenzaremos por eliminar x_1. El coeficiente más grande de x_1 está en la ecuación 13–19; por tanto, consideraremos que es la ecuación pivote. Despejando a x_1 obtenemos

$$x_1 = 1 + 1.25x_2 - 0.75x_3 \tag{13–20}$$

Sustituimos en las ecuaciones 13–17 y 13–18 y simplificamos, de modo que resulta

$$2.75x_2 + 1.75x_3 = 2 \tag{13–21}$$

$$1.5\ x_2 - 0.5\ x_3 = 0 \tag{13–22}$$

A continuación eliminamos x_2. Escogemos la ecuación 13–21 como ecuación pivote ya que el coeficiente de x_2 tiene en ella su mayor coeficiente; tenemos

$$x_2 = 0.727 - 0.636x_3 \tag{13–23}$$

Sustituimos esta ecuación en la ecuación 13-22, y simplificando se obtiene la ecuación pivote final, de la que puede despejarse a x_3. Esto da

$$x_3 = 0.75 \qquad \textit{Resp.}$$

Sustituimos este valor en la ecuación pivote 13-23, de modo que resulta

$$x_2 = 0.25 \qquad \textit{Resp.}$$

Finalmente, de la ecuación pivote 13-20 obtenemos

$$x_1 = 0.75 \qquad \textit{Resp.}$$

Aunque el método de Gauss, como se ilustró aquí, es el método estándar aceptado para uso en las computadoras, para el análisis estructural es posible una mayor reducción del trabajo de computación por medio de mejoras al método desarrolladas por Banachiewicz y Cholesky como se establece en la referencia de Bodewig.

BIBLIOGRAFÍA

Bodewig, E., Matrix Calculus, 2nd ed. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959.

Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

PROBLEMAS

13–1. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

13–2. Si $\mathbf{A} = [6 \ 1 \ 3]$ y $\mathbf{B} = [1 \ 6 \ 3]$, demuestre que $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

13–3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$.

*13–4. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = [2 \ -1 \ 3]$, determine $\mathbf{AB}$.

13–5. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{AB}$.

13–6. Determine $\mathbf{BA}$ para las matrices del problema 13–5.

13–7. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{AB}$.

*13–8. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{AB}$.

13–9. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{AB}$.

13–10. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{AB}$.

13–11. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ determine $\mathbf{AA}^T$.

*13–12. Demuestre que la ley distributiva es válida, esto es, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

13–13. Demuestre que la ley asociativa es válida, esto es, $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = [5 \quad -1 \quad 2].$$

13–14. Evalúe los determinantes $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

13–15. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{A}^{-1}$.

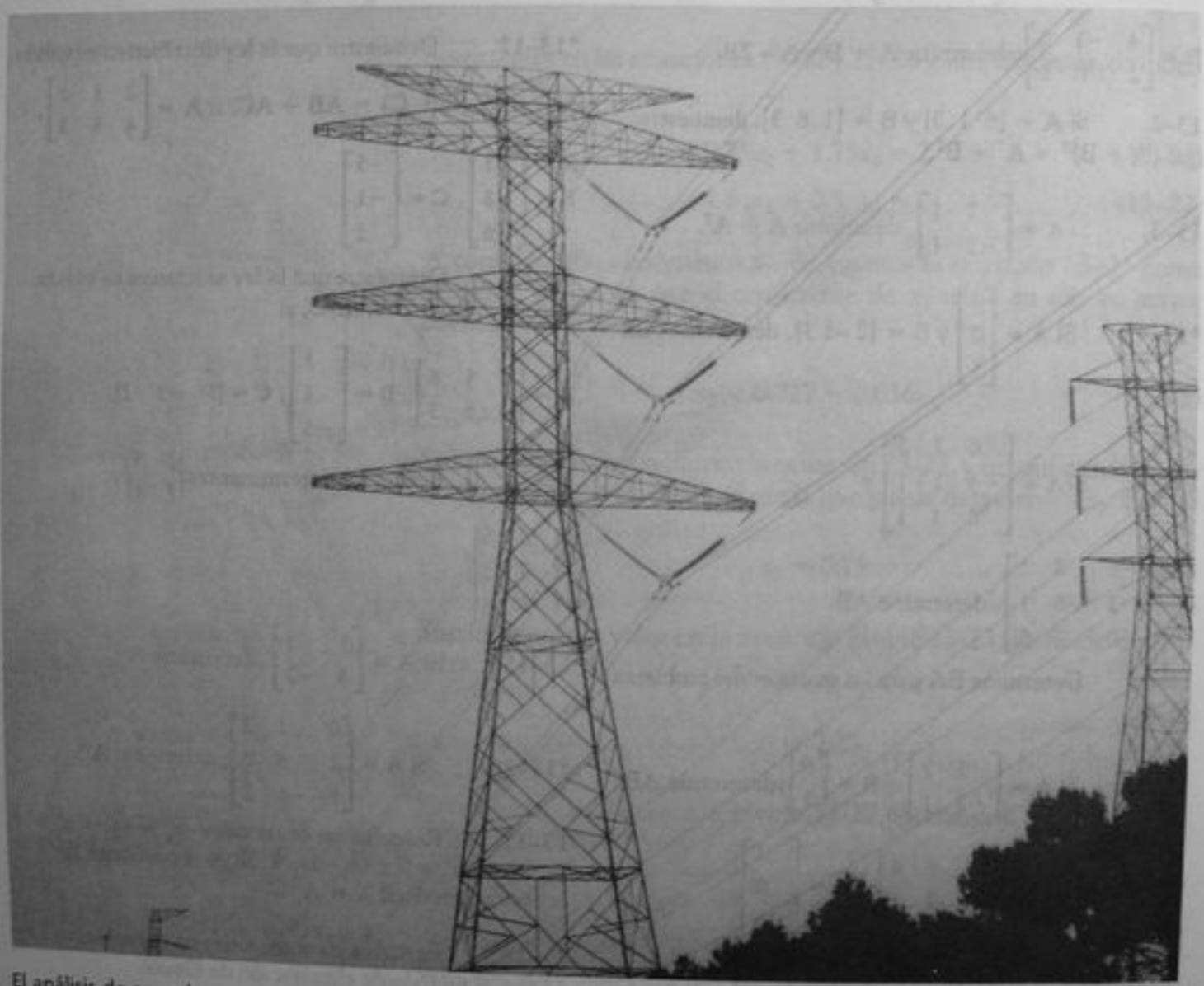
*13–16. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{A}^{-1}$.

13–17. Resuelva las ecuaciones $-x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$ y $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4$ mediante la ecuación matricial $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.

13–18. Resuelva las ecuaciones en el problema 13–17 con el método de eliminación de Gauss.

13–19. Resuelva las ecuaciones $x_1 - x_2 + x_3 = -1$, $-x_1 + x_2 + x_3 = -1$ y $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$ mediante la ecuación matricial $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

*13–20. Resuelva las ecuaciones en el problema 13–19 con el método de eliminación de Gauss.



El análisis de armaduras espaciales para torres de transmisión puede efectuarse por medio del método matricial de la rigidez.

14

Análisis de armaduras con el uso del método de la rigidez

En este capítulo explicaremos los fundamentos básicos del método de la rigidez para el análisis de estructuras. Se verá que este método, aunque tedioso al hacerlo a mano, es muy adaptable para su uso en computadora. Se darán ejemplos de aplicaciones específicas en armaduras planas. Su uso en vigas y marcos se verá en el siguiente capítulo.

14.1 Fundamentos del método de la rigidez

Cada uno de los métodos clásicos de análisis indeterminado que fueron presentados en capítulos previos puede clasificarse como un método de fuerzas o como un método de desplazamientos. Como se dijo en el capítulo 9, un *método de fuerzas* se basa en especificar primero las fuerzas redundantes externas o internas y luego determinar esas fuerzas mediante *condiciones de compatibilidad* de desplazamientos junto con relaciones de carga-desplazamiento. Una vez que se determinan las fuerzas en la estructura, los desplazamientos pueden calcularse con ayuda de alguno de los métodos del capítulo 8. Por otra parte, un *método de desplazamientos* requiere primero la identificación del número de grados de libertad desconocidos de la estructura. Esos desplazamientos se determinan entonces a partir de *ecuaciones de equilibrio*. Después de calcular los desplazamientos, las fuerzas desconocidas externas e internas en la estructura se determinan a partir de las relaciones de compatibilidad y de carga-desplazamiento.

El método de la rigidez mediante el análisis matricial que usaremos en este y en el siguiente capítulo, es un método de análisis de desplazamientos. Puede usarse también un método matricial para el análisis de fuerzas, como se delineó en la sección 9.9, para analizar estructuras; sin embargo, este método no se presentará aquí. Muy importante es que el método de los desplazamientos o método de la rigidez puede usarse para analizar estructuras tanto determinadas como indeterminadas, mientras que el método de las fuerzas requiere un procedimiento diferente para cada uno de esos dos casos. Además, el método de los desplazamientos da los desplazamientos y las fuerzas directamente, mientras que con el método de las fuerzas, los desplazamientos no se obtienen directamente. Es también generalmente mucho más fácil formular las matrices necesarias para las operaciones hechas por la computadora si se usa el método de los desplazamientos; una vez hecho esto, los cálculos con la computadora pueden efectuarse eficientemente.

La aplicación del método de la rigidez requiere subdividir la estructura en una serie de *elementos finitos* e identificar sus puntos extremos como *nodos*. Para el análisis de armaduras, los elementos finitos se representan por cada uno de los miembros que forman la armadura y los nodos representan los nudos. Se determinan las propiedades de fuerza-desplazamiento de cada elemento y luego se relacionan entre sí mediante las ecuaciones de equilibrio planteadas en los nodos. Esas relaciones, para todos los miembros de la estructura, se agrupan luego en lo que se llama *matriz* K *de rigidez de la estructura*. Una vez establecida ésta, los desplazamientos desconocidos de los nodos pueden determinarse para cualquier carga dada en la estructura. Cuando se conocen esos desplazamientos, las fuerzas externas e internas en la estructura pueden calcularse mediante las relaciones fuerza-desplazamiento para cada miembro.

Antes de desarrollar un procedimiento formal para la aplicación del método de la rigidez, es necesario primero establecer algunas definiciones y conceptos preliminares.

Identificación de miembros y nodos

Uno de los primeros pasos al aplicar el método de la rigidez es identificar los elementos o miembros de la estructura y sus nodos. Especificaremos cada miembro por un número encerrado en un cuadrado y usaremos un número encerrado en un círculo para identificar los nodos. Los extremos "cercano" y "alejado" de un miembro también deben ser identificados. Esto lo haremos usando una flecha a lo largo del miembro, con la cabeza de la flecha dirigida hacia el extremo alejado. Ejemplos de miembro, nodo e identificación de la "dirección" para una armadura se muestran en la figura 14–1*a*. Estas asignaciones se han hecho *arbitrariamente*.*

* Para armaduras de gran tamaño, las manipulaciones matriciales con el uso de K tienen mejores resultados si se adopta una numeración de los miembros según un patrón ondulado, esto es, comenzando de arriba a abajo, luego de abajo a arriba, etc.

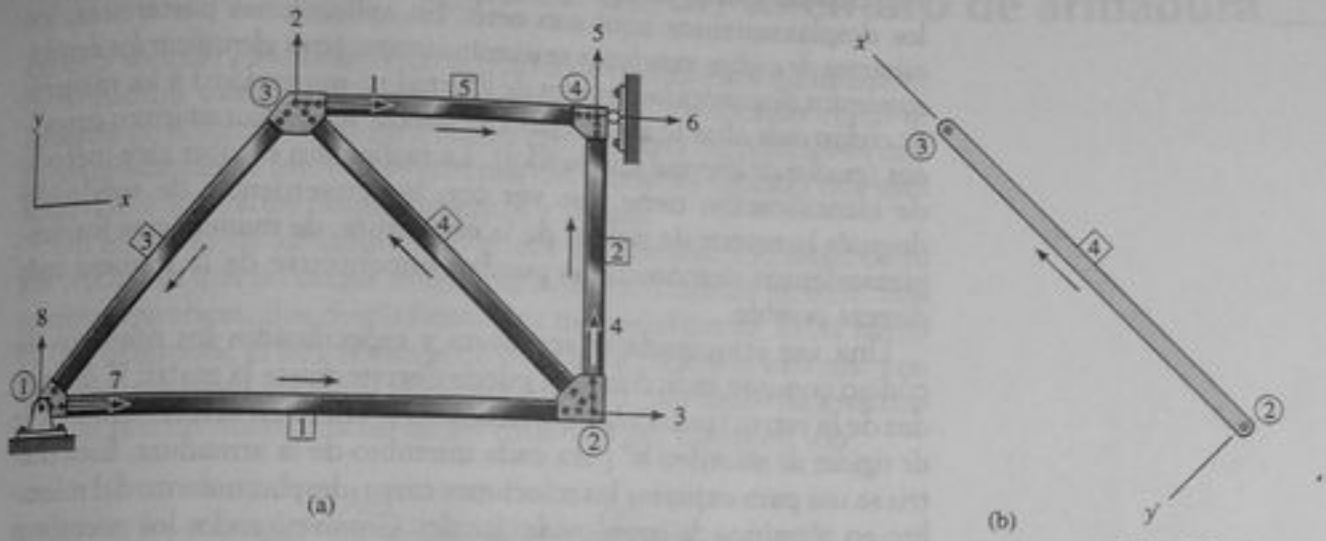


Fig. 14–1

Coordenadas de miembro y globales

Como las cargas y los desplazamientos son cantidades vectoriales, es necesario establecer un sistema coordenado para especificar su sentido correcto de dirección. Usaremos aquí dos tipos diferentes de sistemas coordenados. Un *sistema coordenado global o de la estructura*, usando ejes x, y, especificará el sentido de cada una de las componentes externas de fuerza y desplazamiento en los nodos, figura 14–1*a*. Un *sistema coordenado local o de miembro* se usará en cada miembro en especificar el sentido de sus desplazamientos y cargas internas. Este sistema se identificará usando ejes x', y' con el origen en el nodo "cercano" y el eje x' señalando hacia el extremo "alejado". Un ejemplo para el miembro 4 de armadura se muestra en la figura 14–1*b*.

Grados de libertad

Los grados de libertad no restringidos de una estructura representan las incógnitas principales en el método de la rigidez y por tanto, deben ser identificados. Como regla general, hay dos grados de libertad o dos posibles desplazamientos para cada nudo (o nodo) de una armadura. En las aplicaciones, cada grado de libertad debe especificarse en la estructura usando un número de código, mostrado en el nudo o nodo y referido a su dirección coordenada global positiva por medio de una flecha. Por ejemplo, la armadura en la figura 14–1*a* tiene ocho grados de libertad, que han sido identificados por los "números de código" 1 al 8. De esos ocho posibles desplazamientos, del 1 al 5 representan *grados de libertad no restringidos* o desconocidos y del 6 al 8

representan *grados de libertad restringidos*. Debido a las restricciones, los desplazamientos aquí son cero. En aplicaciones posteriores, los *números de código más bajos se usarán siempre para identificar los desplazamientos desconocidos (grados de libertad no restringidos) y los números de código más altos se usarán para identificar los desplazamientos conocidos (grados de libertad restringidos)*. La razón para escoger este método de identificación tiene que ver con la conveniencia de subdividir después la matriz de rigidez de la estructura, de manera que los desplazamientos desconocidos puedan encontrarse de la manera más directa posible.

Una vez etiquetada la armadura y especificados los números de código como se indicó arriba, puede determinarse la matriz **K** de rigidez de la estructura. Para ello, debemos primero establecer una *matriz de rigidez de miembro* $\mathbf{k}'$ para cada miembro de la armadura. Esta matriz se usa para expresar las relaciones carga-desplazamiento del miembro en términos de *coordenadas locales*. Como no todos los miembros de la armadura tienen la misma dirección, debemos desarrollar un medio para transformar esas cantidades de cada sistema coordenado local x', y' del miembro a un sistema coordenado global x, y de la estructura. Esto puede hacerse usando *matrices de transformación de fuerzas y desplazamientos*. Una vez establecidas, los elementos de la matriz de rigidez del miembro pueden transformarse de coordenadas locales a globales y luego usarlas para generar la matriz de rigidez de la estructura. Hay, de hecho, dos maneras de hacer esta transformación. Podemos construir primero una *matriz* $\mathbf{k}_c$ *de rigidez de elemento compuesto* que representa las relaciones carga-deflexión para *todos* los miembros de la armadura en términos de coordenadas locales. Luego podemos desarrollar una *matriz de transformación de la estructura* específicamente para la armadura en consideración y transformar $\mathbf{k}_c$ de sus coordenadas locales a coordenadas globales. Esto dará **K** directamente. Por desgracia, este método no funciona tan bien con una computadora debido a la singularidad de **K** para cada armadura. En vez de esto, usaremos el método alternativo, llamado *procedimiento directo de la rigidez*; esto es, cada matriz de rigidez de miembro se transformará *separadamente* de coordenadas locales a globales. Cuando las matrices de rigidez globales para todos los miembros de la armadura hayan sido determinadas, la matriz de rigidez de la estructura **K** se formulará ensamblando entre sí las matrices de rigidez de los miembros. Usando **K**, como se dijo arriba, podemos determinar primero los desplazamientos nodales y luego las reacciones y las fuerzas en los miembros. Veremos ahora el desarrollo de este método.

14.2 Matriz de rigidez de un miembro de armadura

En esta sección estableceremos la matriz de rigidez para un miembro de armadura usando coordenadas locales x', y', orientadas como se muestra en la figura 14–2. Esta matriz representará las relaciones carga-desplazamiento entre los extremos del miembro cuando éste está sometido a sus varios desplazamientos y cargas.

Un miembro de armadura sólo puede desplazarse a lo largo de su eje (eje x') ya que las cargas están aplicadas a lo largo de este eje. Son posibles entonces, dos desplazamientos independientes. En la figura 14-2*a*, se impone el desplazamiento positivo d_N sobre el extremo cercano del miembro mientras el extremo alejado se mantiene articulado. Las fuerzas desarrolladas en los extremos del miembro son

$$q'_N = \frac{AE}{L} d_N \qquad q'_F = -\frac{AE}{L} d_N$$

Note que q'_F es negativa ya que por equilibrio actúa en sentido x' negativo. Igualmente, un desplazamiento positivo d_F del extremo alejado, manteniendo el extremo cercano articulado, figura 14–2*b*, conduce a las fuerzas de miembro

$$q''_N = -\frac{AE}{L} d_F \qquad q''_F = \frac{AE}{L} d_F$$

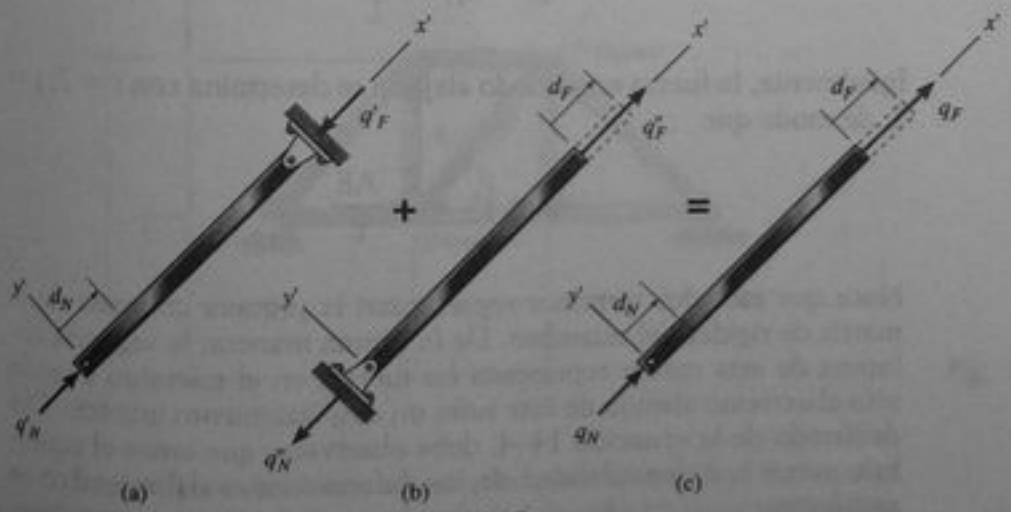


Fig. 14–2

Por superposición, figura 14–2*c*, el efecto resultante de d_N y d_F es

$$q_N = \frac{AE}{L} d_N - \frac{AE}{L} d_F \tag{14–1}$$

$$q_F = \frac{AE}{L} d_F - \frac{AE}{L} d_N \tag{14–2}$$

Estas ecuaciones de carga-desplazamiento pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix}$$

o

$$\boxed{\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{d}} \tag{14–3}$$

donde

$$\mathbf{k}' = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14–4}$$

Esta matriz $\mathbf{k}'$ se llama *matriz de rigidez de miembro* y es de la misma forma para cada miembro de la armadura. Los cuatro elementos que la componen se llaman *coeficientes de influencia de rigidez del miembro* k'_{ij}. Físicamente, k'_{ij} representa la fuerza en el nudo i cuando se impone un *desplazamiento unitario* sólo en el nudo j. Por ejemplo, si el nudo alejado se mantiene fijo, la fuerza en el nudo cercano, cuando este nudo sufre un desplazamiento $d_N = 1$, se determina con $i = j = 1$ y con la ecuación 14–1,

$$q_N = k'_{11} = \frac{AE}{L}$$

Igualmente, la fuerza en el nudo alejado se determina con $i = 2, j = 1$, de modo que

$$q_F = k'_{21} = -\frac{AE}{L}$$

Note que esos dos términos representan la primera columna de la matriz de rigidez del miembro. De la misma manera, la segunda columna de esta matriz representa las fuerzas en el miembro cuando sólo el extremo alejado de éste sufre un desplazamiento unitario. Del desarrollo de la ecuación 14–4, debe observarse que tanto el equilibrio como la compatibilidad de las deformaciones del miembro se satisfagan.

14.3 Matrices de transformación de desplazamientos y fuerzas

Como una armadura está compuesta de muchos miembros (elementos), desarrollaremos ahora un método para transformar las fuerzas **q** de miembro y los desplazamientos **d** de miembro definidos en coordenadas locales a un sistema de coordenadas x, y globales o de la estructura, para toda la armadura. Consideraremos la x positiva hacia la derecha y la y positiva hacia arriba. Los ángulos más pequeños entre los ejes x, y globales *positivos* y el eje local x' *positivo* se designarán con θ_x y θ_y como se muestra en la figura 14–3. Los cosenos de esos ángulos se usarán en el análisis matricial que sigue. Estos se identificarán con $\lambda_x = \cos\theta_x$, $\lambda_y = \cos\theta_y$. Los valores numéricos para λ_x y λ_y pueden generarse fácilmente por computadora una vez que se hayan especificado las coordenadas globales de los extremos cercano N y alejado F del miembro. Por ejemplo, considere el miembro NF de la armadura mostrada en la figura 14–4. Aquí, las coordenadas de N y F se miden desde el origen del sistema coordenado global.* Tenemos,

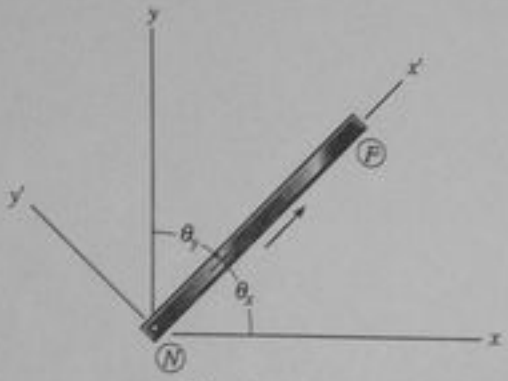


Fig. 14–3

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \qquad (14\text{–}5)$$

$$\lambda_y = \cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \qquad (14\text{–}6)$$

Los signos algebraicos en esas ecuaciones "generalizadas" tomarán en cuenta automáticamente a los miembros que estén orientados en otros cuadrantes del plano x-y.

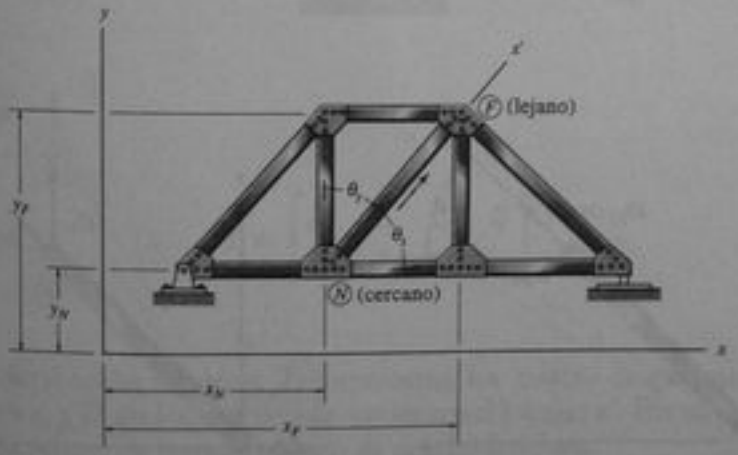


Fig. 14–4

* El origen puede localizarse en cualquier punto conveniente. Sin embargo, usualmente se sitúa donde las coordenadas x, y de todos los nudos sean *positivas*, como se muestra en la figura 14–4.

Matriz de transformación de desplazamientos

En coordenadas globales, cada extremo del miembro puede tener dos grados de libertad o desplazamientos independientes; o sea, el nudo N tiene D_{Nx} y D_{Ny}, figura 14–5*a* y 14–5*b* y el nudo F tiene D_{Fx} y D_{Fy}, figura 14–5*c* y 14–5*d*. Consideraremos ahora por separado cada uno de esos desplazamientos globales, para determinar cada componente de desplazamiento a lo largo del miembro. Cuando el extremo alejado se mantiene articulado y al extremo cercano se le da un desplazamiento global D_{Nx}, figura 14-5*a*, el desplazamiento correspondiente (deformación) a lo largo de la barra es $D_{Nx} \cos \theta_x$.* De la misma manera, un desplazamiento global D_{Ny} ocasionará que la barra se des-

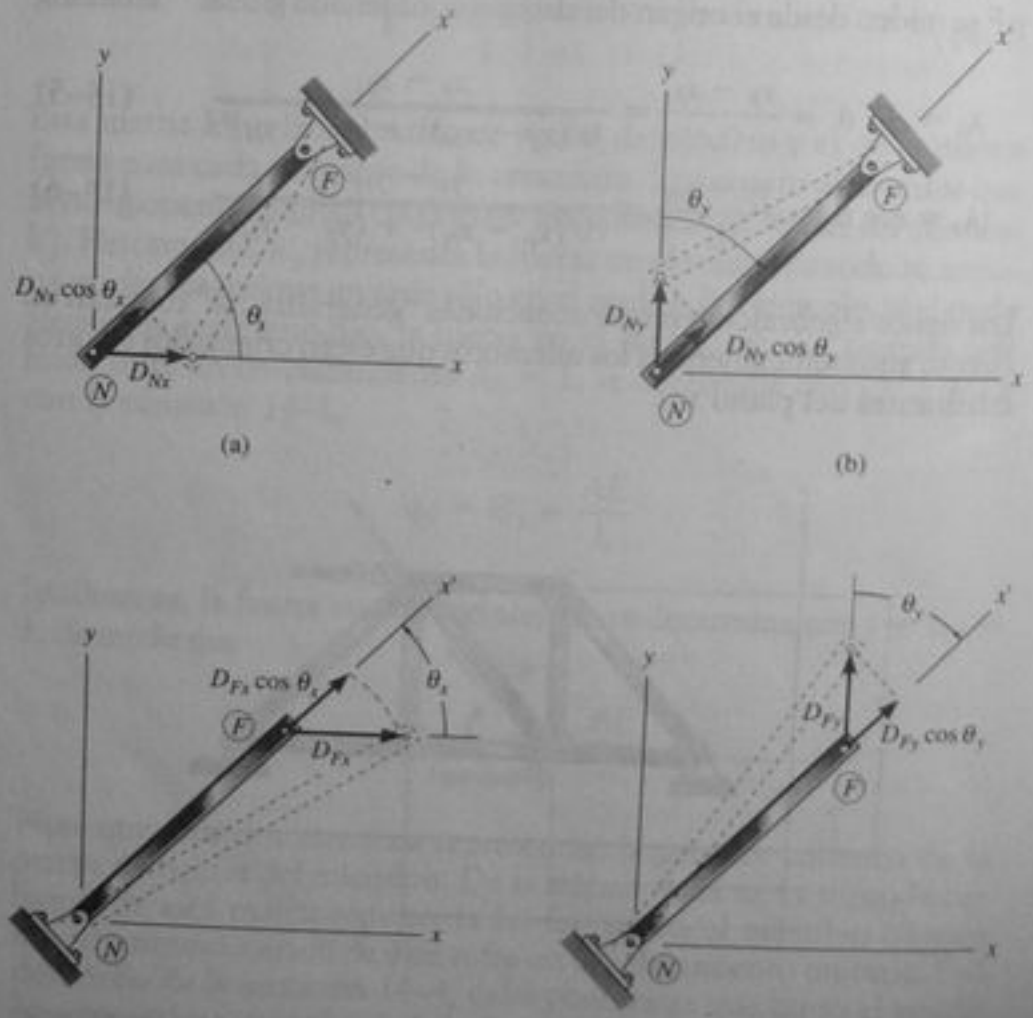


Fig. 14–5

place $D_{Ny}\cos\theta_y$ a lo largo del eje x', figura 14–5*b*. El efecto de *ambos* desplazamientos globales es por tanto

$$d_N = D_{Nx}\cos\theta_x + D_{Ny}\cos\theta_y$$

De manera similar, los desplazamientos positivos D_{Fx} y D_{Fy} aplicados sucesivamente en el extremo alejado F mientras el extremo cercano se mantiene articulado, figura 14–5*c* y 14–5*d*, ocasionarán que el miembro se desplace

$$d_F = D_{Fx}\cos\theta_x + D_{Fy}\cos\theta_y$$

Si $\lambda_x = \cos\theta_x$ y $\lambda_y = \cos\theta_y$ representan los *cosenos directores* del miembro, tenemos

$$d_N = D_{Nx}\lambda_x + D_{Ny}\lambda_y$$
$$d_F = D_{Fx}\lambda_x + D_{Fy}\lambda_y$$

que puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} \tag{14–7}$$

o

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D} \tag{14–8}$$

donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \tag{14–9}$$

En la derivación anterior, $\mathbf{T}$ transforma los cuatro desplazamientos globales x, y $\mathbf{D}$ en los dos desplazamientos $\mathbf{d}$ locales x'. Por ello, a $\mathbf{T}$ se le llama *matriz de transformación de desplazamientos*.

