



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

APUNTES DEL CURSO CI4101: HIDRÁULICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL, UNIVERSIDAD DE CHILE

ALBERTO DE LA FUENTE
YARKO NIÑO
ALDO TAMBURRINO

SANTIAGO DE CHILE
ENERO, 2012

Prefacio

Estos apuntes constituyen una primera versión del material docente del curso de Hidráulica, que dos de los autores han dictado por alrededor de 15 años en la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile. Por ser una primera versión, inevitablemente es susceptible de ser mejorado. Los profesores agradecerán todas las observaciones o correcciones que puedan hacerse a los apuntes.

Estos apuntes son solo un material complementario del curso y de ninguna manera reemplazan la asistencia a clases.

Agradecimientos

Se agradece los comentarios y correcciones de:

- Carlos Rozas
- Hugo Ulloa
- Estudiantes varios

Índice

| | | |
|-----------|--|-----------|
| I | Contornos cerrados | 1 |
| 1 | Análisis hidráulico de sistemas de tuberías | 2 |
| 1.1 | Pérdidas singulares en tuberías | 5 |
| 1.1.1 | Pérdidas por ensanche brusco | 6 |
| 1.1.2 | Pérdidas de entrada | 7 |
| 1.1.3 | Otras singularidades | 7 |
| 1.2 | Bombas | 8 |
| 1.2.1 | Conceptos generales | 8 |
| 1.2.2 | Bombas centrífugas | 11 |
| 1.3 | Redes de tuberías | 17 |
| 1.3.1 | Consideraciones preliminares | 17 |
| 1.3.2 | Método de Hardy Cross (1936) | 19 |
| 1.3.3 | Ejemplo de aplicación | 20 |
| 1.3.4 | Propuesto | 21 |
| 2 | Régimen impermanente en tuberías | 22 |
| 2.1 | Método inelástico | 23 |
| 2.1.1 | Fluido ideal | 24 |
| 2.1.2 | Efecto de las pérdidas de energía | 25 |
| 2.2 | Método inelástico compresible | 28 |
| 2.3 | Método elástico | 30 |
| 2.3.1 | Continuidad de masa | 30 |
| 2.3.2 | Teorema de cantidad de movimiento | 34 |
| 2.4 | Método de las características | 35 |
| 2.4.1 | Ecuaciones de movimiento | 36 |
| 2.4.2 | Método de solución numérica | 38 |
| II | Contornos abiertos | 44 |
| 3 | Características generales del flujo en contornos abiertos | 45 |
| 3.1 | Características Generales | 45 |
| 3.2 | Clasificación del escurrimiento | 46 |
| 3.2.1 | Escurrimiento uniforme y variado (Fig. 3.2) | 46 |
| 3.2.2 | Escurrimiento permanente e impermanente | 47 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.2.3 | Escurrimientos laminares y turbulentos | 47 |
| 3.2.4 | Escurrimiento subcrítico y supercrítico | 48 |
| 3.3 | Características geométricas de los canales | 49 |
| 3.4 | Distribución de velocidades | 51 |
| 3.5 | Coefficientes de Coriolis y Boussinesq | 52 |
| 3.5.1 | Coefficiente de Coriolis | 52 |
| 3.5.2 | Coefficiente de Boussinesq | 53 |
| 3.6 | Distribución de presiones en canales | 53 |
| 4 | Ecuaciones del flujo en contornos abiertos | 55 |
| 4.1 | Ecuación de continuidad | 55 |
| 4.2 | Principio de conservación de energía | 58 |
| 4.2.1 | Ecuación de Bernoulli en canales abiertos | 58 |
| 4.2.2 | Concepto de energía específica | 59 |
| 4.2.3 | Energía específica en canales rectangulares | 60 |
| 4.2.4 | Escurrimiento crítico | 62 |
| 4.2.5 | Escurrimiento crítico en canales no rectangulares | 66 |
| 4.2.6 | Escurrimiento super y subcríticos, noción preliminar de control hidráulico. | 66 |
| 4.3 | Principio de conservación de momentum | 72 |
| 4.3.1 | Función momenta | 72 |
| 4.3.2 | Propiedades de la función momenta | 74 |
| 4.3.3 | Resalto hidráulico | 75 |
| 4.3.4 | Clasificación del resalto hidráulico | 77 |
| 4.3.5 | Otras propiedades | 79 |
| 4.3.6 | Problemas propuestos | 80 |
| 5 | Resistencia al escurrimiento en canales | 82 |
| 5.1 | Esfuerzo de corte medio | 82 |
| 5.1.1 | Escurrimiento uniforme o normal | 82 |
| 5.1.2 | Escurrimiento gradualmente variado | 84 |
| 5.1.3 | Ecuaciones de resistencia | 86 |
| 5.1.4 | Altura normal | 88 |
| 6 | Escurrimiento gradualmente variado | 90 |
| 6.1 | Ecuación diferencial de movimiento | 91 |
| 6.2 | Análisis y clasificación de ejes hidráulicos | 93 |
| 6.2.1 | Pendiente suave | 94 |
| 6.2.2 | Pendiente fuerte | 96 |
| 6.2.3 | Otros casos | 97 |
| 6.3 | Cálculo numérico del Eje Hidráulico | 99 |
| 7 | Escurrimiento rápidamente variado | 104 |
| 7.1 | Vertederos | 104 |
| 7.1.1 | Vertederos de pared delgada | 105 |
| 7.1.2 | Corrección por velocidad de aproximación, vertedero de pared delgada . | 108 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 7.1.3 | Corrección por inclinación de la barrera, vertedero de pared delgada . . . | 108 |
| 7.1.4 | Vertederos triangulares | 108 |
| 7.1.5 | Corrección por influencia de aguas abajo, vertedero de pared delgada . . . | 108 |
| 7.1.6 | Vertedero de pared delgada con corrección por contracción lateral . . . | 109 |
| 7.1.7 | Vertederos de pared gruesa | 109 |
| 7.1.8 | Vertederos de pared intermedia | 110 |
| 7.2 | Ensanches bruscos | 110 |
| 7.3 | Angostamientos bruscos | 112 |

Parte I

Contornos cerrados

Capítulo 1

Análisis hidráulico de sistemas de tuberías

En etapas finales del curso de Mecánica de Fluidos del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile (CI3101), se obtuvo que al integrar la primer ley de la termodinámica en un tubo de flujo, y considerando régimen permanente, la siguiente ecuación permite ligar la dinámica entre dos secciones (1 y 2) ubicadas en los extremos del tubo de flujo

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 + \Lambda_f + \Lambda_s \pm \frac{|P|}{\gamma Q} \quad (1.1)$$

donde \bar{B} es el Bernoulli promedio de la sección, Λ_f denota las pérdidas singulares que expresamos como:

$$\Lambda_f = J L = \frac{f}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} L \quad (1.2)$$

donde J es la pendiente del plano de carga, L la distancia entre los puntos 1 y 2 (siguiendo la línea de corriente), D el diámetro de la tubería y f el coeficiente de fricción. Además, Λ_s es la altura de carga perdida por pérdidas singulares, la cual expresamos como:

$$\Lambda_s = k_s \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (1.3)$$

donde k_s es el coeficiente de pérdida singular. Finalmente, $|P|$ en (6.15) denota la potencia de la bomba o turbina, tal que el signo \pm queda determinado si es una bomba ($-$, tal que $B_2 > B_1$ en el caso inviscido) o si es una turbina ($+$, tal que $B_2 < B_1$ en el caso inviscido).

Además, se determinó que el factor de fricción f es una función del número de Reynolds en la tubería $Re = \bar{v}D\nu^{-1}$, y de la aspereza relativa ϵ/D , y a partir de ambos números adimensionales definimos tres tipos regímenes de escurrimiento para flujos turbulentos en tuberías:

- Tuberías de pared hidrodinámicamente lisa.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(Re \sqrt{f} \right) - 0.8 = 2 \log_{10} \left(\frac{Re \sqrt{f}}{2.51} \right) \quad (1.4)$$

- Tubería de pared hidrodinámicamente rugosa.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(3.7 \frac{D}{\epsilon} \right) \quad (1.5)$$

- Tubería de pared hidrodinámicamente en transición lisa-rugosa.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (1.6)$$

Cabe recordar que en caso de tuberías hidrodinámicamente lisas o en transición lisa rugosa, el factor de fricción y la o las ecuaciones de balance de energía en la tubería (Bernoulli), se resuelven iterativamente dado que el valor de f depende del número de Reynolds en las tuberías. Una manera para iterar es mediante el ábaco de Moody que se muestra en la **Fig. 6.6**.

En esta primera parte del curso de Hidráulica veremos en detalle P , k_s .

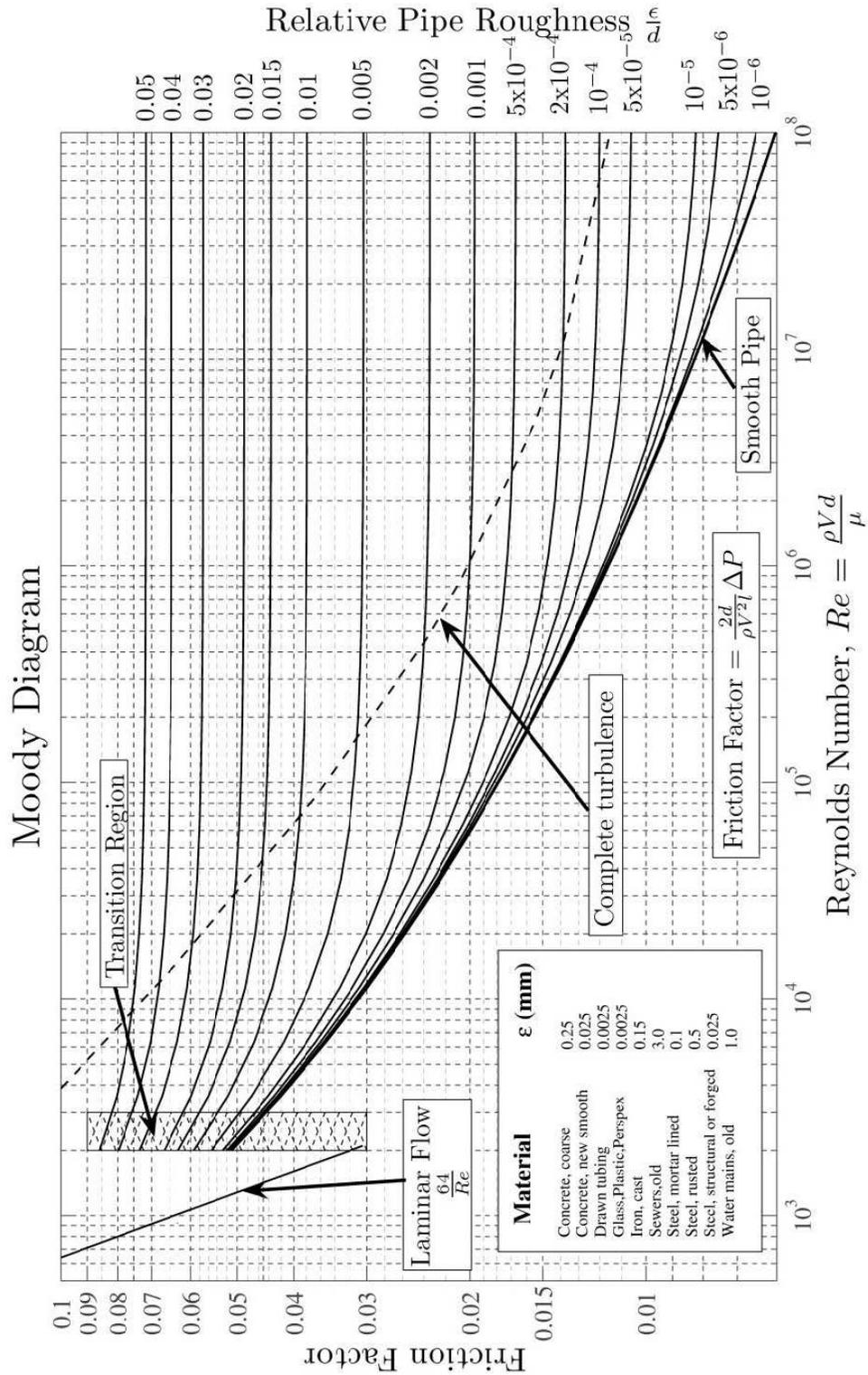


Figura 1.1: Ábaco de Moody. Fuente wikipedia.

1.1 Pérdidas singulares en tuberías

Los sistemas de tuberías consisten de distintos elementos como uniones, codos, válvulas, además de cambios en el diámetro. Estos elementos dan origen a pérdidas de energías distintas a las friccionales, y se localizan donde se encuentran estos elementos. Estas pérdidas se denominan pérdidas singulares y están generalmente asociadas a la desaceleración del escurrimiento.

Por ejemplo, veamos el ejemplo de la **Fig. 1.2** donde, debido a que no son posibles quiebres bruscos de las líneas de corriente, existe una separación aguas abajo del ensanchamiento, la que da origen a zonas de aguas muertas. Esto da también origen a una disipación local de energía en forma de calor, en la zona de la estela.

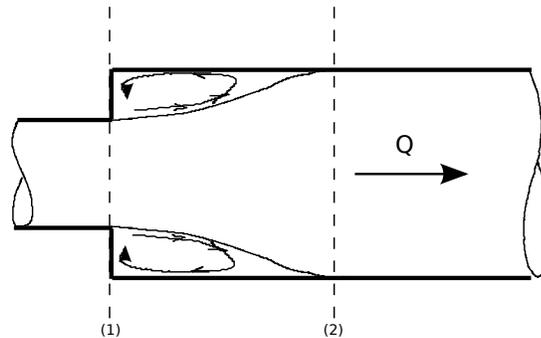


Figura 1.2: Ejemplo ensanche.

Para discutir las pérdidas de energía en el ensanche, consideremos dos puntos 1 y 2 tal que:

$$B_1 = B_2 + \Lambda_s \quad (1.7)$$

De esta forma, podemos definir como Λ_s como:

$$\Lambda_s = k_s \frac{\bar{v}_1^2}{2g} = k'_s \frac{\bar{v}_2^2}{2g} \quad (1.8)$$

y como el caudal es constante, los coeficientes de pérdida singular k_s y k'_s están relacionados entre sí por:

$$\frac{k_s}{S_1^2} = \frac{k'_s}{S_2^2} \quad (1.9)$$

donde S_1 y S_2 son las áreas de las secciones 1 y 2, respectivamente. Es así que, desde el punto de vista práctico, el problema de las pérdidas singulares se traduce en determinar el coeficiente k_s (o k'_s) característico de la singularidad analizada. Si bien existen un gran número de piezas que causan pérdidas singulares de energía, en los siguientes puntos analizaremos algunos de los casos más comunes.

1.1.1 Pérdidas por ensanche brusco

Éste corresponde a uno de los pocos casos que son posibles de ser analizados en forma analítica. Para determinar el valor del coeficiente de pérdida singular, definimos los puntos 1 y 2 ubicados aguas arriba y aguas abajo del ensanche, y el volumen de control que se muestra en la **Fig. 1.3**. Entonces, del teorema de cantidad de movimiento obtenemos que:

$$\sum F_x = \rho Q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \tag{1.10}$$

donde $\sum F_x$ denota la sumatoria de las fuerzas externas que actúan en el volumen de control igual a

$$\sum F_x = F_{p1} + F_{p3} - F_{p2} \tag{1.11}$$

donde $F_{p1} = p_1 S_1$ y $F_{p2} = p_2 S_2$ son fuerzas de presión. A diferencia de los flujos acelerados donde la fuerza F_{p3} era desconocida, en el caso de los denominados chorros como el que se forma en el ensanche, la fuerza que F_{p3} se debe a la misma presión p_1 , y por lo tanto,

$$\sum F_x = F_{p1} + F_{p3} - F_{p2} = p_1 S_1 + p_1 (S_2 - S_1) - p_2 S_1 = S_2 (p_1 - p_2) \tag{1.12}$$

Luego de agrupar términos, el teorema de cantidad de movimiento nos permite obtener:

$$p_1 - p_2 = \rho \bar{v}_2^2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) = \rho \bar{v}_2 (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \tag{1.13}$$

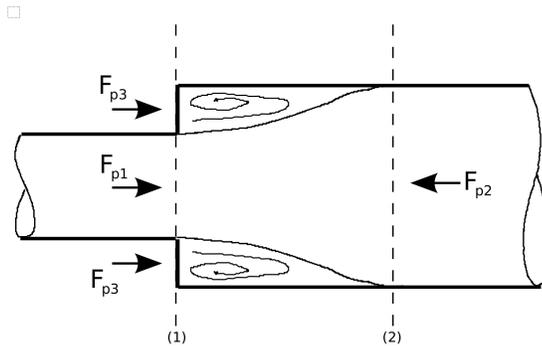


Figura 1.3: Pérdidas por ensanche brusco

Por otro lado, de Bernoulli sabemos que

$$B_1 = B_2 + \Lambda_s \tag{1.14}$$

y entonces

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\bar{v}_2^2}{2g} - \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + \Lambda_s \tag{1.15}$$

De esta forma, demostramos la conocida como fórmula de Borda.

$$\Lambda_s = \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}{2g} \quad (1.16)$$

de donde se obtiene que*

$$k_s = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (1.17)$$

y

$$k'_s = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 \quad (1.18)$$

1.1.2 Pérdidas de entrada

Estas pérdidas de energía ocurren a la entrada de las tuberías como se ve en la **Fig. 1.4**, en particular, cuando el flujo se desacelera aguas abajo del angostamiento de la sección 1. De esta forma, el coeficiente de pérdida de energía singular queda determinado a partir de la fórmula de Borda, donde

$$\Lambda_s = k_e \frac{\bar{v}^2}{2g} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (1.19)$$

donde S_1 queda determinado como:

$$S_1 = \mu S_2 \quad (1.20)$$

donde μ es el coeficiente de contracción definido por Kirchhoff igual a

$$\mu = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0.611 \quad (1.21)$$

De esta forma obtenemos que:

$$k_e = \left(\frac{S_2}{\mu S_2} - 1\right)^2 \approx 0.44 \quad (1.22)$$

si bien en la práctica se utiliza $k_e = 0.5$.

1.1.3 Otras singularidades

En este punto, es posible extender el listado de posibles singularidades que inducen pérdidas de energía de flujo, entre las cuales se cuentan:

- Pérdidas en codos y curvas

*recordar que $S_2 > S_1$

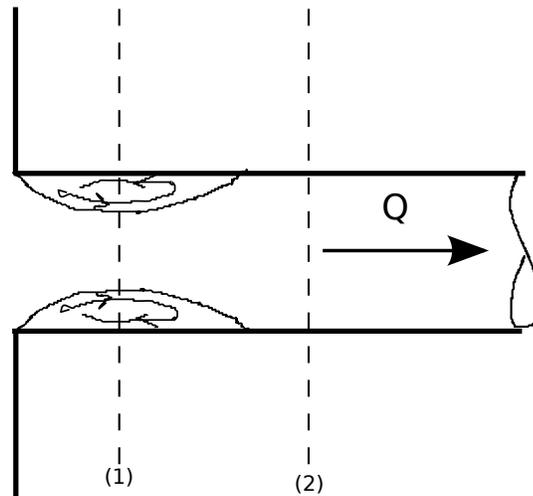


Figura 1.4: Pérdidas de entrada.

