CI4101 - HIDRAULICA

REPASO DE CI3101, MECANICA DE FLUIDOS

Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

REPASO DEL CURSO CI3101, MECANICA DE FLUIDOS

1. INTRODUCCIÓN

Cuando estudiamos el comportamiento dinámico de los fluidos, usualmente estamos interesados en algún aspecto de lo que se denomina "fenómenos del transporte" del fluido, es decir la capacidad que tienen los fluidos en movimiento de transportar materia y propiedades de un lugar a otro y el mecanismo por el cual es materia y propiedades se difunden y transmiten a través del medio fluido. Es conveniente categorizar los métodos análisis disponibles en término de los diferentes tipos de procesos de transporte. En otras palabras, el método de análisis debe elegirse de tal manera que se apliquen las leyes físicas que correspondan el problema en estudio.

Los fenómenos de transporte fundamentales que están asociados con el movimiento de un fluido son el transporte de masa, de calor y momentum.

Cada uno de estos procesos están asociados con una ley física básica que ha sido formulada como un resultado de la observación y la experiencia. Los procesos y leyes pueden resumirse de la siguiente manera:

Proceso	Ley observada
Transporte de masa.	Conservación de la materia.
Transporte de calor.	Conservación de la energía (primera ley de la termodinámica).
Transporte de momentum.	Segunda ley de Newton (ecuación del movimiento)

Las leyes anteriores no son las únicas. También tenemos, por ejemplo, la segunda ley de la termodinámica, la que requiere introducir una nueva propiedad del sistema de fluido, la entropía. Otra ley es la dada por las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell. Estas leyes universales son de un "rango" comparable a las tres primeras, pero su aplicación es más restringida en las aplicaciones de mecánica de fluido que nos interesan.

Además de las leyes "universales" anteriores existen leyes subsidiarias para las propiedades del medio continuo, las que nos permiten describir los fenómenos moleculares en términos de cantidades macroscópicas. Ejemplos de estas leyes subsidiarias son las leyes que relacionan el esfuerzo con la deformación (ley de Hooke para sólidos elásticos y la ecuación de la viscosidad de Newton para los fluidos) o la ecuación de estado para un gas ideal.

1.1 Transporte de Masa

En mecánica clásica, el movimiento de todos los fluidos debe satisfacer el principio de conservación de la materia. Si vamos a analizar el movimiento de un fluido, tendremos que preocuparnos del transporte de masa. Una discusión más detallada requiere que distingamos entre fluidos homogéneos y no-homogéneos.

Un fluido homogéneo es aquel que existe como una especie única en toda la región de interés.

Por ejemplo, el aire puede experimentar cambios de densidad, velocidad, temperatura, pero se mantiene identificable como una mezcla estable de gases que llamamos aire. Del mismo modo, el agua, benceno, o mercurio pueden ser comprimidos, calentados y acelerados, pero a menos que ocurra su cambio de fase, los líquidos pueden considerarse homogéneos.

Un fluido no-homogéneo es uno en el que dos o más especies identificables existen en la región de interés.

Fluidos no-homogéneos se caracterizan por variaciones en la cantidad de una substancia relativa a la otra de punto a punto del sistema.

Las especies pueden ser de fases iguales o distintas. Por ejemplo, si un chorro de dióxido de carbono descarga en la atmósfera, la concentración de CO_2 en el aire varía de punto a punto, y el fluido es no-homogéneo, pero de una sola fase. Otro ejemplo es la descarga de agua fresca en el océano. Una corriente que lleva partículas de sedimento en suspensión es un ejemplo de un flujo no-homogéneos bifásico. Una mezcla de burbujas de aire y agua es otro ejemplo de flujo no-homogéneo bifásico.

En los fluidos homogéneos, la ley de conservación de la materia lleva a una expresión conocida como la ecuación de continuidad, que liga las variaciones espacio-temporales de la densidad y velocidad.

Si el fluido homogéneo se considera incompresible, la ecuación de continuidad se reduce a una relación para las variaciones espaciales de la velocidad.