* El cambio en θ_x o θ_y se despreciará, ya que es muy pequeño.

Matriz de transformación de fuerzas

Considere ahora la aplicación de la fuerza q_N al extremo cercano del miembro, manteniendo el extremo alejado articulado, figura 14–6*a*. Aquí, las componentes globales de la fuerza q_N en N son

$$Q_{Nx} = q_N \cos \theta_x \qquad Q_{Ny} = q_N \cos \theta_y$$

De la misma manera, si se aplica q_F a la barra, figura 14–6*b*, las componentes globales de la fuerza en F son

$$Q_{Fx} = q_F \cos \theta_x \qquad Q_{Fy} = q_F \cos \theta_y$$

Mediante los cosenos directores $\lambda_x = \cos \theta_x$, $\lambda_y = \cos \theta_y$, estas ecuaciones se expresan como

$$\begin{aligned} Q_{Nx} &= q_N \lambda_x & Q_{Ny} &= q_N \lambda_y \\ Q_{Fx} &= q_F \lambda_x & Q_{Fy} &= q_F \lambda_y \end{aligned}$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} \tag{14–10}$$

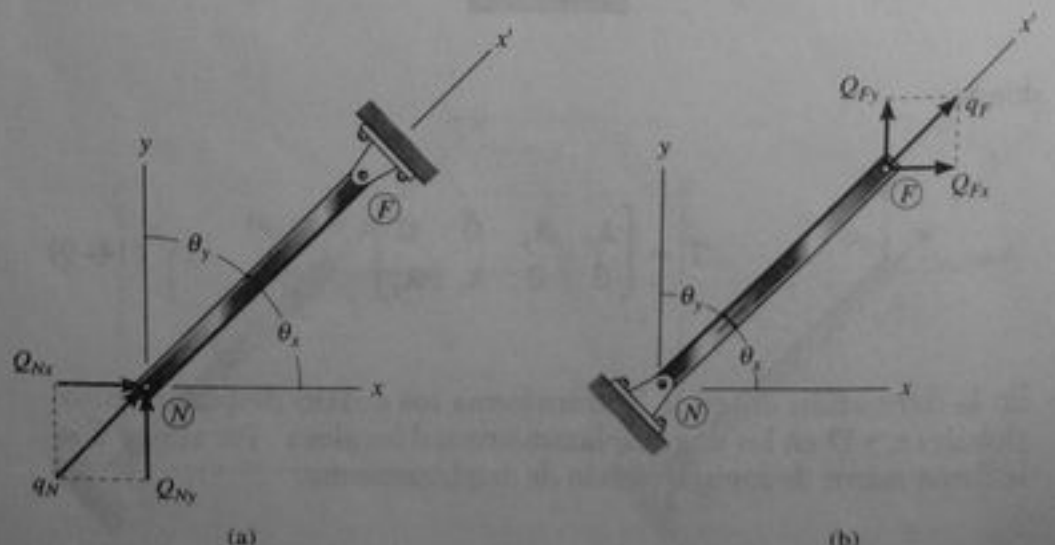


Fig. 14–6

o

$$\boxed{\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}} \tag{14–11}$$

donde

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \tag{14–12}$$

En este caso $\mathbf{T}^T$ transforma las dos fuerzas $\mathbf{q}$ locales (x') que actúan en los extremos de los miembros en las cuatro componentes $\mathbf{Q}$ globales (x,y). Esta *matriz de transformación de fuerzas* es la transpuesta de la matriz de transformación de desplazamientos, ecuación 14–9.

14.4 Matriz de rigidez global de un miembro

Combinaremos ahora los resultados de las secciones precedentes y determinaremos la matriz de rigidez para un miembro que relaciona las componentes globales de fuerza $\mathbf{Q}$ del miembro con sus desplazamientos globales $\mathbf{D}$. Si sustituimos la ecuación 14–8 $(\mathbf{d} = \mathbf{TD})$ en la ecuación 14–3 $(\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{d})$, podemos determinar las fuerzas $\mathbf{q}$ del miembro en términos de los desplazamientos globales $\mathbf{D}$ en sus puntos extremos, esto es,

$$\boxed{\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{TD}} \tag{14–13}$$

Sustituimos esta ecuación en la ecuación 14–11, $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}$, de modo que se obtiene el resultado final

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{TD}$$

o

$$\boxed{\mathbf{Q} = \mathbf{kD}} \tag{14–14}$$

donde

$$\boxed{\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}} \tag{14–15}$$

La matriz **k** es la *matriz de rigidez del miembro* en coordenadas globales. Como $\mathbf{T}^T$, **T** y **k'** son conocidas, tenemos

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones matriciales, resulta

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c} \\ N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N_x & N_y & F_x & F_y \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{14–16}$$

La *localización* de cada elemento en esta matriz simétrica de 4 x 4 está relacionada con cada grado de libertad global asociado con el extremo cercano *N*, seguido del extremo alejado *F*. Esto se indica por la notación de números codificados a lo largo de renglones y columnas, esto es, N_x, N_y, F_x, F_y. Igual que **k'**, **k** representa aquí las relaciones fuerza desplazamiento para el miembro cuando las componentes de fuerza y desplazamiento en los extremos del miembro están dadas en las direcciones globales o direcciones *x*, *y*. Cada uno de los términos de la matriz es por lo tanto un *coeficiente de influencia de rigidez* $\mathbf{k}_{ij}$, que denota la componente de fuerza en *x* o en *y* en *i* necesaria para generar en *j* una componente de desplazamiento *unitario* en *x* o en *y*. En consecuencia, cada columna identificada de la matriz representa las cuatro componentes de fuerza desarrolladas en los extremos del miembro cuando el extremo identificado sufre un desplazamiento unitario relacionado con su columna en la matriz. Por ejemplo, un desplazamiento unitario $D_{Nx} = 1$ generará las cuatro componentes de fuerza sobre el miembro mostradas en la primera columna de la matriz.

14.5 Matriz de rigidez de la estructura

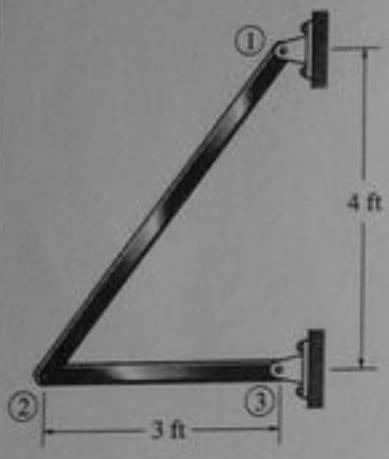
Una vez que todas las matrices de rigidez de miembro se han expresado en coordenadas globales, resulta necesario ensamblarlas en el orden apropiado para poder encontrar la matriz K de rigidez de la estructura para la armadura entera. Este proceso de combinar las matrices de miembro depende de una cuidadosa identificación de los elementos de cada matriz. Como se vio en la sección anterior, esto se hace designando los renglones y columnas de la matriz con los *cuatro* números de código N_x, N_y, F_x, F_y usados para identificar los dos grados de libertad globales que pueden presentarse en cada extremo del miembro (vea la ecuación 14–16). La matriz de rigidez de la estructura tendrá entonces un orden que será igual al número de código más alto asignado a la estructura, ya que éste representa el número de grados de libertad total para la estructura. Cuando se ensamblan las matrices k, cada elemento de k se colocará en su *misma* designación de renglón y columna en la matriz K de rigidez de la estructura. En particular, cuando dos o más miembros están conectados al mismo nudo o nodo, entonces algunos de los elementos de cada una de las matrices k se asignarán a la misma posición en la matriz K. Cuando esto ocurre, los elementos asignados a la posición común deben sumarse entre sí algebraicamente. La razón para esto resulta clara si se ve que cada elemento de la matriz k representa la resistencia del miembro a una fuerza aplicada en su extremo. De esta manera, al sumar esas resistencias en la dirección x o y al tiempo que se forma la matriz K es un simbolismo de la determinación de la *resistencia total* de cada nudo a un desplazamiento unitario en la dirección x o y.

Este método de ensamblar las matrices de miembro para formar la matriz de rigidez de la estructura quedará ahora esclarecido por dos ejemplos numéricos. Aunque este proceso es algo tedioso si se hace a mano, es sin embargo muy fácil de programar para una computadora.

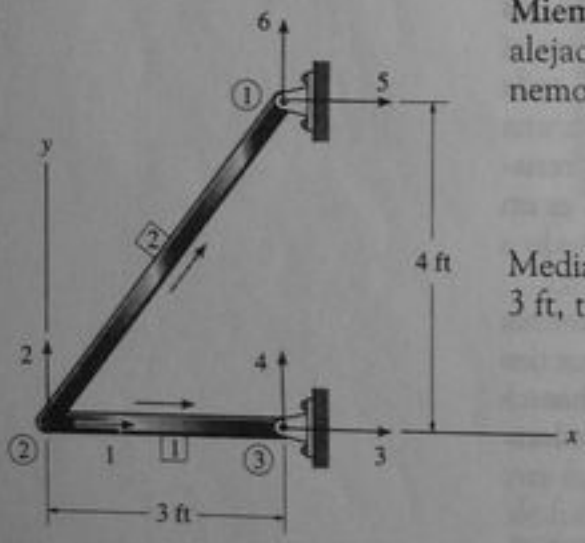
La estructura de este hangar está formada enteramente por armaduras para reducir en forma considerable el peso propio. (*Cortesía de la Bethlehem Steel Corporation.*)

Ejemplo 14–1

Determine la matriz de rigidez de la estructura para la armadura de dos miembros mostrada en la figura 14–7*a*. *AE* es constante.



(a)



(b)

Fig. 14–7

Solución

Por inspección, el nudo ② tendrá dos componentes de desplazamiento desconocidos, mientras que los nudos ① y ③ están restringidos en sus desplazamientos. En consecuencia, las componentes de desplazamiento en el nudo ② son numeradas primero, seguidas por las de los nudos ③ y ①, figura 14–7*b*. El origen del sistema coordenado global puede localizarse en cualquier punto. Por conveniencia, lo escogeremos en el nudo ②, como se muestra. Los miembros se identifican arbitrariamente y se marcan flechas a lo largo de los dos miembros para identificar los extremos cercano y alejado de éstos. Los cosenos directores y la matriz de rigidez de cada miembro ya pueden determinarse.

Miembro 1. Como ② es el extremo cercano y ③ el extremo alejado, entonces de acuerdo con las ecuaciones 14–5 y 14–6, tenemos

$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

Mediante la ecuación 14–16 y dividiendo cada elemento entre $L = 3$ ft, tenemos

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los cálculos pueden verificarse en parte observando que $\mathbf{k}_1$ es *simétrica*. Note que los renglones y columnas en $\mathbf{k}_1$ se identifican por los grados de libertad *x*, y en el extremo cercano, están seguidos por el extremo alejado, esto es, 1, 2, 3, 4, respectivamente, para el miembro 1, figura 14–7*b*. Esto se hace así para identificar los elementos de ensamble en la matriz **K**.

Miembro 2. Como ② es el extremo cercano y ① es el extremo alejado, tenemos

$$\lambda_x = \frac{3-0}{5} = 0.6 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{5} = 0.8$$

Así, la ecuación 14–16 con $L = 5$ ft resulta,

$$\mathbf{k}_2 = AE\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & -0.096 & -0.128 \\ -0.072 & -0.096 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Aquí las columnas y renglones se identifican como 1, 2, 5, 6, ya que esos números representan, respectivamente, los grados de libertad x, y en los extremos cercano y alejado del miembro 2.

Matriz de rigidez de la estructura. Esta matriz tiene un orden de 6×6 ya que hay seis grados de libertad designados para la armadura, figura 14–7*b*. Los elementos correspondientes de las dos matrices anteriores se suman algebraicamente para formar la matriz de rigidez de la estructura. Tal vez sea más fácil ver el proceso de ensamblado si las columnas y renglones numéricamente faltantes en $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ se expanden con ceros para formar dos matrices de 6×6. Como

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

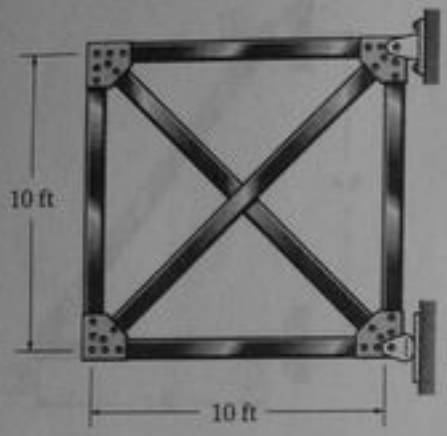
$$\mathbf{K} = AE\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.333 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} + AE\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & 0 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = AE\begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix}$$

Si se usa una computadora para efectuar esta operación, generalmente uno comienza con $\mathbf{K}$ en la que todos sus elementos son ceros. Luego, conforme las matrices de rigidez de miembro globales van siendo generadas, ellas se colocan directamente en sus posiciones respectivas en la matriz $\mathbf{K}$ en vez de desarrollar las matrices de rigidez de miembro, almacenarlas y luego ensamblarlas.

Ejemplo 14–2

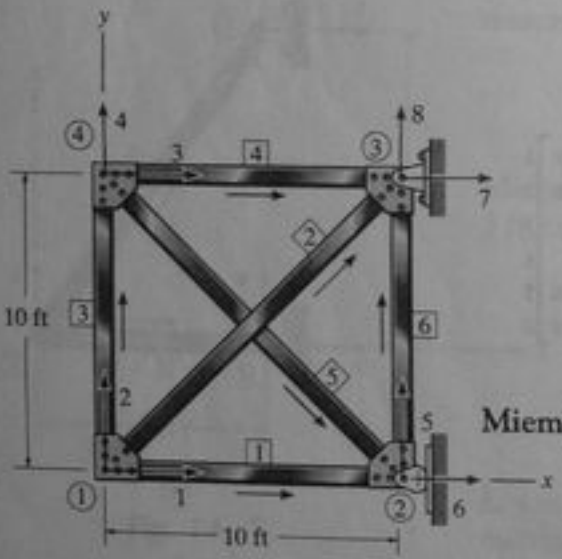
Determine la matriz de rigidez de la estructura para la armadura mostrada en la figura 14–8*a*. *AE* es constante.



(a)

Solución

Aunque la armadura es estáticamente indeterminada de primer grado, esto no presenta ninguna dificultad para obtener la matriz de rigidez de la estructura. Cada nudo y miembro se identifican numéricamente en forma arbitraria y los extremos cercano y alejado se indican por flechas a lo largo del miembro. Como se muestra en la figura 14–8*b*, los *desplazamientos no restringidos se codifican primero*, esto es, con los números más pequeños. Hay ocho grados de libertad en la armadura por lo que **K** será una matriz de 8×8. Para que todas las coordenadas de los nudos sean positivas, el origen de las coordenadas globales se escoge en ①. Las ecuaciones 14–5, 14–6 y 14–16 se aplicarán ahora a cada miembro.



(b)

Fig. 14–8

Miembro 1. Aquí, $L = 10$ ft, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10-0}{10} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{10} = 0$$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

Miembro 2. Aquí, $L = 10\sqrt{2}$ ft, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10-0}{10\sqrt{2}} = 0.707 \qquad \lambda_y = \frac{10-0}{10\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Miembro 3. Aquí, $L = 10$ ft, por lo que

$$\lambda_x = \frac{0-0}{10} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10-0}{10} = 1$$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Miembro 4. Aquí, $L = 10$ ft, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10-0}{10} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{10-10}{10} = 0$$

$$\mathbf{k}_4 = AE \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Miembro 5. Aquí, $L = 10\sqrt{2}$ ft, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10-0}{10\sqrt{2}} = 0.707 \qquad \lambda_y = \frac{0-10}{10\sqrt{2}} = -0.707$$

$$\mathbf{k}_5 = AE \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 3 & 4 & 6 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ 0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(continúa)

Ejemplo 14–2 (continuación)

Miembro 6. Aquí, $L = 10$ ft, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 10}{10} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

$$\mathbf{k}_6 = AE \begin{array}{c} \\ 6 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 6 & 5 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Las seis matrices anteriores pueden ahora ensamblarse en la matriz $\mathbf{K}$ de 8×8 sumando algebraicamente sus elementos correspondientes. Por ejemplo, $(k_{11})_1 = AE(0.1)$, $(k_{11})_2 = AE(0.035)$, $(k_{11})_3 = (k_{11})_4 = (k_{11})_5 = (k_{11})_6 = 0$. Así, $K_{11} = AE(0.1 + 0.035) = AE(0.135)$, etc. El resultado final es entonces,

$$\mathbf{K} = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \end{array}$$

Resp.

14.6 Aplicación del método de la rigidez al análisis de armaduras

Una vez que se ha formado la matriz de rigidez de la estructura con ayuda de los métodos de la sección anterior, podemos usarla para determinar los desplazamientos de los nudos, las reacciones externas y las fuerzas internas en los miembros. Como siempre hemos asignado los números de código menores para identificar los grados de libertad no restringidos, esto nos permitirá subdividir $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ de la siguiente manera:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \hline \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \hline \mathbf{D}_k \end{bmatrix} \tag{14–17}$$

Aquí

$\mathbf{Q}_k, \mathbf{D}_k$ = cargas y desplazamientos externos *conocidos*; las cargas existen aquí sobre la armadura como parte del problema y los desplazamientos se especifican generalmente como iguales a cero debido a las restricciones en los soportes tales como pasadores o rodillos

$\mathbf{Q}_u, \mathbf{D}_u$ = cargas y desplazamientos *desconocidos*; las cargas representan aquí las reacciones desconocidas en los soportes, y los desplazamientos son en nudos donde el movimiento no está restringido en una dirección particular

$\mathbf{K}$ = matriz de rigidez de la estructura, que se subdivide en forma compatible con las subdivisiones de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{D}$

Desarrollando la ecuación 14–17, se obtiene

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k \tag{14–18}$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k \tag{14–19}$$

Con frecuencia $\mathbf{D}_k = 0$ ya que los soportes no se desplazan. Si esto es así, la ecuación 14–18 se convierte en

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u$$

* Este esquema de subdivisión resultará obvio en los ejemplos numéricos que siguen.

Como los elementos en la matriz subdividida $\mathbf{K}_{11}$ representan la *resistencia total* en el nudo de una armadura a un desplazamiento unitario en la dirección x o y, la ecuación anterior simboliza entonces el conjunto de todas las *ecuaciones de equilibrio de fuerzas* aplicadas a los nudos donde las cargas externas son cero o tienen un valor conocido ($\mathbf{Q}_k$). Despejando $\mathbf{D}_u$, tenemos

$$\mathbf{D}_u = [\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{Q}_k \tag{14–20}$$

De esta ecuación podemos obtener una solución directa para todos los desplazamientos desconocidos de nudo. Sustituyendo este resultado en la ecuación 14–19 con $\mathbf{D}_k = \mathbf{0}$, obtenemos

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u \tag{14–21}$$

de la cual pueden determinarse las reacciones desconocidas en los soportes. Las fuerzas en los miembros pueden determinarse mediante la ecuación 14–13, esto es

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

Desarrollando esta ecuación resulta

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

Como por equilibrio, $q_N = -q_F$, sólo una de las fuerzas tiene que encontrarse. Aquí determinaremos q_F, aquella que ejerce tensión en el miembro, figura 14–6*b*. Así,

$$q_F = \frac{AE}{L}[-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y]\begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} \tag{14–22}$$

En particular, si el resultado calculado con esta ecuación es negativo, el miembro estará en compresión.

Procedimiento de análisis

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos y reacciones desconocidas en una armadura usando el método matricial de la rigidez. Este procedimiento es apropiado para *cualquier tipo* de armadura, sea simple, compuesta o compleja. Además, es aplicable a armaduras estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas.

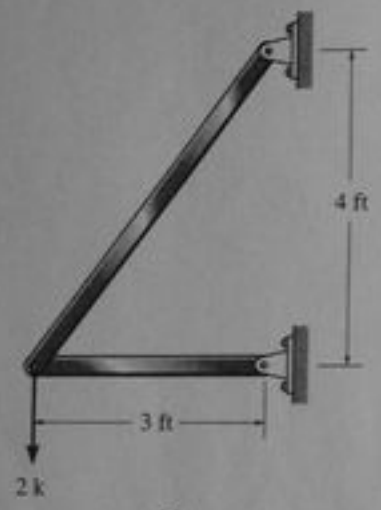
Notación Establezca el sistema de coordenadas globales x, y. El origen suele situarse en uno de los nudos de manera que las coordenadas de todos los demás nudos resulten positivas. Identifique cada nudo y miembro numéricamente y simbolice en forma arbitraria los extremos cercano y alejado de cada miembro simbólicamente por medio de una flecha cuya punta señale hacia el extremo alejado. Además, especifique los dos números de código en cada nudo, usando los *menores números* para identificar los *grados de libertad no restringidos*, seguidos de los *números mayores* para identificar los *grados de libertad restringidos*. Del problema, establezca $\mathbf{D}_k$ y $\mathbf{Q}_k$.

Matriz de rigidez de la estructura Para cada miembro determine λ_x y λ_y y la matriz de rigidez de miembro usando la ecuación 14–16. Ensamble esas matrices para formar la matriz de rigidez para la armadura entera como se explicó en la sección 14.5. Como verificación parcial de los cálculos, las matrices de rigidez de miembro y de la estructura deben ser *simétricas*.

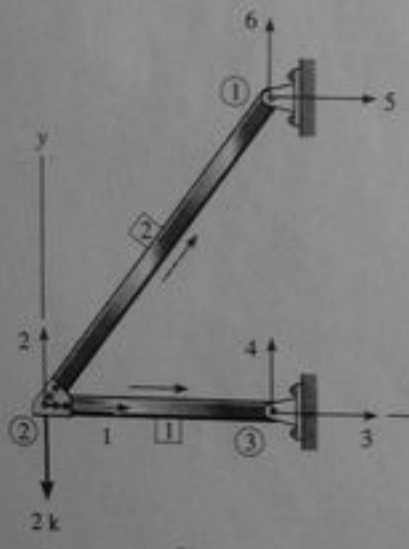
Desplazamientos y cargas Subdivida la matriz de rigidez de la estructura como se indica en la ecuación 14–17. Determine luego los desplazamientos desconocidos de nudo $\mathbf{D}_u$ usando la ecuación 14–20, las reacciones $\mathbf{Q}_u$ usando la ecuación 14–21 y cada fuerza de miembro $\mathbf{q}_F$ usando la ecuación 14–22.

Ejemplo 14–3

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura de dos barras mostrada en la figura 14–9a. AE es constante.



(a)



(b)

Fig. 14–9

Solución

Notación. El origen de los ejes x, y y la numeración de los nudos y miembros se muestran en la figura 14–9*b*. Además, los extremos cercano y alejado de cada miembro están identificados por flechas y se usan números codificados en cada nudo. Por inspección se ve que los desplazamientos externos desconocidos son $D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$. Las cargas externas conocidas son $Q_1 = 0, Q_2 = -2\text{k}$. Por tanto,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Con la misma notación que la empleada aquí, esta matriz se desarrolló en el ejemplo 14–1.

Desplazamientos y cargas. Si escribimos la ecuación 14–17, $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$, para la armadura, tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ \hline Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{cc|cccc} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ \hline -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

En esta ecuación podemos ahora identificar $\mathbf{K}_{11}$ y luego determinar $\mathbf{D}_u$. Se ve que la multiplicación de matrices, como la ecuación 14–18, da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 \\ 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aquí es fácil encontrar la solución por desarrollo directo,

$$0 = AE(0.405D_1 + 0.096D_2)$$
$$-2 = AE(0.096D_1 + 0.128D_2)$$

Físicamente esas ecuaciones representan $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ aplicadas al nudo ②. Resolviéndolas, encontramos

$$D_1 = \frac{4.505}{AE} \qquad D_2 = \frac{-19.003}{AE}$$

Por inspección de la figura 14–9*b*, es de esperar que en el nudo ② ocurra un desplazamiento hacia la derecha y hacia abajo, como se indica por los signos positivo y negativo de la respuesta.

Mediante este resultado, se obtienen ahora las reacciones en los soportes de la ecuación (1), escrita en la forma de la ecuación 14–19 (o ecuación 14–21) como

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -0.333 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 \\ -0.096 & -0.128 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$Q_1 = -0.333(4.505) = -1.5 \text{ k}$$
$$Q_2 = 0$$
$$Q_3 = -0.072(4.505) - 0.096(-19.003) = 1.5 \text{ k}$$
$$Q_4 = -0.096(4.505) - 0.128(-19.003) = 2.0 \text{ k}$$

La fuerza en cada miembro se encuentra de la ecuación 14–22. Con los datos para λ_x y λ_y en el ejemplo 14–1, tenemos

Miembro 1: $\lambda_x = 1, \lambda_y = 0, L = 3$ ft

$$q_1 = \frac{AE}{3} \overset{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3}[-4.505] = -1.5 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

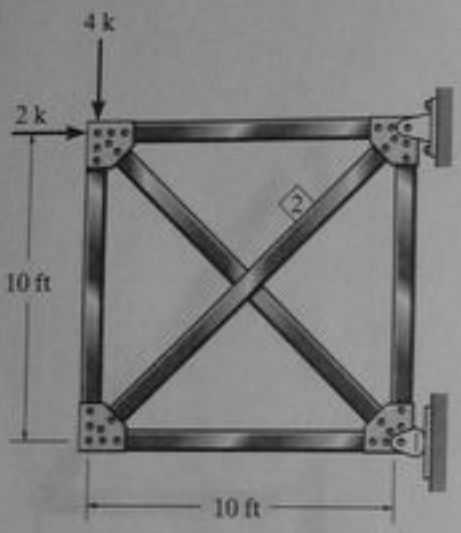
Miembro 2: $\lambda_x = 0.6, \lambda_y = 0.8, L = 5$ ft

$$q_2 = \frac{AE}{5} \overset{\begin{matrix}1 & 2 & 5 & 6\end{matrix}}{\begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{5}[-0.6(4.505) - 0.8(-19.003)] = 2.5 \text{ k} \qquad \textit{Resp.}$$

Estas respuestas pueden, por supuesto, verificarse por consideraciones de equilibrio en el nudo ②.

Ejemplo 14-4



(a)

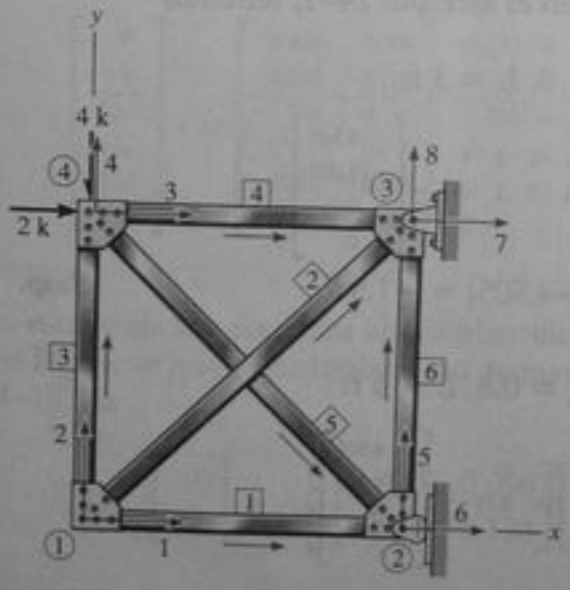
Determine las reacciones en los soportes y la fuerza en el miembro 2 de la armadura mostrada en la figura 14–10*a*. *AE* es constante.

Solución

Notación. Los nudos y los miembros están numerados y el origen de los ejes *x*, *y* está fijo en ①, figura 14–10*b*. Se han usado flechas para identificar los extremos cercano y alejado de cada miembro. Mediante números codificados, donde los menores números denotan los grados de libertad no restringidos, figura 14–10*b*, tenemos

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Esta matriz se determinó en el ejemplo 14–2 mediante la misma notación que la de la figura 14–10*b*.



(b)

Fig. 14–10

Desplazamientos y cargas. Para este problema $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ \hline Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ \hline -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.035 & 0.135 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Multiplicamos para formular la ecuación 14–18 de los desplazamientos desconocidos, de modo que obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollamos y despejamos de las ecuaciones los desplazamientos, de modo que resulta

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ -2.06 \\ -87.14 \\ -22.06 \end{bmatrix}$$

(continúa)

Ejemplo 14–4 (continuación)

Desarrollamos la ecuación 14–19 a partir de la ecuación (1) y, mediante los resultados calculados, obtenemos

$$\begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ -2.06 \\ -87.14 \\ -22.06 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollamos y calculamos las reacciones en los soportes, de modo que obtenemos

$$Q_6 = -4.0\ \text{k} \quad \textit{Resp.}$$
$$Q_7 = 2.0\ \text{k} \quad \textit{Resp.}$$
$$Q_8 = 4.0\ \text{k} \quad \textit{Resp.}$$

El signo negativo para Q_6 indica que la reacción en la mecedora actúa en la dirección x negativa. La fuerza en el miembro 2 se encuentra de la ecuación 14–22, donde del ejemplo 14–2, $\lambda_x = 0.707$, $\lambda_y = 0.707$, $L = 10\sqrt{2}$ ft. Así,

$$q_2 = \frac{AE}{10\sqrt{2}} [-0.707 \quad -0.707 \quad 0.707 \quad 0.707] \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2.56\ \text{k} \quad \textit{Resp.}$$

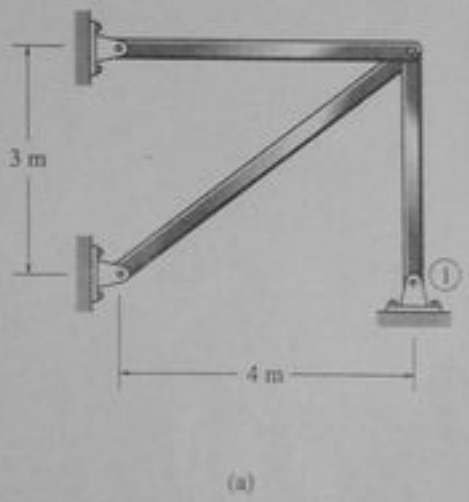
Ejemplo 14–5

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura en la figura 14–11*a* si el soporte en el nudo ① se desplaza *hacia abajo* 25 mm. Considere $AE = 8(10^3)$ kN.

