

# Balances de Masa

CI4102 Ingeniería Ambiental  
Profesor Marcelo Olivares A.

# Principio de Conservación de Masa

El concepto de **continuidad o de conservación de masa** es uno de los más fundamentales en ingeniería.

“...la masa no se crea ni se destruye, sólo se transforma...”

Este concepto establece que para un sistema sin almacenamiento, la masa de las sustancias que entran debe ser igual a la masa de las sustancias que salen de él.

$$\textit{entradas} = \textit{salidas}$$

Si el material se acumula dentro del sistema tenemos que:

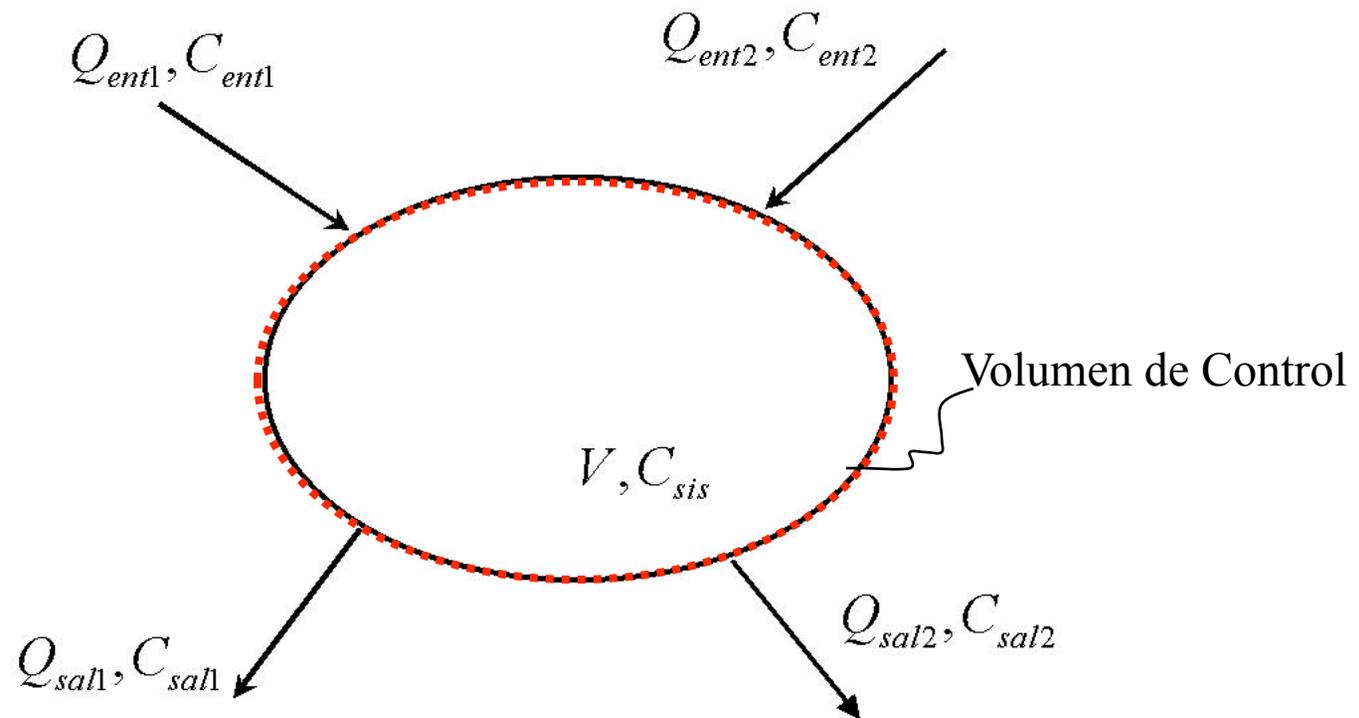
$$\textit{variación} = \textit{entradas} - \textit{salidas}$$

Finalmente, el caso más general se tiene cuando el material es producido o consumido dentro del sistema con lo cual:

$$\textit{variación} = \textit{entradas} - \textit{salidas} + \textit{producción} - \textit{consumo}$$

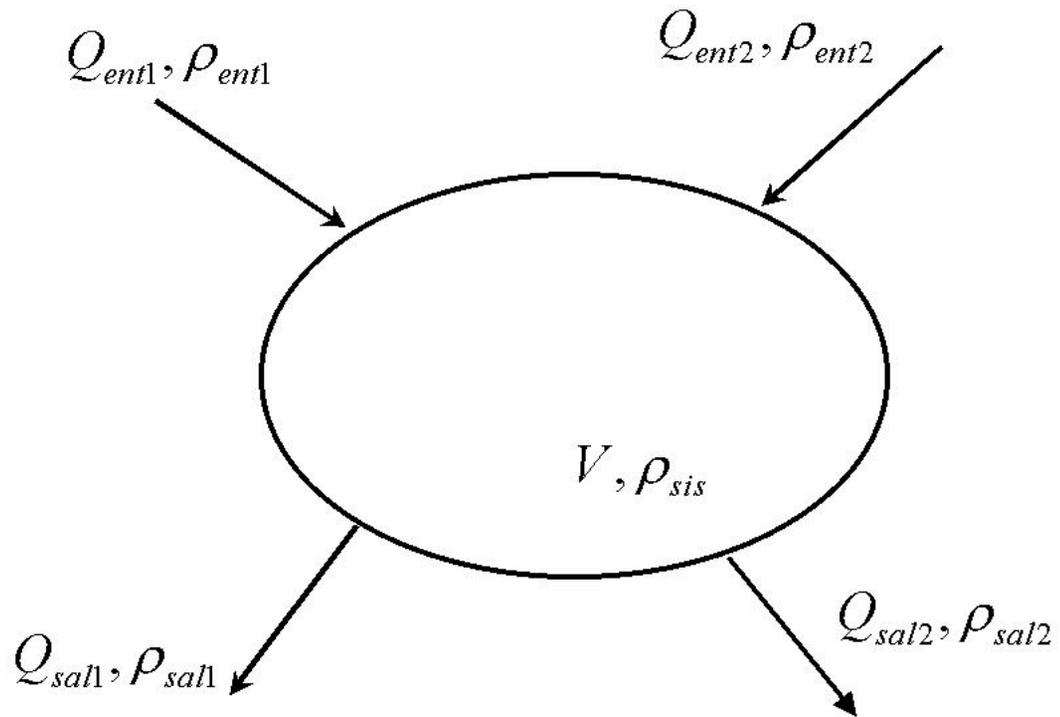
# Volumen de Control

Supongamos un sistema que intercambia masa con su entorno, tal como se indica en la figura siguiente:



# Balance Volumetrico

Consideramos que en el problema anterior la concentración  $C$  se reemplaza más bien por la densidad del fluido.