Para un fluido no-homogéneo, el principio de la conservación de la materia debe satisfacerse para cada componente o especie de la mezcla. Además del transporte de masa debido a la velocidad local del flujo de la mezcla, hay un proceso de transporte de masa independiente debido a la tendencia de cada componente de la mezcla a moverse en la dirección en que la concentración disminuye. De este modo, cada especie individual se mueve con una velocidad relativa a la velocidad local de la mezcla. Este proceso se conoce como difusión molecular.

Dentro de las aplicaciones de la teoría de transporte de masa y difusión se encuentran: problemas de polución atmosférica, de aguas superficiales y subterráneas por medio de contaminantes; evaporación de océanos, lagos y embalses; aireación (transferencia de oxígeno) de ríos con un consumo de oxígeno debido a procesos biológicos, intrusión de agua salida de los océanos en estuarios, separación de mezclas por destilación, etc.

1.2 Transporte de Calor

Aplicando el principio de conservación de energía (también conocido como la primera ley de la termodinámica) a un flujo, derivamos una ecuación que nos da una relación entre presión, densidad, temperatura, velocidad, cota, trabajo mecánico y calor. En el caso de líquidos y flujos de gases a baja velocidad, las leyes de conservación termodinámica pueden simplificarse ya que la capacidad calórica del fluido es grande comparada con su energía cinética. De este como, la temperatura y densidad permanecen esencialmente constante aún cuando grandes cantidades de energía cinética puede ser disipada por fricción.

Las formulaciones más generales basadas en las ecuaciones de conservación de energía involucran variaciones de temperatura de punto a punto en el flujo. De este modo, además de transferencia de calor por convección debido a la velocidad del flujo, existe una transferencia de calor por conducción, que es la tendencia que tiene el calor de moverse en la dirección en que la temperatura decrece. (Esto es análogo al transporte de masa en la dirección en que la concentración disminuye).

Todas las máquinas tales como compresores, bombas, turbinas, involucran transferencia de energía. En el campo de los recursos hidráulicos, se encuentra el problema de polución térmica y uso óptimo de agua como refrigerante de plantas que utilizan vapor. Procesos de circulación y mezcla en océanos, lagos y embalses están influidos en gran medida por pequeñas variaciones de densidad causados por estratificación térmica.

1.3 Transporte de Momentum

El momentum se define como el producto de la masa de una partícula y su vector velocidad. En mecánica clásica es la segunda ley de Newton la que provee la relación fundamental entre la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula y la variación temporal del cambio de momentum. Las ecuaciones resultantes se conocen como las ecuaciones del movimiento. Los fenómenos de transporte de momentum son de primordial interés en mecánica de fluidos ya que ellos engloban los mecanismos de resistencia, esfuerzos de corte internos y de frontera, propulsión y fuerzas en cuerpos sumergidos.

A modo de ejemplo, consideremos el movimiento producido por una placa plana que se desliza sobre otra (flujo de Couette Fig 1.1). Las partículas de fluido en contacto con las placas tienen la velocidad de las placas, de acuerdo a la condición de no-deslizamiento. El fluido adyacente a la placa superior adquiere un momentum longitudinal, el que a su vez hace que las partículas de fluido contiguos también se muevan. Con el objeto de satisfacer la condición de velocidad nula impuesta por las partículas adyacentes a la placa inferior, la velocidad decrece en la medida que nos acercamos a la placa inferior. De este modo, se ve que las partículas de fluido adquieren un momentum longitudinal. Este momentum se obtiene a través de un transporte de momentum en la dirección transversal. El transprte transversal de momentum se realiza en la dirección de momentum longitudinal decreciente (hacia la placa inferior). Este transporte de momentum es análogo al transporte de calor en la dirección de temperatura decreciente y al de masa en la dirección de concentración decreciente.