Solución

Notación. Por conveniencia, el origen de las coordenadas globales en la figura 14–11*b* se fija en el nudo ② y como es usual, los números menores se usan para referir los grados de libertad no restringidos. Así entonces,

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$



(a)

Matriz de rigidez de la estructura. Mediante la ecuación 14–16, tenemos

Miembro 1: $\lambda_x = 0, \lambda_y = -1, L = 3$ m, por lo que

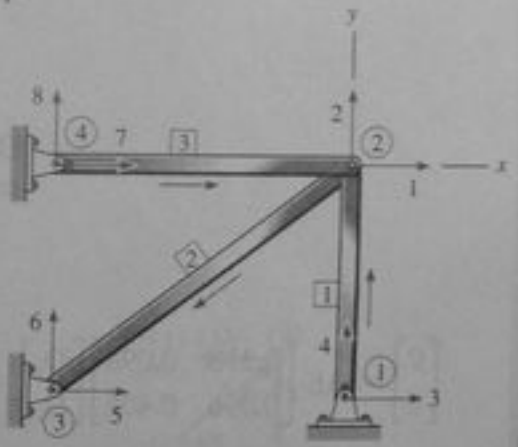
$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Miembro 2: $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5$ m, por lo que

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Miembro 3: $\lambda_x = -1, \lambda_y = 0, L = 4$ m, por lo que

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$



(b)

Fig. 14–11

(continúa)

Ejemplo 14–5 (continuación)

Al ensamblar estas matrices se obtiene la matriz de rigidez de la estructura

$$\mathbf{K} = AE\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Aquí $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE\left[\begin{array}{cc:cccccc} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ \hdashline 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Desarrollando la solución para los desplazamientos, ecuación 14–18, tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 \\ 0.096 & 0.405 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + AE\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que conduce a

$$0 = AE[(0.378D_1 + 0.096D_2) + 0]$$
$$0 = AE[(0.096D_1 + 0.4053D_2) + 0.00833]$$

Si resolvemos estas ecuaciones simultáneamente obtenemos

$$D_1 = 0.00556 \text{ m}$$
$$D_2 = -0.021875 \text{ m}$$

Aunque las reacciones en los soportes no tienen que ser calculadas, pueden encontrarse por el desarrollo definido por la ecuación 14–19. Mediante la ecuación 14–22 para determinar las fuerzas en los miembros, obtenemos

Miembro 1: $\lambda_x = 0, \lambda_y = -1, L = 3, AE = 8(10^3)$ kN, por lo que

$$q_1 = \frac{8(10^3)}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.00556\\-0.021875\\0\\-0.025\end{bmatrix}$$

$$= \frac{8(10^3)}{3}(-0.021875 + 0.025)$$

$$= 8.34 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Miembro 2: $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5, AE = 8(10^3)$ kN, por lo que

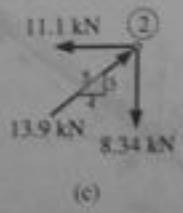
$$q_2 = \frac{8(10^3)}{5}\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.00556\\-0.0219\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{8(10^3)}{5}(0.00444 - 0.0131) = -13.9 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Miembro 3: $\lambda_x = -1, \lambda_y = 0, L = 4, AE = 8(10^3)$ kN, por lo que

$$q_3 = \frac{8(10^3)}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.00556\\-0.0219\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{8(10^3)}{4}(0.00556)$$

$$= 11.1 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Estos resultados se muestran en el diagrama de cuerpo libre del nudo ②, figura 14–11, cuyo equilibrio puede verificarse.

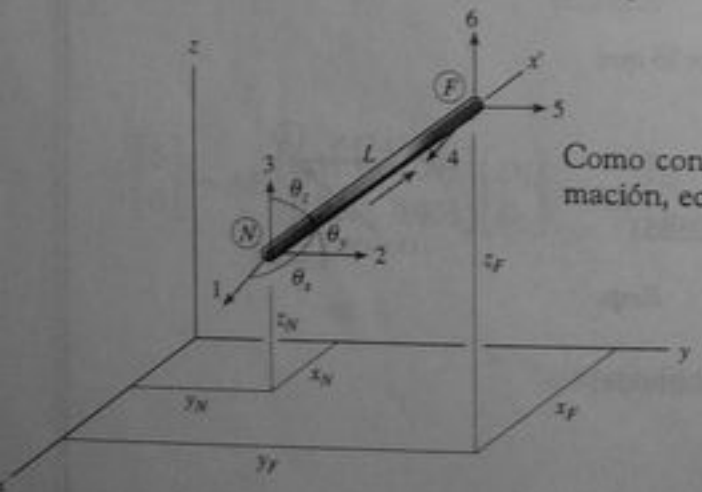
14.7 Análisis de armaduras espaciales

El análisis de armaduras espaciales estáticamente determinadas se vio en la sección 3.8. Podemos, desde luego, analizar esos tipos de armaduras y las estáticamente indeterminadas mediante el mismo procedimiento visto en la sección anterior. Sin embargo, para tomar en cuenta los aspectos tridimensionales del problema, elementos adicionales deben incluirse en la matriz de transformación $\mathbf{T}$. Respecto a esto, considere el miembro de armadura mostrado en la figura 14–12. La matriz de rigidez para el miembro definida en términos de la coordenada local x' está dada por la ecuación 14–4. Además, por inspección de la figura 14–12, los cosenos directores entre las coordenadas globales y locales pueden encontrarse usando ecuaciones análogas a las ecuaciones 14–5 y 14–6, esto es,

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}} \tag{14–23}$$

$$\lambda_y = \cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}} \tag{14–24}$$

$$\lambda_z = \cos\theta_z = \frac{z_F - z_N}{L} = \frac{z_F - z_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}} \tag{14–25}$$



Como consecuencia de la tercera dimensión, la matriz de transformación, ecuación 14–9, se convierte en

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

Fig. 14–12

Al sustituir esta matriz y la ecuación 14–4 en la ecuación 14–15, $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}$, se obtiene

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ \lambda_z & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \\ 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

Efectuamos la multiplicación matricial, de modo que resulta la matriz *simétrica*

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_x\lambda_z & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_x\lambda_z \\ \lambda_y\lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y\lambda_z & -\lambda_y\lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y\lambda_z \\ \lambda_z\lambda_x & \lambda_z\lambda_y & \lambda_z^2 & -\lambda_z\lambda_x & -\lambda_z\lambda_y & -\lambda_z^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_x\lambda_z & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_x\lambda_z \\ -\lambda_y\lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y\lambda_z & \lambda_y\lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y\lambda_z \\ -\lambda_z\lambda_x & -\lambda_z\lambda_y & -\lambda_z^2 & \lambda_z\lambda_x & \lambda_z\lambda_y & \lambda_z^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{array} \tag{14–26}$$

Esta ecuación representa la *matriz de rigidez de miembro* expresada en *coordenadas globales*. Los números de código a lo largo de los renglones y columnas se refieren a las direcciones x, y, z en el extremo cercano N_x, N_y, N_z, seguidas por las del extremo alejado F_x, F_y, F_z para el miembro.

Para la programación de computadoras, es generalmente más eficiente usar la ecuación 14–26 que efectuar la multiplicación matricial $\mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}$ para cada miembro. Como se dijo antes, se ahorra espacio de almacenaje en la computadora si la matriz $\mathbf{K}$ de rigidez de la "estructura" se inicializa primero con todos los elementos iguales a cero; luego, conforme se van generando las matrices de rigidez de cada miembro, éstas se colocan directamente en sus posiciones respectivas en $\mathbf{K}$. Después de formada la matriz de rigidez de la estructura, puede seguirse el procedimiento delineado en la sección 14.6 para determinar los desplazamientos de los nudos, las reacciones en los soportes y las fuerzas internas en los miembros.

BIBLIOGRAFÍA

Tezcan, S. "Computer Analysis of Plane and Space Structures," *Structural Division ASCE*, 143–173, April, 1966.

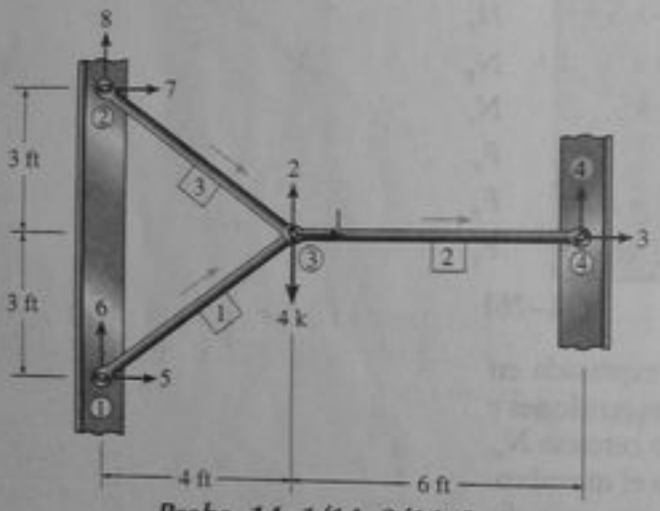
Wilson, E. "The Use of Minicomputers in Structural Analysis," *Computers and Structures*, 2, 695–698, 1980.

PROBLEMAS

14–1. Determine la matriz de rigidez **K** para el ensamble mostrado. Considere $A = 0.5$ in^2 y $E = 29(10^3)$ ksi para cada miembro.

14–2. Determine el desplazamiento vertical en el nudo ③ del ensamble en el problema 14–1.

14–3. Determine la fuerza en cada miembro del ensamble en el problema 14–1.



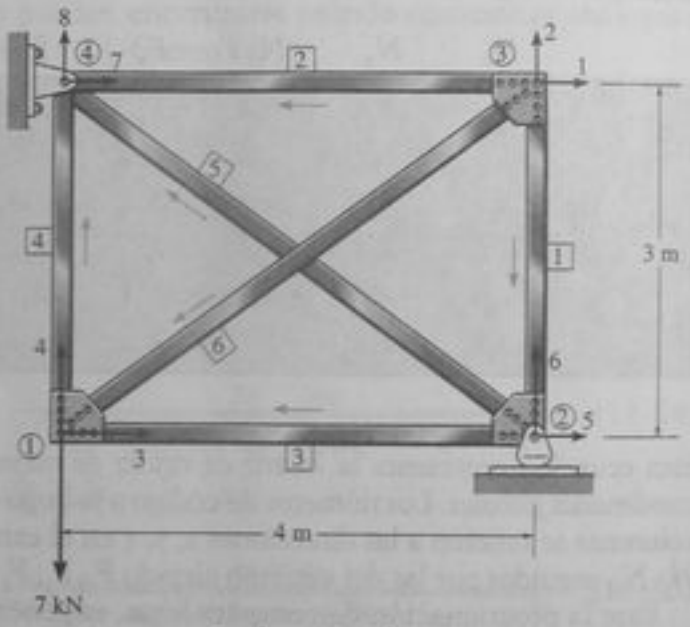
Probs. 14–1/14–2/14–3

***14–4.** Determine la matriz **K** de la armadura. AE es constante. Suponga que todos los nudos están articulados.

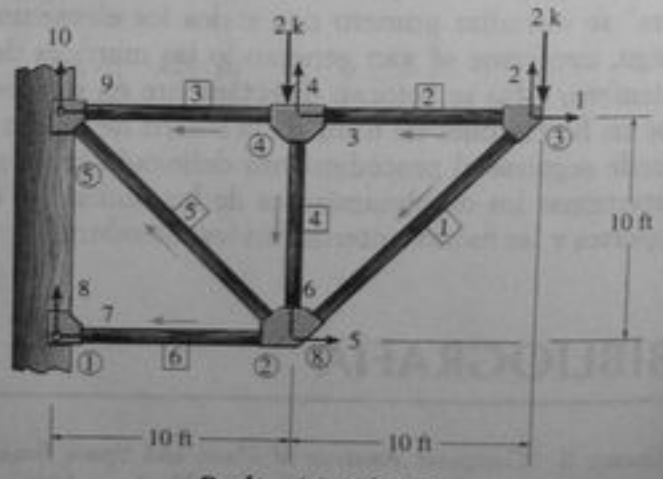
14–5. Determine la deflexión vertical del nudo ② y la fuerza en el miembro [1] de la armadura en el problema 14–4.

14–6. Determine la matriz **K** de rigidez de la armadura. Considere $A = 0.0015$ m^2 y $E = 200$ GPa para cada miembro.

14–7. Determine la fuerza en el miembro [6] de la armadura en el problema 14–6.



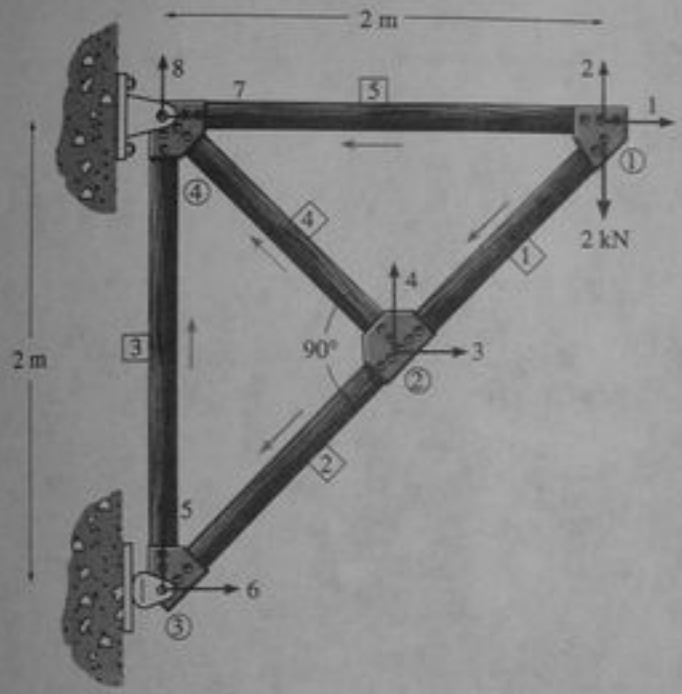
Probs. 14–6/14–7



Probs. 14–4/14–5

*14–8. Determine la matriz **K** de rigidez de la armadura. *AE* es constante.

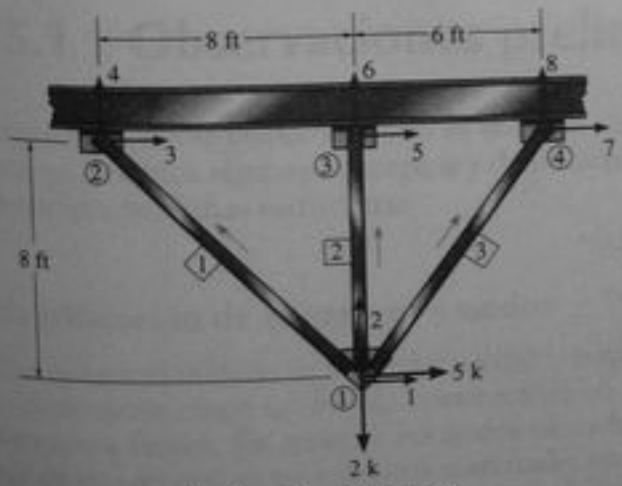
14–9. Determine la fuerza en los miembros [1] y [5] de la armadura en el problema 14–8.



Probs. 14–8/14–9

14–10. Determine la matriz **K** de rigidez de la armadura. *AE* es constante.

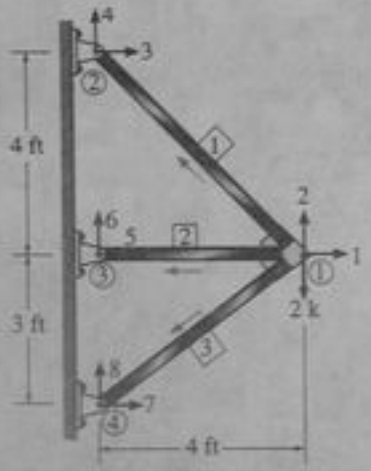
14–11. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura en el problema 14–10.



Probs. 14–10/14–11

*14–12. Determine la matriz **K** de rigidez de la armadura. Considere $A = 0.75\ \text{in}^2$, $E = 29(10^3)$ ksi. Suponga que todos los nudos están articulados.

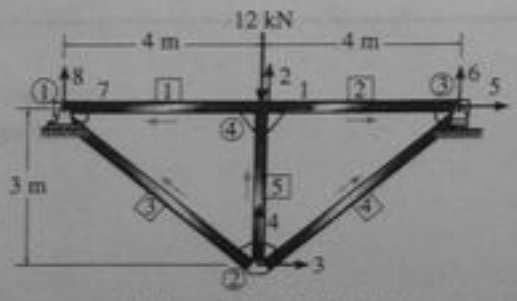
14–13. Determine la deflexión vertical del nudo ②, y la fuerza en el miembro [2] de la armadura en el problema 14–12.



Probs. 14–12/14–13

14–14. Determine la matriz **K** de rigidez de la armadura. Considere $A = 0.0015\ \text{m}^2$ y $E = 200$ GPa para cada miembro.

14–15. Determine la deflexión vertical en el nudo ②, y la fuerza en el miembro [4] de la armadura en el problema 14–14.



Probs. 14–14/14–15

Vea los problemas 15–22 y 15–23 para la aplicación del programa STRAN.

Los marcos de edificios altamente indeterminados se resuelven con un programa de computadora formulado según el método matricial de la rigidez. (Peter Vandermark/Stock, Boston.)

15

Análisis de vigas y marcos planos con el uso del método de la rigidez

Los conceptos presentados en el capítulo anterior se ampliarán aquí y se aplicarán al análisis de vigas y marcos planos. Por otra parte, se mostrará que, una vez obtenidas la matriz de rigidez de miembro y la matriz de transformación, el procedimiento a seguir es exactamente igual que el de las armaduras. El análisis estructural de estructuras tridimensionales requiere una simple ampliación de los conceptos presentados aquí y se estudia en los libros dedicados al análisis matricial.

15.1 Observaciones preliminares

Antes de mostrar cómo se aplica el método de la rigidez a vigas y marcos, veremos algunos conceptos y definiciones preliminares relacionados con dichas estructuras.

Identificación de miembros y nodos

Para aplicar el método de la rigidez a vigas y marcos, debemos primero determinar cómo subdividir la estructura en sus componentes de elementos finitos. En general, los nodos de cada elemento se localizan en un soporte, en una esquina o un nudo, en los que se aplica una fuerza externa o donde va a determinarse el desplazamiento lineal o

rotacional en un punto (o nodo). Por ejemplo, considere el marco en la figura 15–1*a*. Mediante el mismo esquema empleado para las armaduras, los cuatro nodos se especifican con un número dentro de un círculo y los tres elementos se identifican mediante un número en un cuadrado. Observe también que los extremos "cercano" y "alejado" de cada miembro se identifican mediante las flechas marcadas a lo largo de cada miembro.

Coordenadas de miembro y globales

El sistema coordenado global o de la estructura se identificará con el uso de ejes x, y, z que tienen generalmente su origen en un nodo y están posicionados de manera que todos los nodos en otros puntos de la estructura tengan coordenadas positivas, figura 15–1*a*. Las coordenadas locales o de miembro x', y', z' tienen su origen en el extremo "cercano" de cada miembro y el eje x' positivo está dirigido hacia el extremo "alejado". La figura 15–1*b* muestra esas coordenadas para el elemento 3. En ambos casos hemos usado un sistema coordenado regido por la regla de la mano derecha, de modo que, si los dedos de la mano derecha se curvan del eje $x(x')$ hacia el eje $y(y')$, el pulgar señalará en la dirección positiva del eje $z(z')$, que señala hacia afuera de la página.

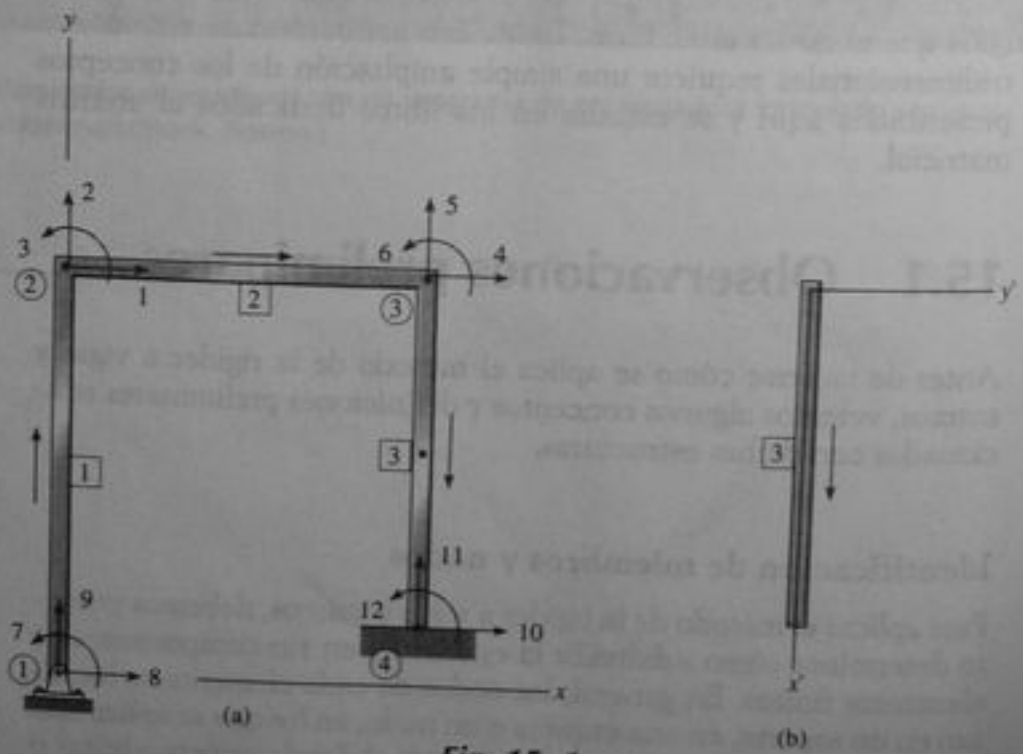


Fig. 15–1

Grados de libertad

Una vez identificados los miembros y nodos y que se ha establecido el sistema global de coordenadas, pueden determinarse los grados de libertad de la estructura.

Marcos. Al derivar los métodos clásicos de análisis, despreciamos la deformación en los miembros del marco causada por fuerza axial y fuerza cortante y consideramos sólo el efecto de la flexión. Esto es justificable ya que las fuerzas axiales o cortantes, en general, no contribuyen en forma considerable a la deflexión de los miembros del marco. Sin embargo, en el análisis que sigue, podemos proporcionar fácilmente un análisis más exacto del marco incorporando los desplazamientos por flexión y fuerza axial en el método de la rigidez.* En consecuencia, cada nodo de un miembro del marco tendrá *tres grados de libertad*, cada uno de los cuales se identifica por medio de un número de código. Como en el caso de las armaduras, los *números de código más pequeños* se usan para identificar los *desplazamientos desconocidos* (grados de libertad no restringidos) y los *números mayores* se usan para identificar los *desplazamientos conocidos* (grados de libertad restringidos). Un ejemplo de la etiquetación con números de código para un marco se muestra también en la figura 15–1*a*. Aquí, el marco tiene 12 grados de libertad, para los cuales los números de código del 1 al 8 representan desplazamientos desconocidos y del 9 al 12 representan desplazamientos conocidos, que en este caso son iguales a cero.

Vigas. Si despreciamos los efectos de la fuerza axial y la fuerza cortante y consideramos sólo deflexiones de vigas causadas por flexión, como en el análisis clásico, el tamaño de la matriz de rigidez de la estructura será algo pequeño. Además, si la viga no tiene volados de patín, o si los soportes no tienen un desplazamiento transversal por asentamientos, entonces cada nodo, *si está localizado en un soporte*, tiene sólo un grado de libertad, representado como un desplazamiento angular. Así, la viga continua mostrada en la figura 15–2 se etiqueta con tres nodos y dos miembros y tiene tres grados de libertad. Los números de código 1 y 2 indican los desplazamientos angulares desconocidos y el número de código 3 indica el desplazamiento angular conocido (cero).

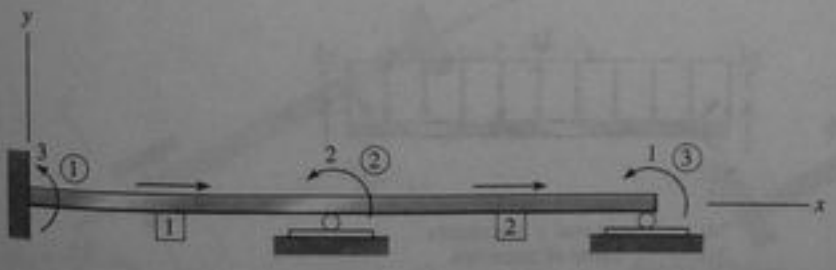


Fig. 15–2

*El pequeño efecto de la fuerza cortante puede también incluirse en el análisis. Esto se estudia en libros dedicados al análisis estructural matricial.

Carga intermedia de un miembro

Si un elemento de un marco o viga soporta una carga lateral entre sus nodos, será conveniente para un análisis matricial que los efectos de esta carga se conviertan a una carga equivalente en los nodos. Esto se debe a que el método de la rigidez, igual que todos los métodos de desplazamientos, se basa en plantear ecuaciones de equilibrio en los nodos y, por lo tanto, si se hace esta conversión de cargas, las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse en forma sencilla.

Para mostrar cómo tratar un caso de carga lateral, consideraremos el elemento de la viga o marco sometido a una carga distribuida constante como se muestra en la figura 15–3*a*. Por el principio de superposición, esta carga puede representarse por (1) el elemento cargado con los momentos de empotramiento y las fuerzas cortantes en los nodos del elemento, figura 15–3*b*, y (2) el elemento, que se supone está empotrado y sometido a la carga real y a sus reacciones en los empotramientos, figura 15–3c. El análisis matricial se efectúa sólo para la carga mostrada en la figura 15–3*b*, ya que las cargas en el caso de los extremos empotrados pueden determinarse directamente. En otras palabras, una vez terminado el análisis matricial de la carga en la figura 15–3*b*, las cargas internas y desplazamientos reales en puntos a lo largo del elemento pueden obtenerse por superposición de los efectos causados por las fuerzas nodales, figura 15–3*b*, y por la carga distribuida y por las reacciones en los empotramientos, figura 15–3c. Las reacciones en los empotramientos para otros casos de carga se dan en el forro interior de la cubierta. La aplicación de este procedimiento se ilustra numéricamente en los ejemplos 15–1 y 15–3.

El desarrollo del método de la rigidez para vigas y marcos es igual que el procedimiento utilizado para armaduras. Primero debemos establecer las matrices de rigidez de los miembros y luego las matrices de transformación para desplazamientos y cargas. Combinando estas matrices, podemos formar la matriz de rigidez de la estructura a partir de la cual podemos determinar las cargas internas y los desplazamientos desconocidos.

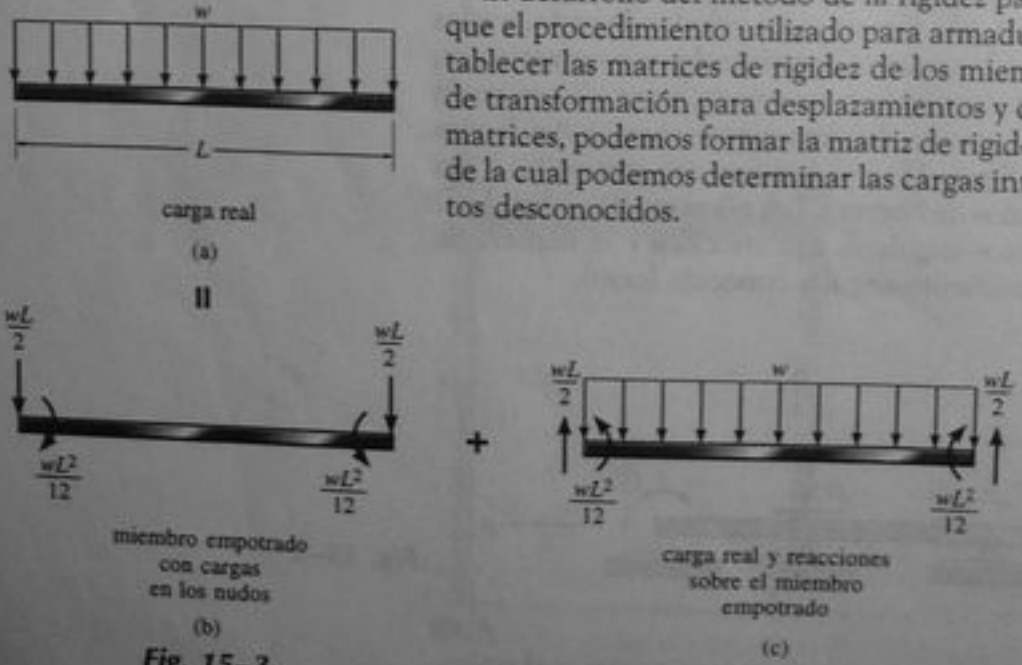
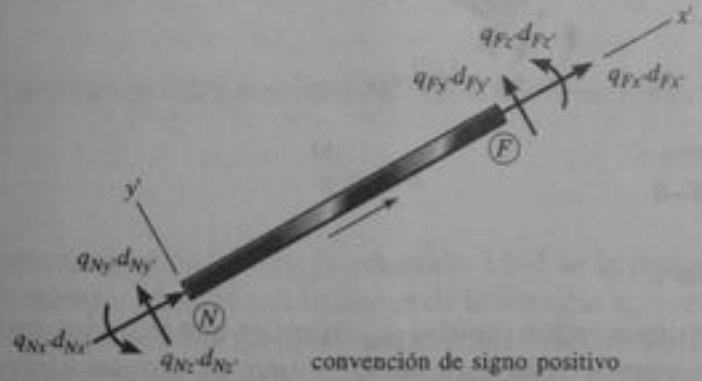


Fig. 15–3

15.2 Matriz de rigidez de un miembro de un marco

En esta sección desarrollaremos la matriz de rigidez de un miembro de un marco referido a un sistema de coordenadas locales x', y', z', figura 15–4. El origen se coloca en el extremo "cercano" N y el eje x' positivo se extiende hacia el extremo "alejado" F. En cada extremo del elemento hay tres reacciones, que consisten en fuerzas axiales $q_{Nx'}$ y $q_{Fx'}$, en fuerzas cortantes $q_{Ny'}$ y $q_{Fy'}$ y en momentos flexionantes $q_{Nz'}$ y $q_{Fz'}$. Todas esas cargas actúan en las direcciones coordenadas positivas. En particular, $q_{Nz'}$ y $q_{Fz'}$ son positivos en sentido *contrario a las manecillas del reloj*, ya que según la regla de la mano derecha, están dirigidos a lo largo del eje positivo z' que es hacia afuera de la página.