- Pérdidas en válvulas
- Pérdidas por bifurcaciones
- Pérdidas por empalmes
- Pérdidas por ensanches graduales
- Pérdidas por entradas en ángulos y en diferentes geometrías

Los coeficientes de pérdidas singulares asociados a cada una de estas singularidades se obtienen de tablas de cálculo, algunas de las cuales se muestran en los documentos complementarios a este capítulo o bien en la bibliografía recomendada para el curso. En términos genéricos, una buena tabla de cálculo debe especificar claramente si el coeficiente de pérdida singular es k_s o k'_s , según si la altura de energía perdida se expresa en función de la altura de velocidad de la sección de aguas arriba o de aguas abajo de la singularidad (1 o 2 siguiendo notación de **Fig. 1.2**).

1.2 Bombas

1.2.1 Conceptos generales

Las bombas son piezas de ingeniería diseñadas para elevar agua. Como vimos el semestre anterior, el efecto de las bombas se cuantifica como un trabajo externo ejercido sobre el

sistema termodinámico, que queda descrito por una potencia P entregada a sistema (energía por unidad de tiempo), de manera tal que al plantear Bernoulli entre dos puntos 1 y 2 (tal que $B_2 > B_1$), ubicados aguas arriba y aguas abajo de la bomba, respectivamente, (**Fig. 1.5**), obtenemos

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 - \frac{|P|}{\gamma Q} \quad (1.23)$$

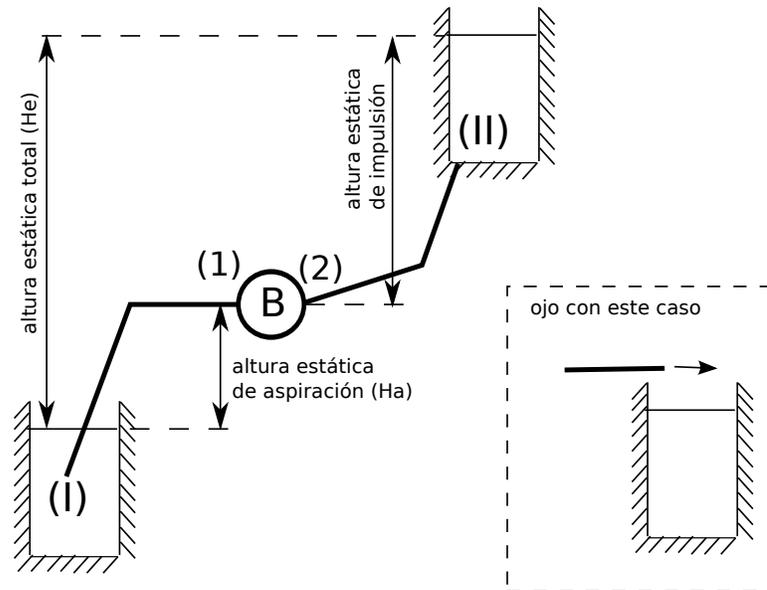


Figura 1.5: Sistema hidráulico de bombas.

En la **Fig. 1.5** se definen tres alturas que permiten caracterizar el sistema hidráulico: la alturas estática de impulsión, altura estática de aspiración (H_a), y altura estática total H_e .

- La altura estática total es la diferencia de cota geométrica entre los puntos de comienzo y término del sistema hidráulico de tuberías, siguiendo un línea de corriente (I y II de **Fig. 1.5**). Si planteamos Bernoulli entre ambos puntos I y II, obtenemos que:

$$H = H_e + \Lambda_s + \Lambda_f \quad (1.24)$$

donde H es la altura de elevación de la bomba. De esta forma, vemos que la bomba trabaja elevando siempre una altura igual a la altura estática total (H_e), más las pérdidas friccionales y singulares que dependen del caudal. Por lo tanto, H_e define el valor mínimo que debe ser capaz de elevar la bomba. Ojo que en caso que la entrada al estanque II sea a presión atmosférica, es necesario considerar la altura de velocidad en II.

Definimos en este momento el *rendimiento de la bomba* (η) como:

$$\eta = H \frac{\gamma Q}{|P|} \quad (1.25)$$

que nos indica que no necesariamente toda la potencia entregada al sistema (proveniente, por ejemplo, de la electricidad) se traduce en una real elevación mecánica del fluido, sino que parte de ese flujo de energía suministrado se pierde irreversiblemente en forma de, por ejemplo, calor debido al roce entre piezas.

- Altura estática de aspiración (H_a). Corresponde a la altura geométrica entre el extremo de entrada al sistema hidráulico de tuberías y aguas arriba de la bomba (punto 1). Esta altura está relacionada con la máxima distancia a la cual podemos ubicar la bomba antes que ocurran problemas de cavitación. Esto se ve en que si aplicamos Bernoulli entre I y 1, obtenemos (**Fig. 1.6**)

$$\frac{p_1}{\gamma} = - \left(H_a + J L + \Lambda_s + \frac{\bar{v}^2}{2g} \right) \quad (1.26)$$

que nos indica que la presión aguas arriba de la bomba disminuye proporcionalmente con L , de manera que existe un máximo de L tal que p_1 sea mayor que la presión de vapor (p_v). en general se requiere que $p_1 > p_v$ para evitar problemas de cavitación. Sin embargo, este análisis es simplificado y se ha visto que en la práctica, es necesario un extra adicional de presión para hacer escurrir el líquido hacia la bomba, para lo cual se define la carga neta de succión (HPSH, net positive suction head) tal que:

$$\frac{p_1}{\gamma} \geq \frac{p_v}{\gamma} + \text{NPSH} \quad (1.27)$$

Esta carga mínima es definida por el fabricante de las bombas, e impone una restricción adicional para la ubicación de bombas en un sistema hidráulico de tuberías. Entre otras consecuencias, la existencia del NPSH condiciona el que a veces no sea posible instalar bombas en superficie, siendo necesario buscar alternativas adicionales como bombas sumergidas.

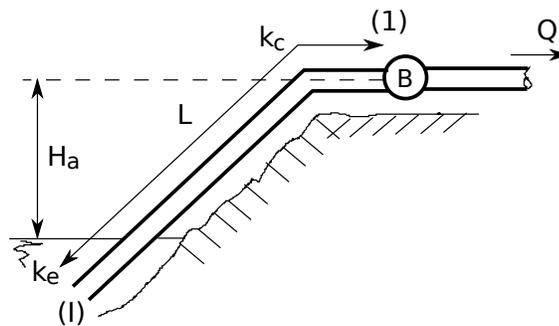


Figura 1.6: Ubicación de bombas.

Finalmente, se define el *cebado* de la bomba como la operación que consiste en extraer el aire de la tubería de aspiración y de la bomba, para que queden llenas del líquido a impulsar. En caso contrario (que haya aire dentro de la tubería de aspiración), no va a ser posible su funcionamiento ya que la densidad del agua es 3 órdenes de magnitud mayor que la densidad del aire.

- Altura estática de impulsión. Se define como la altura geométrica entre la bomba y el término del sistema hidráulico de tuberías.

1.2.2 Bombas centrífugas

Si bien este tipo de bombas es sólo uno de los tantos que existen disponibles[†], es el tipo de bomba más común de encontrar en aplicaciones de ingeniería hidráulica ya que el principio básico que entrega energía al flujo, es lo suficientemente versátil como para trabajar en un amplio rango de caudales y alturas de elevación. Las bombas centrífugas son aquellas que entregan energía mecánica al flujo mediante un rodete con paletas, que gira dentro una carcasa metálica. De esta forma, el fluido que ingresa por el eje de giro del rodete es impulsado hacia afuera por la fuerza centrífuga (altura de velocidad). Usualmente, las bombas centrífugas se componen de dos secciones: un motor que hace girar el rodete, y la bomba propiamente tal (ver **Fig. 1.7**).

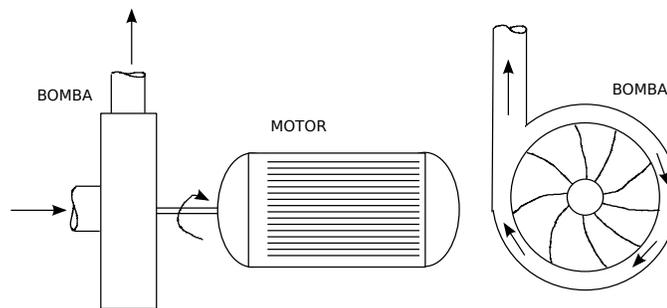


Figura 1.7: Esquema de bomba centrífuga.

Curvas características

La adecuada elección de una bomba requiere conocer sus curvas características, que relacionan el caudal elevado y tres parámetros necesarios para diseñar un sistema hidráulico de tuberías: altura de elevación, potencia y eficiencia; cada una de las cuales debe ser especificada por el fabricante de la bomba.

- Curva característica para altura de elevación. Esta curva es conocida como curva $Q - H$ y relaciona el caudal de elevación y la altura de elevación, o bien la diferencia de Bernoulli antes y después de la bomba. Esta curva característica debe mostrar una relación inversa entre Q y H (**Fig. 1.8A**) ya que en caso contrario (**Fig. 1.8B**) la bomba es inestable porque aumentos de Q producirían aumentos de H , y por consiguiente mayor caudal de acuerdo con Bernoulli.

[†]otros tipos incluyen bombas de vacío, bombas peristálticas, ventiladores, etc

- Curva característica para la potencia. Esta curva conocida $Q - potencia$ relaciona el caudal con la potencia (consumo eléctrico), por lo que es importante conocerla por temas presupuestarios.
- Curva característica para la eficiencia. Esta curva es conocida como curva Q -rendimiento (η en (1.25)), la cual muestra un máximo valor que determina el punto óptimo de operación de la bomba (**Fig. 1.8C**).

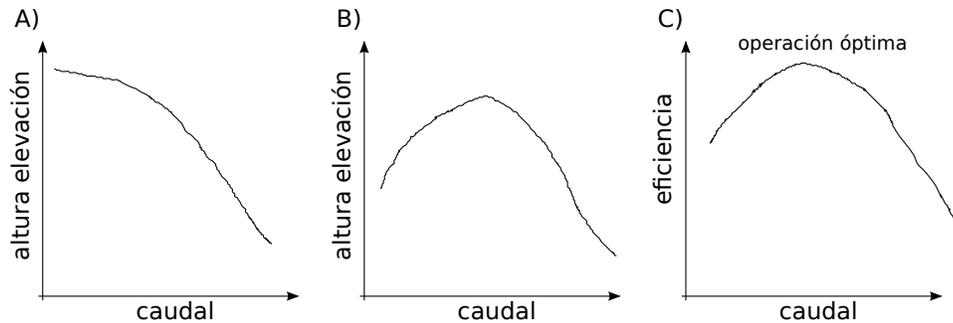


Figura 1.8: Esquema de curvas características. A) Ejemplo de curva $Q - H$ estable. B) Ejemplo de curva $Q - H$ inestable. C) Ejemplo de curva $Q - rendimiento$.

Estas curvas suelen presentarse en un solo gráfico como se muestra en la **Fig. 1.9**, el que condensa la información necesaria para el diseño, vale decir, NPSH (r indica requerido), las curvas características $Q - H$, $Q - potencia$ (curvas con unidades de caballos de fuerza, HP), y eficiencia (curvas cuyo rendimiento se indica en curva $Q - H$ superior. Además, una búsqueda en los diferentes fabricantes de bombas les va a permitir identificar que existe una gran cantidad de bombas disponibles para diferentes aplicaciones. Por ejemplo, mencionamos con anterioridad que existen bombas superficiales y sumergibles en función del HPSH y la disponibilidad de espacio físico en superficie para instalar de manera segura el equipo de bombeo compuesto por la bomba, el motor, tuberías, válvulas, conexión eléctrica, etc. Además, la naturaleza del fluido a bombear determina si es necesario materiales de mayor o menor resistencia a compuestos químicos (agua dulce o marina), o resistentes a la erosión por material suspendido (arena) que puede dañar las aspas del rodete. Por otro lado, en función del rendimiento, las bombas tienen diferentes rangos de operación óptima determinado por la curva $Q - rendimiento$.

Punto de funcionamiento

El punto de funcionamiento de una bomba queda determinado numéricamente de resolver la ecuación de Bernoulli entre dos puntos 1 y 2

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 + \Lambda_f + \Lambda_s - H \quad (1.28)$$

donde $H = H(Q)$ es la altura de elevación de la bomba, la cual es función del caudal. Dada las capacidades computacionales actuales, es fácil pensar en parametrizar las curvas $Q - H$,

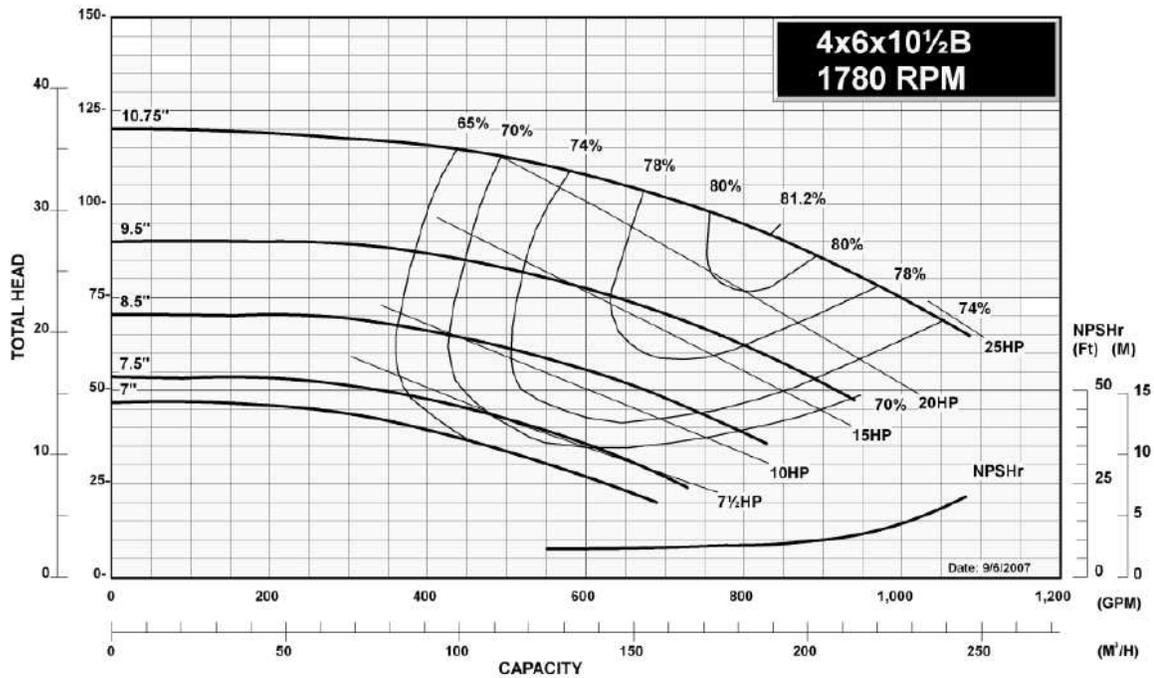


Figura 1.9: Familia de curvas características de bombas comerciales.

y resolver iterativamente el problema completo, incluyendo las pérdidas friccionales y singulares[‡]. Sin embargo, veamos el método gráfico que nos permite entender el comportamiento del sistema. Primero, supondremos que el diámetro es constante entre 1 y 2 (D), y que las pérdidas singulares de energía quedan descritas por la suma de todos los coeficientes de pérdidas singulares entre 1 y 2 ($\sum_1^2 k_s$). Entonces rescribamos (1.28) como:

$$H = H_e + \left(\frac{fL}{D} + \sum_1^2 k_s \right) \frac{8}{g\pi^2 D^4} Q^2 = H_e + \alpha Q^2 \tag{1.29}$$

De esta forma, vemos que H es una función creciente con Q y que corta el eje $Q = 0$ en la altura estática de elevación $H = H_e$. Esta curva se conoce como *curva de carga del sistema*, y nos permite definir el punto de funcionamiento de la bomba como el punto en el cual la curva de carga del sistema se cruza con la curva característica $Q-H$ de la bomba **Fig. 1.10**). Este punto de funcionamiento nos indica, entonces, cuál es el caudal Q_1 que circula por el sistema.

Este análisis gráfico del punto de funcionamiento de bombas nos permite ver que si aumentamos las pérdidas de energía en el sistema (cerrando válvulas por ejemplo), el caudal que circula por el sistema disminuye dado que α de (1.29) aumenta y el punto de funcionamiento de la bomba se desplaza hacia la izquierda, desde Q_1 a Q_2 (línea segmentada de **Fig. 1.10**).

[‡]Metodología propuesta: i) definir un valor inicial para $H = H_e$ y f de pared hidrodinámicamente rugosa. ii) Calcular Q a partir de la ecuación de Bernoulli. iii) recalculer f y H , iv) volver a (ii).

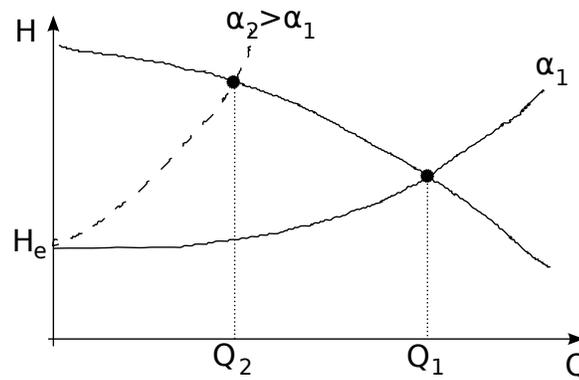


Figura 1.10: Punto de funcionamiento de bombas.

Elevación a dos estanques

Veamos ahora el caso que se muestra en la **Fig. 1.11A**, donde se toma agua de un estanque E, y mediante una bomba se eleva a los estanques I y II, con alturas estáticas total H_{1e} y H_{2e} , respectivamente. Supongamos primero que no existen pérdidas de energía entre E y la bomba, entonces definimos las curvas de carga de los estanques I y II como H_1 y H_2 , respectivamente, tal que

$$H_1 = H_{e1} + \alpha_1 Q_1^2 \quad (1.30)$$

y

$$H_2 = H_{e2} + \alpha_2 Q_2^2 \quad (1.31)$$

donde α_1 y α_2 dependen de los coeficientes de pérdida friccional y singulares en las tuberías 1 y 2, respectivamente (ver **Fig. 1.29**), y Q_1 y Q_2 los caudales a los estanques 1 y 2 respectivamente. De esta forma vemos que, ahora en un diagrama de carga $Q - H$ de **Fig. 1.11B**, el agua solo llega al estanque dos si $H > H_{e2}$, y además, el punto de operación queda determinado cuando se cruzan la curva $Q - H$ de la bomba con la curva de carga conjunta de ambos estanques (**Fig. 1.11B**), que algebraicamente se obtiene de recordar que en tal caso $H_1 = H_2 = H$, y $Q = Q_1 + Q_2$.

Luego, en el caso que las pérdidas de energía entre E y la bomba no sean despreciables se cumple que la curva de carga total del sistema H_{tot} es (**Fig. 1.11C**)

$$H_{tot} = H + \alpha_{EB}(Q_1 + Q_2)^2 \quad (1.32)$$

donde α_{EB} contiene los coeficientes de pérdidas singular y friccional entre E y la bomba.