# Balance Volumetrico

Si consideramos la densidad del fluido es posible escribir la siguiente ecuación diferencial para la conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho_{sis}) = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot \rho_{ent,i} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot \rho_{sal,j}$$

Esta ecuación se puede extender en su lado izquierdo:

$$V \cdot \frac{d\rho_{sis}}{dt} + \rho_{sis} \cdot \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot \rho_{ent,i} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot \rho_{sal,j}$$

Si la densidad es constante (fluido incompresible) se obtiene la ecuación de balance volumétrico:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j}$$

Finalmente, si la densidad y el volumen son constantes se obtiene la *ecuación de continuidad* de la hidráulica fundamental:

$$\sum_{i=1}^N Q_{ent,i} = \sum_{j=1}^M Q_{sal,j}$$

# Sustancias Conservativas

Para un componente **conservativo** es posible escribir la siguiente ecuación diferencial basada en la conservación de masa:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot C_{sis}) = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j}$$

Si consideramos que el volumen al interior del sistema se mantiene constante, la ecuación anterior se puede escribir como:

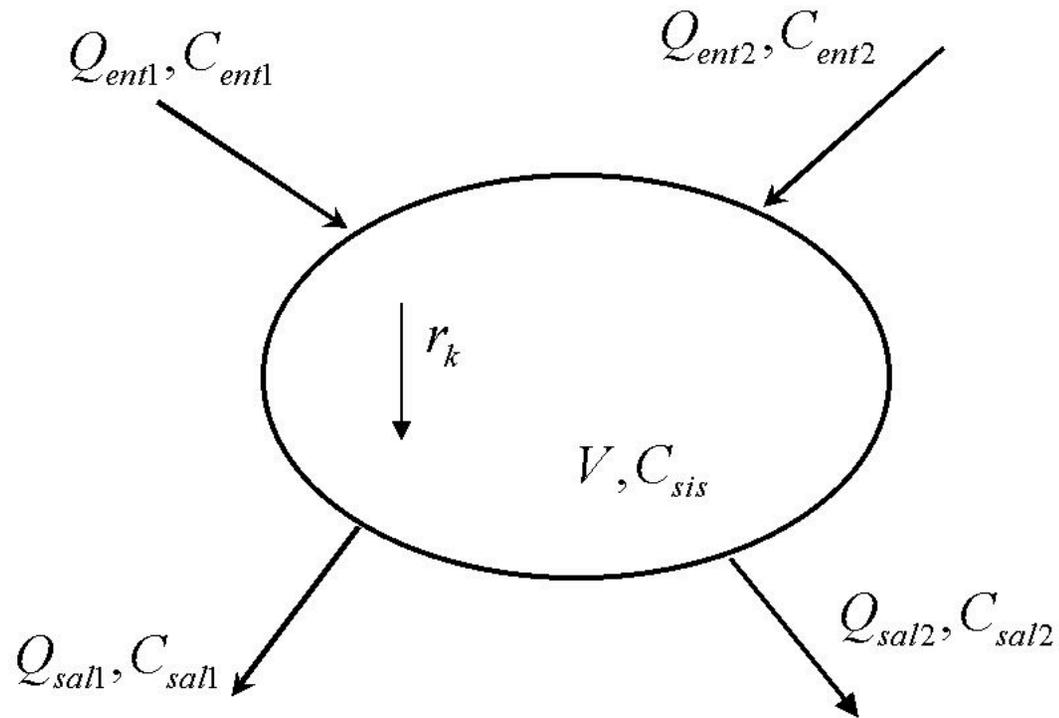
$$\frac{dC_{sis}}{dt} = \frac{1}{V} \cdot \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} - \frac{1}{V} \cdot \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j}$$

Para condiciones estacionarias o de régimen permanente la derivada temporal en la ecuación es igual a cero y todos los valores de Q y C son constantes:

$$\sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} = \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j}$$

# Sustancias No Conservativas

Supongamos un sistema que intercambia masa con su entorno, tal como se indica en la figura siguiente, en el cual un compuesto se degrada a una tasa  $r_k$ :



# Sustancias No Conservativas

Para un componente **no conservativo** (es decir que sufre algún tipo de reacción química o degradación), es posible escribir la siguiente ecuación diferencial basada en la conservación de masa:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot C_{sis}) = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j} + \sum_{k=1}^L V \cdot r_k$$

donde  $r_k$  representa la tasa a la cual se desarrolla cualquier tipo de reacción, fuente o sumidero dentro del sistema.

Las unidades de  $r_k$  son del tipo  $M L^{-3} T^{-1}$ .

Las reacciones pueden ser positivas o negativas, lo que depende del tipo de reacción que se considere.

# Sustancias No Conservativas

Si suponemos una situación de régimen permanente para el balance másico y el balance volumétrico es posible escribir la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j} + \sum_{k=1}^L V \cdot r_k = 0$$

la que permite determinar la concentración de equilibrio del contaminante no conservativo.

En muchos casos el *consumo* puede ser modelado como una reacción de primer orden, en la cual se supone que la tasa de consumo es proporcional a la concentración del material presente en el sistema.

$$tasa \ de \ reacción = r = k \cdot C$$

# Ecuaciones de Balance

En términos generales un problema de balance de masas estará constituido por una ecuación de balance volumétrico más una ecuación de balance másico para cada una de las especies o parámetros de calidad que se requiera:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j}$$

$$\frac{d}{dt} (V \cdot C_{sis,1}) = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i,1} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j,1} + \sum_{k=1}^L V \cdot r_1$$

$$\frac{d}{dt} (V \cdot C_{sis,2}) = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i,2} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j,2} + \sum_{k=1}^L V \cdot r_2$$

$$\frac{d}{dt} (V \cdot C_{sis,3}) = \sum_{i=1}^N Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i,3} - \sum_{j=1}^M Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j,3} + \sum_{k=1}^L V \cdot r_3$$

## **EJEMPLO 1**

### **Unión de Tributario y Río.**

Considere que un río con un caudal de  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  recibe un tributario con un flujo de  $5 \text{ m}^3/\text{s}$ .