Los desplazamientos lineales y angulares asociados con esas cargas siguen también la misma convención de signo positivo. Impondremos ahora por separado esos desplazamientos y luego determinaremos las cargas que actúan en el miembro como consecuencia de cada desplazamiento.



convención de signo positivo

Fig. 15–4

Desplazamientos x'

Si el miembro sufre un desplazamiento $d_{Nx'}$, o un desplazamiento $d_{Fx'}$, se generan las fuerzas axiales en los extremos del miembro mostradas en las figuras 15–5*a* y 15–5*b*.

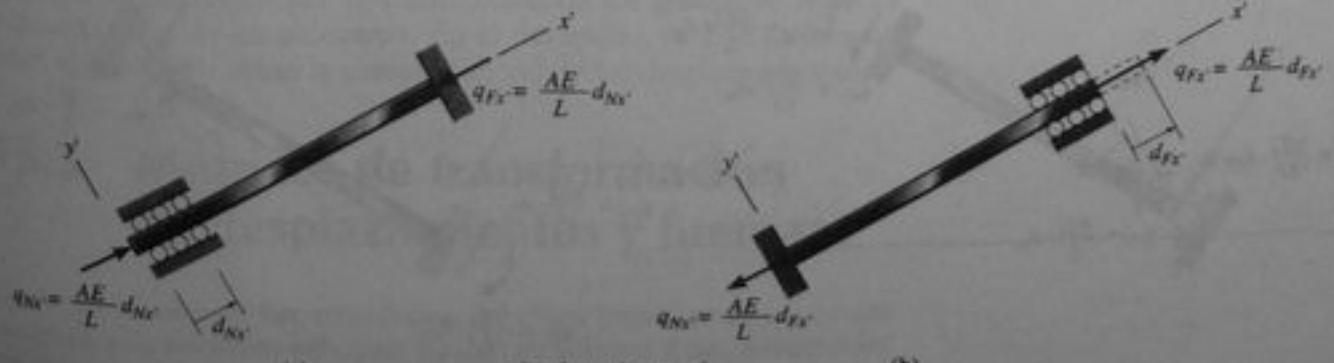


Fig. 15–5

Desplazamientos y'

Las fuerzas cortantes y momentos flexionantes resultantes que se generan cuando se impone un desplazamiento positivo $d_{Ny'}$, mientras todos los otros posibles desplazamientos están impedidos, se muestran en la figura 15–6*a*. En particular, el momento se ha desarrollado en la sección 10.1 como la ecuación 10–5. Igualmente, cuando se impone $d_{Fy'}$, las fuerzas cortantes y momentos requeridos son los mostrados en la figura 15–6*b*.

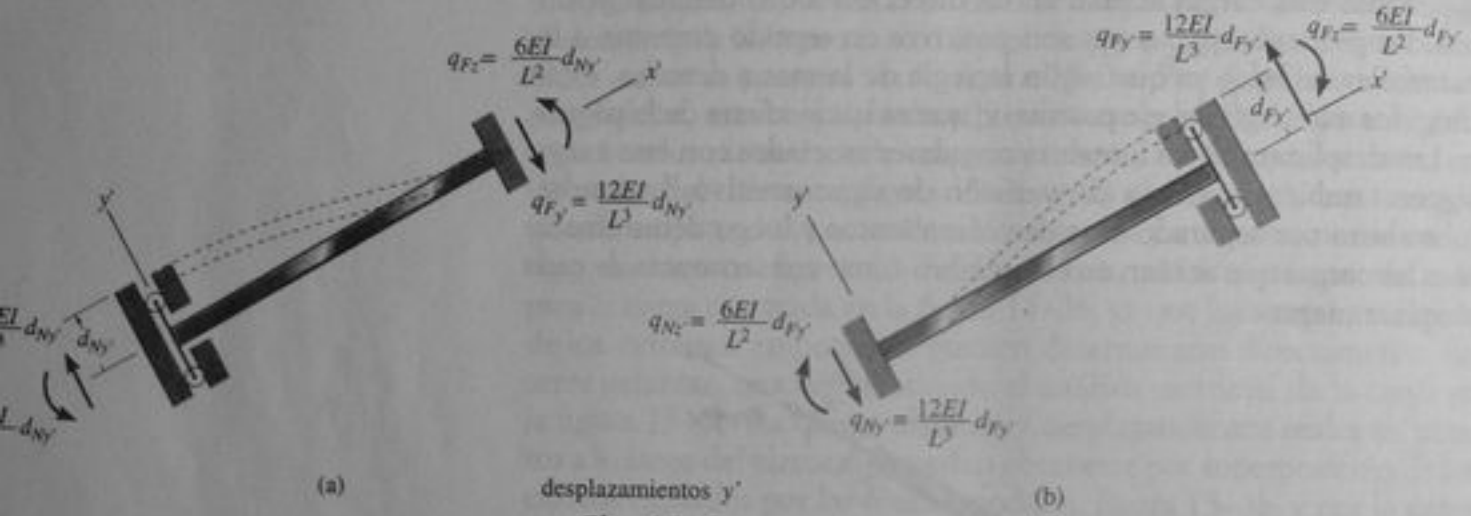


Fig. 15–6

Rotaciones z'

Si se impone una rotación positiva $d_{Nz'}$, mientras que todos los otros posibles desplazamientos están impedidos, las fuerzas cortantes y momentos requeridos para esta deformación son como se muestra en la figura 15–7*a*. En particular, el momento que resulta se desarrolló en la sección 10.1 como las ecuaciones 10–1 y 10–2. Igualmente, cuando se impone $d_{Fz'}$, las cargas resultantes son como se muestra en la figura 15–7*b*.

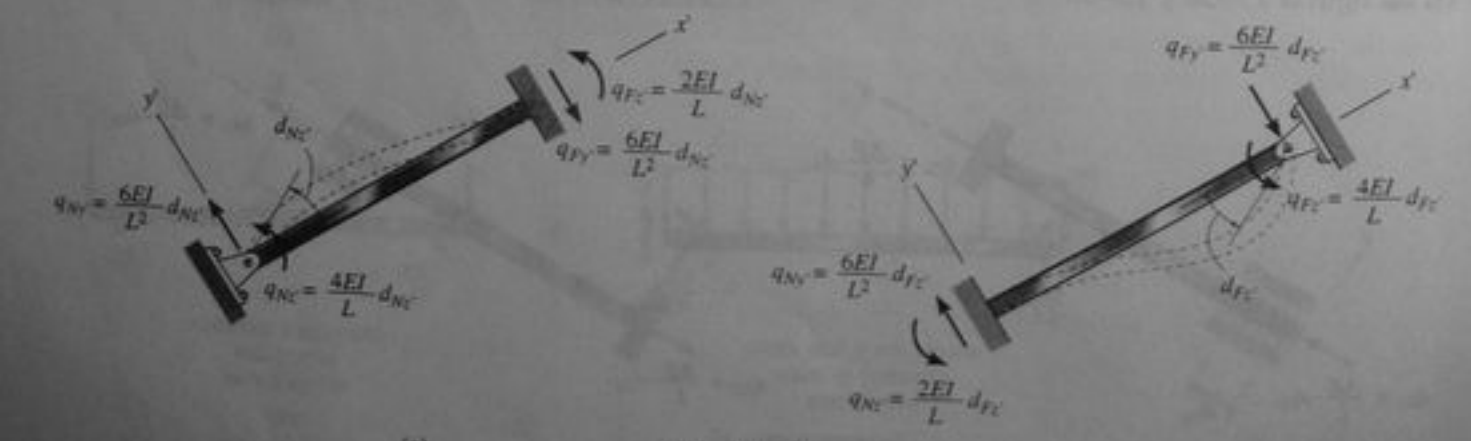


Fig. 15–7

Por superposición, si se suman los resultados anteriores en las figuras 15–5 a la 15–7, las seis relaciones carga-desplazamiento para el miembro pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{matrix} & Nx' & Ny' & Nz' & Fx' & Fy' & Fz' \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} \tag{15–1}$$

Estas ecuaciones pueden también escribirse en forma abreviada como

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{d} \tag{15–2}$$

A la matriz simétrica $\mathbf{k}'$ en la ecuación 15–1 se le llama *matriz de rigidez de miembro*. Los 36 coeficientes de influencia k_{ij} que contiene, toman en cuenta las fuerzas axiales, cortantes y momento flexionante por desplazamientos del miembro. Físicamente, estos coeficientes representan la carga sobre el miembro cuando éste sufre un desplazamiento unitario específico. Por ejemplo, si $d_{Nx'} = 1$, figura 15–5*a*, *mientras todos los otros desplazamientos son cero*, el miembro estará sometido sólo a las fuerzas $q_{Nx'} = AE/L$ y $q_{Fx'} = -AE/L$, como se indica en la primera columna de la matriz $\mathbf{k}'$. De manera similar, las otras columnas de la matriz $\mathbf{k}'$ son las cargas en el miembro por desplazamientos unitarios identificadas por la codificación de los grados de libertad indicada arriba de las columnas. En el desarrollo, se han satisfecho tanto el equilibrio como la compatibilidad de los desplazamientos.

15.3 Matrices de transformación de desplazamientos y fuerzas

Como en el caso de las armaduras, debemos transformar las cargas internas $\mathbf{q}$ de miembro así como las deformaciones $\mathbf{d}$ de coordenadas locales x', y', z' a coordenadas globales x, y, z. Por esto se requieren matrices de transformación.

Matriz de transformación de desplazamientos

Considere el miembro de marco mostrado en la figura 15–8*a*. Se ve aquí que un desplazamiento de coordenada global D_{Nx} genera desplazamientos de coordenadas locales

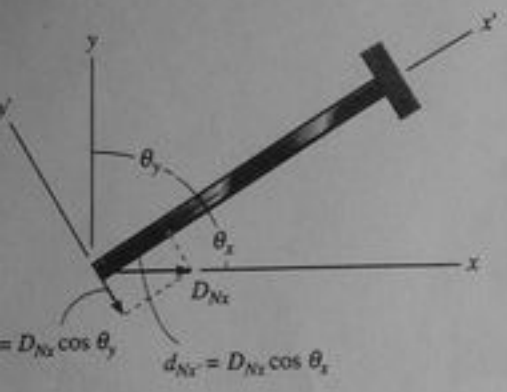
$$d_{Nx'} = D_{Nx}\cos\theta_x \qquad d_{Ny'} = -D_{Nx}\cos\theta_y$$

Igualmente, un desplazamiento de coordenada global D_{Ny}, figura 15–8*b*, genera desplazamientos de coordenadas locales

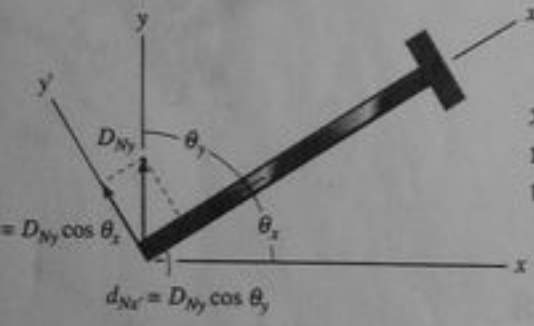
$$d_{Nx'} = D_{Ny}\cos\theta_y \qquad d_{Ny'} = D_{Ny}\cos\theta_x$$

Finalmente, como los ejes z' y z coinciden, esto es, están dirigidos hacia fuera de la página, una rotación de D_{Nz} alrededor de z genera una correspondiente rotación $d_{Nz'}$ alrededor de z'. Así entonces,

$$d_{Nz'} = D_{Nz}$$



(a)



(b)

Fig. 15–8

De manera similar, si desplazamientos globales D_{Fx} en la dirección x, D_{Fy} en la dirección y y una rotación D_{Fz} se imponen sobre el extremo alejado del miembro, las ecuaciones de transformación resultantes son, respectivamente,

$$\begin{aligned} d_{Fx'} &= D_{Fx}\cos\theta_x & d_{Fy'} &= -D_{Fx}\cos\theta_y \\ d_{Fx'} &= D_{Fy}\cos\theta_y & d_{Fy'} &= D_{Fy}\cos\theta_x \\ d_{Fz'} &= D_{Fz} \end{aligned}$$

Si $\lambda_x = \cos\theta_x$ y $\lambda_y = \cos\theta_y$ representan los cosenos directores del miembro, podemos escribir las ecuaciones anteriores en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix} \tag{15–3}$$

o

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D} \tag{15–4}$$

Por inspección, $\mathbf{T}$ transforma los seis desplazamientos globales $\mathbf{D}$ en x, y, z en los seis desplazamientos locales $\mathbf{d}$ en x', y', z'. Por esto, a $\mathbf{T}$ se le llama *matriz de transformación de los desplazamientos*.

Matriz de transformación de fuerzas

Si ahora aplicamos cada componente de carga al extremo cercano del miembro, podemos determinar como transformar las componentes de carga, de coordenadas locales a globales. Si aplicamos $q_{Nx'}$, figura 15–9*a*, vemos que

$$Q_{Nx} = q_{Nx'} \cos \theta_x \qquad Q_{Ny} = q_{Nx'} \cos \theta_y$$

Si aplicamos $q_{Ny'}$, figura 15–9*b*, sus componentes son entonces

$$Q_{Nx} = -q_{Ny'} \cos \theta_y \qquad Q_{Ny} = q_{Ny'} \cos \theta_x$$

Finalmente, como $q_{Nz'}$ es colineal con Q_{Nz}, tenemos

$$Q_{Nz} = q_{Nz'}$$

De manera similar, las cargas extremas de $q_{Fx'}$, $q_{Fy'}$, $q_{Fz'}$ darán las siguientes componentes respectivas:

$$\begin{aligned} Q_{Fx} &= q_{Fx'} \cos \theta_x & Q_{Fy} &= q_{Fx'} \cos \theta_y \\ Q_{Fx} &= -q_{Fy'} \cos \theta_y & Q_{Fy} &= q_{Fy'} \cos \theta_x \\ Q_{Fz} &= q_{Fz'} \end{aligned}$$

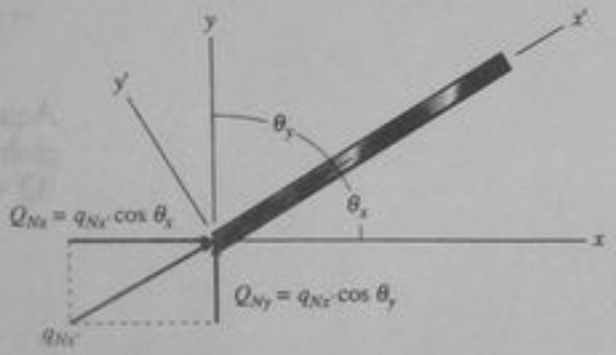
Estas ecuaciones, agrupadas en forma matricial con $\lambda_x = \cos \theta_x$, $\lambda_y = \cos \theta_y$, dan

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & -\lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} \tag{15–5}$$

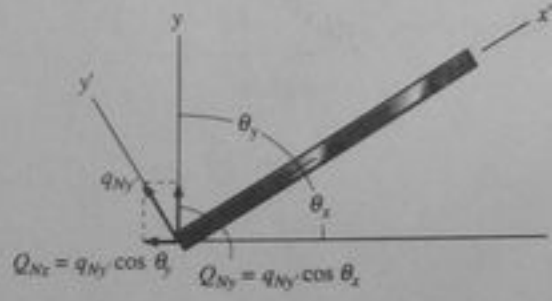
o

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q} \tag{15–6}$$

Aquí, como se estableció antes, $\mathbf{T}^T$ transforma las seis cargas de miembro expresadas en coordenadas locales a las seis cargas expresadas en coordenadas globales.



(a)



(b)

Fig. 15–9

15.4 Matriz de rigidez global de un miembro de un marco

Los resultados de la sección anterior se combinarán ahora para determinar la matriz de rigidez de un miembro que relacione las cargas globales Q con los desplazamientos globales D. Para ello, sustituimos la **d** de la ecuación 15–2 ($\mathbf{q} = \mathbf{k'd}$) por la ecuación 15–4 ($\mathbf{d} = \mathbf{TD}$), de modo que tenemos

$$\boxed{\mathbf{q} = \mathbf{k'TD}} \tag{15–7}$$

Aquí, las fuerzas **q** de miembro se relacionan con los desplazamientos globales D. Si se sustituye este resultado por la q de la ecuación 15–6, ($\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}$), se obtiene el resultado final

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{k'TD} \tag{15–8}$$

o

$$\mathbf{Q} = \mathbf{kD}$$

donde

$$\boxed{\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k'T}} \tag{15–9}$$

Aquí, **k** representa la matriz de rigidez global del miembro. Podemos obtener su valor en forma generalizada por medio de las ecuaciones 15–5, 15–1 y 15–3 y efectuando las operaciones matriciales. Esto da el resultado final,

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \begin{matrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \tag{15–10}$$

Observe que esta matriz de 6×6 es *simétrica*. Además, la posición de cada elemento está asociada con la codificación en el extremo cercano, N_x, N_y, N_z seguida de la del extremo alejado F_x, F_y, F_z, que se muestran en la parte superior de las columnas y a lo largo de los renglones. Igual que la matriz $\mathbf{k}'$, cada columna de la matriz $\mathbf{k}$ representa las cargas en coordenadas globales sobre los nodos del miembro, necesarias para resistir un desplazamiento unitario en la dirección definida por el número codificado de la columna. Por ejemplo, la primera columna de $\mathbf{k}$ representa las cargas en coordenadas globales en los extremos cercano y alejado causadas por un *desplazamiento unitario* en el extremo cercano en la dirección x, esto es, N_x.

15.5 Matriz de rigidez global de una viga

Se ha establecido previamente que si los soportes no sufren desplazamientos transversales, es decir, asentamientos, o si la viga no tiene un volado de patín, entonces, en general, cada uno de los *soportes* de la viga tendrá sólo un grado de libertad, esto es, un desplazamiento angular. Siendo éste el caso, la matriz de rigidez de una viga puede determinarse cancelando los renglones y columnas de la matriz del marco (ecuación 15–10) asociados a los desplazamientos a lo largo de N_x, N_y y F_x, F_y, ya que los soportes de la viga no tienen ningún grado de libertad en esas direcciones. Además, AE/L no es pertinente, ya que no se consideran desplazamientos ni las cargas axiales. En consecuencia, la matriz de rigidez de una viga queda representada por cuatro elementos, que son

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \begin{matrix} N_z & F_z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} N_z \\ F_z \end{matrix} \end{array} \tag{15–11}$$

Debe observarse que esta matriz es *equivalente* a la matriz de rigidez del miembro en coordenadas locales, $\mathbf{k}'$, ya que las rotaciones no se transforman, esto es, $\mathbf{k} = \mathbf{k}'\mathbf{T}$.

15.6 Aplicación del método de la rigidez al análisis de vigas y marcos

Ahora que se ha desarrollado **k**, podemos formular un procedimiento para aplicar el método de la rigidez a problemas de vigas y marcos.

Matriz de rigidez de la estructura

Una vez que se han encontrado todas las matrices de rigidez de los miembros, debemos ensamblarlas en la matriz de rigidez de la estructura **K**. Este procedimiento depende primero en conocer la *posición* de cada elemento en la matriz de rigidez de miembro. A este respecto, recuerde que los renglones y columnas de cada matriz **k** (ecuación 15–10) se identifican por los tres números de código en el extremo cercano del miembro (N_x, N_y, N_z) seguidos por los del extremo alejado (F_x, F_y, F_z). Por lo tanto, al ensamblar las matrices, cada elemento debe colocarse en la misma posición de la matriz **K**. De esta manera, **K** tendrá un orden que será igual al número de código mayor asignado a la estructura ya que representa el número total de grados de libertad en la estructura. Cuando varios miembros se conectan a un nodo, ellos tendrán la misma posición en la matriz **K** y por lo tanto esos coeficientes de influencia de rigidez de miembro deben sumarse algebraicamente entre sí para determinar el coeficiente de influencia de rigidez nodal para la estructura. Esto es necesario ya que cada coeficiente representa la resistencia nodal de la estructura en una dirección particular (x, y o z) cuando ocurre un desplazamiento unitario (x, y o z) en el mismo u otro nodo. Por ejemplo, $\mathbf{K}_{26}$ representa la carga en la dirección y en la posición del número de código "2" cuando ocurre un desplazamiento unitario en la dirección y en la posición del número de código "6".

Procedimiento de análisis

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos, las reacciones en los soportes y las cargas internas para los miembros o elementos finitos de una viga o marco estáticamente determinado o indeterminado.

Notación Divida la estructura en elementos finitos e identifique arbitrariamente cada elemento y sus nodos. Use un número escrito dentro de un círculo para un nodo y un número encerrado en un cuadrado para un miembro. Por lo general, un elemento se extiende entre puntos de soporte, puntos de cargas concentradas, esquinas o nudos, o puntos donde las cargas internas o desplazamientos deben determinarse. Especifique los extremos cercano y alejado de cada elemento con una flecha trazada a lo largo del elemento y con la punta dirigida hacia el extremo alejado.

Establezca el sistema de coordenadas globales x, y, z, con el origen en un punto nodal de uno de los elementos y los ejes localizados de manera que todos los nodos tengan coordenadas positivas. En cada punto nodal de un marco, especifique numéricamente las tres componentes codificadas x, y, z. Si se considera una viga continua sin volados de patín o desplazamientos transversales de sus soportes, y si los nodos están en los soportes, use un número de código sólo para identificar el desplazamiento angular en cada soporte. En todos los casos use los *números más bajos* para identificar los grados de libertad no restringidos y los números mayores para identificar los grados de libertad restringidos. De acuerdo con el problema, establezca los desplazamientos conocidos $\mathbf{D}_k$ y las cargas externas conocidas $\mathbf{Q}_k$.

Matriz de rigidez de la estructura Aplique la ecuación 15–10 para determinar la matriz de rigidez de cada elemento expresada en coordenadas globales. En particular, los cosenos directores λ_x y λ_y se determinan a partir de las coordenadas x, y de los extremos del elemento, ecuaciones 14–5 y 14–6.

Después de determinada cada matriz de rigidez de miembro e identificados los renglones y columnas con los números de código apropiados como se explicó antes, ensamble las matrices para determinar la matriz de rigidez de la estructura $\mathbf{K}$. Como comprobación, las matrices de miembro y de la estructura deben ser *simétricas*.

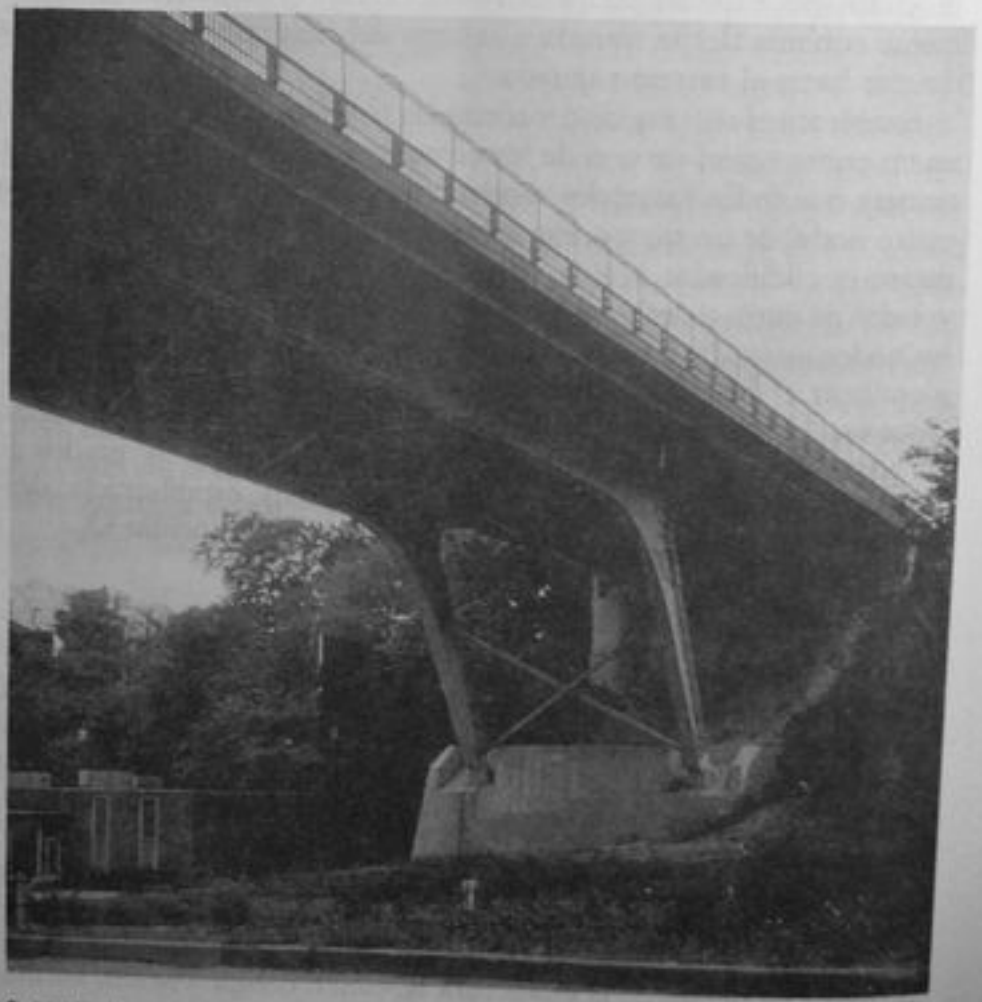
Desplazamientos y cargas Subdivida la matriz de rigidez según la ecuación 14–17. El desarrollo conduce, entonces, a

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$
$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$$

Estas ecuaciones expresan el equilibrio por fuerzas y momentos de cada nodo.

Los desplazamientos desconocidos $\mathbf{D}_u$ se determinan con la primera de esas ecuaciones. Por medio de esos valores, las reacciones $\mathbf{Q}_k$ en los soportes se calculan con la segunda ecuación. Finalmente, las cargas internas **q** en los extremos de los miembros pueden calcularse combinando las ecuaciones 15–2 y 15–4, lo que da

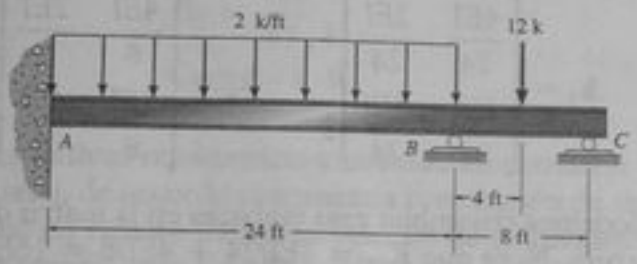
$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$



Soporte de puente estáticamente indeterminado.

Ejemplo 15–1

Determine el momento desarrollado en el soporte *A* de la viga mostrada en la figura 15–10*a*. *EI* es constante.



(a)

Fig. 15–10

Solución

Notación. La viga tiene dos elementos y tres nodos, que están identificados en la figura 15–10*b*. Los números de código del 1 al 3 se han asignado, de modo que *los números menores, 1 y 2, identifican los grados de libertad no restringidos*.

El análisis matricial requiere que las cargas externas se apliquen en los nodos, por lo que las cargas concentradas y distribuidas se reemplazan por sus momentos de empotramiento equivalentes, mismos que se determinan a partir de la tabla de las páginas suplementarias al final del libro. (Véase el ejemplo 10–2.) Mediante la superposición, los resultados del análisis matricial para la carga de la figura 15–10*b* se modificarán luego, según las cargas mostradas en la figura 15–10c. De acuerdo con la figura 15–10*b*, las matrices de la carga y el desplazamiento conocidos son

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 12 \\ 84 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

viga por analizarse con el método de la rigidez

(b)

(continúa)

Ejemplo 15–1 (continuación)

Matriz de rigidez de la estructura. Cada una de las matrices de rigidez de los dos miembros se determina con la ecuación 15–11. Tenemos

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} \overset{3}{\frac{4EI}{24}} & \overset{2}{\frac{2EI}{24}} \\ \frac{2EI}{24} & \frac{4EI}{24} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \qquad \mathbf{k}_2 = \begin{matrix} \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} \overset{2}{\frac{4EI}{8}} & \overset{1}{\frac{2EI}{8}} \\ \frac{2EI}{8} & \frac{4EI}{8} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Ahora podemos ensamblar esas matrices en la matriz de rigidez de la estructura. Note que $K_{22} = 4EI/24 + 4EI/8 = 16EI/24$, por lo que

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} \overset{1}{\frac{4EI}{8}} & \overset{2}{\frac{2EI}{8}} & \overset{3}{0} \\ \frac{2EI}{8} & \frac{16EI}{24} & \frac{2EI}{24} \\ 0 & \frac{2EI}{24} & \frac{4EI}{24} \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Se requiere que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 84 \\ \hline Q_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} \frac{4EI}{8} & \frac{2EI}{8} & 0 \\ \frac{2EI}{8} & \frac{16EI}{24} & \frac{2EI}{24} \\ \hdashline 0 & \frac{2EI}{24} & \frac{4EI}{24} \end{array}\right]\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene

$$12 = \frac{4EI}{8}D_1 + \frac{2EI}{8}D_2$$

$$84 = \frac{2EI}{8}D_1 + \frac{16EI}{24}D_2$$

$$Q_3 = \frac{2EI}{24}D_2$$

Despejando

$$D_1 = -\frac{48}{EI}$$
$$D_2 = \frac{144}{EI}$$
$$Q_3 = 12\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

Las respuestas positivas representan una rotación contraria a las manecillas del reloj, de acuerdo con nuestra convención de signos. El momento real en A debe incluir la *reacción* de empotramiento de $+96\ \text{k}\cdot\text{ft}$ mostrada en la figura 15–10c, junto con el resultado calculado para Q_3. Así entonces,

$$M_{AB} = 12\ \text{k}\cdot\text{ft} + 96\ \text{k}\cdot\text{ft} = 108\ \text{k}\cdot\text{ft}\ \curvearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

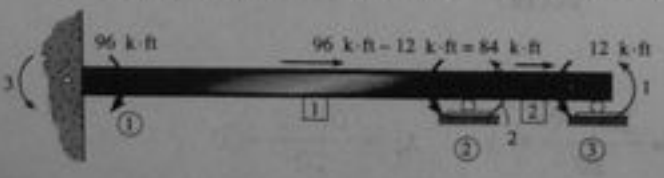
Este resultado es comparable con el determinado en el ejemplo 10–2.