Bombas en serie

La ubicación de bombas en serie se utiliza cuando es necesario elevar a un gran altura, ya que la curva característica del sistema de bombas en serie, es igual a la suma de las curvas

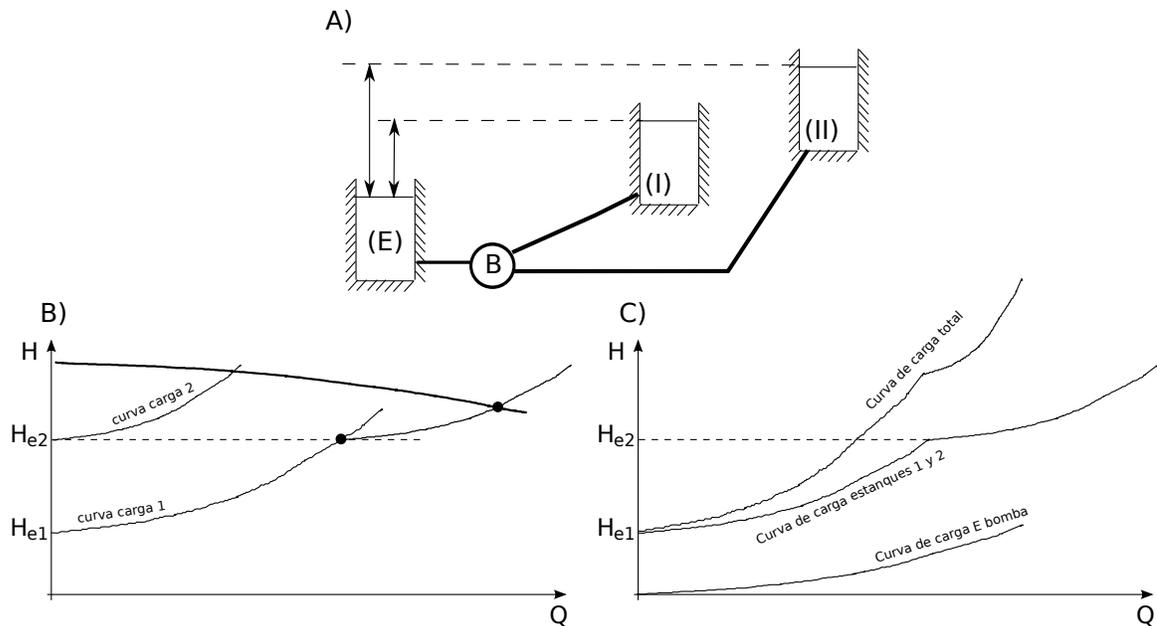


Figura 1.11: Aplicación a dos estanques. A) definición del problema, B) curvas características de la bomba y de carga del sistema. C) Curva de carga del sistema considerando pérdidas entre E y la bomba.

características de cada una de las bombas que lo componen, y esto se ve gráficamente en la **Fig. 1.12**. Es fácil demostrar este resultado de aplicar Bernoulli entre dos puntos ubicados aguas abajo y aguas arriba de un sistema de bombas ubicadas en serie.

El rendimiento conjunto del sistema de dos bombas en serie queda determinado de:

$$P_{1+2} = \frac{\gamma Q(H_1 + H_2)}{\eta_{1+2}} = P_1 + P_2 = \frac{\gamma Q H_1}{\eta_1} + \frac{\gamma Q H_2}{\eta_2} \quad (1.33)$$

de donde se obtiene que en el caso general:

$$\eta_{1+2+\dots+N} = \frac{\sum_{i=1}^N H_i}{\sum_{i=1}^N H_i/\eta_i} \quad (1.34)$$

Bombas en paralelo

Una segunda configuración para instalar bombas es ubicarlas en paralelo como se ve en la **Fig. 1.13**, de donde se obtiene que ambas bombas elevan la misma altura (diferencia de Bernoulli entre II y I), y por lo tanto se generan las condiciones para elevar un caudal total $Q = Q_1 + Q_2$ mayor (**Fig. 1.13**). A partir de un análisis similar al realizado para el caso

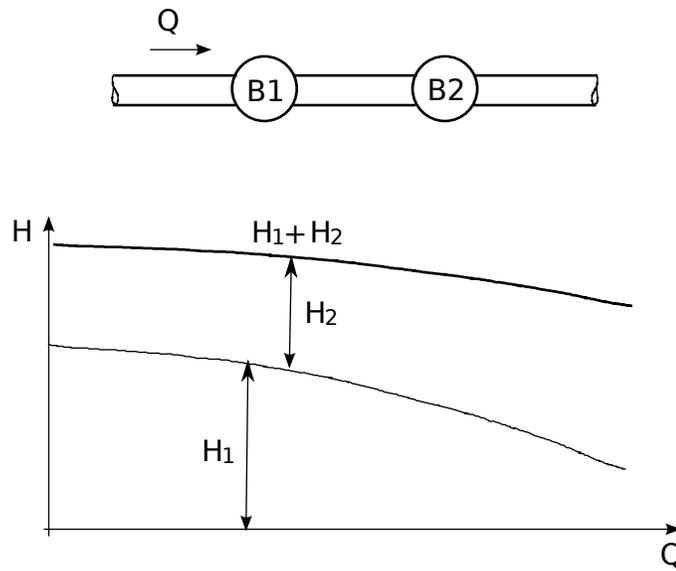


Figura 1.12: Bombas en serie y respectiva curva característica de un sistema de bombas en serie.

de bombas en serie, se determina que la eficiencia de un sistema de N bombas ubicadas en paralelo es:

$$\eta_{1+2+\dots+N} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i}{\sum_{i=1}^N Q_i / \eta_i} \quad (1.35)$$

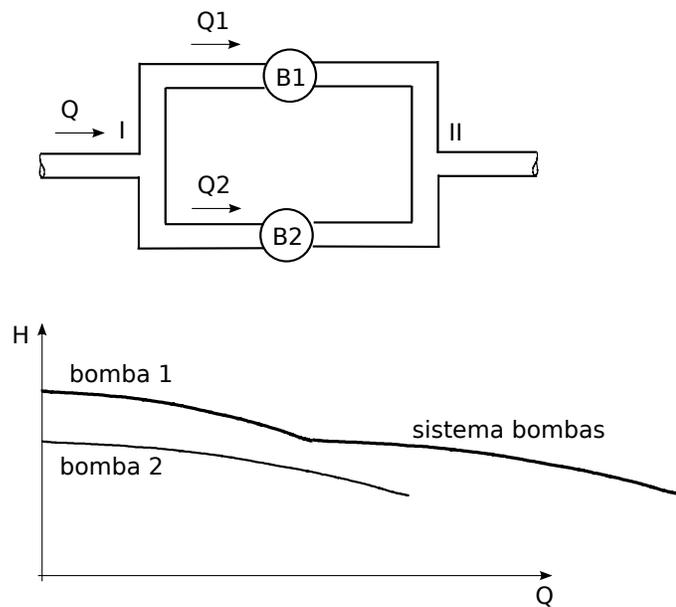


Figura 1.13: Bombas en paralelo y respectiva curva característica de un sistema de bombas en paralelo.

1.3 Redes de tuberías

1.3.1 Consideraciones preliminares

En esta sección estudiaremos cómo resolver una red de tuberías, para lo cual consideremos una red como la que se muestra en la **Fig. 1.14**. Entonces, si conocemos los caudales que entran o salen del sistema en los nodos, la pregunta es cuál es el caudal que circula por cada una de las 5 tuberías de la red, para lo cual necesitamos algunas consideraciones y definiciones preliminares.

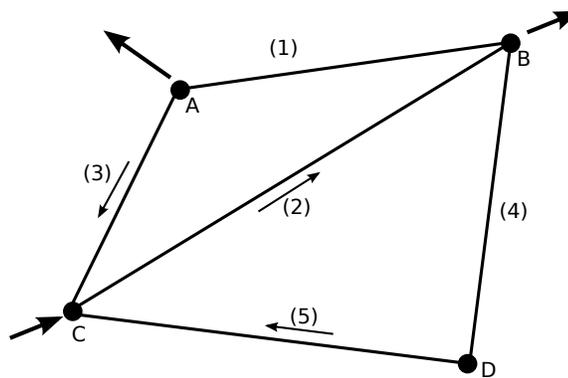


Figura 1.14: Ejemplo red de tuberías.

Primero, definimos que una red de tuberías está compuesta por una serie de nodos que son los puntos donde concurren dos o más tuberías de la red, los cuales quedan definidos por los puntos donde ocurren las entradas o salidas de caudal de la red. Es así que en cada nodo se tiene que cumplir continuidad de caudal tal que, siguiendo el ejemplo de la **Fig. 1.14**, sabemos que

$$Q_C = Q_2 - Q_5 - Q_3 \quad (1.36)$$

donde Q_C es el caudal que ingresa a la red en el nodo C , y Q_2 , Q_5 y Q_3 son los caudales en las tuberías 2, 5 y 3, respectivamente.

A continuación, escribiremos que las pérdidas friccionales en la tubería i como:

$$\Lambda_{fi} = r_i Q_i^{n_i} \quad (1.37)$$

donde Q_i es el caudal que circula en la tubería i , y r_i y n_i son constantes que caracterizan las pérdidas friccionales en la misma. Por ejemplo,

- Sabemos que si la pared es hidrodinámicamente rugosa,

$$f = \frac{1}{(2 \log_{10} (3.7 \frac{D}{\epsilon}))^2} \quad (1.38)$$

y por lo tanto, como

$$\Lambda_f = \frac{fL}{D} \frac{8}{\pi^2 D^4 g} Q^2 \quad (1.39)$$

de manera que $n_i = 2$ y

$$r_i = \frac{f_i L_i}{D_i} \frac{8}{\pi^2 D_i^4 g} \quad (1.40)$$

- De acuerdo con la fórmula de Blassius para flujos turbulentos en tuberías hidrodinámicamente lisas,

$$f = 0.3164 R_e^{-1/4} \quad (1.41)$$

donde $R_e = 4Q/(\pi D \nu)$ es el número de Reynolds de la tubería. Entonces $n_i = 1.75$ y

$$r_i = 0.3164 \left(\frac{4}{\pi D_i \nu} \right)^{-1/4} \frac{L_i}{D_i} \frac{8}{\pi^2 D_i^4 g} \quad (1.42)$$

Luego, la **Fig. 1.15** muestra red de tuberías de donde vemos que está compuesta por varios circuitos cerrados (*I* y *II* en este caso particular), tal que si consideramos el sentido del escurrimiento del circuito *I*, se cumple que

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3 = 0 \quad (1.43)$$

dado que

$$B_A = B_B + \Lambda_{f1} \quad (1.44a)$$

$$B_C = B_B + \Lambda_{f2} \quad (1.44b)$$

$$B_A = B_C + \Lambda_{f3} \quad (1.44c)$$

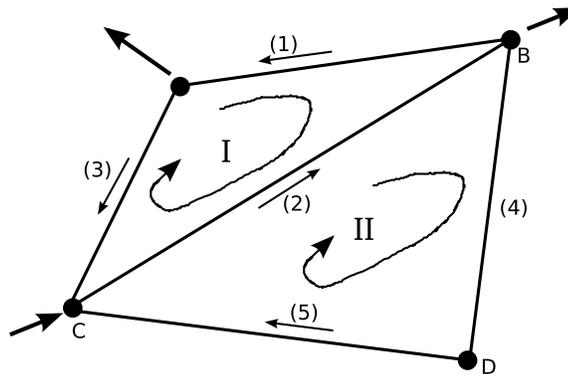


Figura 1.15: Definición de circuitos en redes de tuberías.

En términos generales, podemos decir que para cualquier circuito se cumple

$$\sum_i s_i \Lambda_{fi} = 0 \quad (1.45)$$

donde i denota las tuberías del circuito, y s_i es el signo \pm que resulta de definir si el caudal Q_i escurre a favor (+) o en contra (-) del sentido de giro de los punteros del reloj. En el caso definido en la **Fig. 1.15**, sólo s_i de la tubería 1 es +1 ya que el flujo va a favor del sentido de giro del circuito, mientras que s_i de las tuberías 2 y 3 es igual a -1.

1.3.2 Método de Hardy Cross (1936)

A partir de estos conceptos básicos, a continuación describiremos el Método de Hardy Cross el cual es un método iterativo que permite determinar la distribución de caudales en la red de tuberías. Para esto, consideremos una distribución arbitraria inicial de caudales, y verifiquemos si se cumple que:

$$\sum_i s_i \Lambda_{fi} = 0 \quad (1.46)$$

en cada circuito de la red de tuberías. En caso que se cumpla con dicha condición decimos que obtuvimos los caudales en el circuito dado que estamos resolviendo las ecuaciones de Bernoulli por cada tubería (1.44). Sin embargo, usualmente esto no se cumple de manera que es necesario corregir estos caudales iniciales, para lo cual expresemos s_i como

$$s_i = \frac{Q_i}{|Q_i|} \quad (1.47)$$

y

$$\Lambda_{fi} = r_i |Q_i|^{n_i} \quad (1.48)$$

esta manera de expresar las pérdidas en cada circuito requiere definir el signo de los caudales Q_i de acuerdo con la notación dada por el sentido de giro de los punteros del reloj. Es así que para cada circuito se debe cumplir que

$$\sum_i \frac{Q_i}{|Q_i|} r_i |Q_i|^{n_i} = 0 \quad (1.49)$$

Como fue mencionado anteriormente (1.49) no necesariamente se va a cumplir de manera que planteamos una metodología iterativa para resolver el problema.

1. Definamos arbitrariamente Q_i^0 para comenzar con las iteraciones. La definición es arbitraria, aunque debe cumplir con continuidad de caudales en los nodos para así asegurar que el resultado final también cumpla con continuidad de caudales en los nodos. Verificar que por cada circuito

$$\sum_i \frac{Q_i^0}{|Q_i^0|} r_i |Q_i^0|^{n_i} = \sum_i f(Q_i) \neq 0 \quad (1.50)$$

2. Buscar un valor ΔQ_I por circuito que corrija los caudales Q_i de cada circuito tal que

$$Q_i^1 = Q_i^0 + \Delta Q_I \quad (1.51)$$

y

$$\sum_i \frac{Q_i^0 + \Delta Q_I}{|Q_i^0 + \Delta Q_I|} r_i |Q_i^0 + \Delta Q_I|^{n_i} = \sum_i f(Q_i + \Delta Q_I) = 0 \quad (1.52)$$

3. Expandir la en serie de Taylor la función $f(Q_i)$ como

$$2f(Q_i + \Delta Q_I) \approx f(Q_i) + \frac{\partial f}{\partial Q_i} \Delta Q_I \quad (1.53)$$

Entonces sumamos sobre i e igualamos a 0 para buscar cerrar las pérdidas en el circuito I :

$$\sum_i f(Q_i + \Delta Q_I) = \sum_i f(Q_i) + \Delta Q_I \sum_i \frac{\partial f}{\partial Q_i} = 0 \quad (1.54)$$

Entonces, la corrección ΔQ_I para todos los caudales del circuito queda determinada como:

$$\Delta Q_I = -\frac{\sum_i f(Q_i)}{\sum_i \frac{\partial f}{\partial Q_i}} \quad (1.55)$$

donde (ver definición de (1.50) para la función $f(Q_i)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Q_i} &= r_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\frac{Q_i}{|Q_i|} |Q_i|^{n_i} \right) = r_i \frac{\partial}{\partial Q_i} (Q_i |Q_i|^{n_i-1}) \\ &= r_i \left(|Q_i|^{n_i-1} + (n_i - 1) Q_i |Q_i|^{n_i-2} \frac{Q_i}{|Q_i|} \right) \\ &= r_i (|Q_i|^{n_i-1} + (n_i - 1) Q_i^2 |Q_i|^{n_i-3}) \\ &= r_i (|Q_i|^{n_i-1} + (n_i - 1) |Q_i|^{n_i-1}) \\ &= r_i n_i |Q_i|^{n_i-1} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Entonces

$$\Delta Q_I = -\frac{\sum_i s_i r_i |Q_i|^{n_i}}{\sum_i r_i n_i |Q_i|^{n_i-1}} \quad (1.57)$$

Usualmente, los coeficientes r_i son muy grandes, por lo que se suele dividirlos por un número arbitrario r_o , también grande, pero constante para circuito.

4. Calcular ΔQ_I para cada circuito de la red de tuberías, y corregir los caudales de cada uno de los tramos. Notar que en caso que una tubería sea parte de dos circuitos, como la tubería 2 de la **Fig. 1.15**, entonces el caudal de esa tubería se debe corregir considerando ΔQ_I y ΔQ_{II} , teniendo cuidado con el signo de esta corrección el cual varía según el circuito. Por ejemplo, el caudal Q_2 corregido para el circuito 1 es:

$$Q_2^1 = Q_2^0 + \Delta Q_I - \Delta Q_{II} \quad (1.58)$$

5. Volver a 2 pero con los caudales iniciales corregidos como Q_i^1 .

1.3.3 Ejemplo de aplicación

Ver documento pdf adjunto a este apunte.

1.3.4 Propuesto

Plantee el método de Cross para el caso más general que considere pérdidas singulares y bombas en alguno de los tramos de la tubería.

Capítulo 2

Régimen impermanente en tuberías

En este capítulo estudiaremos cómo evolucionan las propiedades del flujo en tuberías cuando existen cambios en las condiciones de borde del problema, de manera que el flujo deja de ser permanente. Para llevar a cabo este estudio, primero discutiremos acerca del denominado método inelástico de solución, para posteriormente centrarnos en el método elástico para resolver la dinámica impermanente en tuberías y los métodos numéricos que existen para resolver las ecuaciones de movimiento que resultan de este último método de solución.

Definimos como régimen impermanente en tuberías a la evolución temporal de las condiciones del flujo producto de un cambio en las condiciones de borde del problema, y caracterizan el flujo mientras el sistema se adapta a las nuevas condiciones. Entendemos como cambios en las condiciones de borde al cierre o apertura de válvulas, puesta en marcha de bombas, etc., y entendemos como condiciones del flujo al valor de la presión y velocidad (o caudal) en cada punto de la tubería. A partir de estos dos conceptos podemos ver que existe una relación entre velocidad de cambio de las condiciones de borde, y los tiempos que demora el sistema en alcanzar su nueva condición de equilibrio, ya que podemos pensar que si los cambios en las condiciones de borde ocurren en tiempos mayores que los que toma el sistema en alcanzar su nueva condición de equilibrio, entonces el régimen impermanente en las tuberías puede ser explicado como una sucesión de estados permanentes. Por el contrario, si los cambios en las condiciones de borde son bruscos, o bien ocurren en una escala de tiempo mucho menor que la que demora el sistema en alcanzar su nueva situación de equilibrio, entonces el flujo no puede ser descrito a partir de suponer condiciones permanentes. En este capítulo nos centraremos en último grupo de fenómenos impermanentes producidos por cambios bruscos en las condiciones de borde del problema.

Desde el punto de vista de ingeniería hidráulica, los fenómenos transientes en tuberías son importantes de estudiar ya que explican el problema del golpe de ariete en centrales hidroeléctricas. Estos problemas son usualmente gatillados por cortes de luz que desconectan las centrales del sistema interconectado, y entonces las turbinas dejan de producir y comienzan a girar sin control. Para evitar la destrucción de las turbinas, las válvulas aguas arriba de las

turbinas se deben cerrar bruscamente, cosa que produce un exceso de presión en la tubería de manera tal que los gradientes de p sean capaces de frenar el flujo. Como consecuencia, estos aumentos de la presión pueden ser lo suficientemente grandes como para destruir las tuberías. Un ejemplo de este problema se ve en el archivo *pps*, que muestra la destrucción que produjo un golpe de ariete en la central hidroeléctrica de *Sayano Shushenskaya*, Rusia (2009). Existen medidas de protección de las tuberías ante el golpe de ariete, las cuales se basan en la construcción de *chimeneas de equilibrio* aguas arriba de las válvulas (**Fig. 2.1**), las cuales se llenan en caso de cierres bruscos de las válvulas, y así alivian los excesos de presión en las tuberías ya que se fuerza al sistema a funcionar como un tubo en U.