La concentración de cloro en el río, aguas arriba de la descarga es  $20 \text{ mg/L}$ , mientras que el tributario tiene  $5 \text{ mg/L}$ .

Asuma que se produce una mezcla completa entre el río y el tributario, y que el cloro es una sustancia conservativa.

Determine el caudal y la concentración de cloro en el río aguas abajo de la descarga.

## **EJEMPLO 2**

### **Dispositivo de Control de Contaminación.**

Considere un dispositivo de control de contaminación (membrana) que está procesando un caudal de 3.0 l/s de residuo líquido con una concentración de contaminante de 102 mg/l.

Si deseamos producir un caudal de producto tratado de 2.8 l/s, con una concentración de no más de 9 mg/l, determine la cantidad y calidad del líquido de descarte.

### **EJEMPLO 3**

#### **Contaminación Intradomiciliaria.**

Una casa tiene una tasa de ventilación de  $100 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Una estufa de parafina se usa dentro de esta casa, la cual emite  $500 \text{ g/h}$  de  $\text{CO}_2$ .

¿Cuál es la concentración promedio de  $\text{CO}_2$  dentro de la casa?

Nota: la concentración de  $\text{CO}_2$  en el aire seco es  $310 \text{ ppm}$ .  
Considere el aire seco a  $20^\circ\text{C}$  y  $1 \text{ atmósfera}$ .

## EJEMPLO 4

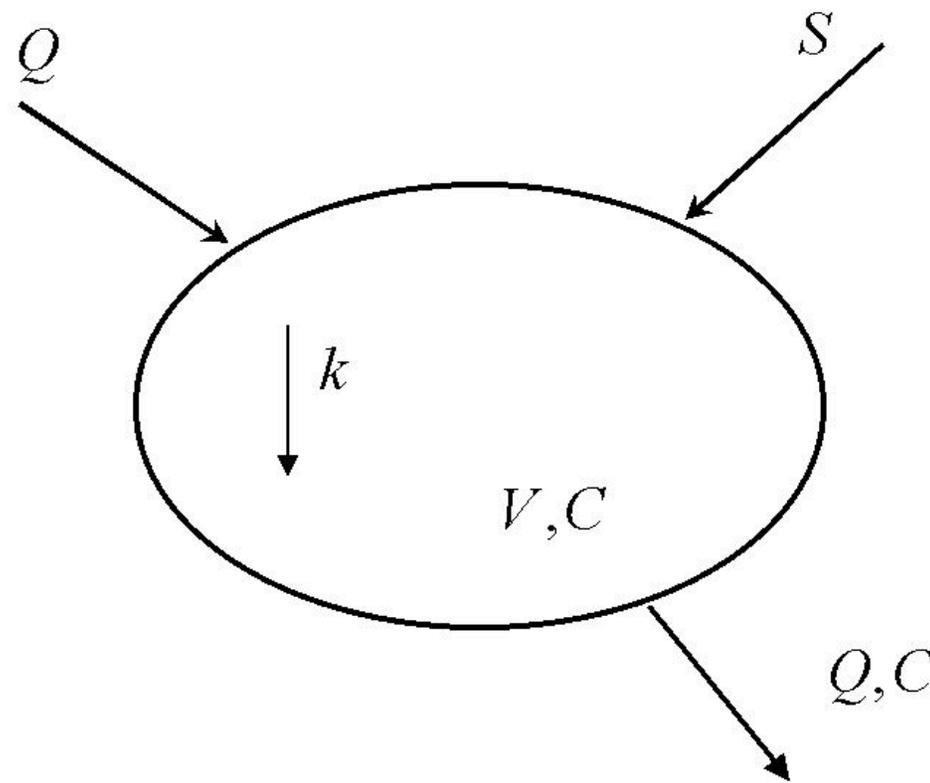
### Un Lago Contaminado.

Considere un lago con un volumen de  $10.0 \times 10^6 \text{ m}^3$  que es alimentado por un río con un caudal constante e igual a  $5.0 \text{ m}^3/\text{s}$  y una concentración de un contaminante no conservativo igual a  $10.0 \text{ mg/L}$ . Existe un sistema de alcantarillado descargando a este lago un caudal de  $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$  con una concentración de contaminante igual a  $200 \text{ mg/L}$ . La tasa de decaimiento o consumo de este contaminante,  $k$ , es igual a  $0.20 \text{ 1/día}$ .

Suponiendo que existe una mezcla completa en este lago y que no hay pérdidas por evaporación o infiltración determine la concentración de equilibrio en el lago.

# Regimen Transiente

Consideremos un sistema que se encuentra en equilibrio y que bruscamente cambia esa situación debido a la incorporación o eliminación de una entrada al sistema:



# Regimen Transiente

En este caso podemos suponer una situación de **régimen permanente para el flujo** (Volumen es constante), condiciones de **mezcla completa** y una tasa de reacción de primer orden para escribir:

$$V \cdot \frac{dC}{dt} = S - Q \cdot C - k \cdot C \cdot V$$

donde  $S$  es la tasa a la cual los contaminantes entran al sistema a partir del tiempo  $t=0$ . Para efectos de este análisis se requiere la condición del sistema al inicio de la descarga  $S$ , la que supondremos igual a  $C_0$ .