Aunque no se requiere aquí, podemos determinar el momento interno en B considerando, por ejemplo, el miembro 1, nodo 2, figura 15–10b. Como $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'\mathbf{T}$, la ecuación 15–7 es entonces,

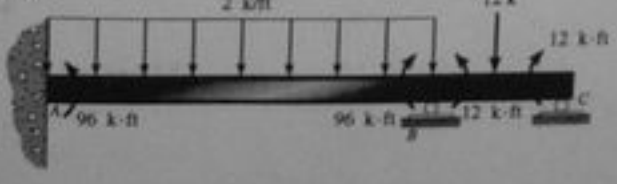
$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1\mathbf{D}$$
$$\begin{bmatrix} q_3 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{24} & \frac{2EI}{24} \\ \frac{2EI}{24} & \frac{4EI}{24} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{144}{EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$
$$q_3 = 12\ \text{k}\cdot\text{ft}$$
$$q_2 = 24\ \text{k}\cdot\text{ft}$$

de manera que

$$M_{BA} = 24\ \text{k}\cdot\text{ft} - 96\ \text{k}\cdot\text{ft} = -72\ \text{k}\cdot\text{ft} = 72\ \text{k}\cdot\text{ft}\ \curvearrowright$$



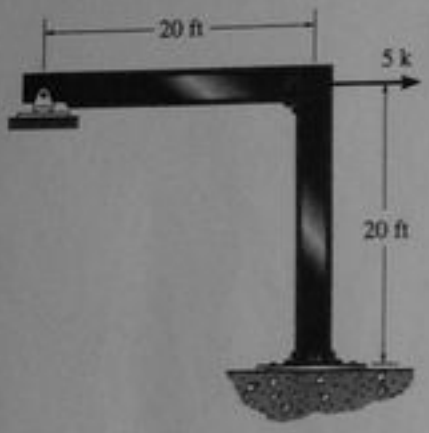
viga por analizarse con el método de la rigidez
(b)



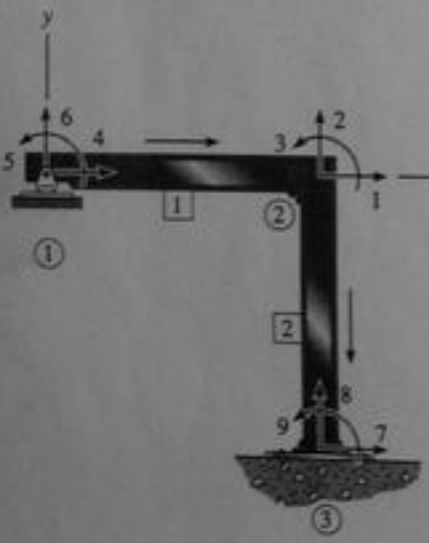
viga sometida a la carga real y a las reacciones de empotramiento
(c)

Ejemplo 15–2

Determine las cargas en los nudos del marco de dos miembros que se muestra en la figura 15–11*a*. Considere $I = 500\ \text{in}^4$, $A = 10\ \text{in}^2$ y $E = 29(10^3)$ ksi para ambos miembros.



(a)



(b)

Fig. 15–11

Solución

Notación. Por inspección, el marco tiene dos elementos y tres nodos que se identifican como se muestra en la figura 15–11*b*. El origen del sistema coordenado global se ha fijado en ①. Los números de código en los nodos se especifican con los *grados de libertad no restringidos numerados primero*. De las restricciones en ① y ③ y de las cargas aplicadas, tenemos

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Los siguientes términos son comunes a ambas matrices de rigidez:

$$\frac{AE}{L} = \frac{10[29(10^3)]}{20(12)} = 1208.3\ \text{k/in.}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)(500)]}{[20(12)]^3} = 12.6\ \text{k/in.}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)(500)]}{[20(12)]^2} = 1510.4\ \text{k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)(500)]}{20(12)} = 241.7(10^3)\ \text{k} \cdot \text{in.}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)(500)]}{20(12)} = 120.83(10^3)\ \text{k} \cdot \text{in.}$$

Miembro 1:

$$\lambda_x = \frac{20 - 0}{20} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0 - 0}{20} = 0$$

Se sustituyen los datos en la ecuación 15–10, y tenemos

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & 12.6 & 1510.4 & 0 & -12.6 & 1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 241.7(10^3) & 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & -12.6 & -1510.4 & 0 & 12.6 & -1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & -1510.4 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

Las columnas y renglones de esta matriz de 6×6 están identificados por los tres números de código x, y, z, primero en el extremo cercano y luego en el extremo alejado, esto es, 4, 6, 5, 1, 2, 3, respectivamente, figura 15–11*b*. Esto se hace así para el posterior ensamble de los elementos.

Miembro 2:

$$\lambda_x = \frac{20 - 20}{20} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{-20 - 0}{20} = -1$$

Sustituyendo los datos en la ecuación 15–10 se obtiene

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12.6 & 0 & 1510.4 & -12.6 & 0 & 1510.4 \\ 0 & 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 241.7(10^3) & -1510.4 & 0 & 120.83(10^3) \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 12.6 & 0 & -1510.4 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & -1510.4 & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array}$$

Como siempre, la identificación de columnas y renglones se hace por medio de los números de código en la secuencia x, y, z para los extremos cercano y lejano, respectivamente, esto es, 1, 2, 3 y luego 7, 8, 9, figura 15–11*b*.

(continúa)

Ejemplo 15–2 (continuación)

La matriz de rigidez de la estructura se determina ensamblando $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$. El resultado, mostrado subdividido, ya que $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$, es

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1220.9 & 0 & 1510.4 & -1208.3 & 0 & 0 & -12.6 & 0 & 1510.4 \\ 0 & 1220.9 & -1510.4 & 0 & -1510.4 & -12.6 & 0 & -1208.3 & 0 \\ 1510.4 & -1510.4 & 483.4(10^3) & 0 & 120.83(10^3) & 1510.4 & -1510.4 & 0 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & 241.7(10^3) & 1510.4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -12.6 & 1510.4 & 0 & 1510.4 & 12.6 & 0 & 0 & 0 \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 0 & 0 & 0 & 12.6 & 0 & -1510.4 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & 0 & 0 & 0 & -1510.4 & 0 & 241.7(10^3) \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Desplazamientos y cargas. Si desarrollamos, para determinar los desplazamientos, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1220.9 & 0 & 1510.4 & -1208.3 & 0 \\ 0 & 1220.9 & -1510.4 & 0 & -1510.4 \\ 1510.4 & -1510.4 & 483.4(10^3) & 0 & 120.8(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Despejamos y resulta

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.696 \text{ in.} \\ -1.55(10^{-3}) \text{ in.} \\ -2.488(10^{-3}) \text{ rad} \\ 0.696 \text{ in.} \\ 1.234(10^{-3}) \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Con estos resultados, se determinan las reacciones a partir de la ecuación (1) como sigue:

$$\begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12.6 & 1510.4 & 0 & 1510.4 \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 0 & 0 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.696 \\ -1.55(10^{-3}) \\ -2.488(10^{-3}) \\ 0.696 \\ 1.234(10^{-3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.87 \text{ k} \\ -5.00 \text{ k} \\ 1.87 \text{ k} \\ 750 \text{ k} \cdot \text{in.} \end{bmatrix}$$

Resp.

Las cargas internas en el nodo ② pueden determinarse aplicando la ecuación 15–7 al miembro 1. Aquí, $\mathbf{k}_1'$ está definida por la ecuación 15–1 y $\mathbf{T}_1$ por la ecuación 15–3. Así,

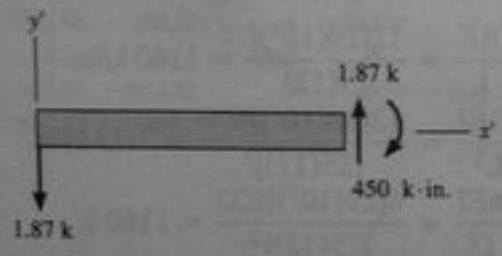
$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{T}_1\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & 12.6 & 1510.4 & 0 & -12.6 & 1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 241.7(10^3) & 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & -12.6 & -1510.4 & 0 & 12.6 & -1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & -1510.4 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.696 \\ 0 \\ 1.234(10^{-3}) \\ 0.696 \\ -1.55(10^{-3}) \\ -2.488(10^{-3}) \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Note el arreglo apropiado de los elementos en las matrices como se indica por los números de código a lo largo de las columnas y renglones. Al despejar, se obtiene

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.87\,\text{k} \\ 0 \\ 0 \\ 1.87\,\text{k} \\ -450\,\text{k}\cdot\text{in.} \end{bmatrix}$$

Resp.

Los resultados anteriores se muestran en la figura 15–11c. Las direcciones de esos vectores están de acuerdo con las direcciones positivas definidas en la figura 15–3. Además, el origen de los ejes locales x', y', z' está en el extremo cercano del miembro. El diagrama de cuerpo libre del miembro 2 se muestra en la figura 15–11*d*.



(c)

(d)

Ejemplo 15–3

Determine las cargas en los extremos de cada miembro del marco que se muestra en la figura 15–12*a*. Considere $I = 600\ \text{in}^4$, $A = 12\ \text{in}^2$ y $E = 29(10^3)$ ksi para cada miembro.

Solución

Notación. Para efectuar el análisis matricial, la carga distribuida que actúa sobre el miembro horizontal se reemplazará por momentos de extremo y fuerzas cortantes equivalentes calculadas mediante la estática y con ayuda de la tabla en las páginas suplementarias al final del libro. Luego, por superposición, los resultados obtenidos para el marco en la figura 15–12*b* se modificarán para este miembro por medio de las cargas mostradas en la figura 15–12*c*.

Como se muestra en la figura 15–12*b*, los nodos y miembros se numeran y el origen del sistema de coordenadas globales se sitúa en el nodo ①. Como siempre, los números de código se especifican asignándolos primero a los grados de libertad no restringidos. Así,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

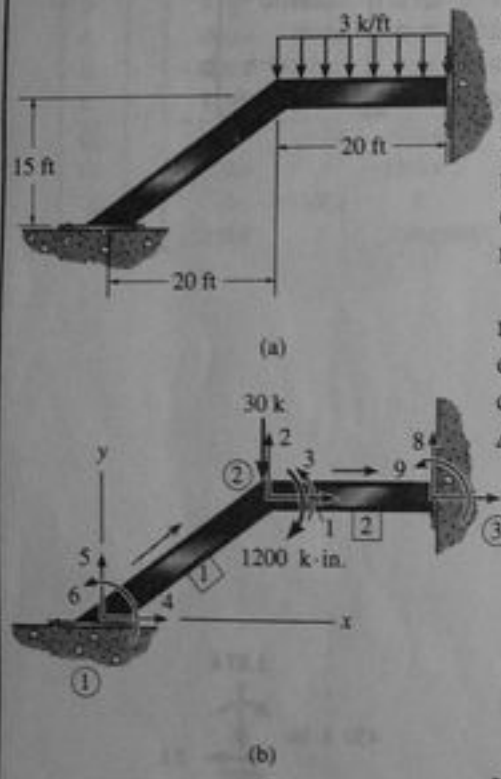


Fig. 15–12

Matriz de rigidez de la estructura

Miembro 1:

$$\frac{AE}{L} = \frac{12[29(10^3)]}{25(12)} = 1160\ \text{k/in.}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)]600}{[25(12)]^3} = 7.73\ \text{k/in.}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)]600}{[25(12)]^2} = 1160\ \text{k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)]600}{25(12)} = 232(10^3)\ \text{k}\cdot\text{in.}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)]600}{25(12)} = 116(10^3)\ \text{k}\cdot\text{in.}$$

$$\lambda_x = \frac{20-0}{25} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{15-0}{25} = 0.6$$

Aplicando la ecuación 15–10, tenemos

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 745.18 & 553.09 & -696 & -745.18 & -553.09 & -696 \\ 553.09 & 422.55 & 928 & -553.09 & -422.55 & 928 \\ -696 & 928 & 232(10^3) & 696 & -928 & 116(10^3) \\ -745.18 & -553.09 & 696 & 745.18 & 553.09 & 696 \\ -553.09 & -422.55 & -928 & 553.09 & 422.55 & -928 \\ -696 & 928 & 116(10^3) & 696 & -928 & 232(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

Miembro 2:

$$\frac{AE}{L} = \frac{12[29(10^3)]}{20(12)} = 1450 \text{ k/in.}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)]600}{[20(12)]^3} = 15.10 \text{ k/in.}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)]600}{[20(12)]^2} = 1812.50 \text{ k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)]600}{20(12)} = 2.90(10^5) \text{ k} \cdot \text{in.}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)]600}{20(12)} = 1.45(10^5) \text{ k} \cdot \text{in.}$$

$$\lambda_x = \frac{40 - 20}{20} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{15 - 15}{20} = 0$$

Así, la ecuación 15–10 queda expresada como

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1450 & 0 & 0 & -1450 & 0 & 0 \\ 0 & 15.10 & 1812.50 & 0 & -15.10 & 1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 290(10^3) & 0 & -1812.50 & 145(10^3) \\ -1450 & 0 & 0 & 1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 & 0 & 15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) & 0 & -1812.50 & 290(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array}$$

(continúa)

Ejemplo 15–3 (continuación)

La matriz de rigidez de la estructura, escrita en términos de Q = KD, es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \\ \hline Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2195.18 & 553.09 & 696 & -745.18 & -553.09 & 696 & -1450 & 0 & 0 \\ 553.09 & 437.65 & 884.5 & -553.09 & -422.55 & -928 & 0 & -15.10 & 1812.50 \\ 696 & 884.5 & 522(10^3) & -696 & 928 & 116(10^3) & 0 & -1812.50 & 145(10^3) \\ \hline -745.18 & -553.09 & -696 & 745.18 & 553.09 & -696 & 0 & 0 & 0 \\ -553.09 & -422.55 & 928 & 553.09 & 422.55 & 928 & 0 & 0 & 0 \\ 696 & -928 & 116(10^3) & -696 & 928 & 232(10^3) & 0 & 0 & 0 \\ -1450 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1812.50 & 290(10^3) \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Desplazamientos y cargas. Si desarrollamos, para determinar los desplazamientos, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2195.18 & 553.09 & 696 \\ 553.09 & 437.65 & 884.5 \\ 696 & 884.5 & 522(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Despejando, resulta

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0247 \text{ in.} \\ -0.0954 \text{ in.} \\ -0.00217 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Mediante estos resultados, las reacciones en los soportes se determinan con la ecuación (1) como sigue:

$$\begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -745.18 & -553.09 & -696 \\ -553.09 & -422.55 & 928 \\ 696 & -928 & 116(10^3) \\ -1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0247 \\ -0.0954 \\ -0.00217 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.87 \text{ k} \\ 24.64 \text{ k} \\ -146.00 \text{ k} \cdot \text{in.} \\ -35.85 \text{ k} \\ 5.37 \text{ k} \\ -487.60 \text{ k} \cdot \text{in.} \end{bmatrix}$$

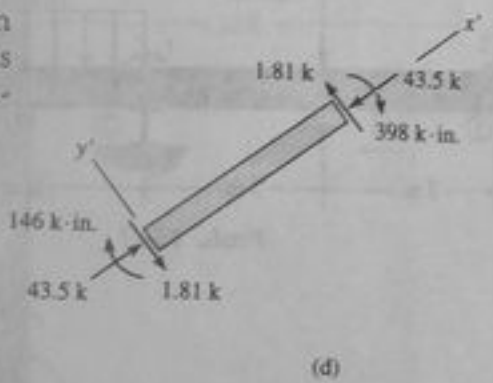
Las cargas internas pueden determinarse con la ecuación 15–7 aplicada a los miembros 1 y 2. Por ejemplo, para el miembro 1, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1'\mathbf{T}\mathbf{D}$ o

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1160 & 0 & 0 & -1160 & 0 & 0 \\ 0 & 7.73 & 1160 & 0 & -7.73 & 1160 \\ 0 & 1160 & 232(10^3) & 0 & -1160 & 116(10^3) \\ -1160 & 0 & 0 & 1160 & 0 & 0 \\ 0 & -7.73 & -1160 & 0 & 7.73 & -1160 \\ 0 & 1160 & 116(10^3) & 0 & -1160 & 232(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0.0247 & 1 \\ -0.0954 & 2 \\ -0.00217 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que $\mathbf{k}_1'$ se determina con la ecuación 15–1 y $\mathbf{T}_1$ con la ecuación 15–3. Los números de código indican los renglones y columnas para los extremos cercano y alejado del miembro, respectivamente, es decir, 4, 5, 6, y luego 1, 2, 3, figura 15–12*b*. Así,

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43.5\ \text{k} \\ -1.81\ \text{k} \\ -146\ \text{k}\cdot\text{in.} \\ -43.5\ \text{k} \\ 1.81\ \text{k} \\ -398\ \text{k}\cdot\text{in.} \end{bmatrix}$$

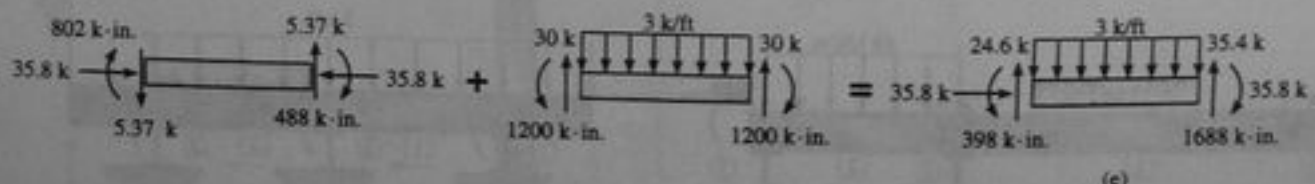
Resp.



(d)

Estos resultados se muestran en la figura 15–12*d*. Note que la convención de signos que se siguió se definió en la figura 15–4, donde el origen de las coordenadas locales se colocó en el extremo cercano del miembro, es decir, en el nodo ①.

Un análisis similar se lleva a cabo para el miembro 2. Los resultados se muestran a la izquierda en la figura 15–12*e*. A éstos debemos superponer las cargas en la figura 15–12*c*, de manera que los resultados finales para el miembro 2 sean los mostrados a la derecha.



(e)

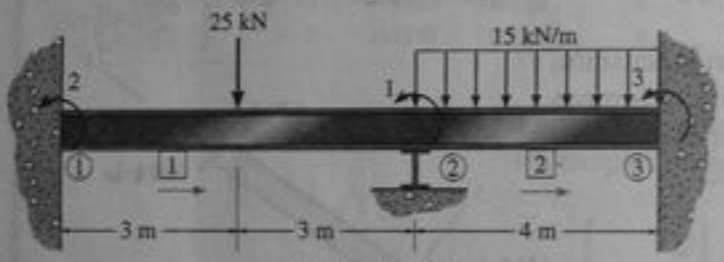
BIBLIOGRAFÍA

Tezcan, S., "Computer Analysis of Plane and Space Structures," *Structural Division* ASCE, 143–173, April, 1966.

Wilson, E., "The Use of Minicomputers in Structural Analysis," *Computers and Structures*, 2, 695–698, 1980.

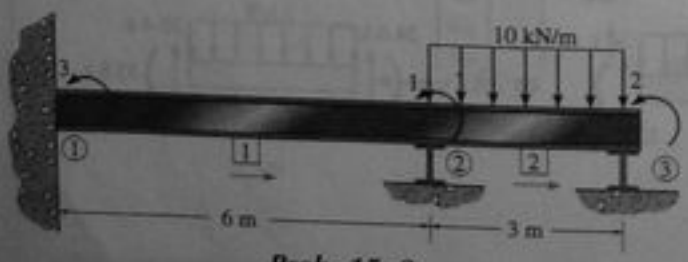
PROBLEMAS

15–1. Determine los momentos en los soportes ① y ③. *EI* es constante. Suponga que el nudo ② es un rodillo.



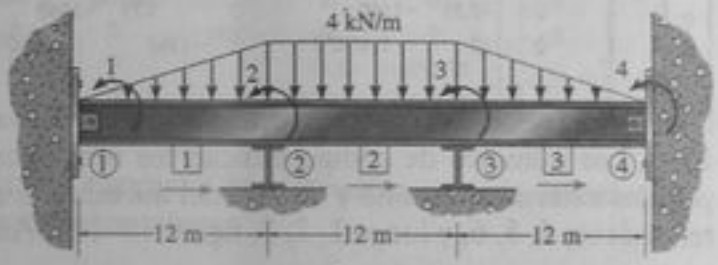
Prob. 15–1

15–2. Determine el momento interno en la viga en ① y ②. *EI* es constante. Suponga que ② y ③ son rodillos.



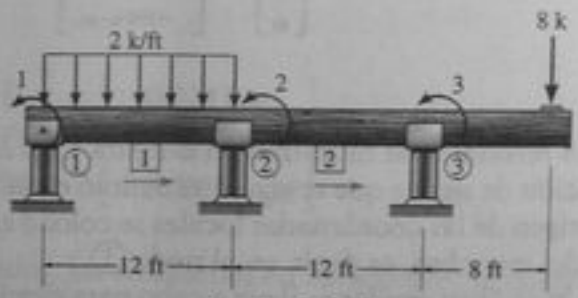
Prob. 15–2

15–3. Determine los momentos en ②, ③. *EI* es constante. Suponga que ①, ② y ③ son rodillos y que ④ está articulado.



Prob. 15–3

***15–4.** Determine las reacciones en los soportes ①, ② y ③. Suponga que ① está articulado y que ② y ③ son rodillos. *EI* es constante.



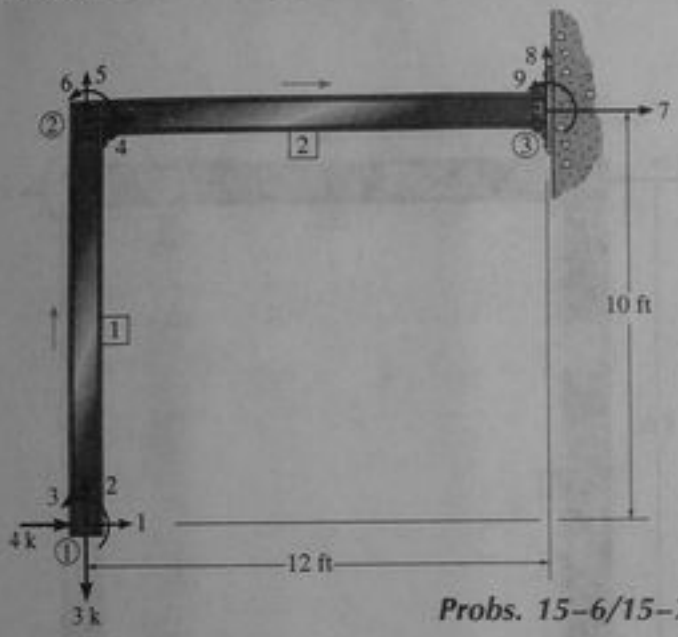
Prob. 15–4

15–5. Determine las reacciones en los soportes ①, ② y ③. Suponga que ① está articulado y que ② y ③ son rodillos. *EI* es constante.

Prob. 15–5

15–6. Determine la matriz **K** de rigidez para el marco. Considere $E = 29(10^3)$ ksi. $I = 650$ in^4, $A = 20$ in^2 para cada miembro. Los nudos en ② y ③ están rígidamente conectados.

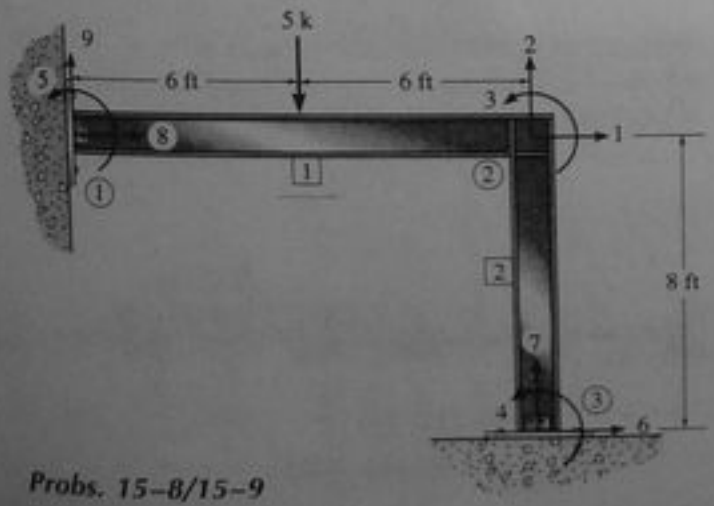
15–7. Determine las componentes del desplazamiento en el nudo ① en el problema 15–6.



Probs. 15–6/15–7

*15–8. Determine la matriz **K** de rigidez del marco. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 600$ in^4, $A = 10$ in^2 para cada miembro. Suponga que los nudos ①, y ③ están articulados; el nudo ② es rígido.

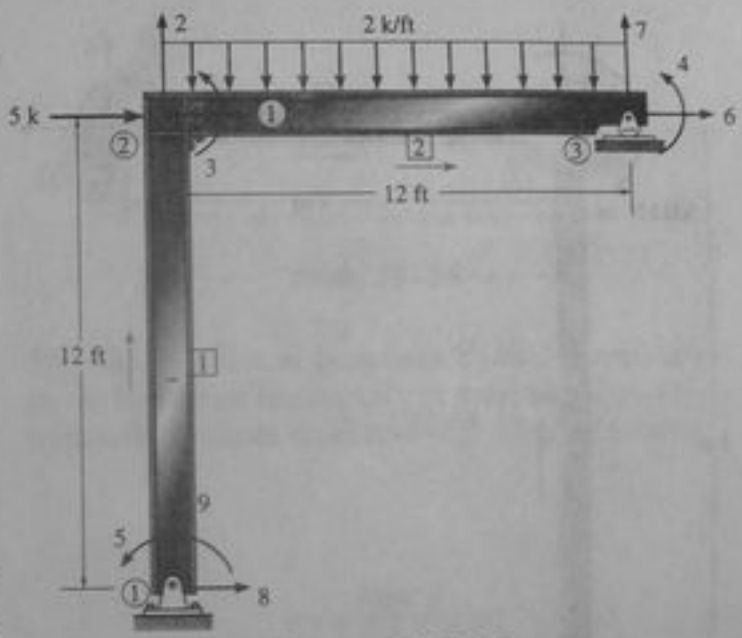
15–9. Determine la rotación en ① y ③ y las reacciones en los soportes en el problema 15–8.



Probs. 15–8/15–9

15–10. Determine la matriz **k** de rigidez de cada miembro del marco. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 700$ in^4, $A = 30$ in^2 para cada miembro. El nudo ① está articulado.

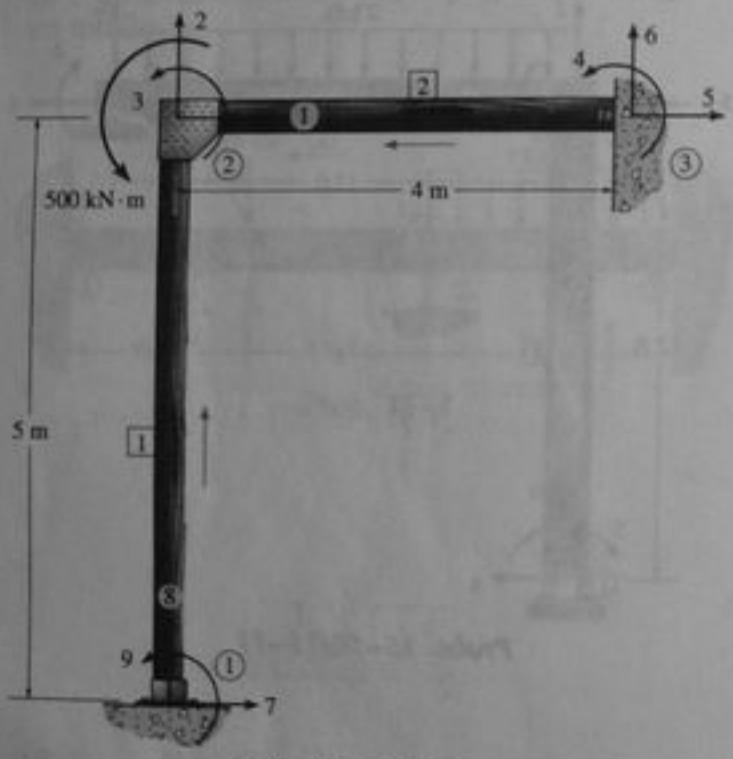
15–11. Determine las reacciones en ① y ③ en el problema 15–10.



Probs. 15–10/15–11

*15–12. Determine la matriz de rigidez **k** para cada miembro del marco. Considere $E = 10.5$ GPa, $I = 15(10^6)$ mm^4, $A = 7.5(10^3)$ mm^2 para cada miembro. Los nudos ① y ② son rígidos y el ③ está articulado.

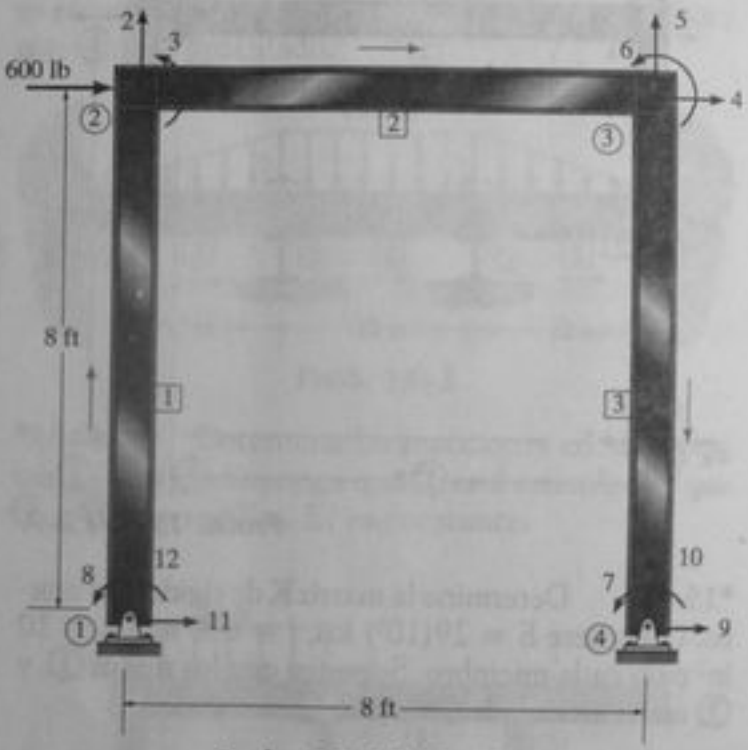
15–13. Determine las reacciones en ① y en ③ en el problema 15–12.