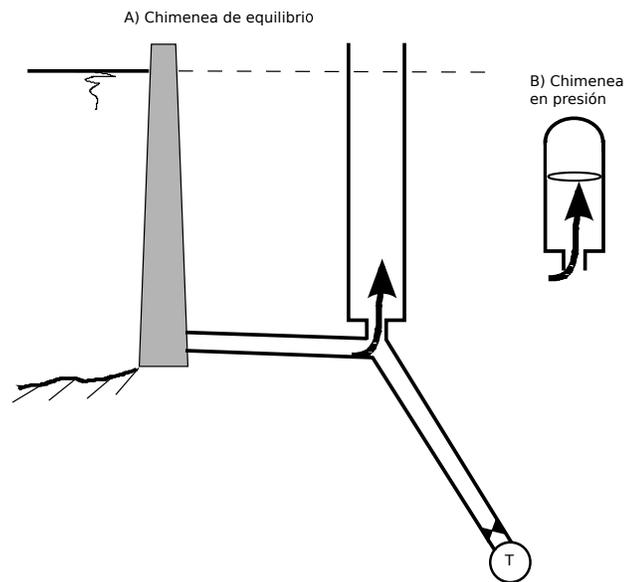


Figura 2.1: Ejemplo de chimeneas de equilibrio. A) ejemplo de una chimenea que funciona a presión atmosférica. B) Ejemplo de una chimenea que funciona con aire a presión.

En este capítulo veremos los dos métodos más usuales de solución de flujos impermanentes en tuberías: el método inelástico que supone flujo incompresible y tuberías indeformables, y el método elástico que considera fluido compresible y tuberías deformables.

2.1 Método inelástico

El método inelástico de solución de fenómenos impermanentes en tuberías considera:

1. Fluido incompresible, de manera que

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

2. La cañería es rígida e indeformable. Por lo tanto, si integramos continuidad en la tubería obtenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (2.2)$$

donde Q es el caudal y s el eje de coordenadas siguiendo una línea de corriente. Este resultado indica que el caudal es uniforme a lo largo de una línea de corriente, lo cual no necesariamente significa que sea constante.

Adicionalmente, supondremos que la tubería es de sección circular.

2.1.1 Fluido ideal

Supongamos momentáneamente que el fluido es ideal, y por lo tanto las pérdidas de carga en las tuberías son despreciables. Como vimos en Mecánica de Fluidos, las ecuaciones básicas de movimiento para este problema son las ecuaciones de Euler

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla B = 0 \quad (2.3)$$

y la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.4)$$

donde \vec{v} es la velocidad y $B = \vec{v} \cdot \vec{v}/2g + p/\gamma + z$ es el Bernoulli. Si usamos la coordenada \vec{s} que coincide con el eje de la tubería (línea de corriente), entonces podemos proyectar (2.3) en un elemento $d\vec{s}$ (producto punto), obteniéndose

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial s} ds = 0 \quad (2.5)$$

donde $u = \vec{v} \cdot d\vec{s}$ es la velocidad a lo largo de \vec{s} y $\frac{\partial B}{\partial s} ds = dB$. Luego, tomamos dos puntos de la línea de corriente, 1 y 2, e integramos

$$\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \int_1^2 dB = 0 \quad (2.6)$$

Por otro lado, vemos que por continuidad entre 1 y 2, $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ si la sección de escurrimiento es la misma, cosa que indica que u es uniforme y no varía a lo largo de \vec{s} ; no obstante, puede variar en el tiempo. De esta forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

y por lo tanto $\frac{\partial u}{\partial t}$ no depende de \vec{s} , tal que

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \int_1^2 ds + \int_1^2 dB = \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} L_{12} + B_2 - B_1 = 0 \quad (2.8)$$

donde L_{12} es la distancia entre 1 y 2, a lo largo de la tubería, y B_1 y B_2 son los Bernoulli evaluados en los puntos 1 y 2, respectivamente.

Ejemplo

Vea ejemplo discutido en documento adjunto Ejemplo_Metodo_Inelastico.pdf.

2.1.2 Efecto de las pérdidas de energía

Consideremos ahora que el fluido es real, y por lo tanto hay que tener en cuenta el esfuerzo de corte que disipa energía. Consideremos un volumen de control dV , tal que dS se orienta a lo largo de una línea de corriente (**Fig. 2.2**). Las dimensiones del volumen de control son área transversal al escurrimiento dA , largo ds , y perímetro donde actúan los esfuerzos de corte $d\chi$. Veamos como queda el teorema de cantidad de movimiento aplicado a este volumen de control. Primero:

$$\sum d\vec{F}_{ext} = dm\vec{a} \tag{2.9}$$

Luego, consideremos sólo la proyección de fuerzas a lo largo de ds , de manera que la proyección de dz , que usaremos para el cálculo del peso, es (**Fig. 2.2**):

$$dz = ds \sin \theta \tag{2.10}$$

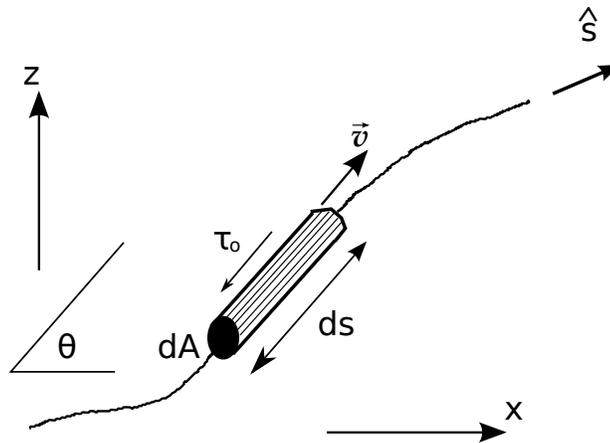


Figura 2.2: Suma de fuerza en elemento de línea de corriente.

Entonces, el teorema de cantidad de movimiento queda escrito como

$$\sum d\vec{F}_{ext} = pdA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - \tau_o d\chi ds - \rho g \sin \theta dA \tag{2.11}$$

donde τ_o es el esfuerzo de corte que actúan en el perímetro $d\chi$ (manto $d\chi ds$), también conocido como *perímetro mojado*. De esta forma obtenemos que:

$$- \frac{\partial p}{\partial s} ds dA - \tau_o d\chi ds - \rho g dA \sin \theta = dm\vec{a} \tag{2.12}$$

Luego, sabemos que

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\vec{v} \quad (2.13)$$

que en la dirección s es igual a

$$a_s = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \hat{s} \quad (2.14)$$

Además,

$$dm = \rho g dA ds \quad (2.15)$$

y entonces el teorema de cantidad de movimiento a lo largo de la línea de corriente es:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\tau_o}{R_h} - \rho g \sin \theta \quad (2.16)$$

donde R_h es el *radio hidráulico* igual a

$$R_h = \frac{d\chi}{dA} \quad (2.17)$$

Finalmente, si expresamos

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} \quad (2.18)$$

obtenemos que

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{u^2}{2g} \right) + \frac{\tau_o}{R_h \rho g} = 0 \quad (2.19)$$

o bien

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla B + \frac{\tau_o}{R_h \rho g} = 0 \quad (2.20)$$

que es la ecuación de Euler corregida por fricción.

En esta ecuación, τ_o es el esfuerzo de corte que se aplica en el manto del tubo de flujo. Si este tubo de flujo abarca toda la tubería, entonces τ_o representa el esfuerzo de corte en las paredes de la tubería, el que depende del valor del factor de fricción f , y por lo tanto del régimen de escurrimiento y de las propiedades hidrodinámicas de la tubería. De lo conocido de flujo permanente en tuberías, podemos ver que

$$\frac{\tau_o}{\gamma R_h} = J \quad (2.21)$$

donde $R_h = D/4$ en tuberías, por lo tanto:

$$\frac{\tau_o}{\gamma R_h} = \frac{f}{D} \frac{u^2}{2g} \quad (2.22)$$

y por lo tanto:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla B + \frac{f}{D} \frac{u^2}{2g} = 0 \quad (2.23)$$

En caso que el régimen sea laminar, sabemos que $f = 64/R_e$, y entonces

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla B + \frac{32\nu}{gD^2} u = 0 \quad (2.24)$$

Ejemplo

Vea ejemplo discutido en documento adjunto `Tubo_en_U_con_resistencia_laminar.pdf`

2.2 Método inelástico compresible

Previo a detallar el método elástico de solución de fenómenos transientes, veamos primero un caso intermedio en que consideramos que el fluido es compresible, pero la tubería es rígida. Este caso reconoce que cambios instantáneos en la velocidad del fluido, se explican en cambios en la presión tal de producir la desaceleración o aceleración del flujo, y por lo tanto la velocidad deja de ser uniforme en la tubería, y por lo tanto el fluido no puede ser considerado como incompresible.

Esta consideración se traduce en que identificamos una velocidad a la cual se propaga la información en la tubería, información relacionada con cambios en las condiciones de borde. Veamos por ejemplo el caso en que cerramos bruscamente de la válvula de una tubería que descarga un estanque **Fig. 2.3**. Producto que aceptamos cambios en la densidad del fluido, entonces podemos acumular masa de fluido sin variar el volumen, por lo que veremos que se genera un frente que se propaga aguas arriba, transmitiendo la información de los cambios en las condiciones de borde del problema. Estos cambios se ven expresados en un exceso de presión H_a tal de producir la desaceleración instantánea del flujo en el frente.

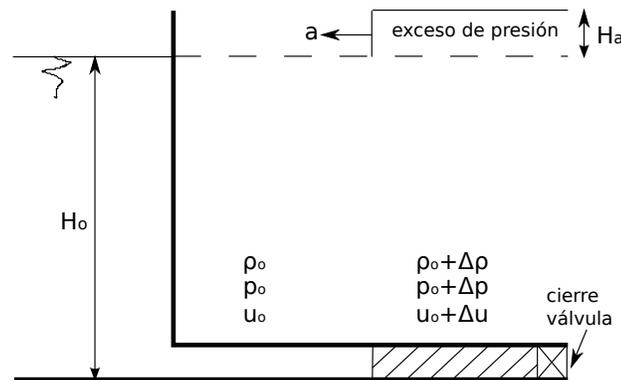


Figura 2.3: Esquema conceptual de cierre brusco de válvula para analizar caso de tubería inelástica y fluido compresible.

Si a es la velocidad de propagación de la información, que asumiremos constante, entonces obtenemos que para un tiempo t , aguas arriba del frente ubicado a una distancia at de la válvula, la velocidad del flujo es u_o igual a la velocidad del flujo en condiciones permanentes previo al cierre de la válvula, mientras que aguas abajo del frente, la velocidad del flujo es $u_o + \Delta u$, donde Δu es el cambio en la velocidad producido por la operación de la válvula. De igual forma, llamamos p_o y ρ_o a la presión y densidad del fluido aguas arriba del frente, y $p_o + \Delta p$ y $\rho_o + \Delta \rho$ a la presión y densidad aguas abajo del frente (**Fig. 2.4**).

Consideremos la ecuación de continuidad para un volumen de control que se desplaza lagrangianamente con el frente tal que la masa de fluido contenida en el volumen de control no varía en el tiempo. Por lo tanto, $G_e = G_s$ donde G_e es el gasto másico de entrada y G_s es

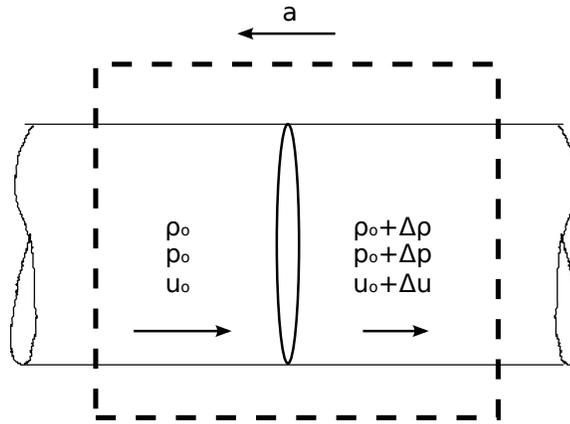


Figura 2.4: Definición volumen de control lagrangiano que se desplaza hacia aguas arriba a una celeridad a .

el gasto másico de salida. O bien

$$(\rho Q)_e = (\rho Q)_s \quad (2.25)$$

donde Q es el caudal. Entonces, como nos movemos según un enfoque Lagrangiano, se tiene que la velocidad de advección neta de entrada es $u_o + a$, y la velocidad de advección neta de salida es $u_o + \Delta u + a$, y por lo tanto:

$$\rho_o(u_o + a)A = (\rho_o + \Delta\rho)(u_o + \Delta u + a)A \quad (2.26)$$

donde A es la sección de escurrimiento. Por lo tanto,

$$\rho_o \Delta u = -\Delta\rho(u_o + \Delta u + a) \quad (2.27)$$

Luego, si suponemos que $a \gg u_o + \Delta u$, obtenemos finalmente que

$$\Delta u = -\frac{\Delta\rho}{\rho_o} a \quad (2.28)$$

A continuación aplicamos el Teorema de Cantidad de Movimiento en el volumen de control, de manera de relacionar cambios en la velocidad con cambios en la presión y la densidad. Para esto:

$$\sum F_{ext} = (\rho Q v)_{sal} - (\rho Q v)_{in} \quad (2.29)$$

donde $\sum F_{ext}$ es la sumatoria de fuerzas externas que actúan en el volumen de control, en este caso, fuerzas debido a la presión, y por lo tanto

$$p_o A - (p_o + \Delta p)A = (\rho_o + \Delta\rho)(u_o + \Delta u + a)^2 A - \rho_o(u_o + a)^2 A \quad (2.30)$$

Organizando términos, utilizando el resultado de (2.28), y nuevamente considerando que a es mucho mayor que u_o y Δu , se obtiene finalmente que:

$$\Delta p = -\rho_o a \Delta u \quad (2.31)$$

Finalmente, si expresamos cambios en la presión con excesos de presión H_a ,

$$\Delta p = \rho_o g H_a \quad (2.32)$$

entonces

$$H_a = -\frac{a}{g} \Delta u \quad (2.33)$$

Es importante mencionar que a es la velocidad del sonido definida como:

$$a^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{K}{\rho_o} \quad (2.34)$$

donde K es el módulo de compresibilidad del fluido, igual a $2.2 \times 10^9 \text{Pa}$. Entonces $a \approx 1500 \text{ms}^{-1}$, y por lo tanto, si $\Delta u \approx 1 \text{ms}^{-1}$, obtenemos que $H_a = 150\text{m}$.

2.3 Método elástico

El método elástico de solución de fenómenos impermanentes en tuberías se basa en considerar que el fluido es compresible, y que la pared de la tubería es elástica. De esto se obtiene que necesitamos resolver acopladamente las ecuaciones de continuidad de masa de fluido, el teorema de cantidad de movimiento (las ecuaciones de Navier-Stokes no son válidas para fluidos compresibles), la ley de compresibilidad del líquido que relaciona sus cambios en densidad producto de cambios en la presión, y la ley de deformación del material de la tubería.

2.3.1 Continuidad de masa

Consideremos un volumen de control de tubería de sección A y largo dx , tal que:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = G_e - G_s \quad (2.35)$$

donde $m = \rho A dx$ es la masa de fluido, G_e y G_s son los gastos máxicos de entrada y salida, respectivamente. Expandiendo en series de Taylor el gasto máxico de salida en torno a G_e , obtenemos

$$\frac{\partial m}{\partial t} = G_e - G_e - \frac{\partial G}{\partial x} dx \quad (2.36)$$

donde $G = \rho Q = \rho u A$. Entonces

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho u A}{\partial x} = 0 \quad (2.37)$$

de donde se obtiene que

$$A \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} \right) + A \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

$$A \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DA}{Dt} + A \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Además, según la ley de compresibilidad del fluido,

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho} \quad (2.39)$$

donde K es la constante elástica del fluido*. Entonces

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \quad (2.40)$$

y por lo tanto, después de reemplazar en el primer término de (2.38), obtenemos que:

$$\frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.41)$$

la cual nos indica que la variación del área de la tubería se debe a cambios en la presión y a la convergencia o divergencia de la velocidad del flujo. Es necesario relacionar la variación de A con cambios en la presión p , y las propiedades mecánicas de la tubería.

Primero, es fácil ver que en una tubería cilíndrica se cumple que:

$$dA = 2\pi r dr \quad (2.42)$$

donde dr indica cambios en el espesor de la tubería. Luego, definimos la deformación unitaria de la tubería como:

$$\epsilon = \frac{dr}{r} \Rightarrow 2 \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} \quad (2.43)$$

Luego, podemos ligar la deformación unitaria de un sólido con los esfuerzos transversales σ_t y longitudinales de la tubería σ_l , a través del módulo de Young E y el módulo de Poisson μ , como:

$$\epsilon = \frac{\sigma_t - \mu \sigma_l}{E} \quad (2.44)$$

donde E tiene unidades de $[FL^{-2}]$ y es una propiedad del material de la tubería[†]. La deformación esperada en la tubería depende del tipo de anclaje, y por lo tanto en el modo en que se reparten las cargas longitudinales y transversales. En particular, si la tubería está anclada a ambos lados, entonces se restringen las deformaciones longitudinales, siendo

*Valores característicos para diferentes materiales pueden ser encontrados en el documento adjunto propiedades_elasticas_materiales.pdf

[†]Valores característicos de módulos pueden ser encontrados en el documento adjunto propiedades_elasticas_materiales.pdf

este caso opuesto a aquel donde la tubería tiene juntas de expansión que permiten la libre expansión longitudinal de la tubería. Cada caso conduce a un comportamiento distinto de la tubería, lo cual incide directamente en la velocidad de propagación de las ondas de presión, la que en tuberías elásticas es igual a:

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho} \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{E}\Psi\right)}} \quad (2.45)$$

donde E es el módulo de Young, K es la constante elástica del fluido, y Ψ es una función que depende del tipo de anclaje[‡]:

- Tubería anclada en ambos extremos:

$$\Psi = (1 + \mu^2) \frac{D}{e} \quad (2.46)$$

donde e es el espesor de la tubería y D el diámetro.