Si suponemos una situación de largo plazo en la cual la descarga ha continuado sin cambios, se puede escribir:

$$C_{\infty} = \frac{S}{Q + k \cdot V}$$

# Regimen Transiente

Reordenemos la ecuación de balance original:

$$V \cdot \frac{dC}{dt} = S - Q \cdot C - k \cdot C \cdot V$$

lo que nos permite escribir:

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q + k \cdot V}{V} \cdot \left( C - \frac{S}{Q + k \cdot V} \right)$$

donde podemos reconocer la concentración de largo plazo:

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q + k \cdot V}{V} \cdot (C - C_{\infty})$$

Una forma de resolver esta ecuación diferencial es con el cambio de variable:

$$y = C - C_{\infty} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dC}{dt}$$

# Regimen Transiente

Reemplazando obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{Q + k \cdot V}{V} \cdot y = -\alpha \cdot y$$

que es una ecuación diferencial muy simple que puede ser resuelta para obtener, luego de incorporar las condiciones iniciales:

$$y = y_0 \cdot e^{-(k+Q/V) \cdot t}$$

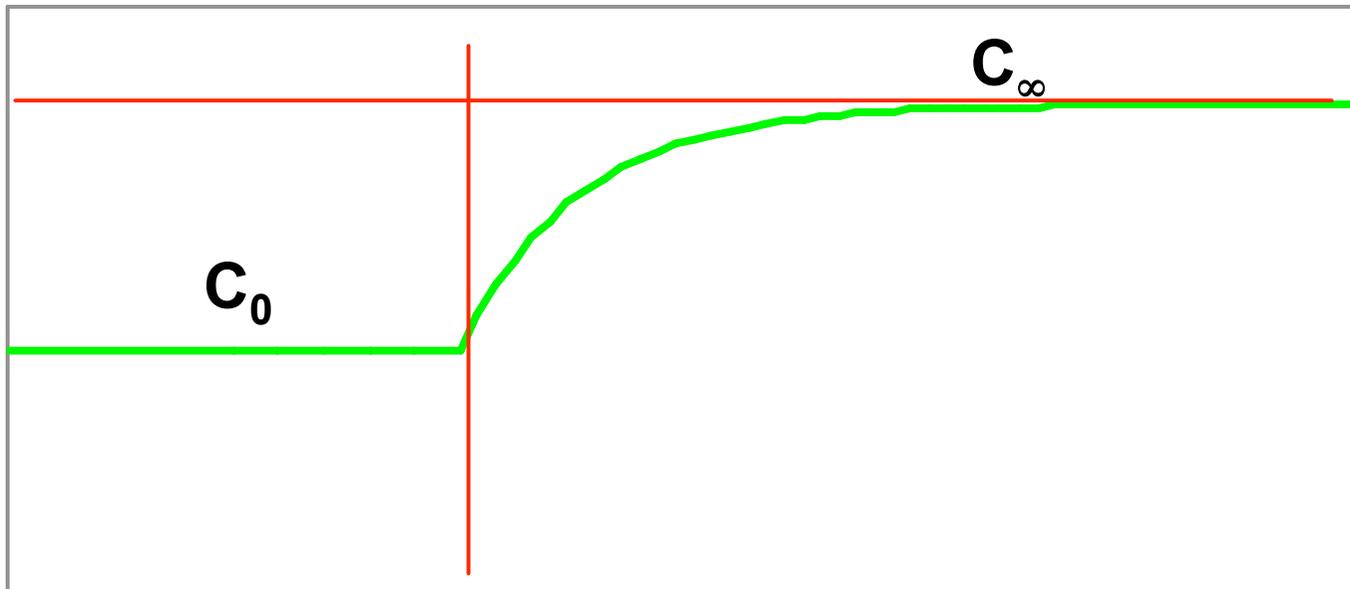
en donde  $y_0$  es el valor de  $y$  en  $t=0$ . Si la concentración en el sistema para  $t=0$  es  $C_0$  obtenemos para  $y_0$ :

$$y_0 = C_0 - \frac{S}{Q + k \cdot V}$$

# Regimen Transiente

Finalmente obtenemos la siguiente expresión para la concentración en el sistema modelado:

$$C(t) = [C_0 - C_\infty] \cdot e^{-(k+Q/V) \cdot t} + C_\infty$$



# Regimen Transiente

## EJEMPLO 6

### Cambio en la Concentración de Contaminante Descargado a un Lago.

Consideremos el caso presentado en el EJEMPLO 4. Supongamos que la situación de equilibrio ha sido considerada muy mala por lo cual se ha decidido cortar completamente la descarga de alcantarillado hacia el lago de tal manera de disminuir los problemas de contaminación.

Suponiendo que el resto de las condiciones se mantienen determine la **concentración en el lago una semana luego de cortar la descarga** del alcantarillado. Calcule además la **nueva concentración de equilibrio**.

# Regimen Transiente

## EJEMPLO 8

### Mezcla con Acumulación.

Un tanque de mezcla contiene  $30 \text{ m}^3$  de agua limpia. Una descarga de desechos conteniendo  $2 \text{ kg/m}^3$  de contaminante A es incorporada al estanque a una tasa de  $3 \text{ m}^3/\text{min}$ . La salida desde el estanque se estima igual a  $1 \text{ m}^3/\text{min}$ .

Suponga que la mezcla dentro del estanque es completa.

Calcular la concentración de contaminante A en el efluente cuando el tanque contiene  $50 \text{ m}^3$  de solución. Suponga que el contaminante es no reactivo.