Probs. 15–12/15–13

15–14. Determine la matriz **k** de rigidez para cada miembro del marco. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 700$ in^4, $A = 15$ in^2 para cada miembro. Los nudos ② y ③ son rígidos.

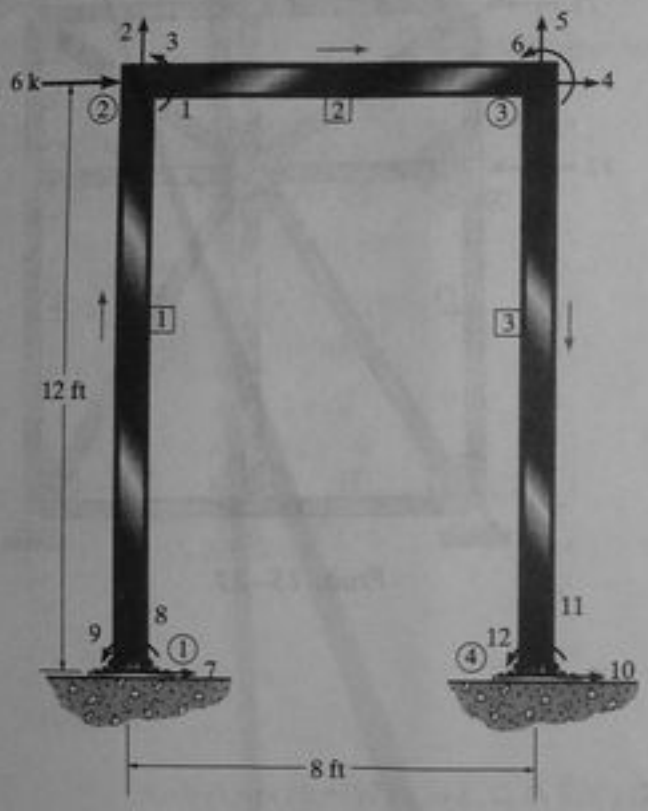
15–15. Determine las reacciones en los soportes ① y ④ en el problema 15–14.



Probs. 15–14/15–15

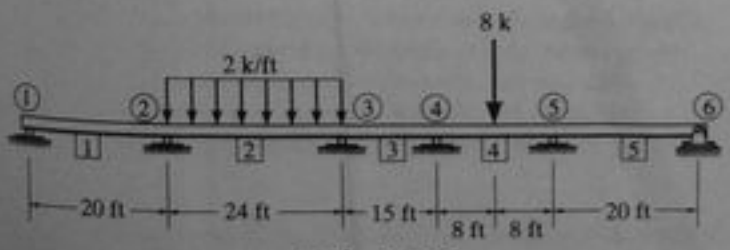
*15–16. Determine la matriz **k** de rigidez para cada miembro del marco. Considere $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 450\ \text{in}^4$, $A = 8\ \text{in}^2$ para cada miembro. Todos los nudos son rígidos.

15–17. Determine el desplazamiento horizontal del nudo ② en el problema 15–16. Calcule también las reacciones en los soportes.



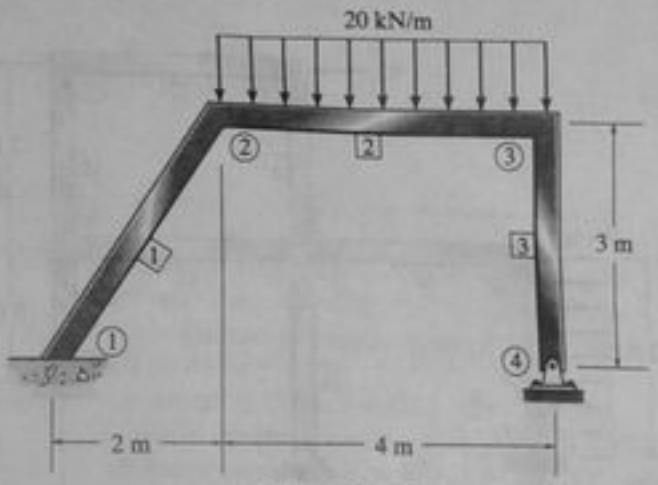
Probs. 15–16/15–17

15–18. Use el programa STRAN para determinar los momentos internos en cada nodo. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. *EI* es constante.



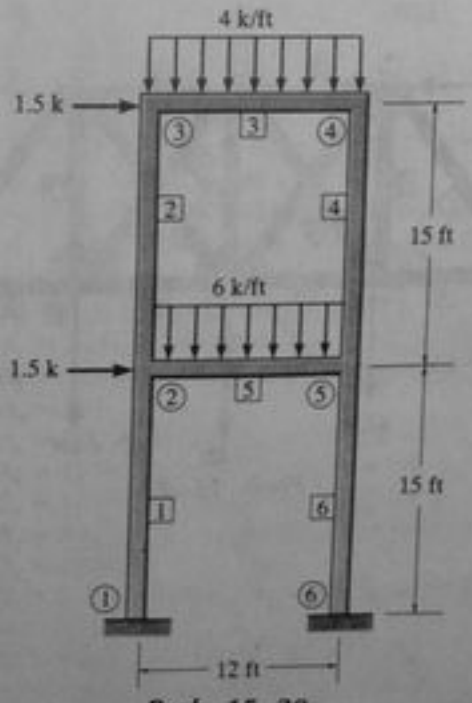
Prob. 15–18

15–19. Use el programa STRAN para determinar las fuerzas horizontal y vertical así como el momento flexionante en el nudo ①. *EI* es constante.



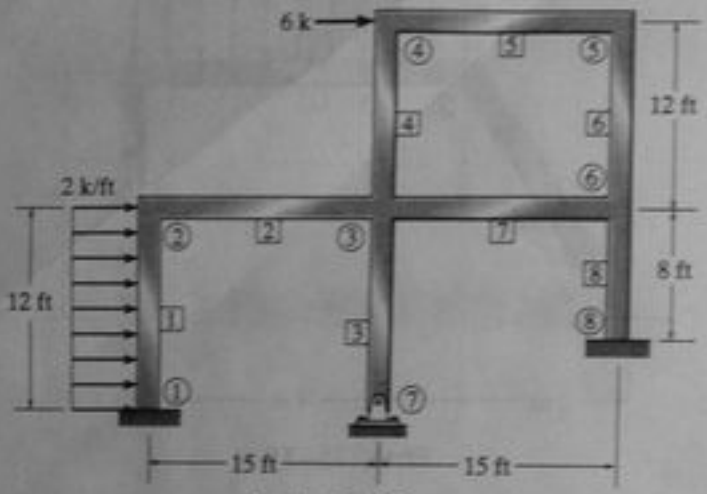
Prob. 15–19

*15–20. Use el programa STRAN para determinar las fuerzas horizontal y vertical así como el momento flexionante en el nudo ①. *EI* es constante.



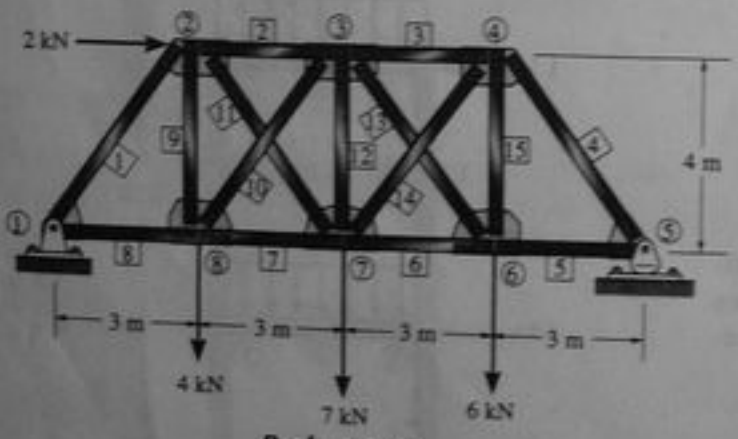
Prob. 15–20

15–21. Use el programa STRAN para determinar las fuerzas horizontal y vertical así como el momento flexionante en el nudo ①. *EI* es constante.



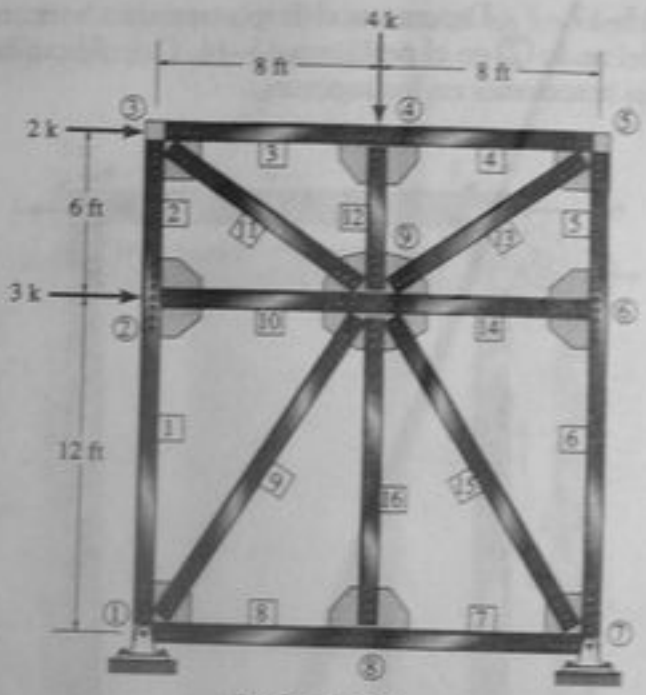
Prob. 15–21

15–22. Use el programa STRAN para determinar la fuerza en el miembro 11 de la armadura. *AE* es constante.



Prob. 15–22

15–23. Use el programa STRAN para determinar la fuerza en el miembro 9 de la armadura. *AE* es constante.



Prob. 15–23

Respuestas*

Capítulo 1

1–1. 760 lb/ft
1–2. $p_x = 4.12$ psf, $p_y = 7.14$ psf
1–3. 87 lb/ft^2
1–5. $DL = 431$ lb/ft, $LL = 750$ lb/ft
1–6. $DL = 8.10$ k, $LL = 37.5$ k
1–7. 108.5 lb/ft^2
1–9. 1.54 k, $x = 4$ ft, $y = 9$ ft
1–10. 968 lb, $x = 6$ ft, $y = 3.5$ ft
1–11. 19.7 k
1–13. (a) 11.25 k, (b) 4.50 k
1–14. (a) 32.0 k, (b) 22.0 k
1–15. 94.5 k

Capítulo 2

2–1. 475 lb/ft, en A y en H, 4750 lb; en B, C, D, E, F y G, 9500 lb.
2–2. 67.5 lb/ft, extremos: 101.25 lb, resto: 202.5 lb.
2–3. *BG*: 200 lb/ft, *ABCD*: cargas de 1 k en el centro, cargas de 0.5 k en los extremos.
2–5. *BG*: 7 ft. al centro, 320 lb/ft; *ABCD* 1760 lb en B, $w_{máx} = 160$ lb/ft.
2–6. *BE*: 4 ft. al centro, 3.22 k/ft; *FED*: 11.3 k en el centro, $w_{máx} = 1.61$ k/ft.
2–7. *BE*: 2.14 k/ft; *FED*: 12.9 k en el centro.
2–9. (a) estáticamente indeterminada de segundo grado; (b) estáticamente indeterminada de primer grado; (c) estáticamente determinada; (d) inestable.
2–10. (a) estáticamente determinada; (b) inestable; (c) estáticamente indeterminada de tercer grado.
2–11. (a) estáticamente indeterminada de tercer grado; (b) estáticamente indeterminada de primer grado; (c) estáticamente indeterminada de primer grado; (d) inestable.
2–13. (a) inestable; (b) estáticamente determinada; (c) estáticamente indeterminada de primer grado; (d) estáticamente indeterminada de segundo grado.
2–14. (a) estáticamente determinada; (b) inestable; (c) estáticamente indeterminada de cuarto grado.
2–15. (a) estáticamente indeterminada de octavo grado; (b) estáticamente determinada; (c) estáticamente indeterminada de sexto grado; (d) estáticamente indeterminada de sexto grado; (e) estáticamente indeterminada de sexto grado; (f) estáticamente indeterminada de octavo grado.
2–17. $B_y = 44.0$ kN, $A_x = 24$ kN, $A_y = 36$ kN
2–18. $B_y = 3.70$ k, $A_x = 6.00$ k, $A_y = 5.80$ k
2–19. $A_x = 0$, $B_y = 14$ k, $A_y = 22$ k
2–21. $F_B = 15.2$ k, $A_x = 4.17$ k, $A_y = 10.0$ k
2–22. $B_y = 48.3$ k, $A_y = 40.2$ k, $A_x = 0$
2–23. $A_y = 1.11$ k, $B_x = 0$, $B_y = 590$ lb
2–25. $A_y = 11.1$ k, $C_y = 4.88$ k, $C_x = 5$ k
2–26. $F_A = 11.2$ k, $B_x = 9.70$ k, $B_y = 4.10$ k
2–27. $A_y = 4$ kN, $C_y = 6.67$ kN, $E_x = 0$, $E_y = 5.33$ kN, $M_E = 5.33$ kN·m
2–29. $A_y = 7.36$ k, $B_y = 16.6$ k, $B_x = 0.5$ k
2–30. $A_y = 2$ kN, $B_y = 12$ kN, $B_x = 0$, $M_B = 32$ kN·m
2–31. $B_x = 8.25$ k, $B_y = 5$ k, $M_A = 555$ k·ft, $A_x = 8.25$ k, $A_y = 26$ k
2–33. $A_x = P/2$, $A_y = 2P/3$, $C_x = P/2$, $C_y = P/3$
2–34. $A_x = 12$ kN, $A_y = 10$ kN, $B_y = 16$ kN, $B_x = 0$, $C_x = 12$ kN, $C_y = 6$ kN, $M_C = 36$ kN·m
2–35. $A_x = 8.62$ kN, $A_y = 26.5$ kN, $C_x = 0.625$ kN, $C_y = 17.5$ kN
2–37. $D_x = 0$, $D_y = 0.75wL$, $A_x = wL$, $A_y = 0.75wL$, $M_A = wL^2/2$
2–38. $B_y = 16.6$ k, $A_x = 29.0$ k, $A_y = 17.0$ k
2–39. $A_x = 522$ lb, $A_y = 1473$ lb, $C_x = 678$ lb, $C_y = 1973$ lb

* Se han omitido las respuestas a los problemas cuyo número por orden de aparición es múltiplo de cuatro.

Capítulo 3

3–1. (a) estáticamente determinada; (b) externamente inestable; (c) estáticamente indeterminada de quinto grado; (d) estáticamente indeterminada de primer grado; (e) externamente inestable.

3–2. (a) estáticamente indeterminada de cuarto grado; (b) estáticamente determinada; (c) estáticamente indeterminada de primer grado; (d) interna y externamente inestable.

3–3. (a) estáticamente indeterminada de tercer grado; (b) inestable; (c) estáticamente indeterminada de segundo grado; (d) inestable.

3–5. $F_{AJ} = 7.26$ k (C), $F_{AB} = 4.54$ k (T), $F_{JI} = 7.26$ k (C), $F_{JB} = 2$ k (C), $F_{BI} = 2.15$ k (T), $F_{BC} = 3.74$ k (T), $F_{CI} = 0$, $F_{CD} = 3.74$ k (T), $F_{FG} = 10.1$ k (C), $F_{FE} = 8.53$ k (T), $F_{GH} = 10.1$ k (C), $F_{GE} = 3$ k (C), $F_{EH} = 3.84$ k (T), $F_{ED} = 6.13$ k (T), $F_{DI} = 5.10$ k (T), $F_{DH} = 4.50$ k (C), $F_{HI} = 7.23$ k (C)

3–6. $F_{GF} = 1.89$ k (C), $F_{EF} = 1.60$ k (T), $F_{HG} = 1.89$ k (C), $F_{GE} = 0$, $F_{HE} = 0$, $F_{ED} = 1.60$ k (T), $F_{IH} = 1.89$ k (C), $F_{HD} = 0$, $F_{IC} = 0$, $F_{CB} = 1.60$ k (T), $F_{ID} = 0$, $F_{CD} = 1.60$ k (T), $F_{AJ} = 2.56$ k (C), $F_{AB} = 1.60$ k (T), $F_{JI} = 2.56$ k (C), $F_{BI} = 0$, $F_{BJ} = 0$

3–7. $F_{AJ} = 4.04$ k (C), $F_{AB} = 3.75$ k (T), $F_{BC} = 3.75$ k (T), $F_{FE} = 12.1$ k (C), $F_{DE} = 7.75$ k (T), $F_{FD} = 0$, $F_{CD} = 7.75$ k (T), $F_{HG} = 2.15$ k (C), $F_{HI} = 0.798$ k (T), $F_{CF} = 4.04$ k (C), $F_{GF} = 8.08$ k (C), $F_{CI} = 0.269$ k (T), $F_{CG} = 1.40$ k (T), $F_{IG} = 5.92$ k (C), $F_{BI} = 0$

3–9. $F_{ED} = 8.33$ kN (T), $F_{CD} = 6.67$ kN (C), $F_{BC} = 6.67$ kN (C), $F_{CE} = 5$ kN (T), $F_{GF} = 20$ kN (T), $F_{GA} = 15$ kN (T), $F_{AF} = 18.0$ kN (C), $F_{AB} = 10.0$ kN (C), $F_{BE} = 4.17$ kN (C), $F_{FB} = 7.50$ kN (T), $F_{FE} = 12.5$ kN (T)

3–10. $F_{AL} = 7.42$ kN (C), $F_{AB} = 5.25$ kN (T), $F_{BL} = 0$, $F_{BC} = 5.25$ kN (T), $F_{LC} = 1.41$ kN (C), $F_{LK} = 6.01$ kN (C), $F_{CK} = 1.00$ kN (T), $F_{CD} = 4.25$ kN (T), $F_{KD} = 2.24$ kN (C), $F_{KJ} = 4.59$ kN (C), $F_{JD} = 4.00$ kN (T), $F_{HG} = 7.42$ kN (C), $F_{FG} = 5.25$ kN (T), $F_{HF} = 0$, $F_{EF} = 5.25$ kN (T), $F_{HE} = 1.41$ kN (C), $F_{HJ} = 6.01$ kN (C), $F_{EJ} = 1.00$ kN (T), $F_{DE} = 4.25$ kN (T), $F_{JD} = 2.24$ kN (C), $F_{JI} = 4.59$ kN (C)

3–11. $F_{EA} = 2.31$ kN (C), $F_{EC} = 2.31$ kN (T), $F_{AD} = 2.24$ kN (T), $F_{AB} = 3.16$ kN (C), $F_{BC} = 3.16$ kN (C), $F_{BD} = 3.16$ kN (C), $F_{DC} = 2.24$ kN (T)

3–13. $F_{CB} = 8.10$ kN (T), $F_{IJ} = 11.4$ kN (C), $F_{BI} = 3.82$ kN (T)

3–14. $F_{DE} = 2.00$ k (T), $F_{DI} = 667$ lb (C), $F_{JI} = 1.57$ k (C)

3–15. $F_{FC} = 1.67$ k (T), $F_{BC} = 1.39$ k (T), $F_{EF} = 2.44$ k (C)

3–17. $F_{CD} = 2.92$ k (T), $F_{LD} = 0.100$ k (T), $F_{DK} = 0.133$ k (C)

3–18. $F_{DC} = 11.7$ k (T), $F_{FG} = 16.6$ k (C), $F_{FC} = 4.86$ k (T)

3–19. $F_{GB} = 2.50$ k (C), $F_{GF} = 5.48$ k (C), $F_{BC} = 3.25$ k (T)

3–21. $F_{JH} = 0$, $F_{IH} = 3.02$ k (C), $F_{CD} = 2.63$ k (T)

3–22. $F_{JH} = 0.722$ k (T), $F_{IB} = 1.73$ k (T), $F_{BJ} = 1.73$ k (C)

3–23. $F_{CD} = 24.0$ kN (T), $F_{CF} = 13.4$ kN (C), $F_{ED} = 13.4$ kN (C), $F_{AE} = F_{BF} = 9.49$ kN (C), $F_{AC} = F_{BC} = 4.24$ kN (C), $F_{EC} = F_{DF} = 12.7$ kN (T)

3–25. $F_{BE} = 10$ kN (C), $F_{FC} = 10$ kN (C), $F_{FE} = 16$ kN (T), $F_{AB} = 8$ kN (C), $F_{FB} = 2$ kN (C), $F_{AF} = 10$ kN (T), $F_{ED} = 10$ kN (T), $F_{EC} = 2$ kN (C), $F_{CD} = 8$ kN (C)

3–26. $F_{AC} = 5.41$ k (T), $F_{AD} = 6.36$ k (C), $F_{DB} = 5.41$ k (T), $F_{DC} = 9.00$ k (C), $F_{CB} = 6.36$ k (C)

3–27. $F_{AB} = 3$ kN (T), $F_{FD} = 4.24$ kN (C), $F_{ED} = 0$, $F_{AF} = 4.24$ kN (C), $F_{EA} = 4$ kN (C), $F_{ED} = F_{DC} = 0$, $F_{EF} = F_{CG} = 0$, $F_{DF} = F_{DG} = 4.24$ kN (C), $F_{AF} = F_{GB} = 4.24$ kN (C), $F_{AB} = 3$ kN (T), $F_{EA} = F_{CB} = 4$ kN (C)

3–29. $F_{AF} = 646$ lb (C), $F_{AB} = 580$ lb (C), $F_{EB} = 820$ lb (T), $F_{BC} = 580$ lb (C), $F_{EF} = 473$ lb (C), $F_{CF} = 580$ lb (T), $F_{CD} = 1593$ lb (C), $F_{ED} = 1166$ lb (C), $F_{DA} = 1428$ lb (T)

3–30. $F_{AB} = 0$, $F_{AG} = 1.50$ k (C), $F_{GB} = 0.707$ k (T), $F_{GL} = 0.500$ k (T), $F_{GI} = 0.707$ k (C), $F_{LI} = 0.707$ k (T), $F_{LK} = 0.500$ k (C), $F_{IK} = 0.707$ k (C), $F_{IF} = 0.707$ k (T), $F_{BF} = 2.12$ k (T), $F_{BC} = 1.00$ k (C), $F_{FC} = 0.707$ k (T), $F_{FH} = 2.12$ k (T), $F_{KH} = 0.707$ k (T), $F_{KJ} = 1.50$ k (C),

$F_{JH} = 2.12$ k (T), $F_{CD} = 0$, $F_{DE} = 0.500$ k (C), $F_{CE} = 0.707$ k (C), $F_{HE} = 0.707$ k (T), $F_{JE} = 1.50$ k (C)

3–31. $F_{AB} = 3.90$ kN (C), $F_{BC} = 2.50$ kN (C), $F_{CD} = 2.50$ kN (C), $F_{BG} = F_{GF} = F_{GH} = F_{CH} = F_{HE} = 0$

3–33. $F_{AC} = F_{AE} = 0$, $F_{AB} = 4$ kN (T), $F_{BE} = 5.66$ kN (T), $F_{BD} = 2$ kN (C), $F_{DE} = 0$, $F_{DC} = 0$, $F_{CE} = 0$

3–34. $F_{CE} = 707$ lb (T), $F_{CD} = 500$ lb (C), $F_{CB} = 0$, $F_{BE} = 0$, $F_{BF} = 1.13$ k (T), $F_{BA} = 800$ lb (C), $F_{ED} = 500$ lb (C), $F_{EF} = 0$, $F_{FD} = 0$, $F_{FA} = 800$ lb (C), $F_{DA} = 0$

3–35. $F_{AD} = 2.47$ k (T), $F_{AB} = F_{AC} = 1.22$ k (C)

Capítulo 4

4–1. $V_C = -1$ k, $N_C = 0$, $M_C = 56$ k·ft, $V_D = -1$ k, $N_D = 0$, $M_D = 48$ k·ft

4–2. $V_{máx} = 7$, $M_{máx} = 56$

4–3. $N_B = 0$, $V_B = 28.8$ k, $M_B = -115$ k·ft

4–5. $N_C = -4$ k, $V_C = -1$ k, $M_C = -8$ k·ft, $N_D = -4$ k, $V_D = 1.15$ k, $M_D = -2.6$ k·ft

4–6. $V_{máx} = 2.65$, $M_{máx} = -14$

4–7. $N_C = -3.60$ kN, $V_C = -0.0933$ kN, $M_C = -0.0933$ kN·m, $N_D = 0$, $V_D = -4.89$ kN, $M_D = -10.2$ kN·m

4–9. $N_C = 20$ kN, $V_C = 70.6$ kN, $M_C = -292$ kN·m

4–10. $V_{máx} = 94.6$, $M_{máx} = -540$

4–11. $N_D = 0$, $V_D = 0$, $M_D = 9$ k·ft, $N_E = 0$, $V_E = -7$ k, $M_E = -12$ k·ft

4–13. $N_C = 0$, $V_C = 0.5$ k, $M_C = 3.60$ k·ft

4–14. $V_{máx} = 10.1$, $M_{máx} = -60$

4–15. $N_C = 0$, $V_C = 2.01$ k, $M_C = -15$ k·ft, $N_D = 0$, $V_D = 1.11$ k, $M_D = 3.77$ k·ft

4–17. $V = 0.444x^2 - 8x + 36$, $M = 0.148x^3 - 4x^2 + 36x - 108$

4–18. $V_{máx} = 36$, $M_{máx} = -108$

4–19. $V = -3.33x^2 - 800$, $M = -1.11x^3 - 800x - 1200$

4–21. $V = 2960 - 400x$, $M = -200x^2 + 2960x + 600$

4–22. $V_{máx} = -3040$, $M_{máx} = 11552$

4–23. $V = 500 - 2x^3$, $M = 500x - 0.5x^4$

4–25. $V_{máx} = \pm 1200$, $M_{máx} = 6400$

4–26. 3.00 k/ft, 18 ft

4–27. $V = -3.25$, $M = -3.25x + 14$

4–29. $V = 120 - 4x$, $M = -2x^2 + 120x - 1650$

4–30. $V_{máx} = \pm 60$, $M_{máx} = -300$

4–31. $V_{máx} = 1050$, $M_{máx} = 3912$

4–33. $V_{máx} = 35.8$, $M_{máx} = -146$

4–34. $V_{máx} = \pm 36$, $M_{máx} = -108$

4–35. $V_{máx} = 48$, $M_{máx} = -576$

4–37. $V_{máx} = \pm 25$, $M_{máx} = -45$

4–38. ABC, $V_{máx} = 13.2$, $M_{máx} = 17.5$; BCD, $V_{máx} = -11.8$, $M_{máx} = 13.6$

4–39. CD, $V_{máx} = 0$, $M_{máx} = 0$; BC, $V_{máx} = -9.20$, $M_{máx} = 52.9$; AB, $V_{máx} = 3$, $M_{máx} = 24$

4–41. BC, $V_{máx} = 5$, $M_{máx} = 40$; BA, $V_{máx} = 12$, $M_{máx} = -90$; DC, $V_{máx} = 0$, $M_{máx} = 0$

4–42. AB, $V_{máx} = 2.22$, $M_{máx} = 15.5$; BC, $V_{máx} = -1.52$, $M_{máx} = 10.6$

4–43. AB, $V_{máx} = 13.3$, $M_{máx} = 26.7$; BC, $V_{máx} = -8$, $M_{máx} = 9.24$

Capítulo 5

5–1. $A_x = 2.72$ k, $A_y = 3.78$ k, $B_x = 2.72$ k, $B_y = 0.216$ k, $C_x = 0.276$ k, $C_y = 0.216$ k

5–2. $F_B = 6.77$ k, $F_A = 10.8$ k, $F_C = 11.7$ k

5–3. $B_x = 46.7$ k, $B_y = 5$ k, $A_x = 46.7$ k, $A_y = 95$ k, $C_x = 46.7$ k, $C_y = 85$ k

5–5. $B_x = 4.72$ k, $B_y = 0.635$ k, $F_{AC} = 0.723$ k, $A_x = 1.69$ k, $A_y = 6.17$ k

5–6. $A_x = 1.58$ k, $A_y = 4$ k, $C_x = 1.58$ k, $C_y = 4$ k

5–7. $T_{BC} = 4.67$ k, $T_{AB} = 8.30$ k, $T_{CD} = 8.81$ k, 20.2 ft

5–9. 3.53 m, $P = 0.8$ kN, $T_{DE} = 8.17$ kN

5–10. 51.9 lb/ft

5–11. 1.36 kN/m

5–13. $V_{máx} = -1.91$, $M_{máx} = 3.56$

5–14. $F_{mín} = 100$ k, $F_{máx} = 117$ k, $T = 10$ k

5–15. $V_{máx} = \pm 5$ k, $M_{máx} = 6.25$ k·ft

Capítulo 6

6–1,2. **(a)** (0, 1), (35, 0) **(b)** (0, 0), (10^-, −0.286), (10^+, 0.714), (35, 0). **(c)** (0, 0), (25, 7.14), (35, 0)

6–5,6. **(a)** (0, 1), (10, 1) **(b)** (0, 0), (5, 0), (10, −5)

6–9,10. (0, 0), (15, 0), (20, −5)

6–13,14. **(a)** (0, 0), (10^-, −0.5), (10^+, 0.5), (20, 0), (30, 0) **(b)** (0, 0), (10, 5), (20, 0), (30, 0) **(c)** (0, 0), (10, 0), (20, 0), (30, 1)

6–17,18. (0, 0), (4, 2), (8, 0), (12, −2)