- Anclada en un extremo:

$$\Psi = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{D}{e} \quad (2.47)$$

- Tubería delgada con juntas de dilatación:

$$\Psi = \frac{D}{e} \quad (2.48)$$

- Tubería rígida donde $a = \sqrt{K/\rho}$

$$\Psi = 0 \quad (2.49)$$

Consideremos el caso de una tubería con juntas de dilatación, tal que $\sigma_l = 0$, en este caso se tiene que

$$\epsilon = \frac{\sigma_t}{E} \quad (2.50)$$

donde σ_t es el esfuerzo de corte transversal, el que a lo largo del espesor e . Este esfuerzo es el encargado de resistir la presión del fluido resultando el diagrama de fuerzas de la **Fig. 2.5**, el que nos dice que en una tramo de tubería de longitud Δx , se cumple que:

$$p2r\Delta x = 2\sigma_t e\Delta x \Rightarrow \sigma_t = \frac{pr}{e} \quad (2.51)$$

y por lo tanto,

$$\epsilon = \frac{pr}{eE} \quad (2.52)$$

A continuación obtenemos que:

$$\frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = 2 \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{2}{eE} \left(r \frac{Dp}{Dt} + p \frac{Dr}{Dt} \right) \quad (2.53)$$

[‡]Más información puede ser encontrada en el documento adjunto Celeridad_de_onda_de_presion.pdf

Ahora, si consideramos que la deformación de la tubería ocurre en una escala de tiempo mucho mayor que la escala de tiempo a la cual ocurren los cambios en la presión, entonces $r \frac{Dp}{Dt} \gg p \frac{Dr}{Dt}$, y por lo tanto

$$\frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = \frac{2}{eE} r \frac{Dp}{Dt} \quad (2.54)$$

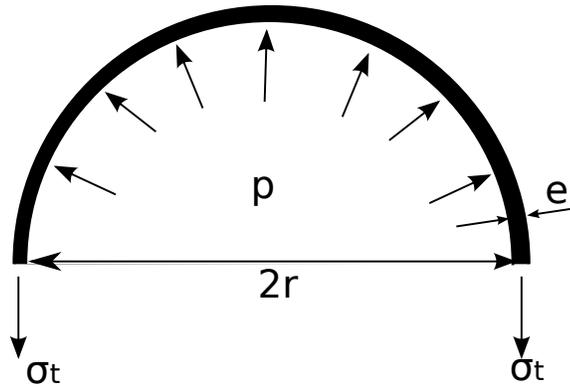


Figura 2.5: Diagrama de fuerzas para obtener σ_t .

Si reemplazamos este último resultado en la ecuación de continuidad, obtenemos que:

$$\frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} + \frac{2}{eE} r \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.55)$$

y entonces:

$$\left(1 + \frac{2K}{eE} r\right) \frac{Dp}{Dt} + K \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.56)$$

Por otro lado, de (2.48), podemos expresar

$$\left(1 + \frac{2K}{eE} r\right) = \frac{1}{a^2} \frac{K}{\rho} \quad (2.57)$$

y entonces obtenemos la ecuación de continuidad para el método elástico en tuberías con juntas de dilatación:

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.58)$$

En general, esta forma de expresar la ecuación de continuidad es válida para cualquier tipo de anclaje, aunque la influencia del tipo de anclaje debe ser considerada en el cálculo de a . Finalmente, es importante destacar que esta última ecuación contiene el resultado del método inelástico, el cual se caracteriza por $a = \infty$, y por lo tanto $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

2.3.2 Teorema de cantidad de movimiento

Veamos ahora como queda expresado el teorema de cantidad de movimiento para el método elástico, donde el régimen es impermanente, la tubería es elástica y el fluido es compresible. Considerando la definición de variables de la **Fig. 2.6**, vemos que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{Dm\vec{v}}{Dt} \quad (2.59)$$

Según la dirección x a lo largo de la tubería,

$$\sum F_{ext_x} = F_{pe} - F_{ps} - W \sin \theta - F_\tau \quad (2.60)$$

donde W es el peso del volumen de control, F_τ son las fuerzas debido al esfuerzo de corte actuando en el perímetro mojado χ y donde $F_{pe} - F_{ps}$ es la resultante de las fuerzas de presión tal que F_{ps} , las que nuevamente la expresamos a partir de una expansión en series de Taylor, sin embargo, ahora no es posible considerar que el área A uniforme. Entonces,

$$\sum F_{ext_x} = pA - \left(pA + \frac{\partial pA}{\partial x} \Delta x \right) - \rho g A \Delta x \sin \theta - \tau_o \chi \Delta x \quad (2.61)$$

Entonces, dado que $m = \rho A \Delta x$, obtenemos que

$$\sum F_{ext_x} = -\frac{\partial pA}{\partial x} \Delta x - \rho g A \sin \theta \Delta x - \tau_o \chi \Delta x \quad (2.62)$$

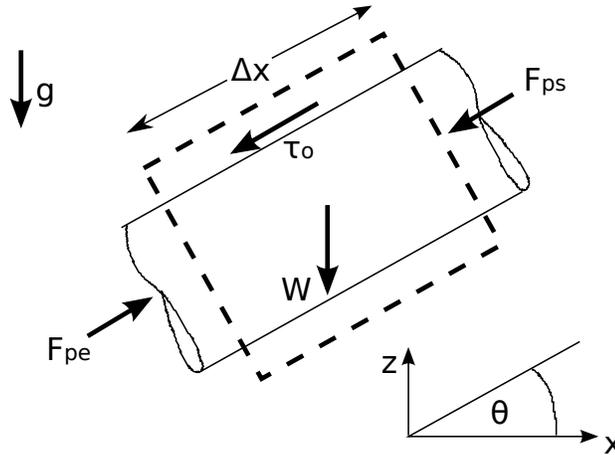


Figura 2.6: Diagrama de fuerzas para método elástico.

Por otro lado, en la dirección x se cumple que

$$\frac{Dm\vec{v}\rho Au}{Dt} = \frac{D\rho Au\Delta x}{Dt} = \rho A \Delta x \frac{Du}{Dt} + u \frac{D\rho A \Delta x}{Dt} \quad (2.63)$$

donde u denota la velocidad del flujo a lo largo de la tubería (línea de corriente). El último término de la derecha es igual a cero dado que la masa es constante, y por lo tanto, al juntar toda la información obtenemos que:

$$\begin{aligned} \rho A \Delta x \frac{Du}{Dt} &= pA - \left(pA + \frac{\partial p A}{\partial x} \Delta x \right) - \rho g A \Delta x \sin \theta - \tau_o \chi \Delta x \\ \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho A} \frac{\partial p A}{\partial x} - g \sin \theta - \frac{\tau_o \chi}{\rho A} \end{aligned} \quad (2.64)$$

A continuación, expresamos $\sin \theta = \frac{\partial z}{\partial x}$ y expandimos el término del gradiente de presión y consideramos que cambios espaciales en la presión son mayores que los cambios en la sección A , entonces

$$\frac{p}{\rho A} \frac{\partial A}{\partial x} \ll \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.65)$$

De esta manera obtenemos que:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + gz)}{\partial x} - \frac{\tau_o}{\rho R_h} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \frac{\tau_o}{\rho R_h} \quad (2.66)$$

donde $R_h = A/\chi$ es el radio hidráulico.

Por último, si expresamos el esfuerzo de corte de la tubería como:

$$\frac{\tau_o}{\rho R_h} = \frac{f}{2D} u|u| \quad (2.67)$$

donde el término $u|u|$ nos permite ajustar automáticamente la dirección de la fricción (opuesta al movimiento), y asumimos que f es constante, entonces, la ecuación de movimiento para el método elástico es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \frac{f}{2D} u|u| \quad (2.68)$$

la cual se resuelve acoplada con la ecuación de continuidad antes demostrada:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.69)$$

2.4 Método de las características

En la sección anterior obtuvimos un sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales parciales (derivada respecto a x y t), no lineales (términos $u|u|$, $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $u \frac{\partial p}{\partial x}$, etc.), el cual no tiene solución analítica conocida. Por esto, es necesario resolverlo numéricamente a través del método de las características. Este método numérico se basa en expresar el sistema de ecuaciones parciales, como un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales describan la evolución de las propiedades del flujo a lo largo de las denominadas *líneas características*.

2.4.1 Ecuaciones de movimiento

Previo a describir en detalle el método de las características, definimos H como la cota piezométrica igual a:

$$H = \frac{p}{\rho g} + z = \frac{\hat{p}}{\rho g} \quad (2.70)$$

donde z es la cota geométrica y p la presión, tal que H es la cota geométrica que se alcanzaría con la medición de la presión mediante un piezómetro. Por lo tanto, la ecuación de momentum determinada en la sección anterior, queda escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f}{2D} u |u| \quad (2.71)$$

Luego, la ecuación de continuidad queda escrita como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho g \frac{\partial(H - z)}{\partial t} + \rho g u \frac{\partial(H - z)}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.72)$$

donde $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, pero, si redefinimos el ángulo θ como se indica en la **Fig. 2.7**, obtenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin \theta \quad (2.73)$$

y entonces

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + u \sin \theta + \frac{a^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.74)$$

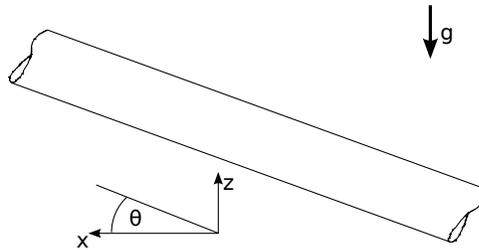


Figura 2.7: Redefinición del ángulo θ , válida para sistema de ecuaciones en derivada total del método de las características.

Si llamamos L_1 a la ecuación de momentum (2.71), y L_2 a la ecuación de continuidad (2.74), formemos el operador lineal $L = L_1 + \lambda L_2$ donde λ es una constante con dimensiones. Es así que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + u \sin \theta + \frac{a^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda g \frac{\partial H}{\partial x} + \lambda \frac{f}{2D} u |u| = 0 \quad (2.75)$$

y luego de juntar términos obtenemos que:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + (u + \lambda g) \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{a^2}{\lambda g}\right) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + u \sin \theta + \lambda \frac{f}{2D} u |u| = 0 \quad (2.76)$$

A continuación, veamos la posibilidad de reducir esta ecuación diferencial parcial anterior a una ecuación diferencial ordinaria, para lo cual debiéramos ser capaces de expresar

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + (u + \lambda g) \frac{\partial H}{\partial x}\right) = \frac{dH}{dt} \quad (2.77)$$

y

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{a^2}{\lambda g}\right) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{du}{dt} \quad (2.78)$$

donde d/dt denota la derivada total de la variable respecto del tiempo. Sin embargo, nosotros sabemos que tanto u como H son función de t y $x(t)$, y por lo tanto, de aplicar la regla de la cadena para el cálculo de la derivada total de u y H , sabemos que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.79)$$

y

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.80)$$

Entonces, si simultáneamente se cumple que

$$(u + \lambda g) = \frac{dx}{dt} \quad (2.81)$$

y

$$\left(u + \frac{a^2}{\lambda g}\right) = \frac{dx}{dt} \quad (2.82)$$

entonces efectivamente podemos decir que las ecuaciones (2.77) y (2.78) son válidas. Para esto, es necesario que

$$u + \lambda g = u + \frac{a^2}{\lambda g} \quad (2.83)$$

de donde obtenemos que

$$\lambda = \pm \frac{a}{g} \quad (2.84)$$

Por lo tanto, el sistema de dos ecuaciones de derivada parcial se reduce a un sistema de dos ecuaciones en derivada total, las cuales son:

$$\frac{dH}{dt} \pm \frac{a}{g} \frac{du}{dt} + u \sin \theta \pm \frac{af}{2gD} u |u| = 0 \quad (2.85)$$

y son válidas a lo largo de las líneas características descritas, en el espacio (x, t) , por

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a \quad (2.86)$$

Gráficamente, las líneas características se muestran en la **Fig. 2.8**, donde C^+ y C^- están asociadas a la línea característica $u + a$ y $u - a$, respectivamente; las cuales tienen pendientes positivas y negativas dado que $a \gg u$.

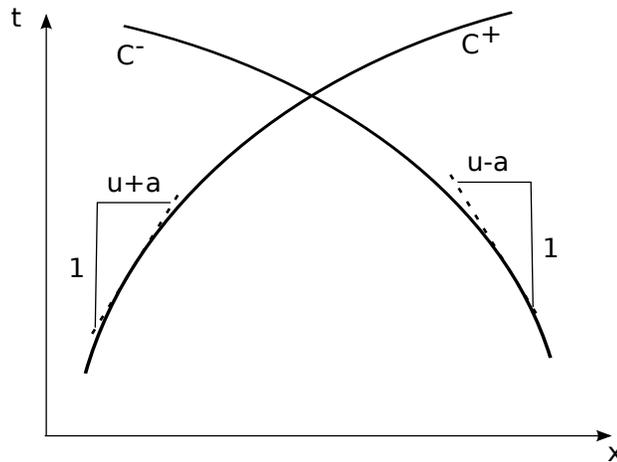


Figura 2.8: Diagrama líneas características en espacio $x - t$.

2.4.2 Método de solución numérica

El método numérico de solución más simple es el método explícito de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales. Habíamos obtenido que:

- A lo largo de la característica positiva, C^+ , se cumple que

$$\frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{du}{dt} + u \sin \theta + \frac{af}{2gD} u|u| = 0 \quad (2.87)$$

que es válida a lo largo de

$$\frac{dx}{dt} = u + a \approx a \quad (2.88)$$

- A lo largo de la característica negativa, C^- , se cumple que

$$\frac{dH}{dt} - \frac{a}{g} \frac{du}{dt} + u \sin \theta - \frac{af}{2gD} u|u| = 0 \quad (2.89)$$

que es válida a lo largo de

$$\frac{dx}{dt} = u - a \approx -a \quad (2.90)$$

En tuberías, la celeridad de la onda de presión es mucho mayor que la velocidad del flujo, y por lo tanto, $u \ll S$, por lo que las ecuaciones (2.88) y (2.90) se reducen a:

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (2.91)$$

y

$$\frac{dx}{dt} = -a \quad (2.92)$$

respectivamente. Estas ecuaciones definen trayectorias de ondas de presión. Como a depende de las características del fluido y de la tubería, a es constante, por lo que las trayectorias son líneas rectas, las cuales quedan representadas en el plano $x - t$ como lo indicado en la **Fig. 2.9**.

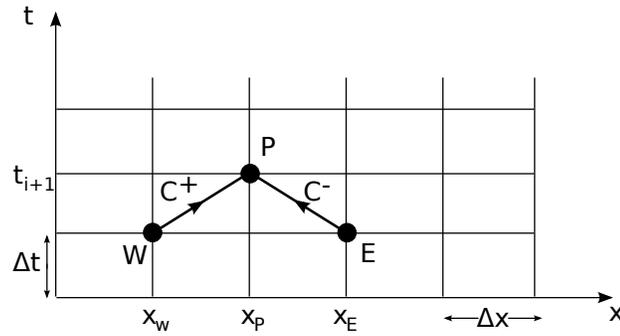


Figura 2.9: Diagrama $x - t$ discretizado con $dx/dt = \pm a$.

A lo largo de la trayectoria positiva definida por $dx/dt = a$, el comportamiento de H y u está dado por (2.87). Del mismo modo, a lo largo de la trayectoria definida por $dx/dt = -a$, (2.89) define el comportamiento de H y u .

A partir del diagrama de **Fig. 2.9**, vemos que lo que sucede en el punto x_P en el tiempo t_{i+1} , se debe a la interacción de dos perturbaciones: una que salió de la posición x_W en el tiempo $t_i = t_{i+1} - \Delta t$ (W de oeste), y que siguió la trayectoria definida por $dx/dt = a$, y de otra perturbación que en el tiempo t_i salió de la posición x_E (E de este), y que se desplazó según $dx/dt = -a$, y entonces el valor de H_P y t_P se debe a H_W , H_E , u_W y u_E .

El método de diferencias finitas considera discretizar el espacio y el tiempo usando espaciamento Δx y Δt , respectivamente, y aproximar las derivadas como

$$\frac{d}{dt} \approx \frac{\Delta}{\Delta t} \quad (2.93)$$

donde es fácil ver que es ventajoso definir

$$\Delta x = a\Delta t \quad (2.94)$$

De esta forma, recordando que las derivadas son a lo largo de las líneas características, obtenemos que:

- En C^+ :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{H_P - H_W}{\Delta t} \quad (2.95a)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_P - u_W}{\Delta t} \quad (2.95b)$$

y

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a \quad (2.95c)$$

• En C^- :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{H_P - H_E}{\Delta t} \quad (2.96a)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_P - u_E}{\Delta t} \quad (2.96b)$$

y

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -a \quad (2.96c)$$

A continuación, si adoptamos el método explícito de solución, los términos $u \sin \theta$ y $fu|u|$ se evalúan en los puntos E y W . Por lo tanto, la ecuación discretizada para la característica positiva es:

$$H_P - H_W + \frac{a}{g}(u_P - u_W) + u_W \sin \theta \Delta t + \frac{a}{g} \frac{f_W u_W |u_W|}{2D} \Delta t = 0 \quad (2.97)$$

y para la característica negativa es:

$$H_P - H_E - \frac{a}{g}(u_P - u_E) + u_E \sin \theta \Delta t - \frac{a}{g} \frac{f_E u_E |u_E|}{2D} \Delta t = 0 \quad (2.98)$$

El que corresponde a un sistema de dos ecuaciones algebraicas, y dos incógnitas, de manera que directamente podemos despejar H_P y u_p , resultando:

$$H_P = \frac{1}{2} \left[H_W + H_E + \frac{a}{g}(u_W - u_E) - (u_W + u_E) \sin \theta \Delta t - \Delta t \frac{a}{2gD} (f_W u_W |u_W| - f_E u_E |u_E|) \right] \quad (2.99)$$

y

$$u_P = \frac{1}{2} \left[\frac{g}{a}(H_W - H_E) + u_W + u_E + \frac{g}{a}(u_E - u_W) \sin \theta \Delta t - \frac{\Delta t}{2D} (f_W u_W |u_W| + f_E u_E |u_E|) \right] \quad (2.100)$$

Estas dos ecuaciones anteriores nos permiten obtener explícitamente el valor de H y U en cualquier punto del espacio-tiempo al que lleguen dos líneas características C^+ y C^- , los cuales, considerando la **Fig. 2.10**, denominaremos como puntos internos. Como también se ve en la **Fig. 2.10**, existen otras dos clases de nodos que debemos tratar para poder representar adecuadamente todo el espacio-tiempo de solución: nodos de condiciones iniciales y nodos de condiciones de borde.

- Las condiciones iniciales deben ser especificadas para el tiempo $t = t_o = 0$ en todos los puntos del espacio, y así poder calcular el valor de H y u para el tiempo $t = t_1 = \Delta t$. Es usual que las condiciones del problema queden determinadas por algún escenario

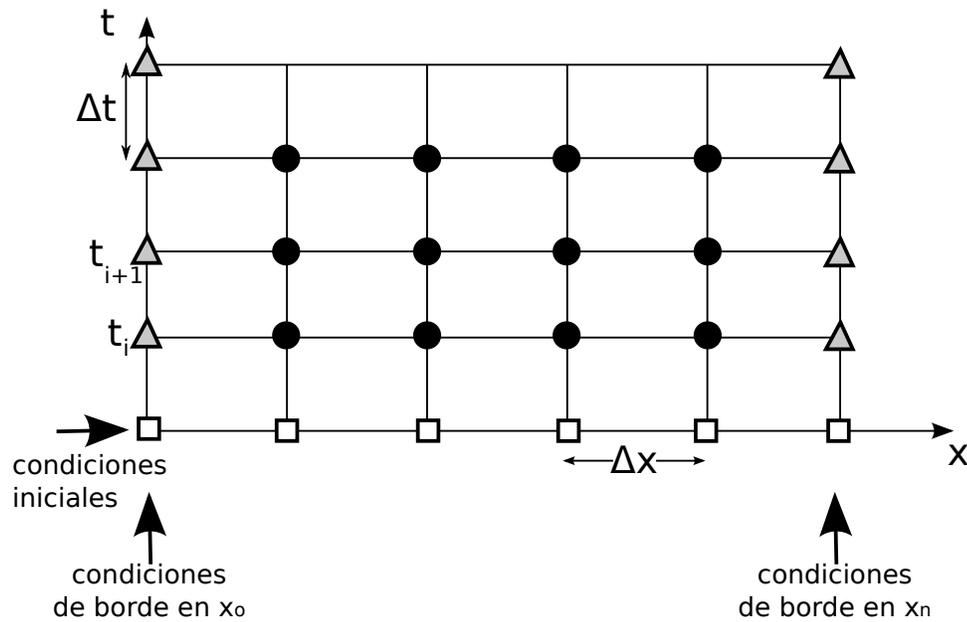


Figura 2.10: Discretización espacio-tiempo de solución, y definición de nodos interiores, nodos de condición inicial, y nodos de condición de borde.

permanente del tipo $Q = cte$, $H = H(x) = \frac{p(x)}{\gamma} + z(x)$ queda determinado por igualdad de Bernoulli entre cada punto x_i de solución, y las condiciones de borde del problema (estanque aguas arriba, descarga a la atmósfera aguas abajo, etc). Un segundo tipo de condición inicial está dada por las válvulas completamente cerradas en $t = 0$, y por lo tanto $u = 0$ $H = H_o$ en todo x , donde H_o es la carga estática del sistema (elevación de agua en estanque).