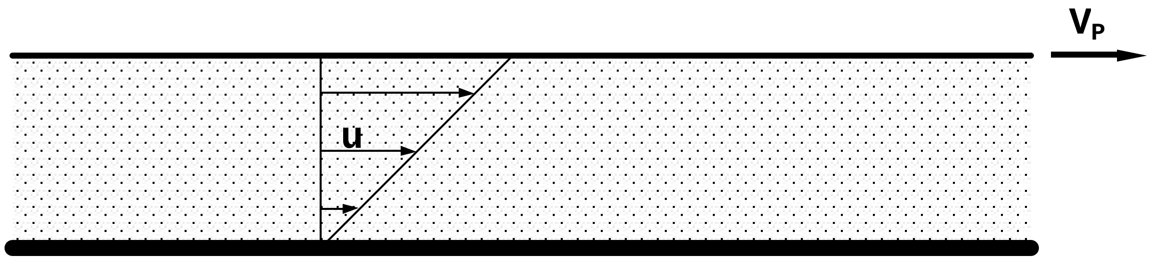

Fig 1.1 Flujo de Couette

1.4 Analogías en el Transporte de Masa, Calor y Momentum

Hasta ahora hemos mencionado dos mecanismos de transporte:

1° Convección: Este es un proceso directo en el que el fluido y cualquiera de sus propiedades másicas se mueve de un lugar a otro por efecto del flujo.

2° Conducción o difusión: Este es el proceso de movimiento de masa, o calor o momentum en la dirección en la que existe un gradiente negativo de concentración, temperatura o momentum. Esta característica común del transporte, debido a una "fuerza" que surge de un gradiente, lleva a expresiones análogas que ligan la tasa de transporte y la magnitud del gradiente, los que pueden escribirse como:

$$\frac{1}{A}\frac{dP}{dt} = K\frac{d}{ds}\left(\frac{P}{V}\right) \qquad (1.1)$$

donde P indica la propiedad transportada.

A es la área normal a la dirección de transporte.
s es la dirección de transporte.
t es el tiempo.
V el volumen.
K es un coeficiente de difusión.

el término $\frac{1}{A}\frac{dP}{dt}$ es la tasa de transporte de P por unidad de área normal a la dirección de transporte y $\frac{d}{ds}\left(\frac{P}{V}\right)$ es el gradiente, en la dirección de transporte, de la propiedad P por unidad de volumen.

El coeficiente de difusión de la Ec.1.1 depende del tipo de escurrimiento, o sea si el flujo es laminar o turbulento. Si el flujo es laminar, entonces el proceso de transferencia se debe exclusivamente a un proceso de difusión molecular. Si el flujo es turbulento, es escurrimiento puede caracterizarse como formado por vórtices, los que contribuyen en la mezcla del fluido, incrementando los procesos de transferencia y haciéndolo más efectivo. Comúnmente este proceso se denomina de difusión turbulenta.

Con el objeto de ejemplificar estas analogías consideramos el proceso de difusión molecular entre dos placas planas. Este mismo enfoque puede extenderse para el caso de difusión turbulento.

1.4.1 Transporte de Momentum

En este caso P=?mu es el momentum, donde u es la velocidad local y ?m la masa de un elemento de fluido. La dirección del gradiente de momentum, s, corresponde a la dirección y. La Ec. 1.1 se escribe como:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{d(\Delta mu)}{dt} = K\frac{d}{dy}\left(\frac{\Delta mu}{\Delta x \Delta y \Delta z}\right) \qquad (1.2)$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\Delta F_x = \frac{d}{dt}(\Delta mu)$$

por lo que Ec. 1.2 puede escribirse como:

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x \Delta z} = K\frac{d}{dy}\left(\frac{\Delta mu}{\Delta x \Delta y \Delta z}\right) \qquad (1.3)$$

El lado izquierdo de la Ec. 1.3 corresponde al esfuerzo de corte en la dirección x que actúa en un plano con normal paralela a la dirección y. Definimos densidad como:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

por lo que podemos escribir:

$$\tau_{xy} = K \frac{d}{dy}(\rho u) \qquad (1.4)$$

Si la densidad es constante;

$$\tau_{xy} = K\rho \frac{d}{dy} u \qquad (1.5)$$

Si comparamos la Ec. 1.5 con la ecuación de Newton-Navier:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

resulta que podemos identificar K con la viscosidad cinemática, ν (m^2/s). De este modo, la viscosidad cinemática no es más que un coeficiente de difusión molecular de momentum. Si los efectos turbulentos son importantes, K dependerá de las características del flujo y se tendrá que $K \gg \nu$.