6–21. **(a)** −390 k·ft; **(b)** 12 k; **(c)** −110 k·ft

6–22. **(a)** 30 kN·m; **(b)** 4.75 kN

6–23. **(a)** 32.8 k; **(b)** 12.5 k; **(c)** 125 k·ft

6–25. (a) −13.1 k·ft; (b) 187.5 lb
6–26. −4 k·ft
6–27. (a) −86.4 k·ft; (b) 5.40 k
6–29. (a) (0, 0), (20, −6), (40, 0.2), (50, 0) (b) (0, 0), (30, 12), (50, 0)
6–30. −27 k·ft
6–31. −6.75 k
6–33. (a) (0, 0.5), (5, 0), (10, 0.5), (15, 0), (20, −0.5)
(b) (0, −2.5), (5, 0), (10, 2.5), (15, 0), (20, −2.5)
6–34. 2.73 k, 61.25 k·ft
6–35. (a) (0, −1.33), (4, 0), (12, 2.67), (16, 0)
(b) (0, 0.333), (4, 0), (8, 0.667), (16, 0)
6–37. 10.7 kN·m
6–38. (a) 16.7 k; (b) 6.67 k; (c) 46.7 k·ft
6–39. −6 k
6–41. (0, 0), (20, 0.577), (40, 0.577), (60, 0)
6–42. (0, 0), (20, 0.385), (40, −0.385), (60, 0)
6–43. (0, 0), (40, −0.770), (60, 0)
6–45. (0, 0), (12, 2), (24, 0)
6–46. (0, 0), (8, −1.78), (24, 0)
6–47. 15.1 k (T)
6–49. 32 k (C)
6–50. 27 kN (C)
6–51. 10.1 kN (C)
6–53. 24 ft, 16.8 k (C)
6–54. 36 ft, 16.8 k (C)
6–55. 24 ft, 15 k (T)
6–57. (a) 3.50 k, (b) 70 k·ft
6–58. −8.75 k·ft
6–59. 1.46 k
6–61. 2.37 k (T)
6–62. 1.92 k (T)
6–63. 3.00 k (C)
6–65. 33.4 k (C)
6–66. 33.4 k (T)
6–67. 23.2 k (T)
6–69. 64.5 kN·m
6–70. 10 kN, −39 kN·m
6–71. 164 kN·m
6–73. 764 k·ft
6–74. 10.5 k·ft

Capítulo 7

7–1. F_{FB} = 250 lb (T), F_{AE} = 250 lb (C), F_{FE} = 200 lb (C), F_{AB} = 200 lb (T), F_{AF} = 350 lb (C), F_{BD} = 250 lb (T), F_{CE} = 250 lb (C), F_{DE} = 200 lb (C), F_{BC} = 200 lb (T) F_{CD} = 450 lb (C), F_{BE} = 300 lb (C)
7–2. F_{AF} = 0, F_{FB} = 500 lb (T), F_{AB} = 0, F_{FE} = 400 lb (C), F_{AF} = 500 lb (C), F_{BD} = 500 lb (T), F_{CE} = 0, F_{BC} = 0, F_{CD} = 600 lb (C), F_{BE} = 600 lb (C), F_{ED} = 400 lb (C)
7–3. F_{HB} = 5.89 k (T), F_{AG} = 5.89 k (C), F_{AB} = 9.17 k (T), F_{AH} = 14.2 k (C), F_{HG} = 4.17 k (C), F_{GC} = 1.18 k (C), F_{BF} = 1.18 k (T), F_{GF} = 7.5 k (C), F_{GB} = 5 k (C), F_{BC} = 12.5 k (T), F_{EC} = 8.25 k (T), F_{DF} = 8.25 k (C), F_{CD} = 5.83 k (T), F_{ED} = 15.8 k (C), F_{FE} = 0.833 k (C), F_{FC} = 5 k (C)
7–5. F_{EC} = 6.67 kN (C), F_{DF} = 6.67 kN (T), F_{DC} = 5.33 kN (C), F_{EF} = 5.33 kN (T), F_{DE} = 4 kN (C), F_{AC} = 15 kN (T), F_{BF} = 15 kN (C), F_{AB} = 9 kN (T), F_{CB} = 22.7 kN (C), F_{AF} = 22.7 kN (T), F_{CF} = 5 kN (C)
7–6. F_{EC} = 0, F_{DF} = 13.3 kN (T), F_{ED} = 8 kN (C), F_{EF} = 0, F_{DC} = 10.7 kN (C), F_{BF} = 0, F_{AC} = 30 kN (T), F_{AB} = 0, F_{CB} = 34.7 kN (C), F_{AF} = 10.7 kN (T), F_{CF} = 18 kN (C)
7–7. 0, 55.7 k·ft, 41.25 k
7–9. M_A = 16.2 k·ft, A_x = 0, A_y = 12 k, M_B = 9 k·ft, B_x = 0, B_y = 16 k, M_C = 7.20 k·ft, C_x = 0, C_y = 4 k
7–10. $M_A = M_D = Ph/6$, $M_B = M_C = Ph/3$
7–11. (a) $M_A = M_D$ = 0, $M_B = M_C$ = 36 k·ft;
(b) $M_B = M_C$ = 18 k·ft, $M_A = M_D$ = 18 k·ft;
(c) $M_A = M_D$ = 12 k·ft, $M_B = M_C$ = 24 k·ft
7–13. M_D = 2 kN·m, M_C = 2 kN·m
7–14. F_{CF} = 1.77 k (T)
7–15. F_{CE} = 1.06 k (T)
7–17. F_{CG} = 40.6 kN (T), F_{EG} = 35.0 kN (C), F_{CD} = 5 kN (C)
7–18. F_{CG} = 21.9 kN (T), F_{EG} = 20 kN (C), F_{CD} = 5 kN (C)
7–19. F_{FG} = 70 kN (C), F_{CG} = 54.2 kN (T), F_{CD} = 22.5 kN (T), F_{GD} = 54.2 kN (C), F_{GH} = 5 kN (C), F_{DH} = 54.2 kN (T), F_{DE} = 42.5 kN (C), F_{HE} = 54.2 kN (C), F_{HI} = 60 kN (T), $A_x = B_x$ = 15 kN, $A_y = B_y$ = 43.3 kN
7–21. F_{CE} = 6.41 k (T), F_{DF} = 1.875 k (C), F_{DE} = 6.50 k (C), F_{EF} = 2.25 k (T), F_{EH} = 0.5 k (C), F_{FH} = 1.875 k (C), F_{FG} = 0, F_{HJ} = 1.875 k (T), F_{HI} = 3.50 k (C), $A_x = B_x$ = 2.0 k, $A_y = B_y$ = 1.125 k,

$M_A = M_B = 12.0\ \text{k}\cdot\text{ft}$, $F_{JI} = 2.25\ \text{k}$ (C), $F_{JK} = 1.875\ \text{k}$ (T), $F_{IL} = 6.41\ \text{k}$ (C), $F_{IK} = 2.50\ \text{k}$ (T), $F_{GI} = 0$, $F_{GH} = 0$

7–22. $F_{EG} = 0$, $F_{EC} = 17.0\ \text{k}$ (T), $F_{GH} = 19.5\ \text{k}$ (C), $F_{CD} = 0$, $F_{EH} = 17.0\ \text{k}$ (T), $F_{HI} = 4.50\ \text{k}$ (T), $F_{FI} = 0$, $F_{HF} = 17.0\ \text{k}$ (T), $F_{FD} = 17.0\ \text{k}$ (C), $A_x = 7.5\ \text{k}$, $A_y = 12\ \text{k}$, $M_A = 45\ \text{k}\cdot\text{ft}$, $B_x = 7.5\ \text{k}$, $B_y = 12\ \text{k}$, $M_B = 45\ \text{k}\cdot\text{ft}$

7–23. $A_x = B_x = 5\ \text{k}$, $A_y = B_y = 6.25\ \text{k}$, $F_{DE} = 8.84\ \text{k}$ (C), $F_{CE} = 10\ \text{k}$ (T), $F_{DF} = 8.75\ \text{k}$ (C), $F_{EF} = 8.84\ \text{k}$ (T), $F_{EG} = 2.50\ \text{k}$ (C), $F_{FG} = 8.84\ \text{k}$ (C), $F_{FH} = 3.75\ \text{k}$ (T), $F_{GH} = 8.84\ \text{k}$ (T), $F_{GI} = 15.0\ \text{k}$ (C)

7–25. $M_{máx} = \pm 18$

7–26. $M_{máx} = \pm 13.3$

7–27. $A_x = 3.25\ \text{k}$, $A_y = 5.50\ \text{k}$, $M_A = 29.25\ \text{k}\cdot\text{ft}$

7–29. $M_{máx} = \pm 42\ \text{k}\cdot\text{ft}$

7–30. $M_{máx} = \pm 30.6\ \text{k}\cdot\text{ft}$

7–31. $M_{máx} = \pm 3.33\ \text{k}\cdot\text{ft}$

7–33. *PQRST*, $M_{máx} = \pm 3.75\ \text{k}\cdot\text{ft}$, *BGLQ*, $M_{máx} = \pm 30\ \text{k}\cdot\text{ft}$

7–34. *PQRST*, $M_{máx} = \pm 5.26\ \text{k}\cdot\text{ft}$, *BGLQ*, $M_{máx} = \pm 24.6\ \text{k}\cdot\text{ft}$

Capítulo 8

8–1,2,3,5. $\theta_B = \dfrac{1000}{EI}\ \text{kN}\cdot\text{m}^2\ \curvearrowright,\ \Delta_B = \dfrac{5833}{EI}\ \text{kN}\cdot\text{m}^3\ \downarrow$

8–6. $\Delta_B = \dfrac{PL^3}{48EI}\ \downarrow,\ \theta_A = \dfrac{PL^2}{16EI}\ \curvearrowright$

8–7. $\Delta_B = \dfrac{PL^3}{48EI}\ \downarrow,\ \theta_A = \dfrac{PL^2}{16EI}\ \curvearrowright$

8–9. $\theta_A = \dfrac{wL^3}{24\,EI}\ \curvearrowright,\ \Delta_B = \dfrac{5wL^4}{384\,EI}\ \downarrow$

8–10,11. $\theta_A = \dfrac{wL^3}{24\,EI}\ \curvearrowright,\ \Delta_B = \dfrac{5wL^4}{384\,EI}\ \downarrow$

8–13. $\dfrac{5\,wL^4}{384\,EI}\ \downarrow$

8–14. $\Delta_B = \dfrac{ML^2}{8\,EI}\ \downarrow,\ \theta_A = \dfrac{ML}{2\,EI}\ \curvearrowright$

8–15,17,18. 0.0385 rad $\curvearrowright$, 263 mm $\downarrow$

8–19. 0.263 m $\downarrow$

8–21. 0.263 m $\downarrow$

8–22,23,25,26. $0.466(10^{-3})$ rad $\curvearrowright$, 0.587 in. $\downarrow$

8–27,29,30,31. $\dfrac{1500}{EI}\ \text{kN}\cdot\text{m}^3\ \downarrow$

8–33,34,35. $\theta_C = \dfrac{333}{EI}\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2\ \curvearrowright,\ \Delta_C = \dfrac{3333}{EI}\ \text{lb}\cdot\text{ft}^3\ \downarrow$

8–37,38,39. 16.9 mm $\uparrow$

8–41,42,43. 0.0112 rad $\curvearrowright$, 0.782 in. $\downarrow$

8–45,46,47. $\Delta_C = \dfrac{50{,}625}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^3\ \downarrow,\ \theta_C = \dfrac{3937.5}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^2\ \curvearrowright$

8–49,50. $\dfrac{833}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^3\ \downarrow,\ \dfrac{250}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^2\ \curvearrowleft$

8–51. $5.37(10^{-3})$ rad $\curvearrowleft$

8–53. $\Delta_D = \dfrac{146}{EI}\ \text{kN}\cdot\text{m}^3\ \downarrow,\ \theta_{BL} = \dfrac{12.5}{EI}\ \text{kN}\cdot\text{m}^2,$

$\theta_{BR} = \dfrac{4.17}{EI}\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$

8–54. $\dfrac{167}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^3\ \uparrow,\ \dfrac{33.3}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^2\ \curvearrowright$

8–55. $\dfrac{33.3}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^2\ \uparrow,\ \dfrac{167}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^3\ \downarrow$

8–57. $\dfrac{167}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^3\ \uparrow$

8–58,59. 23.0 mm $\downarrow$

8–61. 0.856 in. $\uparrow$

8–62,63. 0.0401 in. $\rightarrow$

8–65. 0.0096 in. $\uparrow$

8–66. 1.06 in. $\downarrow$

8–67. $\dfrac{1.89(10^3)}{AE}\ \text{kN}\cdot\text{m}\ \downarrow$

8–69. $\dfrac{1.51(10^6)}{AE}\ \text{lb}\cdot\text{in.}\ \rightarrow$

8–70. 0.0768 in. $\rightarrow$

8–71. 1.12 in. $\rightarrow$

8–73. $\dfrac{2100}{AE}\ \text{lb}\cdot\text{ft}\ \downarrow$

8–74,75. 0.808 in. $\downarrow$

8–77. $\dfrac{63.3(10^3)}{AE}\ \text{lb}\cdot\text{ft}\ \downarrow$

8–78,79. $\dfrac{9342}{AE}\ \text{k}\cdot\text{in.}\ \downarrow$

8–81,82. $(\Delta_C)_h = 0.179$ in. $\rightarrow$, $(\Delta_C)_v = 0.447$ in. $\downarrow$

8–83. 18.7 mm $\downarrow$

8–85. $(\Delta_C)_h = 0.656$ in. $\leftarrow$, $(\Delta_C)_v = 0.425$ in. $\downarrow$

8–86. $(\Delta_C)_h = 0.657$ in. $\leftarrow$, $(\Delta_C)_v = 0.425$ in. $\downarrow$

8–87. $(\Delta_C)_h = 0.656$ in. $\leftarrow$, $(\Delta_C)_v = 0.425$ in. $\downarrow$

8–89,90. 2.81 mm $\downarrow$

8–91. $0.414(10^{-3})$ rad $\curvearrowleft$

8–93,94. $\dfrac{440}{EI}\ \text{k}\cdot\text{ft}^3\ \downarrow$

8–95. $\dfrac{79.1\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI}\ \rightarrow$

8–97,98. $\frac{417\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI}\downarrow$

8–99. 49.1 mm ↓

8–101,102. 1.70 in.

Capítulo 9

9–1. $B_y = 3M/L$, $A_x = 0$, $A_y = 3M/L$, $M_A = 0.5M$

9–2. $A_y = 3M/2L$, $B_x = 0$, $B_y = 3M/2L$, $M_B = M/2$

9–3. $B_y = 900$ lb, $A_y = 1500$ lb, $A_x = 0$, $M_A = 3600$ lb·ft

9–5. $C_y = 3.68$ k, $A_x = 0$, $A_y = 36.3$ k, $M_A = 126$ k·ft

9–6. $B_y = 5.94$ k, $A_x = 0$, $A_y = 4.06$ k, $M_A = 10.9$ k·ft

9–7. $A_x = 0$, $A_y = 2\,wL/5$, $M_A = wL^2/15$

9–9. $B_y = 35.6$ kN, $C_y = 2.41$ kN, $A_y = 26.8$ kN, $B_x = 0$

9–10. $B_y = 68.8$ kN, $A_x = 0$, $A_y = 15.6$ kN, $C_y = 15.6$ kN

9–11. $B_y = 6.66$ k, $C_y = 3.95$ k, $A_y = 1.02$ k, $A_x = 0$

9–13. $B_y = 160$ k, $A_y = C_y = 80$ k

9–14. $M_B = 58.1$ kN·m, $M_C = 200$ kN·m

9–15. $B_y = 27.5$ k, $C_y = 7.5$ k, $M_{max} = -25$ k·ft

9–17. $M_A = M_B = PL/8$, $A_y = B_y = P/2$

9–18. $M_A = M_B = -wL^2/12$

9–19. $A_y = 2.61$ k, $M_C = 6.26$ k·ft, $C_y = 3.39$ k, $C_x = 0$

9–21. $C_y = 28$ kN, $A_x = 2$ kN, $A_y = 44$ kN, $M_A = 78$ kN·m

9–22. $C_y = 27.0$ k, $A_y = 25.0$ k, $A_x = 0$, $M_A = 134$ k·ft

9–23. $A_y = 15.0$ k, $D_y = 15.0$ k, $D_x = 2$ k, $M_D = 19.5$ k·ft

9–25. 4.05 kN (C)

9–26. 2.56 kN (T)

9–27. $F_{CB} = 3.06$ k (C), $F_{AC} = 8.23$ k (C), $F_{DC} = 6.58$ k (T), $F_{DB} = 5.10$ k (T), $F_{AB} = 10.1$ k (C), $F_{DA} = 4.94$ k (T)

9–29. $F_{AD} = 8.54$ k (C), $F_{AB} = 6.04$ kN (T), $F_{AE} = 6.04$ k (T), $F_{EB} = 5.61$ kN (T), $F_{ED} = 3.96$ kN (C), $F_{BC} = 14.1$ kN (T), $F_{DC} = 10.0$ kN (C), $F_{DB} = 14.0$ kN (C)

9–30. 7.78 kN (T)

9–31. 2.95 kN (T)

9–33. 28.0 k

9–34. $T = 24.6$ kN, $A_x = 19.7$ kN, $A_y = 35.3$ kN, $M_A = 41.0$ kN·m

9–35. $F_{CD} = 64.7$ k (C), $F_{CB} = F_{AC} = 84.1$ k (T)

9–37. $F_{CE} = 43.1$ k (T), $F_{AC} = F_{EF} = 53.9$ k (T), $F_{BC} = F_{DE} = 32.3$ k (C)

9–38. $A_y = 15.8$ k, $C_y = 9.98$ k, $B_y = 49.2$ k

9–39. $A_y = 17.6$ kN, $C_y = 11.6$ kN, $B_y = 60.8$ kN

9–41. $A_y = 5.21$ k, $D_y = 12.6$ k, $B_y = 26.1$ k, $C_y = 40.1$ k

9–42. $A_y = 6.65$ k, $C_y = 16.3$ k, $B_y = 39.6$ k

9–43. (0, 0), (5, 0.425), (10, 1), (15, 0.275), (20, 0)

9–45. (0, 1), (5, 0.633), (10, 0.312), (15, 0.0859), (20, 0)

9–46. (0, 0), (5, 0.481), (10, 0.852), (15, 1), simétrica

9–47. 46.9 kN·m

9–49. 9.00 kN·m

Capítulo 10

10–1. $M_{AB} = -230$ k·ft, $M_{BA} = 187$ k·ft, $M_{BC} = -187$ k·ft, $M_{CB} = 122$ k·ft

10–2. $M_{AB} = -11.6$ k·ft, $M_{BA} = 12.8$ k·ft, $M_{BC} = -12.8$ k·ft, $M_{CB} = 13.8$ k·ft

10–3. $M_{AB} = -34.8$ k·ft, $M_{BA} = 45.6$ k·ft, $M_{BC} = -45.6$ k·ft, $M_{CB} = 67.2$ k·ft

10–5. $M_{AB} = -2680$ k·ft, $M_{BA} = -1720$ k·ft, $M_{BC} = 1720$ k·ft, $M_{CB} = 0$

10–6. $M_{BA} = 38.7$ kN·m, $M_{BC} = -38.7$ kN·m

10–7. $M_{AB} = 146$ k·ft, $M_{DC} = -146$ k·ft, $A_x = 29.3$ k, $D_y = 96$ k, $A_y = 96$ k, $D_x = 29.3$ k

10–9. $M_{AB} = -51.9$ kN·m, $M_{BA} = 85.2$ kN·m, $M_{BC} = -85.2$ kN·m

10–10. $M_{AB} = 44.4$ k·ft, $M_{BA} = 88.8$ k·ft, $M_{BC} = -88.8$ k·ft, $M_{CB} = 72.4$ k·ft, $M_{CD} = -72.4$ k·ft, $M_{DC} = -36.2$ k·ft

10–11. $M_{CD} = -38.4$ k·ft, $M_{BA} = -9.60$ k·ft, $M_{BC} = 9.60$ k·ft, $M_{CB} = 38.4$ k·ft

10–13. $M_{BA} = 76.1$ k·ft, $M_{BC} = -97.9$ k·ft, $M_{CB} = 89.4$ k·ft, $M_{BD} = 21.8$ k·ft, $M_{CE} = -89.4$ k·ft

10–14. $M_{BA} = 181$ k·ft, $M_{BC} = -103$ k·ft, $M_{CB} = 38.3$ k·ft, $M_{BD} = -77.3$ k·ft

10–15. $M_{BA} = -41.1$ lb·ft, $M_{EF} = 41.1$ lb·ft, $M_{BC} = 41.1$ lb·ft, $M_{ED} = -41.1$ lb·ft, $M_{CB} = 214$ lb·ft, $M_{DE} = -214$ lb·ft, $M_{CD} = -214$ lb·ft, $M_{DC} = 214$ lb·ft

10–17. $M_{BC} = -19.9$ k·ft, $M_{BA} = 19.9$ k·ft, $M_{CB} = 22.4$ k·ft, $M_{CD} = -6.78$ k·ft, $M_{EC} = 1.18$ k·ft, $M_{CE} = -15.6$ k·ft

10–18. $M_{DB} = 0$, $M_{AB} = -330$ kN·m, $M_{CB} = 400$ kN·m

10–19. $M_{AB} = -24.8$ k·ft, $M_{BA} = 26.1$ k·ft, $M_{BC} = -26.1$ k·ft, $M_{CB} = 50.7$ k·ft, $M_{CD} = -50.7$ k·ft, $M_{DC} = -40.7$ k·ft

10–21. $M_{AB} = 128$ k·ft, $M_{BA} = 218$ k·ft,

$M_{BC} = -218\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 175\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -175\ k \cdot ft$, $M_{DC} = -55.7\ k \cdot ft$

10–22. $M_{BA} = -104\ k \cdot ft$, $M_{BC} = 104\ k \cdot ft$,
$M_{CB} = 196\ k \cdot ft$, $M_{CD} = -196\ k \cdot ft$

10–23. $M_{AB} = 25.4\ k \cdot ft$, $M_{DC} = -56.7\ k \cdot ft$

Capítulo 11

11–1. $M_{AB} = -47.5\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 31.5\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = -31.5\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 40.5\ k \cdot ft$

11–2. $M_{AB} = 0$, $M_{BA} = 84.0\ k \cdot ft$, $M_{BC} = -84.0\ k \cdot ft$,
$M_{CB} = 84.0\ k \cdot ft$, $M_{CD} = -84.0\ k \cdot ft$, $M_{DC} = 0$

11–3. $M_{AB} = -30 kN \cdot m$, $M_{BA} = 15\ kN \cdot m$,
$M_{BC} = -15 kN \cdot m$, $M_{CB} = 0$, $A_y = 33\ kN$,
$B_y = 33\ kN$, $C_y = 6\ kN$

11–5. $M_{AB} = 10.4\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 20.7\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = -20.7\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 7.5\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -7.5\ k \cdot ft$

11–6. $M_{AD} = 48\ k \cdot ft$, $M_{AB} = -48\ k \cdot ft$,
$M_{BA} = -24\ k \cdot ft$, $M_{BC} = 24\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 48\ k \cdot ft$,
$M_{CE} = -48\ k \cdot ft$

11–7. $M_{AB} = 0$, $M_{BA} = 9\ k \cdot ft$, $M_{BC} = -9\ k \cdot ft$, $A_x = 0$,
$A_y = 11.25\ k$, $B_y = 12.75\ k$, $C_y = 12.75\ k$,
$D_y = 11.25\ k$

11–9. $M_{BA} = 9\ kN \cdot m$, $M_{BC} = -9\ kN \cdot m$,
$M_{CB} = -9.25\ kN \cdot m$, $M_{CD} = 9.25\ kN \cdot m$,
$M_{DC} = 36\ kN \cdot m$, $M_{DE} = -36\ kN \cdot m$

11–10. $M_{AB} = -126\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 72\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = -72\ k \cdot ft$, $M_{CB} = -36\ k \cdot ft$

11–11. $C_x = B_x = 4.55\ k$, $A_x = 2.95\ k$, $C_y = 0.903\ k$,
$B_y = A_y = 4.10\ k$

11–13. $M_{AB} = 0$, $M_{BA} = 42.9\ k \cdot ft$, $M_{BC} = -22.1\ k \cdot ft$,
$M_{BD} = 20.1\ k \cdot ft$, $M_{DB} = 64\ k \cdot ft$, $M_{DE} = -64$
$k \cdot ft$, $M_{CB} = -11.1\ k \cdot ft$

11–14. $M_{AB} = 0$, $M_{BA} = 8.78\ k \cdot ft$, $M_{BC} = -23.4\ k \cdot ft$,
$M_{BD} = 14.6\ k \cdot ft$, $M_{DB} = 7.32\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 0$

11–15. $M_{AB} = 20.6\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 41.1\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = -41.1\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 41.1\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -41.1\ k \cdot ft$, $M_{DC} = -20.6\ k \cdot ft$

11–17. $M_{AB} = 3.93\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 7.85\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = -7.85\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 7.85\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -7.85\ k \cdot ft$, $M_{DC} = -3.93\ k \cdot ft$

11–18. $M_{AB} = 0$, $M_{BA} = 9.68\ k \cdot ft$, $M_{BC} = -9.68\ k \cdot ft$,
$M_{CB} = 25.2\ k \cdot ft$, $M_{CD} = -25.2\ k \cdot ft$, $M_{DC} =$
$9.68\ k \cdot ft$, $M_{DE} = -9.68$, $M_{ED} = 0$

11–19. $M_{AB} = 5.56\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 11.1\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = -11.1\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 24.4\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -24.4\ k \cdot ft$, $M_{DC} = 11.1\ k \cdot ft$,
$M_{DE} = -11.1\ k \cdot ft$, $M_{ED} = -5.56\ k \cdot ft$

11–21. $M_{AB} = -464\ k \cdot ft$, $M_{BA} = -110\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = 110\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 155\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -155\ k \cdot ft$, $M_{DC} = -243\ k \cdot ft$

11–22. $M_{AB} = -19.5\ k \cdot ft$, $M_{BA} = -15.0\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = 15.0\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 20.1\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -20.1\ k \cdot ft$, $M_{DC} = -36.9\ k \cdot ft$

11–23. $M_{AB} = -2251\ k \cdot ft$, $M_{BA} = -493\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = 493\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 496\ k \cdot ft$,
$M_{CD} = -496\ k \cdot ft$

11–25. $M_{AB} = 25.3\ k \cdot ft$, $M_{DC} = -56.7\ k \cdot ft$

Capítulo 12

12–1. $C_{AB} = C_{BA} = 0.599$, $24.1(10^3)\ k \cdot ft$

12–2. $C_{AB} = C_{BA} = 0.451$, $7.21\ MN \cdot m$

12–3. $M_C = -26.4\ k \cdot ft$, $M_A = -26.9\ k \cdot ft$

12–5. $C_{BA} = 0.633$, $C_{AB} = 0.390$, $K_B = 104(10^3)\ k \cdot ft$,
$K_A = 163(10^3)\ k \cdot ft$

12–6. $C_{AB} = 1.92$, $K_A = 1.97(10^3)\ kN \cdot m$

12–7. $\theta_B = 0.609(10^{-3})$ rad.