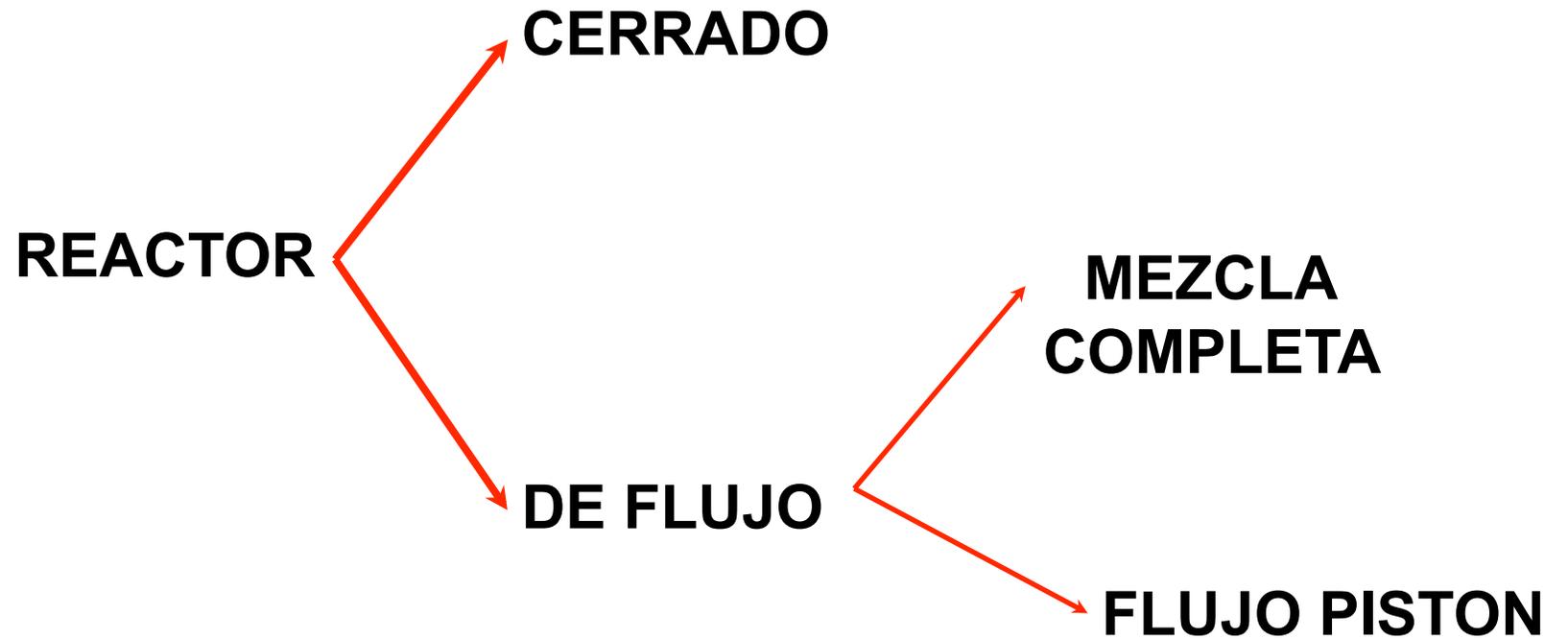
# Reactores

Un número elevado de métodos de **tratamientos físicos** (sedimentación, filtración, ecualización), **químicos** (precipitación, coagulación, ablandamiento), y **bioquímicos** (lodos activados, digestión anaeróbica) son utilizados en ingeniería ambiental. Ellos se llevan a cabo generalmente en dispositivos que se denominan *reactores*. Los reactores pueden ser divididos en dos grandes tipos: **reactor cerrado** y **de flujo**.

En un reactor de tipo **cerrado** los materiales son agregados al tanque, mezclados y dejados por un tiempo suficiente para que la reacción ocurra. Al final de este tiempo la mezcla es removida.

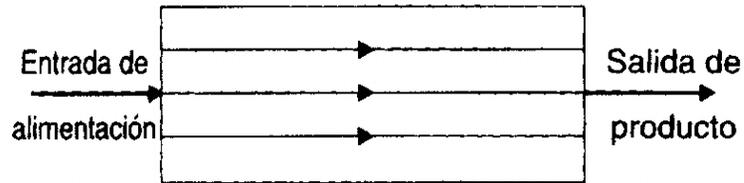
En un **reactor de flujo** los materiales fluyen hacia y desde el reactor. Dependiendo de las reacciones de mezcla y los patrones de flujo dentro del tanque podemos hablar de reactores ideales y reales

# Reactores

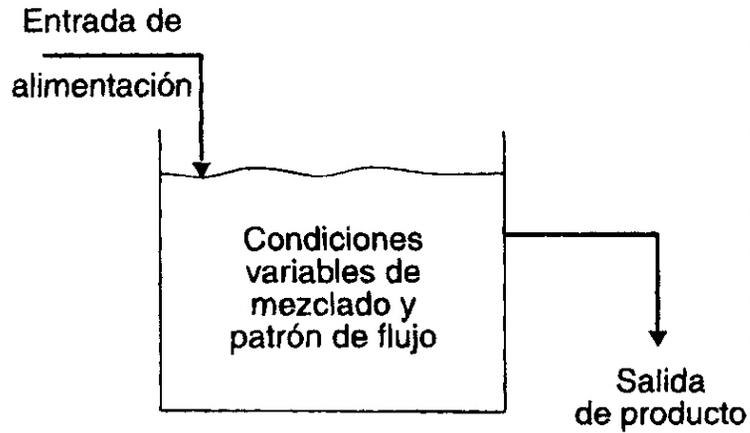
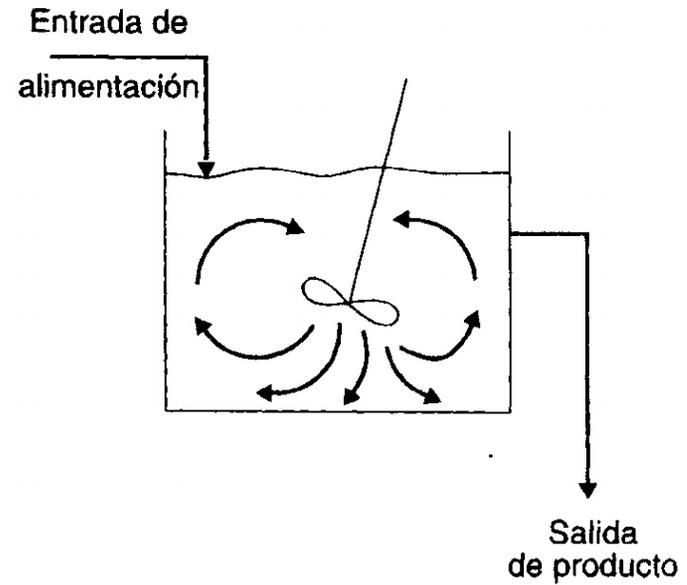