1.4.2 Transporte de Calor

Consideremos nuevamente las dos placas planas, pero esta vez ellas se mantienen a temperaturas diferentes. La propiedad a transportar en este caso es la cantidad de calor, o sea $P = \hat{Q}$. En un elemento de masa:

$$\hat{Q} = \Delta m \, c_p \, T \qquad (1.6)$$

La Ec. 1.1 se transforma en:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{d\hat{q}}{dt} = - K \frac{d}{dy} \left[\frac{\Delta m \, c_p \, T}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] \qquad (1.7)$$

El signo negativo indica que hay un transporte positivo de calor en la dirección de temperatura decreciente.

El flujo de calor por unidad de área en la dirección y se denota por $\hat{q}_y$. Si ? y c_p son constantes, entonces:

$$\hat{q} = -\rho\, c_p\, K \frac{dT}{dy} \tag{1.8}$$

El producto ?c_pK puede identificarse con el coeficiente de conductividad térmica, k (Joule/s/m/°k). La constante de difusividad molecular de calor, K es:

$$K = \frac{k}{\rho\, c_p} \tag{1.9}$$

de este modo K corresponde al coeficiente de difusividad térmica a (m^2/s).

1.4.3 Transporte de Masa

Consideremos ahora que las dos placas corresponden a membranas permeables que separan zonas con concentraciones distintas.

La propiedad P corresponde en este caso a la masa disuelta en un elemento de volumen, o sea:

$$P = \Delta m\, C \tag{1.10}$$

donde C es la concentración definida como la masa de sustancia disuelta por unidad de masa de fluido. La Ec. 1.1 se transforma en:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{d}{dt}(\Delta m\, C) = -K\frac{d}{dy}\left(\frac{\Delta m C}{\Delta x \Delta y \Delta z}\right) \tag{1.11}$$

La tasa de transferencia de masa por unidad de área en la dirección y la denotamos como:

$$j_y = \frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{d}{dt}(\Delta m C)$$

El signo negativo indica un transporte positivo en la dirección de concentración decreciente.

Para concentraciones pequeñas y densidad del fluido constante se tiene:

$$j_y = -\rho\, K \frac{dC}{dy} \qquad (1.12)$$

En este caso, la constante molecular de masa, K se identifica con el coeficiente de difusión molecular D (m^2/s).

De este modo, hemos visto que los tres procesos de transporte molecular pueden describirse por medio de una propiedad del fluido que tiene dimensiones de L^2/T: ν, a y D.

2. REPASO DE MECÁNICA DE FLUIDOS

En este capítulo repasaremos las principales ecuaciones derivadas en la parte de Dinámica del curso de Mecánica de Fluidos.

En general, la deducción de las ecuaciones se hacía mediante dos enfoques, el enfoque diferencial y el enfoque integral. En el enfoque diferencial analizábamos un elemento diferencial de volumen de fluido, mientras que con el enfoque integral, analizábamos el sistema fluido como un todo. El uso de cada enfoque dependerá de lo que se quiera conocer en el problema, de los datos que se dispongan, etc.

2.1 Ecuaciones deducidas mediante el Enfoque Diferencial

2.1.1 Ecuación de Continuidad

Mediante el balance de la masa que entra, sale y se acumula en un elemento diferencial de volumen se obtuvo la Ecuación de Continuidad:

$$\nabla \cdot (\rho \nabla) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (2.1)$$

Si el fluido es de densidad constante y el flujo permanente, la ecuación anterior se reduce a:

$$\nabla \cdot \nabla = 0 \qquad (2.2)$$

En el caso de tener un flujo con más de una fase, la ecuación de continuidad debe satisfacerse tanto para cada fase como para la mezcla.

2.1.2 Ecuaciones del Movimiento

Las ecuaciones del movimiento se derivan a partir de la segunda Ley de Newton aplicada a un elemento de volumen (hacerlo como ejercicio), resultando:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{gx}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} \qquad (2.3)$$

donde:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \qquad (2.4)$$

f_x, f_y, f_z son las fuerzas másicas en las direcciones x, y, z respectivamente:

s_{ii} representa los esfuerzos normales y t_{ij} los esfuerzos tangenciales.