- Las condiciones de borde se deben especificar en las fronteras del dominio ubicadas en $x = x_o$ y $x = x_n$ (ver **Fig. 2.10**), para todos los tiempos de solución. La necesidad de especificar las condiciones de borde radica en que, por ejemplo, si deseamos calcular la solución en el nodo x_o para el tiempo t_{i+1} , donde sabemos que en t_{i+1} se conoce la información transmitida a lo largo de C^- proveniente de x_1 en t_i . Sin embargo, no existe un nodo W del cual podamos propagar la información desde t_i , y entonces tenemos un problema de dos incógnitas ($u(t_{i+1}, x_o)$ y $H(t_{i+1}, x_o)$), y sólo una ecuación C^- . Es por esto que necesitamos definir las condiciones de borde que nos permitan ligar $u(t_{i+1}, x_o)$ y $H(t_{i+1}, x_o)$, y entonces cerrar el problema con una segunda ecuación. A continuación vamos a describir algunas de estas ecuaciones que dan cuenta de las condiciones de borde:

1. Estanque aguas arriba (**Fig. 2.11**): Supongamos que aguas arriba de la tubería existe un estanque de grandes dimensiones, tal que la carga es constante. En este caso, podemos ubicar el nodo x_o justo en la entrada de la tubería, y entonces considerar que

$$H(x_o, t_i) = H_o; \quad \forall t_i \tag{2.101}$$

entonces, $u(x_o, t_{i+1})$ queda determinado de C^- proveniente desde $x_1 = x_o + \Delta x$ y el tiempo $t_i = t_{i+1} - \Delta t$.

Luego, podemos liberar la restricción de $H = cte$ y analizar el vaciado del estanque, para lo cual incorporar la ecuación de continuidad de volumen en el estanque:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{A}{\Omega}u \tag{2.102}$$

donde A es la sección de escurrimiento de la tubería, y Ω el área basal del estanque y u es la velocidad a la salida del estanque. Después, discretizamos la ecuación anterior, y asumir que el nivel en el estanque es igual a H en x_o , obteniéndose:

$$H(x_o, t_{i+1}) = H(x_o, t_i) - \frac{A}{\Omega}u(x_o, t_i)\Delta t \tag{2.103}$$

y acoplar esta ecuación con la característica negativa proveniente de x_1 en t_i .

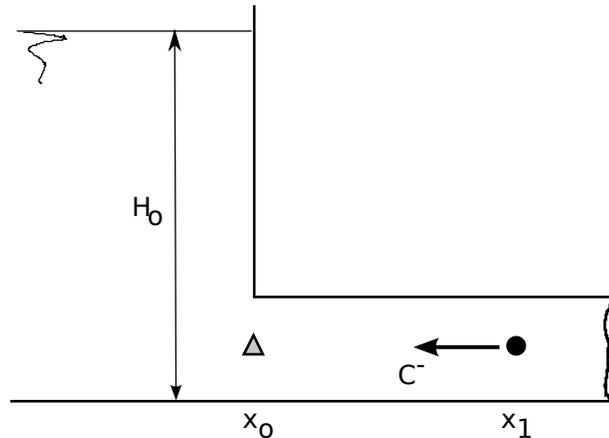


Figura 2.11: Ejemplo de condición de aguas arriba de estanque.

2. Caudal suministrado por una bomba: Supongamos que hay una bomba en x_o la cual entrega energía al sistema de acuerdo con la curva característica del tipo $H(Q) = H_o - \alpha Q^2$. Luego, podemos expresar el caudal Q en términos de la velocidad $u = Q/A$, y entonces u y H quedan relacionados entre si por:

$$H(x_o, t_{i+1}) = H_o - \alpha A^2 u_p(x_o, t_{i+1})^2 \tag{2.104}$$

y acoplar esta ecuación con la característica negativa proveniente de x_1 en t_i .

3. Operación de válvulas (ver **Fig. 2.12**): Veamos ahora la condición de borde de aguas abajo relativa a la operación de una válvula. Primero, esta condición de borde usualmente se impone aguas abajo del sistema de tuberías en el nodo x_n . De esta forma, sabemos que en el tiempo $t = t_{i+1}$ se conoce la información transmitida según C^+ , proveniente desde $x_W = x_{n1}$ y el tiempo t_1 , resultando que necesitamos una ecuación para relacionara $u(x_n, t_{i+1})$ y $H(x_n, t_{i+1})$.

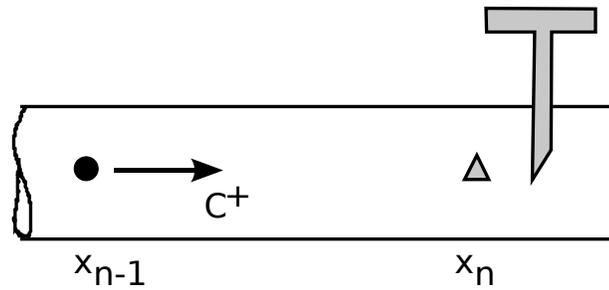


Figura 2.12: Ejemplo de condición de aguas abajo en válvula.

El caso más simple es aquel en que cerramos bruscamente la válvula donde

$$u(x_n, t_{i+1}) = 0 \tag{2.105}$$

y $H(x_n, t_{i+1})$ queda determinado de C^+ que usa la información $u(x_{n-1}, t_i)$ y $H(x_{n-1}, t_i)$.

Podemos extender este resultado al caso genérico en que usamos una ley de operación de la válvula $\eta(t)$, y entonces, usamos los resultados que ya demostramos en el análisis del método inelástico, determinamos que:

$$u(x_n, t_{i+1}) = u_o \eta(t_{i+1}) \sqrt{\frac{H(x_n, t_{i+1})}{H_o}} \tag{2.106}$$

donde u_o y H_o son valores de referencia cuando la válvula está completamente abierta.

De igual forma, podemos ver que la condición de borde en que se produce una descarga a la atmósfera queda determinada por:

$$H(x_n, t_{i+1}) = 0 \tag{2.107}$$

y $u(x_n, t_{i+1})$ queda determinado de C^+ que usa la información $u(x_{n-1}, t_i)$ y $H(x_{n-1}, t_i)$. Este resultado es válido si el Datum se fija en el punto x_n .

Parte II

Contornos abiertos

Capítulo 3

Características generales del flujo en contornos abiertos

3.1 Características Generales

A diferencia del flujo en contornos cerrados, el problema en contornos abiertos es más complejo dado que la sección de escurrimiento no es fija, sino que varía según las condiciones del escurrimiento, por cambios temporales y/o espaciales de la superficie libre. Como veremos en esta segunda parte de ramo, este simple hecho que la sección de escurrimiento varíe según las condiciones del escurrimiento, va a producir que el problema tenga, en general, dos soluciones físicamente posibles.

Además de esta diferencia en cuanto a la variabilidad de la sección de escurrimiento, el flujo en contornos abiertos se diferencia del flujo en contornos cerrados, por los rangos de variación de las variables del problema. Primero, en contornos cerrados vimos que la presión del fluido puede tomar cualquier valor mayor que la presión de vapor, por el contrario, el rango de variabilidad de la presión en contornos abiertos está restringida por el hecho que la presión en la superficie libre es igual a la presión atmosférica, y la máxima presión escala con la profundidad de escurrimiento. Este hecho explica que es posible elevar agua en contornos cerrados al inducir un gradiente de presión motriz, sin embargo, no podemos revertir el sentido del flujo de una cascada o hacer que un río escurra en contra del sentido de la gravedad. Segundo, el rango de variación de la velocidad del escurrimiento en contornos abiertos es mayor que en contornos cerrados. Por último, la variabilidad de la rugosidad de las paredes en contornos cerrados, es más restringida que la variabilidad en contornos abiertos.

A pesar de estas diferencias, los conceptos de líneas de energía y Bernoulli, son igualmente válidos para flujos en contornos abiertos, aunque debemos considerar que la presión en la superficie libre es igual a la atmosférica como se muestra en la **Fig. 3.1**.

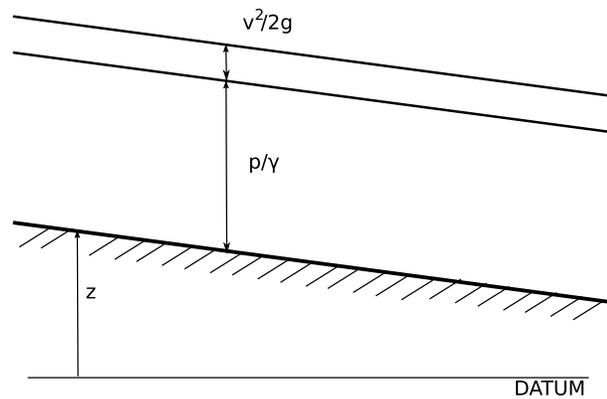


Figura 3.1: Líneas de energías en contornos abiertos

3.2 Clasificación del escurrimiento

El flujo en contornos abiertos se clasifica según diversas propiedades:

3.2.1 Escurrimiento uniforme y variado (Fig. 3.2)

- Escurrimiento uniforme: La altura de escurrimiento no cambia a lo largo del canal de manera que la velocidad u es constante, y $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$, donde h es la altura de escurrimiento. Esta condición se llama escurrimiento normal, el cual está asociado con la denominada *altura normal de escurrimiento* (h_n).
- Escurrimiento variado: La altura de escurrimiento cambia a lo largo del canal, al igual que la velocidad u . Atendiendo a cómo es el cambio de h en x , definimos que el escurrimiento es rápidamente variado cuando la altura de escurrimiento cambia en una distancia corta, por lo que $\frac{\partial h}{\partial x}$ es grande. Además, definimos que el escurrimiento es gradualmente variado cuando $\frac{\partial h}{\partial x}$ existe, pero es pequeño.

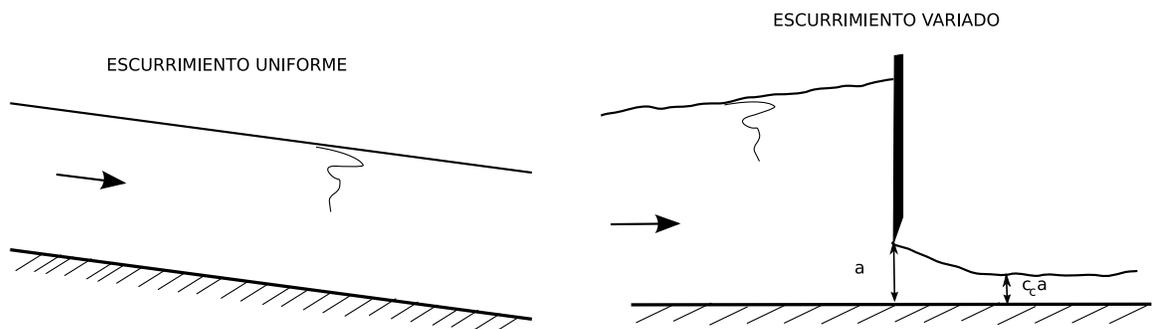


Figura 3.2: Clasificación de escurrimiento uniforme y variado.

3.2.2 Escurrimiento permanente e impermanente

Al igual que vimos en el ramo de Mecánica de Fluidos, el escurrimiento es permanente si $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ e impermanente si $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$. Considerando esta definición y la anterior, vemos que es posible un escurrimiento impermanente que sea gradualmente variado (como es el caso de la onda de crecida en un río, o cambios debidos a la marea), o bien impermanente rápidamente variado como lo fue el maremoto de Febrero de 2010.

3.2.3 Escurrimientos laminares y turbulentos

Ya hemos visto que el número de Reynolds es aquel que determina si el flujo es laminar o turbulento. En el caso de tuberías, éste quedó definido como:

$$Re = \frac{uD}{\nu} \quad (3.1)$$

donde u es la velocidad media y D el diámetro. En el caso de canales, la velocidad característica es la velocidad media del escurrimiento, sin embargo la longitud característica puede ser h , el ancho B o bien una combinación entre ambas longitudes. En particular, se usa el radio hidráulico $Rh = A/\chi$ donde χ es el perímetro mojado. En tuberías, $Rh = D/4$, por lo tanto, si redefinimos el número de Reynolds a partir de esta distancia característica, obtenemos:

$$Re_{Rh} = \frac{u Rh}{\nu} = \frac{Re}{4} \quad (3.2)$$

por lo que los límites de transición entre flujo laminar a turbulento quedan definidos para $Re_{Rh} < 500$ y $Re_{Rh} > 1000$, para flujos laminares y turbulentos, respectivamente. Si $500 < Re_{Rh} < 1000$ el escurrimiento es en transición.

A partir de este resultado en que $Re = 4Re_{Rh}$, podemos expresar las expresiones de los factores de fricción en régimen turbulento y paredes lisas obtenidas para tuberías. Por ejemplo, la formula de Blassius de:

$$f = 0.316Re^{-1/4} = 0.223Re_{Rh}^{-1/4} \quad (3.3)$$

si $Re_{Rh} < 25000$, o bien la fórmula de Prandtl-von Karman

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(Re_{Rh} \sqrt{f} \right) + 0.4 \quad (3.4)$$

si $Re_{Rh} > 25000$.

Para paredes rugosas, el factor de fricción depende de la forma de la sección del escurrimiento, dado que se desarrollan corrientes secundarias.

3.2.4 Esguerrimiento subcrítico y supercrítico

Se define el número de Froude Fr como:

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (3.5)$$

que mide la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas gravitacionales. Entonces definimos:

- Flujo subcrítico. Si $Fr < 1$, de manera que las fuerzas gravitacionales son mayores que las de inercia.
- Flujo supercrítico. Si $Fr > 1$, de manera que las fuerzas gravitacionales son menores que las de inercia.
- Esguerrimiento crítico. Si $Fr = 1$.

La información en canales abiertos se transmite a través de ondas gravitacionales de pequeña amplitud las cuales se generan debido a un cambio momentáneo de la altura local del flujo. Se puede demostrar que la celeridad de estas ondas es $c = \sqrt{gh}$, y por lo tanto, si:

- $u < \sqrt{gh}$, entonces las ondas de presión pueden desplazarse tanto hacia aguas arriba como hacia aguas abajo. En este caso se cumple que $Fr < 1$, y por lo tanto el esguerrimiento es subcrítico. Además, los flujos subcríticos son controlados por las condiciones de nivel impuestas aguas abajo. (**Fig. 3.3**)
- $u > \sqrt{gh}$, entonces las ondas de presión no pueden remontar la corriente, el esguerrimiento es supercrítico que también se denomina de torrente y $Fr > 1$. Al contrario que el caso anterior, los flujos supercríticos son controlados por aguas arriba (**Fig. 3.3**).
- Esguerrimiento crítico. Si $Fr = 1$.

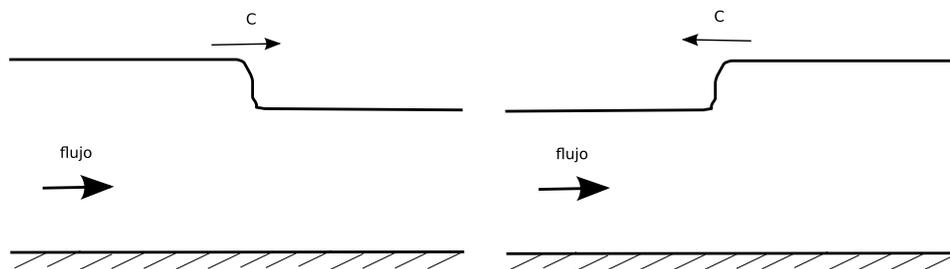


Figura 3.3: Propagación de ondas en canales abiertos.

Por ejemplo, sabemos que una piedra que cae en el agua produce una perturbación del flujo en forma de ondas. Ahora bien, en función de la magnitud de la velocidad del flujo vemos que:

- Agua inmóvil: las ondas son circulares concéntricas al punto donde cae la piedra (**Fig. 3.4A**).
- Si el flujo es subcrítico, entonces las ondas que se desplazan a velocidad $u - c$ pueden remontar la corriente(**Fig. 3.4B**).
- Si el flujo es crítico, entonces las ondas que se desplazan a velocidad $u - c$ son estacionarias porque $u = c$ (**Fig. 3.4C**).
- Si el flujo es supercrítico, entonces las ondas no se pueden desplazar hacia aguas arriba(**Fig. 3.4D**).

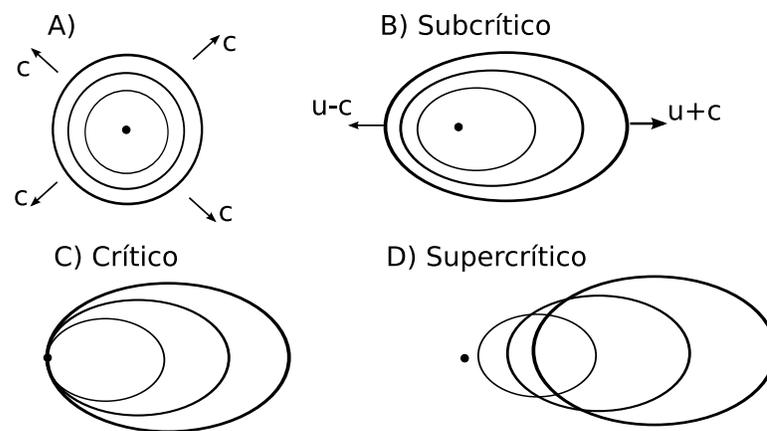


Figura 3.4: Ondas producidas por caída de una piedra.

A partir del hecho que los ríos son controlados por la condición de nivel de aguas abajo, mientras que los torrentes son controlados por la condición de nivel de aguas arriba, vemos que es posible pensar en la transición entre un río y un torrente a través del régimen crítico, dado que la altura crítica simultáneamente compatibiliza las condiciones de borde de aguas abajo del río, y de aguas arriba del torrente. Sin embargo, la transición entre torrente a río es sólo posible mediante un *resalto hidráulico*, el cual no controla el flujo, sino que existe para que sea posible compatibilizar el torrente controlado por aguas arriba, y el río controlado por aguas abajo (**Fig. 3.5**). En los siguientes capítulos veremos con mayor detalle cómo se compatibilizan los escurrimientos.

3.3 Características geométricas de los canales

Canales prismáticos son aquellos en los cuales la sección de escurrimiento no cambia a lo largo del canal. De igual forma, los canales no-prismáticos son aquellos cuya sección de escurrimiento varía en x .