# Reactores de Flujo

## FLUJO PISTON

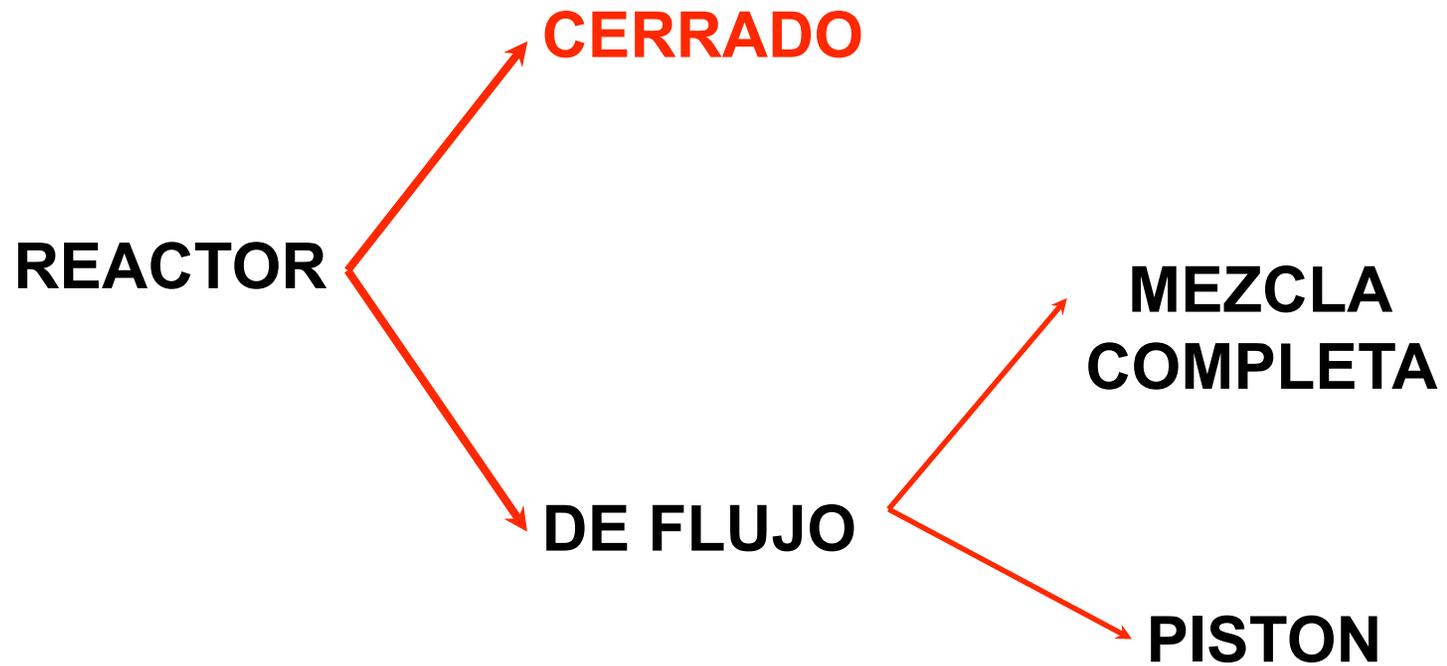


## MEZCLA COMPLETA



## REACTOR REAL

# Reactores de Flujo



# Reactores Cerrados

Si consideramos una reacción química de orden  $n$ , podemos determinar el balance de masas en un reactor cerrado como sigue:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot C_{sis}) = V \cdot r_n = -V \cdot k_n \cdot C_{sis}^n$$

Si integramos esta ecuación diferencial, suponiendo que el volumen se mantiene constante, obtenemos el siguiente resultado:

$$C_t^{-n+1} - C_0^{-n+1} = -(-n+1) \cdot k_n \cdot t$$

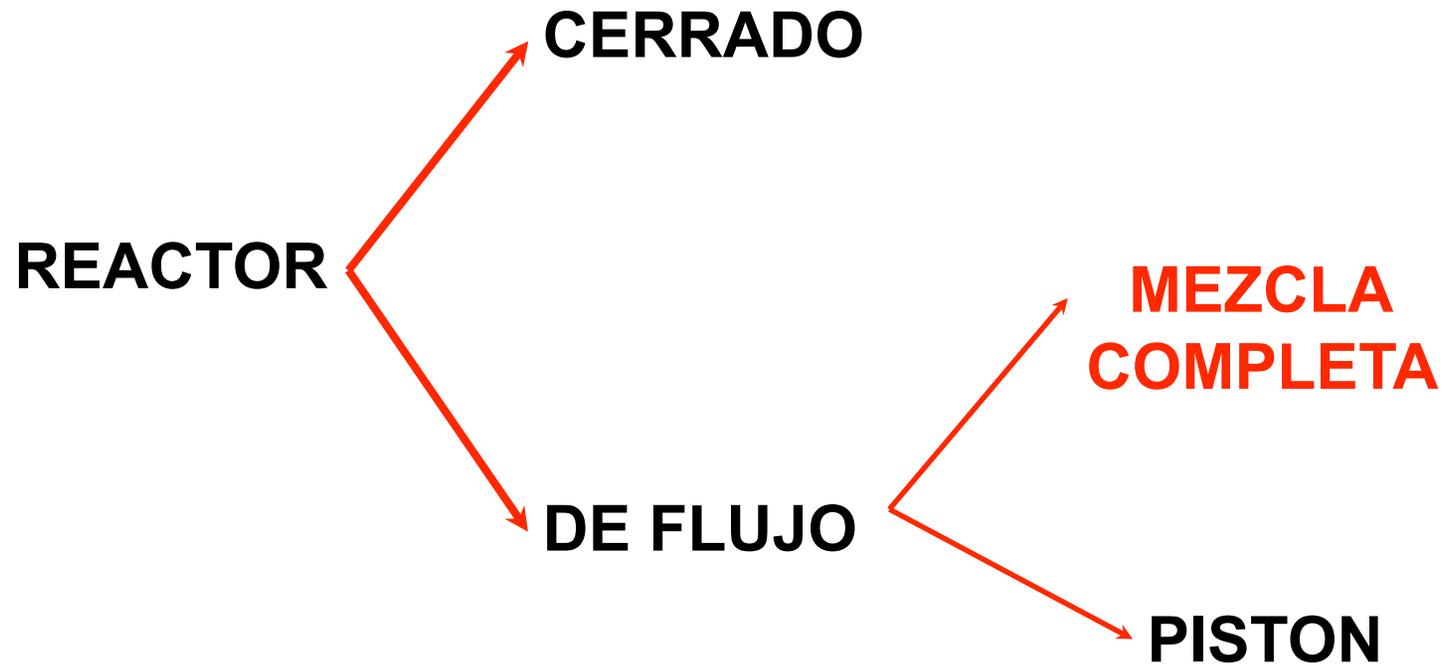
donde  $C_t$  y  $C_0$  son la concentración dentro del reactor en los tiempo  $t$  e inicial ( $t=0$ ).