Mediante el equilibrio del momento de las fuerzas superficiales, se demuestra que $t_{ij}=t_{ji}$.

La ecuación 2.3 es general y puede aplicarse a cualquier tipo de fluido. Sin embargo dicha ecuación aún no es capaz de determinar las ecuaciones del movimiento. El problema se resuelve si somos capaces de ligar los esfuerzos con las deformaciones que experimenta el volumen de fluido. Para poder hacer esta ligazón es necesario definir el comportamiento reológico del fluido. Para un fluido Newtoniano la componente según x está dada por:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \nabla \cdot \nabla\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right] + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \qquad (2.5)$$

Si la viscosidad es constante y el fluido incompresible la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Navier-Stokes.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \qquad (2.6)$$

En general:

$$\rho \frac{D\bar{\nabla}}{Dt} = \rho \bar{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\nabla} \qquad (2.7)$$

donde $\bar{\nabla} = (u, v, w)$ y $\bar{f} = \left(f_x, f_y, f_z\right)$.

La manipulación de la Ec. 2.7 nos conducía a ciertos casos particulares. Por ejemplo si el fluido es ideal, se obtenían las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \qquad (2.8)$$

Si las fuerzas másicas son originadas sólo por el campo gravitacional, podemos definir una presión motriz $\hat{p} = p + \gamma h$, donde γ es el peso específico del fluido y h un eje vertical, positivo hacia arriba. Así la ecuación de Euler puede escribirse como:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} \qquad (2.9)$$

Si suponemos que el campo de velocidades deriva de un potencial F, podemos obtener la Ecuación de Bernoulli. En efecto, si:

$$\vec{V} = \nabla \Phi$$

entonces $\nabla \times \vec{V} = 0$ y el término $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ se reduce a $\frac{1}{2} \nabla V^2$, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla V^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} \qquad (2.10)$$

De donde resulta que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho}$$

debe ser constante en todo el espacio y sólo una función del tiempo (demostrarlo), resultando:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = C(t) \qquad (2.11)$$

Si el flujo es permanente, obtenemos la ecuación de Bernoulli:

$$B = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{constante} \qquad (2.12)$$

La Ec. 2.7 puede aplicarse tanto a flujos laminares como turbulentos. Hay que tener presente, sin embargo, que por su naturaleza el movimiento turbulento es impermanente, por lo que la aplicación directa de la Ec.2.7 a tales flujos no es posible. En la práctica uno trabaja con cantidades medias temporales, utilizando las ecuaciones de Reynolds. Estas ecuaciones se obtienen al descomponer V y p de Ec. 2.7 en dos componentes: una componente media temporal y una fluctuante que es función del tiempo; o sea:

$$\begin{aligned} (u, v, w) &= (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) + (u', v', w') \\ p &= \overline{p} + p' \end{aligned} \qquad (2.13)$$

donde la prima indica la componente fluctuante. Al reemplazar Ecs. 2.13 Ec. 2.7, usar la ecuación de continuidad y promediar en el tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\overline{u}}{Dt} &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \overline{u} - \rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right)\right] \\ \rho \frac{D\overline{v}}{Dt} &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \overline{v} - \rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{v'w'}\right)\right] \\ \rho \frac{D\overline{w}}{Dt} &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \overline{w} - \rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'w'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'w'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'^2}\right)\right] \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Los términos en paréntesis cuadrado que aparecen en las Ecs. 2.14 corresponden a los esfuerzos aparentes o de Reynolds. Hay que insistir que estos "esfuerzos" indican un flujo de momentum.

2.1.3 Ecuación de Energía

Aunque la ecuación de energía desde el punto de vista diferencial no se deduce en el curso de Mecánica de Fluidos, se presentará acá para completar las tres leyes fundamentales que nos interesan.

La primera ley de la termodinámica indica que:

$$\delta\hat{Q} - \delta W = dE \qquad (2.19)$$

donde $\delta\hat{Q}$ es el calor agregado al sistema δW es el trabajo realizado por el sistema de dE es el incremento de energía del sistema. La notación para indicar incrementos de calor o trabajo es diferente que la usada para indicar incremento de energía (dE). Esto es para indicar que el incremento de calor o trabajo depende del proceso, mientras que la variación de energía depende sólo del estado inicial y final.