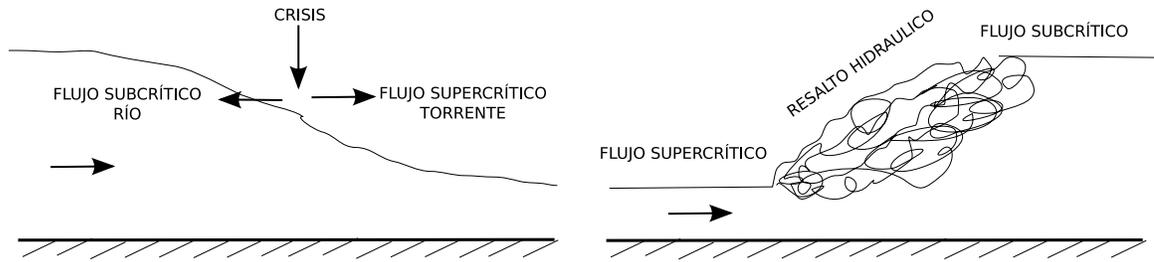


Figura 3.5: Compatibilización de regímenes de escurrimiento de torrente y río.

La pendiente en canales es por lo general pequeña (orden 10^{-3} o 10^{-4}), aunque puede darse el caso que sea mayor.

La forma de la sección de escurrimiento en canales artificiales es usualmente rectangular, trapezoidal, triangular, circular, etc. y queda determinada a partir de otros criterios de ingeniería, tales como estabilidad de taludes, resistencia a la erosión, facilidad de construcción, etc. Por ejemplo, la sección rectangular se usa sólo cuando el canal es revestido, por motivos de estabilidad de las paredes. Es así que canales trapezoidales son más comunes de encontrar. La sección triangular es poco usada, y sus aplicaciones se centran en canales pequeños tipo acequias o canaletas laterales en caminos. La sección circular se usa en aplicaciones de ingeniería sanitaria, del tipo alcantarillado, aguas lluvia y acueductos de agua potable.

Los principales elementos que caracterizan hidráulicamente las secciones de los canales son:

- Ancho basal y/o superficial (l , ancho superficial).
- Altura de escurrimiento (h).
- Radio hidráulico R_h
- Área Ω
- Perímetro mojado χ

Por ejemplo,

- En canales rectangulares (**Fig. 3.6A**):

$$l = b \tag{3.6a}$$

$$\Omega = b h \tag{3.6b}$$

$$\chi = b + 2h \tag{3.6c}$$

$$R_h = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{bh}{b + 2h} \tag{3.6d}$$

Hay un límite particular que se obtiene de canales rectangulares, que es el que resulta de considerar que el canal es muy ancho, cosa que es usualmente válido como una primera aproximación en cauces naturales dado que su ancho b es de 100 m, mientras que las profundidades máximas son del orden de 1 a 2 m. Por lo tanto $b \gg h$ y entonces $\chi = b$ y $R_h = h$

- Canales trapeciales (**Fig. 3.6B**): Tarea
- Sección circular (**Fig. 3.6C**): Tarea
- Sección triangular (**Fig. 3.6D**): Tarea

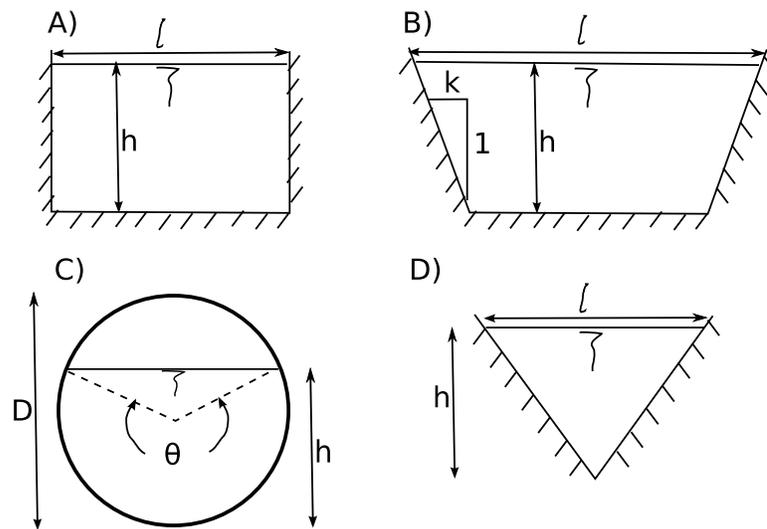


Figura 3.6: Elementos para caracterizar secciones de escurrimiento.

3.4 Distribución de velocidades

Si el canal es muy ancho ($b > 5-10h$), entonces la máxima velocidad se alcanza en la superficie libre como así lo indica el perfil logarítmico de velocidades. Sin embargo, si el canal no es muy ancho, se tiene que el flujo está también controlado por la condición de borde de las paredes laterales, y entonces la máxima velocidad se alcanza a una cierta distancia bajo la superficie libre. Esto se ve si graficamos las líneas de iso-velocidad en una sección de escurrimiento, tanto de canales artificiales como de cauces naturales (**Fig. 3.7**)

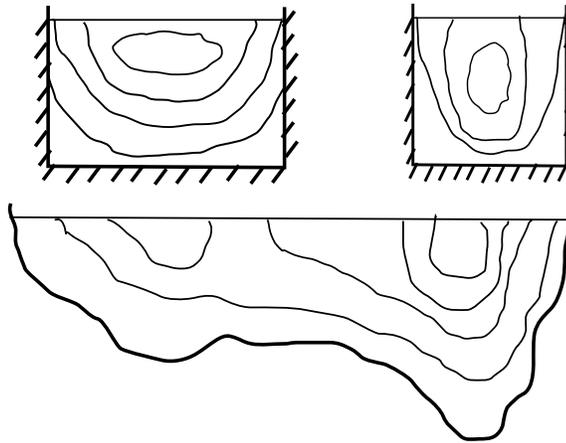


Figura 3.7: Esquema de curvas de iso-velocidad en secciones de escurrimiento de canales.

3.5 Coeficientes de Coriolis y Boussinesq

Debido a la no-uniformidad de la velocidad en la sección de escurrimiento, es necesario corregir el término de la energía cinética en la ecuación de Bernoulli y el término de velocidad en la ecuación de cantidad de movimiento. Vimos que esta corrección se hace al introducir los coeficientes de Coriolis y Boussinesq, respectivamente.

3.5.1 Coeficiente de Coriolis

En el curso de Mecánica de Fluidos, definimos el coeficiente de Coriolis α como:

$$B = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (3.7)$$

donde B es el Bernoulli, z la cota geométrica, p/γ la altura de presión, \bar{v} la velocidad media en la sección de escurrimiento, Ω , definida como:

$$\bar{v} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v \, d\Omega \quad (3.8)$$

y α es el coeficiente de Coriolis, definido como:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} v^3 \, d\Omega}{\bar{v}^3 \Omega} \quad (3.9)$$

Para canales prismáticos rectilíneos, α varía entre 1.03 y 1.36, aún cuando rara vez es superior a 1.15. α tiende a ser mayor para canales pequeños y menores para canales grandes y

profundos. Sin embargo, en cálculos prácticos se suele considerar $\alpha = 1$, salvo para casos particulares como lo es flujo en planicies de inundación, cuando se inundan secciones que usualmente están cubiertas con vegetación, por lo que las condiciones del escurrimiento son muy diferentes a las del cauce principal del río.

3.5.2 Coeficiente de Boussinesq

El teorema de cantidad de Movimiento queda escrito como:

$$\sum \vec{F}_{ext} = (\rho Q \beta \bar{v})_{out} - (\rho Q \beta \bar{v})_{in} \quad (3.10)$$

donde β es el coeficiente de Boussinesq definido como:

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} v^2 d\Omega}{\bar{v}^2 \Omega} \quad (3.11)$$

Para canales prismáticos, β varía entre 1.01 y 1.12, y también se suele considerar que $\beta = 1$.

La **Table 1** muestra algunos valores característicos de los coeficientes de Boussinesq y Coriolis.

| | α | | | β | | |
|-------------------------|----------|-------|------|---------|-------|------|
| | min | medio | max | min | medio | max |
| Canales regulares | 1.10 | 1.15 | 1.20 | 1.03 | 1.05 | 1.07 |
| Cauces naturales | 1.15 | 1.30 | 1.50 | 1.05 | 1.10 | 1.17 |
| Planicies de inundación | 1.50 | 1.75 | 2.00 | 1.17 | 1.25 | 1.33 |

Tabla 1: Valores de coeficientes de Coriolis y Boussinesq

3.6 Distribución de presiones en canales

Si el flujo es paralelo, vale decir que las líneas de corriente son rectilíneas y paralelas, se puede demostrar que la distribución de presiones es hidrostática. Esto ocurre para flujo uniforme, sin embargo, si existe una pequeña curvatura, o convergencia/divergencia de las líneas de corriente, entonces la distribución hidrostática de presiones sigue siendo aproximadamente válida. Esto nos permite decir que la ley hidrostática de presiones es válida para flujos gradualmente variados, sin embargo, no lo es si el flujo es rápidamente variado.

Si consideramos un flujo sin pendiente de altura h , vemos que si la ley hidrostática de presión es válida (ver **Fig. 3.8**), entonces el Bernoulli es

$$B = \frac{v^2}{2g} + (h - z) + z \tag{3.12}$$

donde $(h - z)$ es la altura de presión, y z la elevación. Además, si repetimos el mismo análisis para un flujo en un plano inclinado en un ángulo θ (ver **Fig. 3.8**), entonces, el Bernoulli en el fondo del canal es

$$B = \frac{v^2}{2g} + h \cos \theta + z \tag{3.13}$$

siendo necesario introducir esta corrección para la la altura de presión si $\theta \gtrsim 6^\circ$, o bien para pendientes del canal mayores al 10%

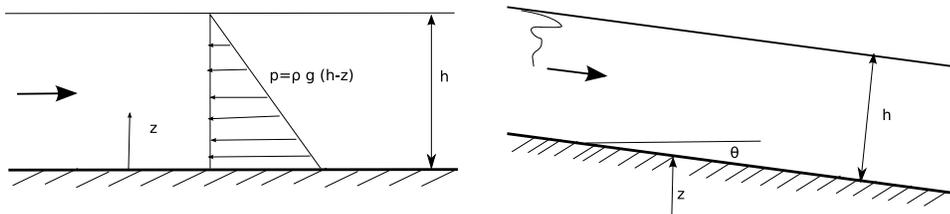


Figura 3.8: Distribución de presiones en canal inclinado

Cuando existe curvatura de las líneas de corriente, la distribución de presiones deja de ser hidrostática, resultando que la altura de presión en el fondo del canal puede ser mayor que la profundidad de escurrimiento si la curvatura es cóncava, o bien menor que la altura si la curvatura es convexa (**Fig. 3.9**).



Figura 3.9: Distribución de presiones con curvatura de líneas de corriente.

Capítulo 4

Ecuaciones del flujo en contornos abiertos

4.1 Ecuación de continuidad

El principio de conservación de masa es igualmente válido para canales, de manera que la ecuación de continuidad para contornos abiertos es:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (4.1)$$

donde $dm = \rho dV$ es un elemento de masa en el elemento de volumen dV , \vec{v} es la velocidad, \hat{n} es el vector unitario normal a la superficies del volumen de control. Luego, si consideramos que el fluido es incompresible, entonces ρ es constante y por lo tanto obtenemos la ecuación de conservación de volumen:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (4.2)$$

A continuación, escogemos un tubo de flujo como volumen de control (**Fig. 4.1**), y como \hat{n}_3 es perpendicular a las líneas de corriente, el principio de conservación de volumen queda escrito como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_2} \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 dS - \int_{S_1} \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 dS = 0 \quad (4.3)$$

donde definimos el caudal como

$$Q_2 = \int_{S_2} \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 dS \quad (4.4)$$

$$Q_1 = \int_{S_1} \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 dS \quad (4.5)$$

y entonces

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Q_2 - Q_1 = 0 \quad (4.6)$$

o bien,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Q_{sale} - Q_{entra} = 0 \quad (4.7)$$

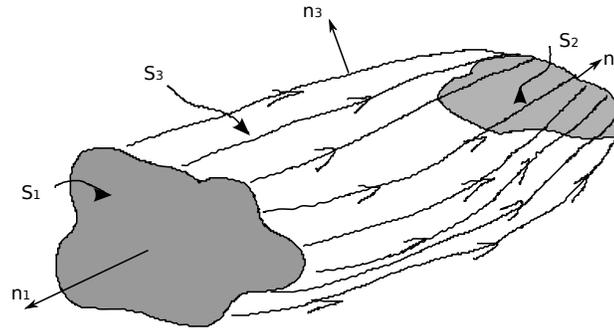


Figura 4.1: Líneas de energías en contornos abiertos

En el régimen permanente, se obtiene directamente que:

$$Q_{entra} = Q_{sale} \quad (4.8)$$

cosa que nos permite encontrar una relación entre las velocidades de entrada y salida, dado que se conoce las secciones de escurrimiento Ω_1 y Ω_2 , respectivamente.

$$\bar{v}_1 \Omega_1 = \bar{v}_2 \Omega_2 \quad (4.9)$$

donde \bar{v}_1 y \bar{v}_2 son las velocidades de escurrimiento medias en las secciones 1 y 2, respectivamente, las cuales se calculan como:

$$\bar{v} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v d\Omega \quad (4.10)$$

Para estudiar el régimen impermanente, es conveniente expandir el caudal 2 a partir del caudal 1, como:

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \quad (4.11)$$

y entonces, si escribimos el volumen de control $dV = \Delta x \Omega$, obtenemos:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

Además, si expresamos $Q = \bar{v} \Omega$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \quad (4.13)$$

y entonces

$$\frac{D\Omega}{Dt} + \Omega \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

donde el operador

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.15)$$

A partir de este resultado anterior, es fácil ver que si el canal es rectangular de ancho b y altura de escurrimiento h , entonces la ecuación de continuidad de volumen es:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v} h}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

Se define el caudal por unidad de ancho como

$$q = \bar{v} h = \frac{Q}{b} \quad (4.17)$$

Es posible obtener un resultado similar que sea válido para cualquier sección de escurrimiento, para lo cual escribimos $\Omega = \Omega(h)$, vemos que (**Fig. 4.2**):

$$d\Omega = l dh \quad (4.18)$$

donde l es el largo superficial de la sección de escurrimiento, entonces

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = l \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.19)$$

y por lo tanto la ecuación de continuidad queda escrita como:

$$l \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.20)$$

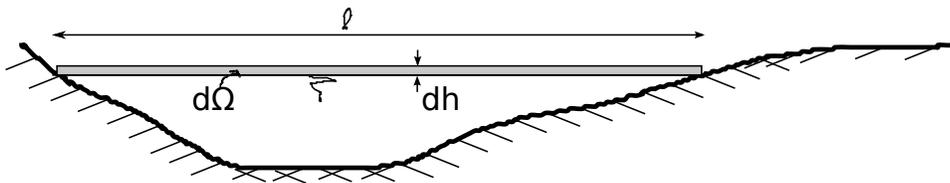


Figura 4.2: Representación gráfica de elemento de superficie $d\Omega$.

4.2 Principio de conservación de energía

4.2.1 Ecuación de Bernoulli en canales abiertos

En el curso de Mecánica de Fluido obtuvimos que si la ley hidrostática de presiones es válida, el Bernoulli medio en una sección de escurrimiento Ω es

$$\bar{B} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (4.21)$$

donde z y $\frac{p}{\gamma}$ son las alturas geométricas y de presión para un punto cualquiera en la sección de escurrimiento (recuerde que la presión motriz $\hat{p} = \rho g z + p$ es constante dado hidrostática) y α es el coeficiente de Coriolis igual a:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} v^3 d\Omega}{\Omega \bar{v}^3} \quad (4.22)$$

donde \bar{v} es la velocidad media del escurrimiento. Recuerde que Bernoulli se puede también obtener a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, el coeficiente asociado a la integración de la velocidad es el coeficiente de Boissinesq β .

Luego, si nos situamos en el fondo de un canal de profundidad h , la altura de presión es $h \cos \theta$, por lo que

$$\bar{B} = z + h \cos \theta + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (4.23)$$

donde z es la cota de fondo del canal. Luego, si la pendiente es baja podemos decir que $\cos \theta \approx 1$, y además, es posible suponer que $\alpha \approx 1$, resultando que el Bernoulli medio en una sección de escurrimiento de canales abiertos en pendiente baja es

$$\bar{B} = z + h + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (4.24)$$

A continuación, si escogemos dos secciones 1 y 2 separadas por una distancia L (**Fig. 4.3**), y consideramos que el fluido es real, entonces

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 + \Lambda_f \quad (4.25)$$

donde

$$\Lambda_f = J L \quad (4.26)$$

representa las pérdidas friccionales con J la pendiente del plano de carga. Luego, si la pendiente es uniforme se cumple

$$z_1 - z_2 = \sin \theta L = i L \quad (4.27)$$

donde $i = \sin \theta$ es la pendiente del canal.

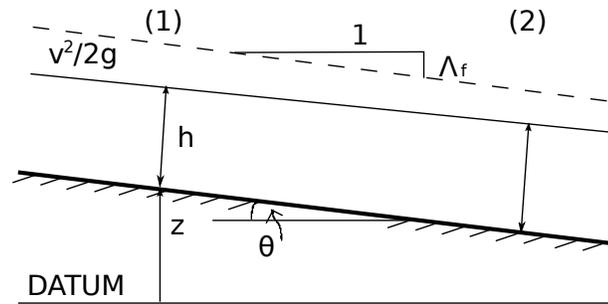


Figura 4.3: Bernoulli en canales.

De esta forma, obtenemos que las propiedades del flujo en las secciones 1 y 2 están ligadas entre si por:

$$h_1 + \frac{\bar{v}_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + (J - i)L \tag{4.28}$$

4.2.2 Concepto de energía específica

Este concepto fue introducido por Bakhmeteff en 1912, y define la *energía específica* en canales E como

$$E = h \cos \theta + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} \tag{4.29}$$

la cual escribiremos de ahora en adelante como:

$$E = h + \frac{v^2}{2g} \tag{4.30}$$

De esta forma, podemos reescribir (4.28) como:

$$E_1 = E_2 + (J - i)L \tag{4.31}$$

Veamos una aplicación para una compuerta de la **Fig. 4.4**. Si la pendiente es cero, y las secciones 1 y 2 están lo suficientemente cerca como para despreciar las pérdidas de energía, entonces:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.32}$$

Luego, como el caudal es constante, obtenemos que v_1 y v_2 se relacionan entre si por:

$$Q = v_1 \Omega_1 = v_2 \Omega_2 \tag{4.33}$$

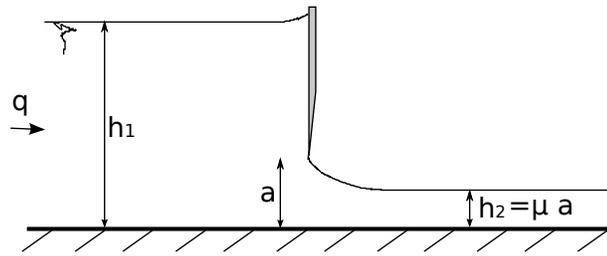


Figura 4.4: Compuerta.

Además, si el canal es rectangular de ancho b , se cumple que $\Omega = bh$, y por lo tanto h_1 y h_2 se relacionan entre

$$h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} = h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2} \quad (4.34)$$

donde $q = Q/b$ es el *caudal por unidad de ancho*.