# Reactores Cerrados

## Determinación de las Tasas de Reacción

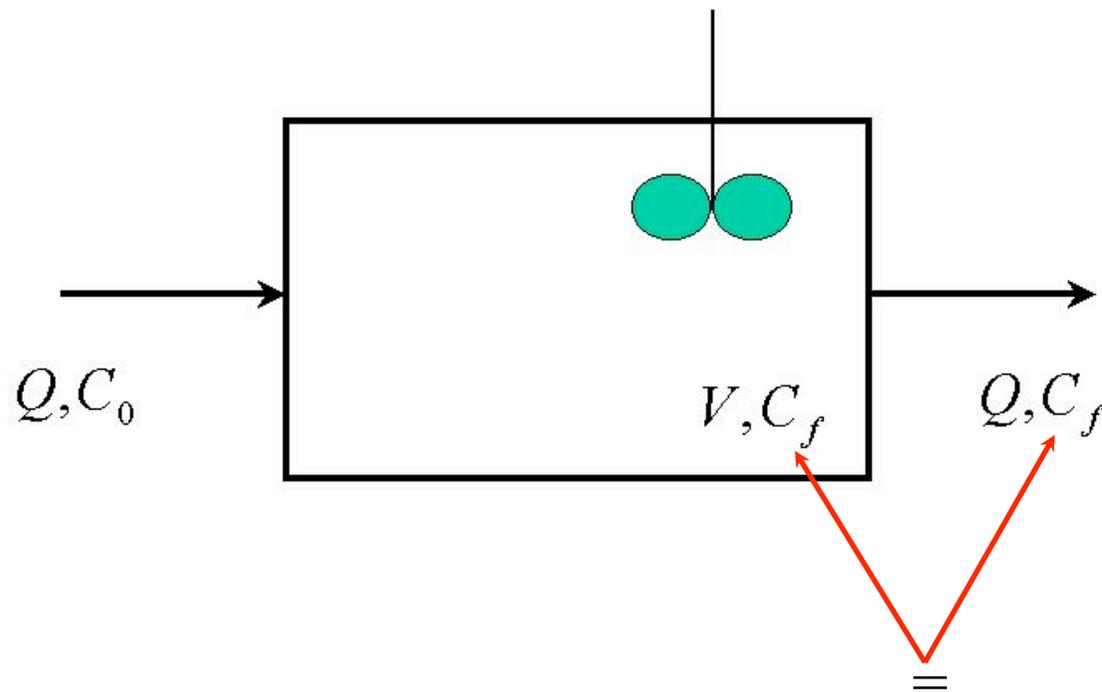
Orden	Tasa de Reacción	Ecuación Integrada	Gráfico Lineal	Pendiente
0	$\frac{dC}{dt} = -k_0$	$C_t - C_0 = -k_0 \cdot t$	C versus t	-k <sub>0</sub>
1	$\frac{dC}{dt} = -k_1 \cdot C$	$\ln\left(\frac{C_t}{C_0}\right) = -k_1 \cdot t$	ln(C) versus t	-k <sub>1</sub>
2	$\frac{dC}{dt} = -k_2 \cdot C^2$	$\frac{1}{C_t} - \frac{1}{C_0} = k_2 \cdot t$	1/C versus t	k <sub>2</sub>
n	$\frac{dC}{dt} = -k_n \cdot C^n$	$C_t^{-n+1} - C_0^{-n+1} = -(-n+1) \cdot k_n \cdot t$	C <sup>-n+1</sup> versus t	-(-n+1) k <sub>n</sub> t

# Reactores



# Reactores de Mezcla Completa

Consideremos el caso de un reactor de flujo de mezcla completa (medios mecánicos son utilizados para mantener el reactor completamente mezclado), al cual se encuentra ingresando un caudal constante  $Q$  con una concentración  $C_0$ .



# Reactores de Mezcla Completa

Si planteamos el balance de masas correspondiente a esta situación y suponemos el sistema se encuentra en condiciones estacionarias se puede escribir la siguiente ecuación

$$Q \cdot C_0 = Q \cdot C_f + V \cdot r(C_f)$$

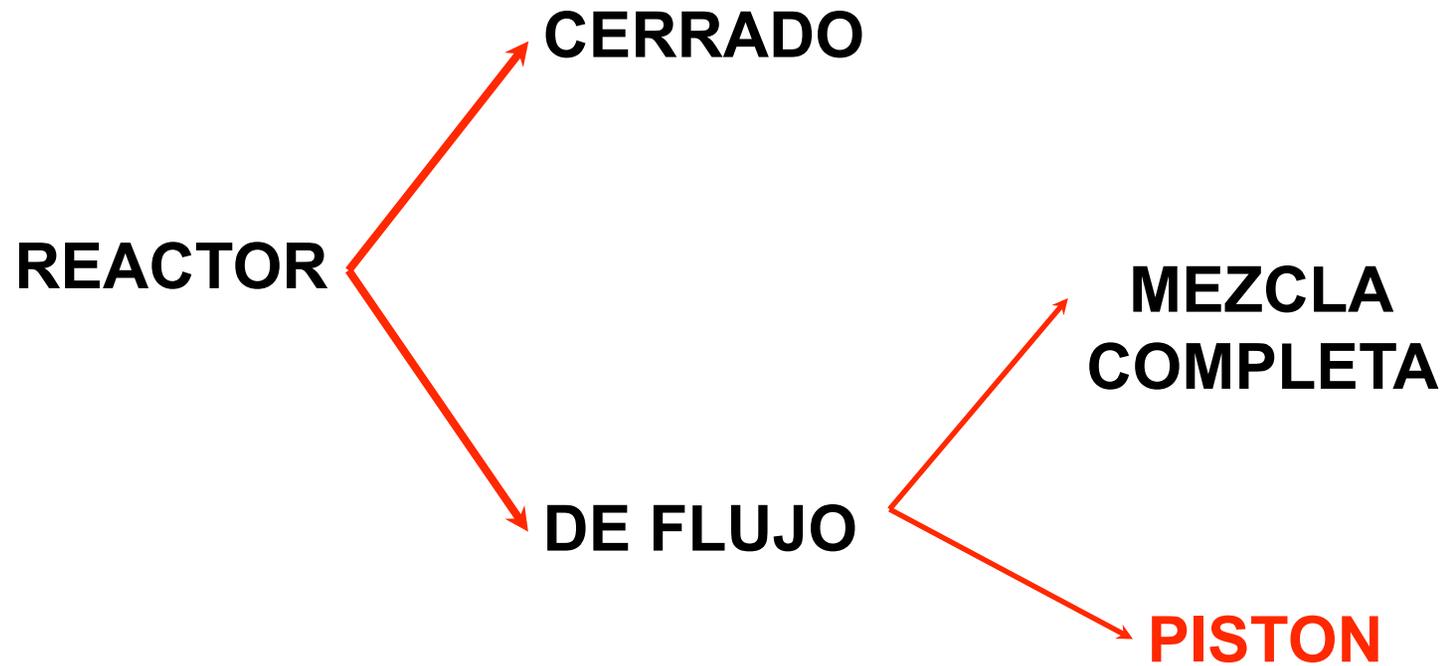
la cual puede ser reordenada (dividida por el caudal) para obtener:

$$C_f + \theta_H \cdot r(C_f) = C_0$$

En particular, si la reacción es de orden 1 se obtiene la siguiente expresión:

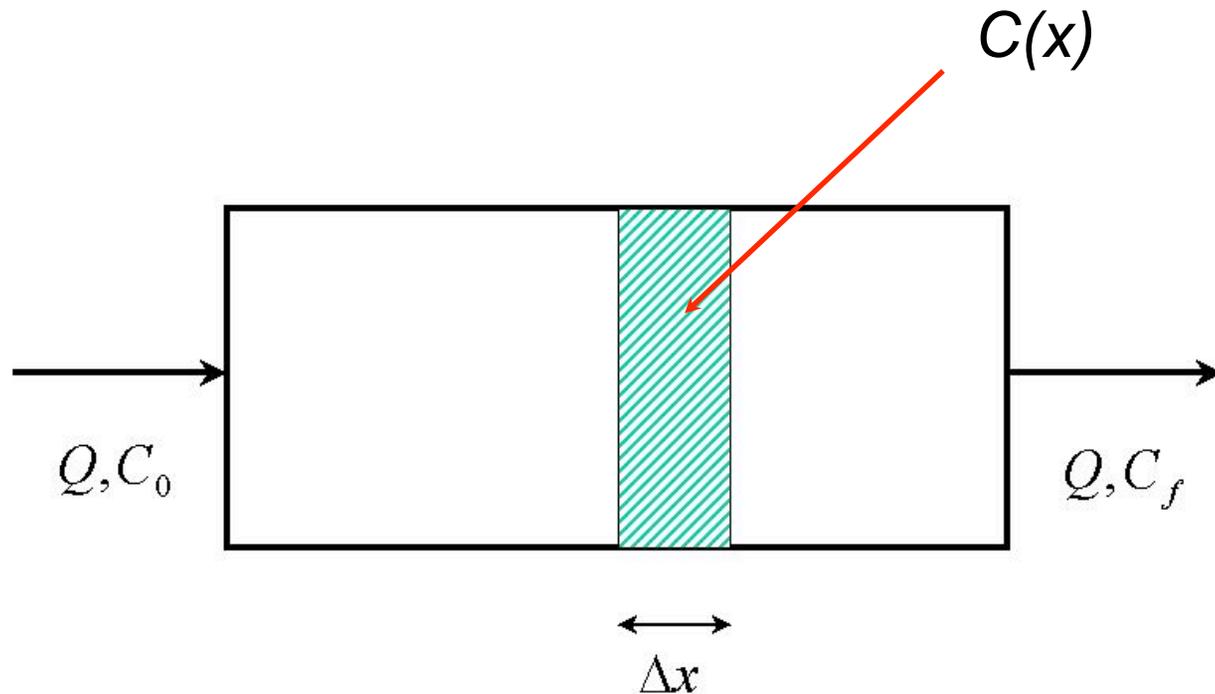
$$\frac{C_0}{C} - 1 = k_1 \cdot \theta_H$$

# Reactores de Mezcla Completa



# Reactores de Flujo Pistón

Consideremos el caso de un reactor de flujo pistón, en el cual se produce la entrada de material por la izquierda y la salida por la derecha. **No existe mezcla interna**, de tal manera que la concentración al interior del estanque no es conocida.



# Reactores de Flujo Pistón

Si consideramos un esquema como el planteado en la figura anterior se puede escribir una ecuación de balance a nivel de un elemento de volumen de ancho  $\Delta x$ :

$$Q \cdot C_x = Q \cdot C_{x+\Delta x} + \Delta x \cdot A \cdot r(C_{x+\Delta x/2})$$

donde A es el área de una sección transversal al escurrimiento. Reordenando esta expresión se tiene:

$$\frac{Q \cdot C_x - Q \cdot C_{x+\Delta x}}{\Delta x} = A \cdot r(C_{x+\Delta x/2})$$

Si tomamos el límite cuando el ancho de nuestra sección de control tiende a cero, i.e.  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtenemos la siguiente expresión diferencial:

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{A}{Q} \cdot r(C)$$

# Reactores de Flujo Pistón

Si reordenamos e integramos a lo largo del reactor obtenemos la siguiente ecuación:

$$\int_{C=C_0}^{C=C_f} \frac{dC}{r(C)} = -\frac{A}{Q} \cdot \int_{x=0}^{x=L} dx$$

donde la concentración a la entrada ( $x=0$ ) es igual a  $C_0$ , mientras que a la salida del reactor ( $x=L$ ) es igual a  $C_f$ . Al integrar esta ecuación se obtiene:

$$\int_{C=C_0}^{C=C_f} \frac{dC}{r(C)} = -\frac{A}{Q} \cdot L = -\frac{V}{Q} = -\theta_H$$

En particular, si la reacción es de orden 1 se obtiene la siguiente expresión:

$$\ln\left(\frac{C_0}{C}\right) = k_1 \cdot \theta_H$$

# Resumen Reactores

Orden	Tasa de Reacción	Mezcla Completa	Flujo Pistón
0	$\frac{dC}{dt} = -k_0$	$C_0 - C = k_0 \cdot \theta_H$	$C_0 - C = k_0 \cdot \theta_H$
1	$\frac{dC}{dt} = -k_1 \cdot C$	$\frac{C_0}{C} - 1 = k_1 \cdot \theta_H$	$\ln\left(\frac{C_0}{C}\right) = k_1 \cdot \theta_H$
2	$\frac{dC}{dt} = -k_2 \cdot C^2$	$\frac{1}{C} \cdot \left(\frac{C_0}{C} - 1\right) = k_2 \cdot \theta_H$	$\frac{1}{C_0} \cdot \left(\frac{C_0}{C} - 1\right) = k_2 \cdot \theta_H$