El término de energía en Ec. 2.15 debe incluir la energía interna (que depende de la temperatura y fase del fluido), la energía potencial (que depende de la posición) y la energía cinética (que depende de la velocidad). Si suponemos que las fuerzas másicas actuando sobre el volumen de control derivan de un potencial de fuerzas Ω, entonces la Ec. 2.15 puede escribirse como:

$$\delta\hat{Q} - \delta W = d\left(e_i + \Omega + \frac{V^2}{2}\right) \qquad (2.16)$$

donde e_i representa la energía interna. Ec. 2.16 es por unidad de masa. Al analizar la variación de los términos de Ec. 2.16 es por unidad de tiempo (/dt) y suponiendo que la transferencia de calor por unidad de área, $\hat{q}$, puede expresarse mediante la Ley de Fourier:

$$\hat{q} = k\,\Delta\,T \qquad (2.17)$$

donde k es la conductividad térmica y T la temperatura, la primera ley de la termodinámica puede escribirse como:

$$\rho\,\frac{D\,e_i}{Dt} = \nabla\cdot(k\Delta T) + \tau_{ij}\,\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j} \qquad (2.18)$$

donde:

$$\tau_{ij} = -p\delta ij + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\,\mu\,\delta_{ij}\,\nabla\cdot\vec{\nabla} \qquad (2.19)$$

En Ecs. 2.18 y 2.19 se ha utilizado la notación de Einstein (suma sobre subíndices repetidos) y δ_{ij} es el delta de Kronecker (δ_{ij}=1 si i=j y δ_{ij}=0 si i_j)

Se define la función de disipación:

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{2}{3}\mu\,(\nabla \cdot \nabla)^2 \qquad (2.20)$$

El término que contiene la presión en:

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

puede escribirse como $-p\nabla \cdot \nabla$, generando así un término:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

(demostrarlo) al que al sumarse al lado izquierdo de Ec. 2.18 traduce la ecuación de energía en:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k\Delta T) + \Phi \qquad (2.21)$$

donde $h = e_I + \dfrac{p}{\rho}$ representa la entalpía.

Hay que notar que Ec. 2.21 corresponde a la energía total del sistema. Es posible obtener una expresión para la energía mecánica del sistema al hacer el producto punto entre la ecuación de momentum y la velocidad, resultando:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} - \Phi\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\,\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \qquad (2.22)$$

Al igual que la ecuación de momentum (Ec.2.7), las Ecs. 2.21 y 2.22 pueden aplicarse tanto a flujos laminares o turbulentos.

En la práctica; sin embargo, su aplicación en flujos turbulentos se hace después de descomponer las variables en una componente media temporal más otra fluctuante y tomar un promedio temporal después de manipular las ecuaciones.

2.2 Ecuaciones Deducidas mediante el Enfoque Integral

2.2.1 Teorema del Transporte de Reynolds

En el curso de Mecánica de Fluidos las ecuaciones de continuidad, momentum y energía eran deducidas como casos particulares de una ecuación de transporte más general obtenida por O. Reynolds.

El teorema del transporte de Reynolds se enuncia a continuación:

Sea un sistema de partículas que en un instante dado ocupa un volumen ∀. Sea ? el valor específico (valor por unidad de masa) de una propiedad cualquiera en un punto del volumen ∀. La magnitud de la propiedad en el sistema de partículas será:

$$N = \int_{\forall} \eta\rho \, d\forall \qquad (2.23)$$

El teorema del transporte establece que la tasa a la que cambia N corresponde al flujo de la propiedad a través de las superficies que definen el volumen V más la variación temporal de dicha propiedad dentro del volumen, o sea:

$$\frac{dN}{dt} = \int_{S} \eta\rho\vec{V} \cdot \hat{n} dS + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall} \eta\rho d\forall \qquad (2.24)$$

A ? se le denomina la propiedad intensiva del sistema y N es la propiedad extensiva. Notar que no se ha puesto ninguna restricción sobre ?, pudiendo ser un escalar o un vector.

Identificando N con la propiedad adecuada, podemos deducir a partir de la Ec. 2.24 las leyes básicas que nos interesan.