12–9. $M_C = 5.16\ k \cdot ft$

12–10. $C_{AB} = 0.707$, $C_{BA} = 0.315$, $K_A = 10.8(10^3)\ k \cdot ft$,
$K_B = 24.1(10^3)\ k \cdot ft$

12–11. $M_{AB} = 113\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 151\ k \cdot ft$, $M_{BC} =$
$-151\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 461\ k \cdot ft$

12–13,14. $M_{AB} = 8.16\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 16.3\ k \cdot ft$, $M_{BC} =$
$-16.3\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 66.4\ k \cdot ft$

12–15. $M_{AB} = 1.75\ k \cdot ft$, $M_{BA} = 3.51\ k \cdot ft$, $M_{BC} =$
$-3.51\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 3.51\ k \cdot ft$, $M_{CD} = -3.51\ k \cdot ft$,
$M_{DC} = -1.75\ k \cdot ft$

12–17,18. $M_{AB} = 0$, $M_{BA} = -42.3\ k \cdot ft$, $M_{BF} = -44.7\ k \cdot ft$,
$M_{BC} = 87.1\ k \cdot ft$, $M_{CB} = 185\ k \cdot ft$,
$M_{CE} = 213\ k \cdot ft$, $M_{CD} = -398\ k \cdot ft$,
$M_{EC} = 106\ k \cdot ft$, $M_{FB} = -22.4\ k \cdot ft$,
$M_{DC} = 0$

12–19. $M_{AB} = 0$, $M_{BA} = 29.0\ k \cdot ft$, $M_{BC} = -29.0\ k \cdot ft$,
$M_{CB} = 29.0\ k \cdot ft$, $M_{CD} = -29.0\ k \cdot ft$, $M_{DC} = 0$

Capítulo 13

13–1. (a) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 8 & 1 & 13 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -4 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -11 \end{bmatrix}$

13–2. $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$

13–3. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

13–5. $\begin{bmatrix} -2 & 22 & 18 \\ 7 & -13 & 1 \\ 6 & -8 & 8 \end{bmatrix}$

13–6. $\begin{bmatrix} -21 & 4 & 2 \\ 37 & 2 & 0 \\ -35 & 22 & 12 \end{bmatrix}$

13–7. $\begin{bmatrix} 79 \\ -5 \end{bmatrix}$

13–9. $\begin{bmatrix} 72 \\ -3 \end{bmatrix}$

13–10. $\begin{bmatrix} 2 & 48 & 2 \\ 0 & 17 & 2 \\ -6 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

13–11. $\begin{bmatrix} 29 & 17 \\ 17 & 10 \end{bmatrix}$

13–14. $-33, -18$

13–15. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$

13–17. $\begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$

13–18. $x_2 = 0.25,\ x_3 = 0.75,\ x_1 = 0.75$

13–19. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Capítulo 14

14–1. $K_{11} = (510.7),\ K_{12} = 0,\ K_{13} = -201.4,\ K_{14} = 0,\ K_{15} = -154.7,\ K_{16} = -116,\ K_{17} = -154.7,\ K_{18} = 116$

14–2. 0.0230 in. ↓

14–3. $q_1 = -3.33$ k, $q_2 = 0$, $q_3 = 3.33$ k

14–5. $D_2 = -330$ lb·ft/AE, $q_1 = -2.83$ k

14–6. $K_{11} = 113.4,\ K_{12} = 28.8,\ K_{13} = -38.8,\ K_{14} = -28.8,\ K_{15} = 0,\ K_{16} = 0,\ K_{17} = -75,\ K_{18} = 0$

14–7. $q_6 = 729$ N

14–9. $q_1 = -2.83$ kN, $q_5 = 2.00$ kN

14–10. $K_{11} = 0.08019,\ K_{12} = 3.806(10^{-3}),\ K_{13} = -0.04419,\ K_{14} = 0.04419,\ K_{15} = 0,\ K_{16} = 0,\ K_{17} = -0.036,\ K_{18} = -0.048$

14–11. $q_1 = 4.52$ k, $q_2 = 1.20$ k, $q_3 = -3.00$ k

14–13. $D_2 = -6.89(10^{-3})$ in., $q_2 = 50.9$ lb

14–14. $K_{11} = 0.15(10^6),\ K_{12} = 0,\ K_{13} = 0,\ K_{14} = 0,\ K_{15} = -0.075(10^6),\ K_{16} = 0,\ K_{17} = -0.075(10^6),\ K_{18} = 0$

14–15. $D_2 = -0.540(10^{-6})$ m, $q_4 = 10.0$ kN

Capítulo 15

15–1. $M_1 = 18.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $M_3 = -20.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–2. $M_1 = 2.25\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $M_2 = 4.50\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–3. $M_2 = M_3 = 44.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–5. $F_1 = F_3 = 25.5\ \text{k}$, $F_2 = 21.0\ \text{k}$

15–6. $K_{11} = 130.9$, $K_{12} = 0$, $K_{13} = -7854.17$, $K_{14} = -130.9$, $K_{15} = 0$, $K_{16} = -7854.17$, $K_{17} = 0$, $K_{18} = 0$, $K_{19} = 0$

15–7. $D_1 = 0.761$ in., $D_2 = -0.423$ in., $D_3 = 6.84(10^{-3})$ rad

15–9. $D_1 = -0.406(10^{-3})$ in., $D_3 = 0.149(10^{-3})$ rad, $Q_6 = -0.818\ \text{k}$, $Q_7 = 3.05\ \text{k}$, $Q_8 = 0.818\ \text{k}$, $Q_9 = 1.95\ \text{k}$

15–10. Miembro 1, $k_{11} = 81.6$, $k_{12} = 0$, $k_{13} = -5874$, $k_{14} = -81.6$, $k_{15} = 0$, $k_{16} = -5874$; Miembro 2, $k_{11} = 6042$, $k_{12} = 0$, $k_{13} = 0$, $k_{14} = -6042$, $k_{15} = 0$, $k_{16} = 0$

15–11. $Q_7 = 17.0\ \text{k}$, $Q_8 = -5.00\ \text{k}$, $Q_9 = 7.00\ \text{k}$

15–13. $Q_5 = 77.4\ \text{kN}$, $Q_6 = -60.5\ \text{kN}$, $Q_7 = -77.4\ \text{kN}$, $Q_8 = 60.5\ \text{kN}$, $Q_9 = 129\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–14. Miembro 1, $k_{11} = 275$, $k_{12} = 0$, $k_{13} = -13216$, $k_{14} = -275$, $k_{15} = 0$, $k_{16} = -13216$; Miembro 2, $k_{11} = 4531$, $k_{12} = 0$, $k_{13} = 0$, $k_{14} = -4531$, $k_{15} = 0$, $k_{16} = 0$; Miembro 3, $k_{11} = 275$, $k_{12} = 0$, $k_{13} = -13216$, $k_{14} = -275$, $k_{15} = 0$, $k_{16} = -13216$

15–15. $Q_9 = -300\ \text{lb}$, $Q_{10} = 600\ \text{lb}$, $Q_{11} = -300\ \text{lb}$, $Q_{12} = -600\ \text{lb}$

15–17. $D_1 = 0.0783$ in., $Q_7 = -3.02\ \text{k}$, $Q_8 = -3.96\ \text{k}$, $Q_9 = 243\ \text{k}\cdot\text{in.}$, $Q_{10} = -2.98\ \text{k}$, $Q_{11} = 3.96\ \text{k}$, $Q_{12} = 240\ \text{k}\cdot\text{in.}$

Índice

Alma, 4
American Association of State Highway and Transportation Officials, 10, 14, 266 (Asociación Americana de Funcionarios del Transporte y Carreteras Estatales)
American Institute of Steel Construction, 10 (Instituto Americano de la Construcción en Acero)
American National Building Code, 10 (Código americano de construcción nacional)
American National Standards Institute, 10 (Instituto Americano de Normas Nacionales)
American Railway Engineering Association, 14, 267 (Asociación Americana de Ingeniería Ferroviaria)
Análisis, 2
Ángulo, 2
Arco, 7, 210
  de dos articulaciones, 210
  de tres articulaciones, 211
  empotrado, 210
Arco de tres articulaciones, 211
Armadura, 6
  compleja, 89, 122
  compuesta, 88, 116
  determinación, 89
  espacial, 126, 682
  estabilidad, 90
  línea de influencia, 259
  método de las fuerzas, 476
  métodos aproximados, 304
  plana, 6
  portal, 317
  principal, 89
  puente, 84
  secundaria, 89
  simple, 87
  techo, 81
  tipos, 88
Armadura abanico, 83
Armadura Baltimore, 85
Armadura compleja, 89, 112
Armadura compuesta, 88, 116
Armadura cuerda de arco, 83
Armadura de puente, 82
Armadura diente de sierra, 83
Armadura espacial, 126, 682
Armadura Fink, 82
Armadura Howe, 82
Armadura K, 84
Armadura Parker, 85
Armadura Pratt, 82, 84
Armadura simple, 87
Armadura tijera, 83
Armadura Warren, 82, 84
Arriostramiento de rodilla, 82
Atirantador, 26

Barra, 2
Barras de refuerzo, 5
Bernoulli, J., 385

Cable, 7, 197
  cargas concentradas, 198
  carga distribuida, 202
Canal, 2
Carga de nieve, 17
Carga de viento, 16
Carga hidrostática, 19
Cargas, 9
  axial, 86
  cortante, 148
  edificio, 13
  en dos direcciones, 38
  en una dirección, 34
  impacto, 267
  interna, 147
  lateral, 320, 326
  muerta, 10
  natural, 19
  nieve, 17
  puente, 14
  sismo, 17
  suelo, 19
  tributaria, 34
  vertical, 310
  viento, 16
  viva, 13
Cargas de sismo, 17
Cargas internas, 147
Cargas muertas, 10
Cargas tributarias, 34
Cascarón, 8
Castigliano, A., 417
Catenaria, 204
Clapeyron, 484

Códigos
de construcción, 9
de diseño, 9
Columna, 5
Combeo, 389
Compatibilidad
condiciones, 453
ecuaciones, 455
Compresión, 84
Condiciones de continuidad, 348
Condiciones de frontera, 348
Conexión, 25
Construcción, 2
Convención de signos, 148
Cooper, T., 267
Cross, H., 563
Cubierta, 84
Cuerda, 82
Curva elástica, 341

Desplazamiento lateral, 545, 588
Desplazamientos recíprocos, 458
Determinada, 42, 126, 643
Diagrama de cuerpo libre, 54
Diagramas
de deflexión, 341
de fuerza cortante, 159, 176
de momento, 159, 176, 184
Diagramas de deflexión, 341
Diseño, 2, 42
Distribución de momentos, 563

Ecuación de los tres momentos, 484
Ecuaciones pendiente-desviación, 520
marcos, 359, 545
miembros no prismáticos, 628
vigas, 520
Ecuación pivote, 649
Elemento finito, 654
Elementos, 2
Empotramiento, 3
Energía de deformación, 381
carga axial, 383
cortante, 427
momento, 384
torsión, 427
Envolvente de valores, 283
Equilibrio, 41
ecuaciones, 41
Error de fabricación, 389
Eslabón, 28

Estabilidad, 50, 126
externa, 90, 127
interna, 90, 127
Estáticamente determinada, 42
Estáticamente indeterminada, 43
Estructura, 1
clasificación, 2
colapsable, 56
elementos, 2
idealizada, 25
no colapsable, 56
superficial, 8
tipos, 6
Estructura idealizada, 30
Estructura primaria, 453
Estructuras compuestas, 479

Factor de distribución, 566
Factor de forma, 410
Factor de transporte, 567
Flexibilidad
coeficiente, 453
método, 452
Fuerza cortante, 148
diagramas, 159, 176
funciones, 153
Fuerza normal, 148

Grados de libertad, 518, 655, 689
Grúa de pescante, 30

Handbook of Frame Constants, 618
(Manual de Constantes para Marcos)
Hipótesis de Euler-Bernoulli, 345

Impacto
cargas, 267
factor, 267
Indeterminada, 43
Inestabilidad, 54
Inversa de una matriz, 646

Largueros, 81
Ley de Betti, 459
Líneas de influencia, 223
armaduras, 259
cualitativas, 242, 504
cuantitativas, 224
ecuaciones, 224
envolvente, 283
trabes de piso, 254
vigas, 235, 494
Losa, 32

Manderla, H., 520
Maney, G., 520
Mapa de zonas de viento, 16
Marco, 8
diagrama de fuerza cortante, 176
diagrama de momentos, 176
distribución de momentos, 585, 588
matriz de rigidez de miembro, 691
método de las fuerzas, 471
método del trabajo virtual, 379
método pendiente-desviación, 539, 545
teorema de Castigliano, 426
Marcos de niveles múltiples, 598
Matriz cero, 637
Matriz de rigidez, 657, 663, 697, 698
Matriz unitaria, 137
Matriz, 635
columna, 636
cuadrada, 636
diagonal, 637
identidad, 637
igualdad, 638
inversa, 646
multiplicación, 638, 639
nula, 637
orden, 636
renglón, 636
resta, 638
simétrica, 637
subdivisión, 642
suma, 638
transformación de la fuerza, 662, 695
transformación del desplazamiento, 660, 694
transpuesta, 641
unitaria, 637
Matriz cuadrada, 636
Matriz de rigidez global, 663, 696, 697
Matriz de transformación, 569
Matriz de transformación de desplazamientos, 660, 694
Matriz de transformación de fuerza, 662, 695
Matriz diagonal, 637
Matriz identidad, 637

Matriz renglón, 636
Matriz simétrica, 637
Maxwell, J. C., 452, 458
Mecedora, 28
Método
  miembros sustitutos, 122
  nudos, 98
  portal, 320
  secciones, 107, 147
  trabajo mínimo, 417
  viga conjugada, 370
  voladizo o cantilever, 326
Método de Gauss, 649
Método de la doble integración, 347
Método de la rigidez
  armaduras, 653
  marcos, 687
  vigas, 687
Método de las fuerzas, 452, 482
Método de la viga conjugada, 370
Método de las secciones, 107, 147
Método de los desplazamientos, 452, 517, 563
Métodos aproximados, 303
  armaduras, 304
  cargas laterales, 320, 326
  cargas verticales, 310
  portales, 314, 320
  voladizo, 326
Miembro
  fuerza cero, 104
  matriz de rigidez, 658
  primario, 261
  rigidez, 564
  secundario, 263
  sistema coordenado, 655, 688
Miembros de fuerza cero, 104
Miembros no prismáticos, 607
  distribución de momentos, 621
  ecuaciones pendiente-desviación, 628
  tablas, 619, 620
  viga conjugada, 610
Mohr, O., 452, 520
Momento, 147
  diagramas, 159, 176, 184
  funciones, 153
  trabajo, 383
Momento flexionante, 147
  diagrama, 159, 176, 184
  función, 153
Momentos de empotramiento, 524, 564
Müller-Breslau, 244, 452, 494

Nodos, 654, 687
Nudo, 26
  conectado por pasador, 26
  empotrado, 26
  método, 98
  rigidez, 565
Nudo de rótula esférica, 128
Números de código, 656

Orden, 626

Pasador, 27
Patín, 4
Placa, 8
Placa de empalme, 5
Placa de nudo, 88
Planeación, 1
Portal
  marco, 314
  método, 320
Pórtico, 81
Portland Cement Association, 618
Presión, 16
  miembro, 261
Principio del trabajo virtual, 385
Principio del trabajo y la energía, 384
Principio de superposición, 38
Puente carretero, 266
Puente ferrocarrilero, 267
Puntales de arriostramiento, 84

Restricciones, 50
Restricciones impropias, 50
Restricciones parciales, 50
Rigidez, 525
  coeficiente, 452
  miembros no prismáticos, 621
  modificaciones, 578
Rigidez relativa, 567
Rodillo, 28

Sistema coordenado
  global, 655, 688
  local, 655, 688
Sistema global de coordenadas, 655, 688
Sistema local de coordenadas, 655, 688
Soporte, 28
  tipo, 28
Steinmann, D. B., 267
Superposición, 38

Tablero, 84
  cortante, 254, 305
  punto, 254
Temperatura, 389, 412
Tensión, 86
Teorema de Castigliano, 417
  armaduras, 419
  marcos, 426
  viga, 426
Teorema de Maxwell, 458
Teoremas área-momento, 354
Teoría de la viga elástica, 345
Tetraedro 126
Tirantes, 2
Trabajo
  externo, 381
  fuerza axial, 381
  interno, 381
  momento, 383
  virtual, 385
Trabajo virtual, 186
  armaduras, 388
  carga axial, 410
  cortante, 410
  flexión, 398
  marcos, 397
  temperatura, 412
  torsión, 411
  vigas, 397
Trabe, 32
  concreto, 4
  línea de influencia, 254
  piso, 254
Trabe acartelada, 4
Trabe armada, 4
Transpuesta de una matriz, 641

Uniform Building Code, 10

Varilla, 2
Viga, 3
  acartelada, 4
  ahusada, 4
  alma, 4
  American Standard, 4
  compuesta, 4
  conjugada, 370
  continua, 3

de concreto, 5
de madera, 6
de patín ancho, 4
de piso, 254
empotrada, 3
laminada, 5
línea de influencia, 235, 494
simplemente apoyada, 3
Viga de piso, 224
Viga columna, 6
Viga laminada, 5
Viga longitudinal, 84
Vigas de patín ancho, 4
Viga simplemente apoyada, 3
Vigueta, 32
Voladizo (cantilever)
método del, 326
viga, 3

LEA CON DETENIMIENTO LOS TÉRMINOS Y CONDICIONES SIGUIENTES ANTES DE ABRIR EL PAQUETE DEL DISQUETE. EL HECHO DE ABRIR EL PAQUETE INDICA QUE USTED ACEPTA ESTOS TÉRMINOS Y CONDICIONES. SI USTED NO ESTÁ DE ACUERDO CON ELLOS, DEBERÁ DEVOLVER DE INMEDIATO EL PAQUETE SIN ABRIR, Y SE LE REEMBOLSARÁ SU DINERO.

ES UNA VIOLACIÓN DE LAS LEYES DE DERECHOS DE AUTOR HACER COPIAS DEL SOFTWARE ACOMPAÑANTE EXCEPTO PARA FINES DE RESPALDO E INSTALACIÓN COMO PROTECCIÓN CONTRA PÉRDIDA O DAÑOS ACCIDENTALES.

Prentice-Hall, Inc. proporciona este programa y otorga licencias para su uso. Usted asume la responsabilidad por la selección del programa para obtener los resultados que desea, y por la instalación, uso y resultados obtenidos del programa. Esta licencia se extiende sólo al uso del programa en Estados Unidos o en los países en los que el programa sea comercializado por distribuidores debidamente autorizados.

LICENCIA

Usted puede:

a. usar el programa;
b. copiar el programa en cualquier forma legible por máquina sin limitación;
c. modificar el programa y/o mezclarlo junto con otro programa, como apoyo del uso que usted haga del programa.

GARANTÍA LIMITADA

EL PROGRAMA SE PROPORCIONA "COMO ESTÁ", SIN GARANTÍA EXPRESA O IMPLÍCITA DE NINGÚN TIPO, LO QUE INCLUYE, AUNQUE NO ESTÁ LIMITADO A, LAS GARANTÍAS IMPLÍCITAS DE COMERCIABILIDAD E IDONEIDAD PARA UN PROPÓSITO ESPECÍFICO. USTED ASUME TODO EL RIESGO EN CUANTO A LA CALIDAD Y DESEMPEÑO DEL PROGRAMA. SI EL PROGRAMA RESULTARA DEFECTUOSO, USTED (Y NO PRENTICE-HALL, INC. NI NINGÚN DISTRIBUIDOR AUTORIZADO) ASUMIRÁ EL COSTO TOTAL POR CUALQUIER SERVICIO, REPARACIÓN O CORRECCIÓN QUE FUERE NECESARIO.

ALGUNOS ESTADOS NO PERMITEN LA EXCLUSIÓN DE GARANTÍAS IMPLÍCITAS, ASÍ QUE LA EXCLUSIÓN ANTERIOR TAL VEZ NO SE APLIQUE A USTED. ESTA GARANTÍA LE CONFIERE DERECHOS LEGALES ESPECÍFICOS, Y ES POSIBLE QUE USTED TENGA OTROS DERECHOS QUE VARÍAN DE UN ESTADO A OTRO.

Prentice-Hall, Inc. no garantiza que las funciones contenidas en el programa satisfarán las necesidades del usuario, ni que el funcionamiento del programa será ininterrumpido y libre de errores.

Sin embargo, Prentice-Hall, Inc. garantiza que el disco en el que el programa se suministra está libre de defectos en materiales y fabricación sometido a uso normal durante un periodo de noventa (90) días a partir de la fecha en que le sea entregado a usted, lo que se comprobará con una copia de su recibo.

LIMITACIONES Y REMEDIOS

La responsabilidad total de Prentice-Hall y el remedio exclusivo de usted será:

1. el reemplazo de cualesquier disquete que no satisfaga la "Garantía Limitada" de Prentice-Hall y que sea devuelto a Prentice-Hall junto con una copia de su orden de compra, o
2. si Prentice-Hall no puede entregar un disquete o casete de reemplazo que esté libre de defectos en materiales o fabricación, usted podrá dar por terminado este Convenio devolviendo el programa, y su dinero le será reembolsado.

EN NINGÚN CASO PRENTICE-HALL SERÁ RESPONSABLE ANTE USTED POR CUALESQUIER PERJUICIOS, INCLUIDA LA PÉRDIDA DE UTILIDADES, PÉRDIDA DE AHORROS U OTROS PERJUICIOS INCIDENTALES O CONSECUENTES QUE SURJAN POR EL USO O INCAPACIDAD DE USAR EL PROGRAMA, INCLUSO SI SE HA ADVERTIDO A PRENTICE-HALL O A UN DISTRIBUIDOR AUTORIZADO DE LA POSIBILIDAD DE TALES PERJUICIOS, O POR CUALQUIER RECLAMACIÓN DE TERCEROS.

ALGUNOS ESTADOS NO PERMITEN LA LIMITACIÓN O EXCLUSIÓN DE RESPONSABILIDAD POR PERJUICIOS INCIDENTALES O CONSECUENTES, ASÍ QUE LA LIMITACIÓN O EXCLUSIÓN ANTERIOR PODRÍA NO APLICARSE A USTED

GENERALIDADES

Usted no puede otorgar sublicencias, asignar o transferir la licencia del programa excepto en los casos previstos por el presente Convenio. Cualquier intento no contemplado de otorgar sublicencias, asignar o transferir cualquiera de los derechos, deberes u obligaciones aquí asentados es nulo.

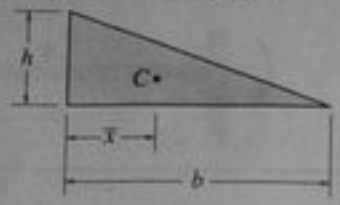
Este Convenio se regirá por las leyes del Estado de Nueva York. Si usted tiene alguna duda respecto al presente Convenio, puede ponerse en contacto con Prentice-Hall, Inc. escribiendo a:

Prentice-Hall
College Division
Upper Saddle River, NJ 07458

USTED ACEPTA QUE HA LEÍDO ESTE CONVENIO, LO ENTIENDE Y ESTÁ DE ACUERDO EN AJUSTARSE A SUS TÉRMINOS Y CONDICIONES. ADEMÁS, USTED CONVIENE EN QUE ES LA EXPRESIÓN COMPLETA Y EXCLUSIVA DEL ACUERDO ENTRE NOSOTROS QUE SUSTITUYE A CUALQUIER PROPUESTA O CONVENIO PREVIO, ORAL O ESCRITO, Y CUALQUIER OTRA COMUNICACIÓN ENTRE NOSOTROS RELACIONADA CON EL ASUNTO MATERIA DE ESTE CONVENIO

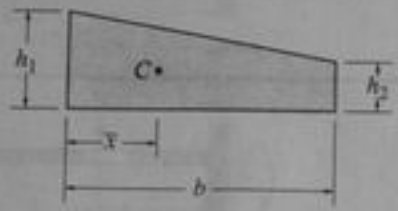
ISBN: 0-13-493370-2

Propiedades geométricas de las áreas



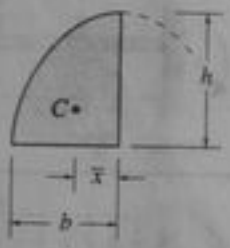
$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$\bar{x} = \frac{1}{3}b$$

Triángulo



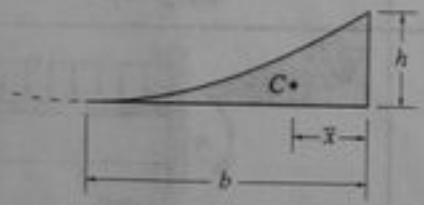
$$A = \frac{1}{2}b\,(h_1 + h_2)$$
$$\bar{x} = \frac{b\,(2h_2 + h_1)}{3\,(h_1 + h_2)}$$

Trapezoide



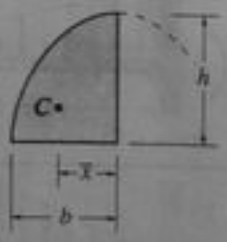
$$A = \frac{2}{3}bh$$
$$\bar{x} = \frac{3}{8}b$$

Semiparábola



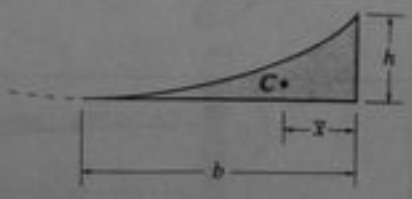
$$A = \frac{1}{3}bh$$
$$\bar{x} = \frac{1}{4}b$$

Timpano semiparabólico



$$A = bh\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$\bar{x} = \frac{b\,(n+1)}{2\,(n+2)}$$

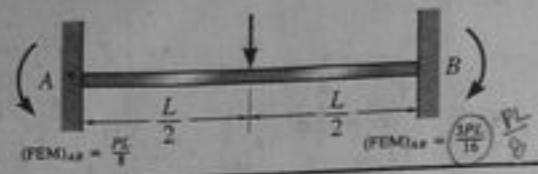
Semisegmento de curva de n-ésimo grado



$$A = bh\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\bar{x} = \frac{b}{(n+2)}$$

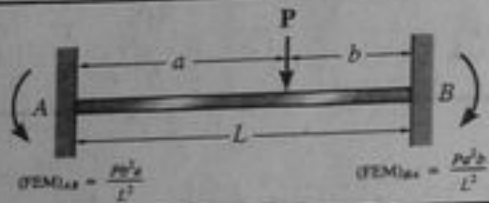
Timpano de curva de n-ésimo grado

Momentos de extremo fijo

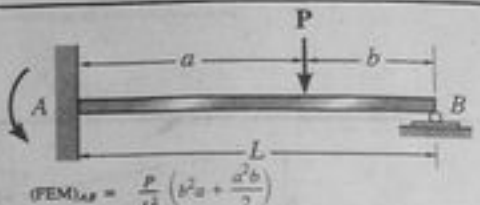


$(FEM)_{AB} = \frac{PL}{8}$ $(FEM)_{BA} = \frac{3PL}{16}$ $\frac{PL}{8}$

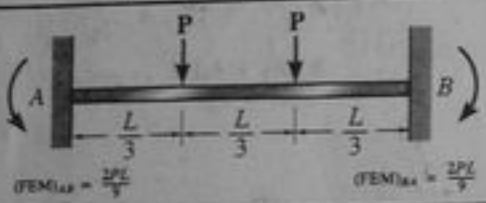
$(FEM)_{AB} = \frac{PL}{8}$



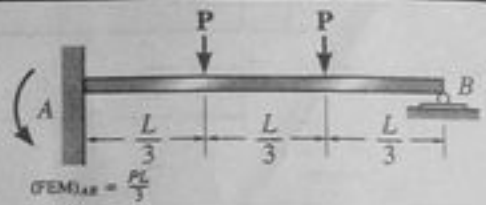
$(FEM)_{AB} = \frac{Pab^2}{L^2}$ $(FEM)_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$



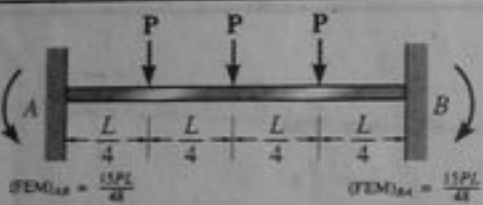
$(FEM)_{AB} = \frac{P}{L^2}\left(b^2a + \frac{a^2b}{2}\right)$



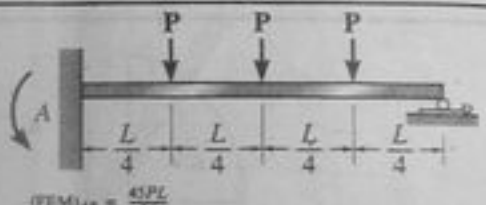
$(FEM)_{AB} = \frac{2PL}{9}$ $(FEM)_{BA} = \frac{2PL}{9}$



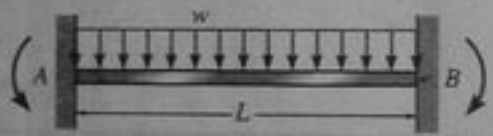
$(FEM)_{AB} = \frac{PL}{3}$



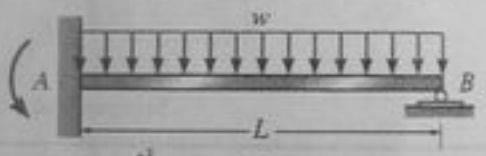
$(FEM)_{AB} = \frac{15PL}{48}$ $(FEM)_{BA} = \frac{15PL}{48}$



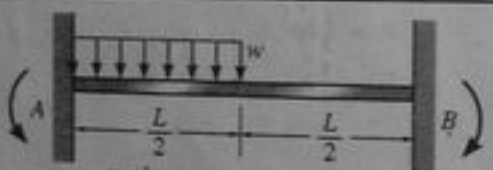
$(FEM)_{AB} = \frac{45PL}{96}$



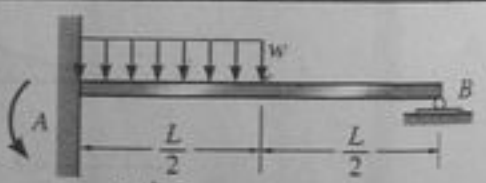
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{12}$ $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12}$



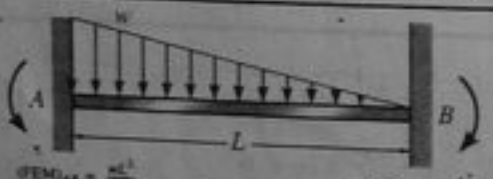
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{8}$



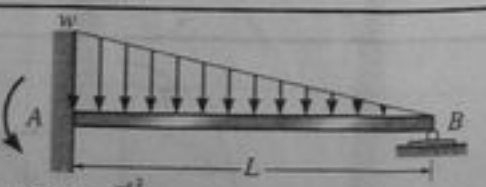
$(FEM)_{AB} = \frac{11wL^2}{192}$ $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$



$(FEM)_{AB} = \frac{9wL^2}{128}$



$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{20}$ $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{30}$



$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{15}$

$(FEM)_{AB} = \frac{5wL^2}{96}$ $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{96}$

$(FEM)_{AB} = \frac{5wL^2}{64}$

$(FEM)_{AB} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$ $(FEM)_{BA} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$

$(FEM)_{AB} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$

suelo y sufrirá sólo ligeros desplazamientos relativos. Para una estructura esto es benéfico, ya que se desarrollan menores esfuerzos en los miembros. Por otra parte, si la columna es muy flexible y el bloque tiene una gran masa, entonces el movimiento inducido por el sismo causará pequeñas aceleraciones del bloque y grandes desplazamientos relativos.

En la práctica, los efectos de la aceleración, velocidad y desplazamiento de una estructura pueden determinarse y representarse como un *espectro de respuesta sísmica*. Una vez establecida esta gráfica, las cargas sísmicas pueden calcularse usando un *análisis dinámico* basado en la teoría de la dinámica estructural. Este análisis es a menudo muy elaborado y requiere el uso de una computadora. Aunque éste puede ser el caso, tal análisis es obligatorio si la estructura es muy grande.

Algunos códigos requieren que se preste atención específica al diseño sísmico, especialmente en zonas en que predominan sismos de gran intensidad. Además, tales cargas deben considerarse seriamente al diseñar edificios de gran altura o plantas de energía nuclear. Para evaluar la importancia del diseño sísmico, puede consultarse un mapa sísmico publicado en ANSI A58.1–1982. Este mapa divide a Estados Unidos en cinco zonas, y en cada una se especifica la magnitud del riesgo probable. La escala varía entre 0 (bajo riesgo, como en algunas partes de Texas) y 4 (riesgo muy alto, como a lo largo de la costa de California).

Para estructuras pequeñas, un *análisis estático* de diseño sísmico puede ser satisfactorio. Este método aproxima las cargas dinámicas mediante un conjunto de *fuerzas estáticas* externas que se aplican lateralmente a la estructura. Una fórmula para hacer esto se da en ANSI A58.1–1982; sirve para determinar el "cortante basal" V en la estructura y puede escribirse como

$$V = ZIKCSW \tag{1–3}$$

Aquí, los términos representan factores que están tabulados en el código ANSI y dependen de la zona sísmica (Z), de la importancia del edificio respecto a la ocupación (I), de su configuración estructural (K), de sus características vibratorias (C), del tipo de suelo que soporta a la estructura (S) y del peso de ésta (W). Con cada nueva publicación del código ANSI, los valores de esos coeficientes se actualizan al obtenerse datos más precisos sobre la respuesta sísmica.

Presión hidrostática y presión del suelo. Cuando las estructuras se usan para retener agua, suelo o materiales granulares, la presión desarrollada por esas cargas es un criterio importante para su diseño. Ejemplos de tales tipos de estructuras son los tanques, presas, barcos, malecones y los muros de contención. Las leyes de la hidrostática y de la mecánica de suelos se aplican para definir la intensidad de las cargas sobre la estructura.