2.2.2 Ecuación de Continuidad

En este caso N se identifica con la masa, de donde resulta que ?=1. Al aplicar Ec. 2.24 y considerando que la masa de un sistema de partículas no varía (dm/dt=0), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho d\forall + \int_{S}\rho\vec{V}\cdot\hat{n} = 0 \qquad (2.25)$$

Si el flujo es incompresible podemos escribir:

$$\frac{\partial\forall}{\partial t} + Q_S - Q_E = 0 \qquad (2.26)$$

donde Q_S es el caudal que sale del volumen de control y Q_E es el que entra.

2.2.3 Teorema de la Cantidad de Movimiento

En este caso la propiedad extensiva es un vector y corresponde al momentum: $N = m\vec{V}$. La propiedad intensiva se indentifica con la velocidad $(\eta = \vec{V})$. La segunda Ley de Newton indica que la variación de la cantidad de movimiento es igual a la resultante de las fuerzas externas.

$$F_{ext} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \qquad (2.27)$$

La aplicación de Ec. 2.24 se traduce en:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\vec{V}\rho d\forall + \int_{S}\vec{V}(\rho\vec{V}\cdot\hat{n})dS \qquad (2.28)$$

El primer término del lado derecho de Ec. 2.28 corresponde a la variación de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control y el segundo cuantifica el flujo de momentum transportado por el escurrimiento.

El gasto másivo se define como:

$$\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dS$$

por lo que si el escurrimiento es permanente, la Ec. 2.28 se reduce a:

$$F_{ext} = \int_{S}\vec{V}\,dG \qquad (2.29)$$

Al aplicar la Ec. 2.29 a un tubo de flujo con velocidad constante tanto en la sección de entrada como de salida, tenemos:

$$F_{ext} = (\forall_s - \forall_e)G = \rho Q \Delta \forall \qquad (2.30)$$

Hay que tener presente que, en general, la distribución de velocidades en el tubo de flujo no es uniforme. En este caso, puede utilizarse la velocidad media, U, multiplicada por un coeficiente que toma en cuenta la no uniformidad de las velocidades. Este coeficiente está por:

$$\beta = \frac{\int u^2 dS}{U^2 S} \qquad (2.31)$$

y se denomina coeficiente de Boussinesq. En la Ec. 2.31 S es la área del tubo de flujo, transversal al movimiento.

Para un flujo laminar en una tubería cilíndrica (flujo de Poiseuille) ß=4/3 y si el escurrimiento es turbulento ß≈1,01-1,03.

Si el volumen de control tiene varias entradas y salidas, cabe recordar que para densidad constante y flujo permanente se cumple:

$$F_{ext} = \rho \left(\sum_{sale} \beta_i \bar{U}_i Q_i - \sum_{entra} \beta_i \bar{U}_i Q_i \right) \qquad (2.32)$$

2.2.4 Teorema General de la Energía

En este caso N=E es la energía total del sistema y ?=e es la energía específica. Podemos considerar que la energía de las partículas de fluido en el campo gravitacional está compuesta de tres componente: energía cinética $\left(e_c = \frac{V^2}{2}\right)$, energía potencial ($e_p$=gz) y energía interna ($e_I$). De este modo, reemplazando en la Ec. 2.24:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall} \rho e \, d\forall + \int_S \rho e \bar{V} \cdot \hat{n} \, dS \qquad (2.33)$$

donde $e=e_c+e_p+e_I$. La variación de la energía, dE está dada por la primera ley de la termodinámica (Ec.2.15): $dE = \delta \hat{Q} - \delta W$. El trabajo efectuado por el sistema generalmente se divide en dos componentes: $W=W_f+W_e$, donde W_f es el trabajo que realiza el flujo al desplazarse (las partículas de fluido deben vencer fuerzas de presión y tangenciales) y W_e es el trabajo útil producido hacia el exterior. De este modo, Ec. 2.33 queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\left(gz+\frac{V^2}{2}+e_I\right)d\forall+\int_{S}\left(gz+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+e_I\right)\rho\vec{V}\cdot\hat{n}dS=\frac{\delta\hat{Q}}{dt}-\frac{\delta W_{f\tau}}{dt}-\frac{\delta W_e}{dt}$$

(2.34)

El primer término de la Ec. 2.34 representa la variación de la energía del fluido en el interior del volumen de control, por unidad de tiempo. El segundo término es el flujo neto de energía que atraviesa el volumen de control, transportado por el flujo más el trabajo mecánico que hace el fluido al desplazarse en un campo de presiones. El tercer término es el calor que absorbe el fluido. El cuarto término es el trabajo mecánico que realiza el fluido por unidad de tiempo para vencer los esfuerzos de corte debido a los efectos viscosos. El último término de la ecuación corresponde al trabajo útil que realiza el fluido y que es aprovechable como trabajo mecánico por unidad de tiempo.

Al aplicar Ec. 2.34 a un tubo de flujo de velocidad uniforme permanente y fluido incompresible, tenemos:

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_{f\tau}}{dt}-\frac{dW_e}{dt}=\gamma\,Q\left(B_s-B_e+\frac{e_{Is}-e_{Ie}}{g}\right) \qquad (2.35)$$

donde los subíndices s y e del lado derecho de la ecuación indican la sección de salida y la de entrada respectivamente. B es el Bernoulli, definido en la Ec. 2.12.

Si se considera que el fluido es un líquido, no hay transferencia de calor ni se efectúa trabajo externo y el fluido es ideal, entonces la Ec. 2.35 se transforma en la ecuación de Bernoulli.

En flujos paralelos de fluidos reales con fronteras, la condición de no-deslizamiento en las paredes significa la existencia de vorticidad y el Bernoulli no se mantiene constante (demostrarlo). Es por esto que en flujos paralelos se define en Bernoulli medio basado en la velocidad media del escurrimiento.

Una expresión para el Bernoulli medio, B, se logra al calcular la potencia total en un tubo de flujo, resultando:

$$\bar{B} = \alpha \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \qquad (2.36)$$

donde V es la velocidad media y a el coeficiente de Coriolis, que toma en cuenta la no uniformidad de la distribución de velocidades y que se define como:

$$\alpha = \frac{\int u^3 \, dS}{U^3 \, S} \qquad (2.37)$$

Para escurrimiento laminar en tubería cilíndrica (Flujo de Pouseille) a=2. En escurrimientos turbulentos a¸1.03 - 1.08.

Apliquemos ahora la Ec. 2.35 a un tubo de flujo con fluido real. En este caso V_{ft} es distinto de cero. Como el fluido es real, debemos considerar un Bernoulli medio, resultando:

$$-\frac{d\,W_{f\tau}}{dt} = \gamma Q \left(B_s - B_e\right)$$

$$-\frac{1}{\gamma Q}\frac{d\,W_{f\tau}}{dt} = B_s - B_e \qquad (2.38)$$

En general denotamos:

$$\Lambda = \frac{1}{\gamma Q}\frac{dW_{f\tau}}{dt} > 0$$

y ligamos este término a las características del escurrimiento y del conducto a través de un factor de fricción o coeficiente de rugosidad. Se define la pérdida de energía por unidad de longitud J:

$$J = \frac{\Lambda}{L} \qquad (2.39)$$

donde L es la longitud del tubo de flujo.

En el caso de tuberías, J se evalúa a través de la ecuación de Darcy-Wiesbach:

$$J = \frac{f}{D}\frac{V^2}{2g} \qquad (2.40)$$

donde el coeficiente de fricción f depende del régimen del flujo y la rugosidad de la tubería. Existen expresiones para f derivadas de suponer distribuciones logarítmicas de velocidades, las que se encuentran sintetizados en forma gráfica en el diagrama de Moody.

En el caso de canales, una de los relaciones más comunes para evaluar J es la ecuación de Manning:

$$J = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \qquad (2.41)$$

donde R es el radio hidráulico de la sección y n el coeficiente de rugosidad de Manning. No hay que olvidar que la Ec. 2.41 es válida para escurrimiento turbulento con paredes hidrodinámicamente rugosas. En caso de no ser así, el coeficiente n ya no es una constante, sino que exhibe una dependencia con el número de Reynolds.