Finalmente, la altura de escurrimiento h_2 está determinada por la apertura a de la compuerta a través de

$$h_2 = \mu a \quad (4.35)$$

donde $\mu \approx 0.6$ es el *coeficiente de contracción*. De esta forma, si h_1 y a son dato

$$q = \sqrt{\frac{2g}{\mu a + h_1}} h_1 \mu a \quad (4.36)$$

4.2.3 Energía específica en canales rectangulares

En un canal rectangular de ancho b y altura de escurrimiento h , la energía específica E se escribe como:

$$E = \frac{q^2}{2gh^2} + h \quad (4.37)$$

De esta forma, la altura de escurrimiento asociada a un cierto nivel de energía E_o se calcula de resolver el siguiente polinomio cúbico:

$$h^3 - E_o h^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (4.38)$$

o bien,

$$h^2 (E_o - h) = \frac{q^2}{2g} \quad (4.39)$$

Este resultado nos indica que existen tres soluciones del problema, dos de las cuales tienen sentido físico y que llamaremos alturas conjugadas. Si graficamos h en función de la energía E , obtenemos el gráfico de la **Fig. 4.5**, donde vemos que:

- Dos raíces del polinomio son positivas, y por lo tanto tienen sentido físico, y una es negativa sin sentido físico.
- Existe un mínimo de energía E_{min} , y su correspondiente altura característica que llamaremos h_c .
- La solución para para alturas $h_1 > h_c$ es asintótica a $E = h$ y por lo tanto, $\frac{q^2}{2gh^2} \approx 0$. Esto significa que la solución h_1 está asociada a un flujo cuya energía es predominantemente potencial, y energía cinética baja.
- La solución para para alturas $h_2 < h_c$ es asintótica a $h = 0$, caracterizada por $E = \frac{q^2}{2gh^2}$. Al contrario que el caso anterior, este flujo está asociado a altas velocidades (energía cinética), y bajas profundidades (altura de presión).

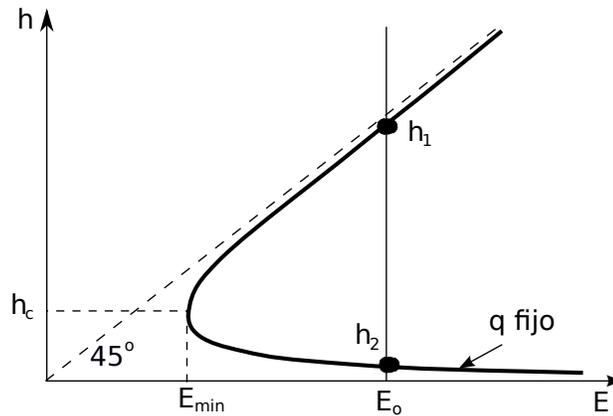


Figura 4.5: Diagrama energía en canales rectangulares.

Por último, notar que la curva de **Fig. 4.5** depende del caudal, en particular, si aumentamos q , ésta se desplaza hacia la derecha como se muestra en la **Fig. 4.6**.

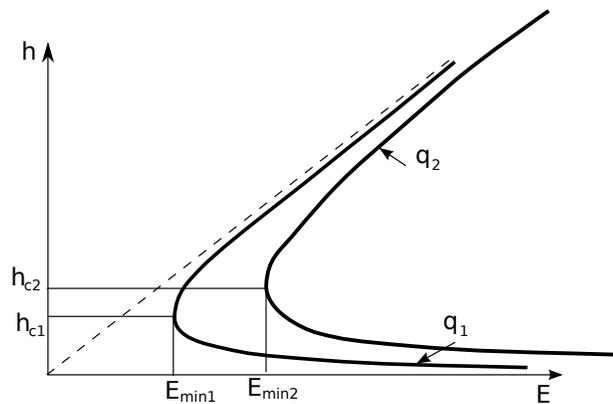


Figura 4.6: Diagrama energía en canales rectangulares en función de q .

4.2.4 Escurrimiento crítico

Como vimos en el punto anterior, existe un valor mínimo de la energía en canales, el cual podemos calcular de buscar:

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 0 \quad (4.40)$$

Si el canal es rectangular $E = h + \frac{q^2}{2gh^2}$, y entonces, la altura asociada h_c al mínimo de energía se obtiene de

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 1 - \frac{q^2}{gh_c^3} = 0 \quad (4.41)$$

y entonces:

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \quad (4.42)$$

y

$$E_{min} = \frac{3}{2}h_c \quad (4.43)$$

Es fácil ver que se cumple que

$$\frac{q^2}{gh_c^3} = 1 \quad (4.44)$$

y como $v = q/h$, el flujo asociado a esta energía mínima es el flujo crítico donde $Fr^2 = \frac{q^2}{gh^3} = 1$. Llamamos así a la energía mínima como energía crítica, y la respectiva altura como altura crítica. Este último resultado nos permite ver que si el caudal es dado, el escurrimiento crítico es un escurrimiento de mínima energía posible.

Alternativamente, es posible demostrar que para un nivel de energía dada, el escurrimiento crítico es aquel asociado al máximo caudal posible. Esto se demuestra de plantear

$$q = h\sqrt{2g(E_o - h)} \quad (4.45)$$

dado E_o como dato. Luego buscamos el máximo de la curva $q(h)$,

$$\frac{\partial q}{\partial h} = 0 = \sqrt{2g(E_o - h)} - \frac{1}{2} \frac{2gh}{\sqrt{2g(E_o - h)}} \quad (4.46)$$

lo cual implica que:

$$2(E_o - h) = h \quad (4.47)$$

o bien:

$$E_o = \frac{3}{2}h_c \quad (4.48)$$

Entonces, hemos demostrado que el escurrimiento asociado al máximo caudal, dado un cierto nivel de energía, es crítico. Si consideramos que circula un el caudal es mayor que el caudal q a la altura crítica del nivel de energía E_o (**Fig. 4.7**), entonces caemos en un rango donde

no es posible el escurrimiento, y por lo tanto nuestro supuesto que $q_2 > q$ es el caudal que circula por el canal, está errado. Por el contrario, si el caudal q_1 es menor que este máximo asociado al escurrimiento crítico (q), volvemos al escenario de las alturas conjugadas h_1 y h_2 (Fig. 4.7), donde $h_1 > h_c$ está asociada a un $Fr < 1$, y el flujo es subcrítico o de río, y $h_2 < h_c$ está asociada a $Fr > 1$ y el escurrimiento es supercrítico o de torrente. Este último caso se da solo si las condiciones de aguas abajo o aguas arriba de nuestra sección crítica, controlan el escurrimiento.

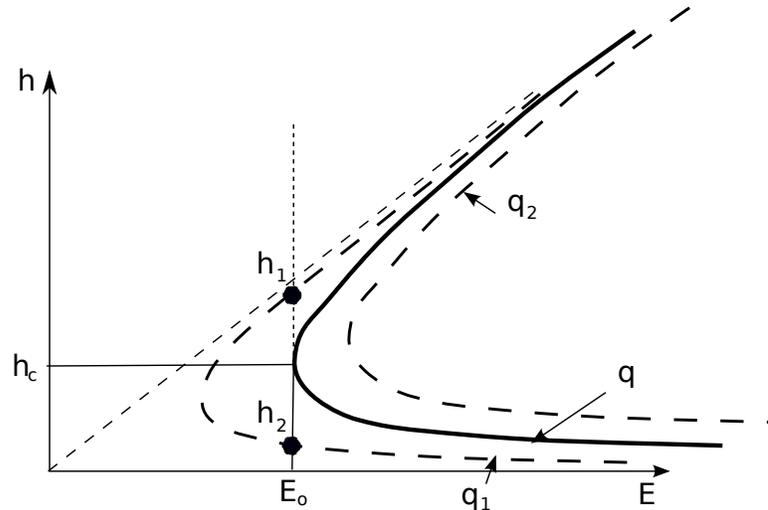


Figura 4.7: Diagrama energía en canales rectangulares en función de q , para la demostración que el si el escurrimiento es crítico, entonces circula el máximo caudal posible.

Escurrimiento crítico en canales prismáticos

Para determinar cuál de las dos alturas es la que en definitiva será la altura de escurrimiento, necesitamos ver las condiciones de borde del problema y determinar los denominados controles hidráulicos. Este tema será discutido con mayor detalle en las siguientes secciones de este capítulo ya que es necesario analizar primero si es físicamente posible un escurrimiento crítico. Para esto, tomamos dos secciones 1 y 2 separadas por una distancia Δx , de manera tal que:

$$E_1 + z_1 = E_2 + z_2 + J \Delta x \tag{4.49}$$

Luego, si expresamos

$$E_2 = E_1 + \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x \tag{4.50}$$

obtenemos, después de cancelar los Δx ,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -(i - J) \tag{4.51}$$

donde i es la pendiente del canal $i = -\frac{\partial z}{\partial x}$. A continuación, si las secciones de escurrimiento están lo suficientemente cercanas tal que las pérdidas friccionales son despreciables, se obtiene

que:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (4.52)$$

Por otro lado, dado que la energía específica en canales es $E = q^2/(2gh^2) + h$, se tiene que:

$$\frac{\partial E}{\partial h} = -\frac{q^2}{gh^3} + 1 = -Fr^2 + 1 \quad (4.53)$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = (-Fr^2 + 1) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.54)$$

De esta forma se obtiene que si las pérdidas friccionales son despreciables se cumple que:

$$(-Fr^2 + 1) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (4.55)$$

Ahora, consideramos el caso de pendiente plana $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, entonces hay dos condiciones que satisfacen la condición anterior:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.56)$$

donde el escurrimiento es uniforme en pendiente plana, o bien:

$$Fr^2 = 1 \quad (4.57)$$

que nos indica que el escurrimiento es crítico. Hemos visto que los escurrimientos críticos se dan cuando la pendiente es horizontal. En la realidad, este resultado sólo es válido para puntos secciones particulares del canal, dado que al considerar fricción, no es posible el flujo uniforme en pendiente plana.

En la **Fig. 4.8A** se ve un caso clásico del vaciamiento de un estanque, en el que puede ocurrir crisis en la cresta del vertedero donde se cumple que $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. En caso que no existan más controles hidráulicos en el sistema, aguas arriba del vertedero se desarrolla un escurrimiento de río, mientras que aguas abajo se desarrolla un escurrimiento de torrente. Como verán, el flujo busca la mínima energía para escurrir, y además se cumple que maximiza el caudal, dado el nivel de energía disponible (carga H sobre el vertedero). Para calcular el caudal vertido se puede considerar que no hay pérdidas de energía entre el estanque con carga H sobre la *cota de coronamiento del vertedero*, y escurrimiento crítico sobre el vertedero. Por lo tanto:

$$E_1 = H = E_{min} = E_c = \frac{3}{2}h_c \quad (4.58)$$

luego, dado que

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \quad (4.59)$$

se obtiene que:

$$q = \sqrt{\left(\frac{2}{3}H\right)^3 g} \tag{4.60}$$

El escenario límite de este caso es cuando el escurrimiento se aproxima a una caída vertical como se muestra en la **Fig. 4.8C**. En este caso se cumple que la altura crítica ocurre a una cierta distancia de borde (entre 3 y 4 veces la altura crítica), dado que las líneas de corriente se tienen que curvar, y por lo tanto las líneas de corriente no son paralelas cerca de la caída.

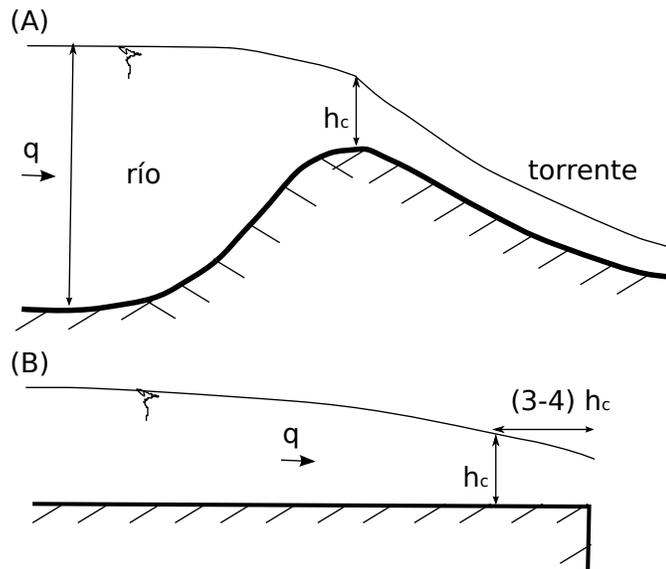


Figura 4.8: Ejemplos de secciones críticas.

Escorrimento crítico en canales no prismáticos

Veamos ahora un segundo caso de un canal rectangular no prismático, tal que su forma (ancho) varía en x . Al igual que en el caso anterior, despreciamos las pérdidas friccionales y entonces:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{4.61}$$

Luego,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (1 - Fr^2) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2q}{2gh^2} \frac{\partial q}{\partial x} \tag{4.62}$$

donde $q = Q/b$, entonces:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{q}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \tag{4.63}$$

y por lo tanto, al reemplazar estos resultados en (4.61), se obtiene que:

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial h}{\partial x} - Fr^2 \frac{h}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (4.64)$$

Si escogemos el caso de pendiente plana, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, vemos que el escurrimiento crítico $Fr^2 = 1$ ocurriría en los puntos de máxima contracción o expansión lateral $\frac{\partial b}{\partial x} = 0$. Sin embargo, dado que al aumentar q las curvas en el diagrama E versus h se desplazan hacia la derecha (ver (4.6)), entonces el escurrimiento crítico ocurre solo en el punto de angostamiento máximo de los canales, no cuando hay un aumento de b .

4.2.5 Escurrimiento crítico en canales no rectangulares

En el caso de un canal no rectangular, el escurrimiento crítico ocurre cuando:

$$\frac{Q^2 l_c}{g \Omega_c^3} = 1 \quad (4.65)$$

donde l_c es el largo superficial cuando la altura es crítica. Ω_c es la superficie de la sección de escurrimiento cuando el escurrimiento es crítico. Se deja como tarea determinar la expresión para calcular la altura crítica en canales trapezoidales, circulares y triangulares.

4.2.6 Escurrimiento super y subcríticos, noción preliminar de control hidráulico.

Consideremos una sección rectangular de escurrimiento donde

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (4.66)$$

Grada de subida

Analicemos el caso de una grada de subida de altura a (**Fig. 4.9**), canal de sin pendiente y ancho constante, y fluido inviscido. En este caso, se tiene que el Bernoulli es constante en todo el canal, por lo que las líneas de energía total es horizontal, y las energías específicas de los puntos 1 y 2 se relacionan por:

$$E_1 = E_2 + a \quad (4.67)$$

o bien:

$$E_2 = E_1 - a \quad (4.68)$$

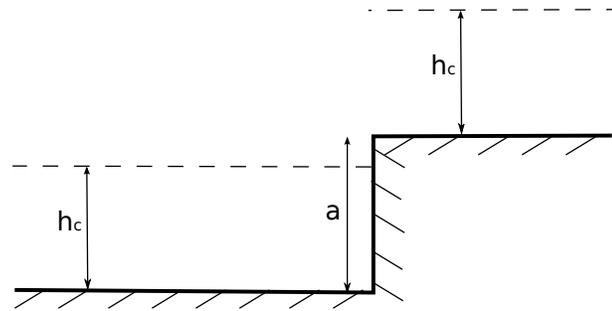


Figura 4.9: Ejemplo de grada de subida de altura a . Líneas segmentadas definen altura crítica, que es igual a lo largo de todo el canal.

vemos entonces que la energía específica en el punto 2 es menor que la en el punto 1.

Si asumimos que E_2 es mayor que la energía crítica, entonces no existen cambios en el tipo de escurrimiento entre los puntos 1 y 2, y obtenemos del diagrama E versus h que:

- **Fig. 4.10:** Si el escurrimiento es subcrítico controlado por aguas abajo (río), el problema se resuelve de derecha a izquierda (contra la corriente), entonces, la altura y energía en 2 son conocidas, la energía en 1 se calcula de:

$$E_1 = E_2 + a \tag{4.69}$$

y la altura de escurrimiento h_1 queda determinada por la raíz más grande del polinomio característico:

$$h_1^3 - (E_2 + a)h_1^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \tag{4.70}$$

- **Fig. 4.11:** Si el escurrimiento es supercrítico controlado por aguas arriba (torrente), el problema se resuelve de derecha a izquierda (a favor de la corriente), de manera que la altura y energía en 1 son conocidas, tal que

$$E_2 = E_1 - a \tag{4.71}$$

y la altura de escurrimiento h_2 queda determinada por la raíz positiva más pequeña del polinomio característico:

$$h_2^3 - (E_1 - a)h_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \tag{4.72}$$

- **Fig. 4.12:** Sigamos suponiendo que el escurrimiento de torrente, tal que E_1 es conocido y

$$E_2 = E_1 - a \tag{4.73}$$

Sin embargo, dependiendo de la altura de la grada, es probable que la energía E_2 calculada a partir de E_1 sea menor que E_{min} , lo cual nos indica que el supuesto inicial

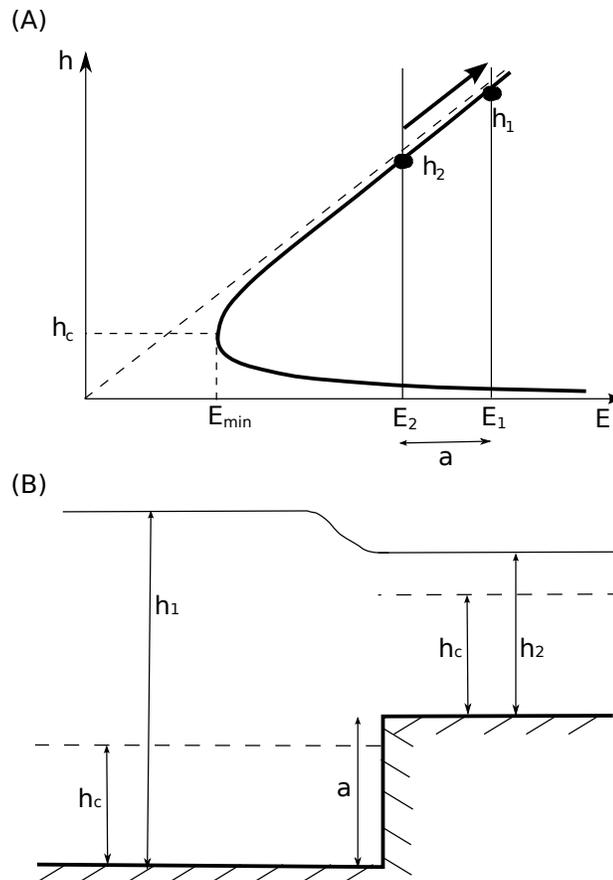


Figura 4.10: A) Diagrama de energía en canales con grada de subida, cuando la grada no controla el escurrimiento y el escurrimiento es de río. B) Esquema de alturas de escurrimientos que se desarrollan.

no era el correcto. En particular, el supuesto que el escurrimiento es de torrente es incorrecto y entonces no existe otra alternativa que, dado q fijo, la energía en 2 sea la energía crítica y entonces decimos que la grada controla el escurrimiento.

Por lo tanto,

$$E_2 = E_{min} = \frac{3}{2}h_c \tag{4.74}$$

y

$$h_2 = h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \tag{4.75}$$

Entonces la energía en 1 deja de ser un conocida y se calcula de

$$E_1 = E_2 + a \tag{4.76}$$

y la altura de escurrimiento h_1 queda determinada por la raíz más grande del polinomio característico:

$$h_1^3 - (E_2 + a)h_1^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \tag{4.77}$$

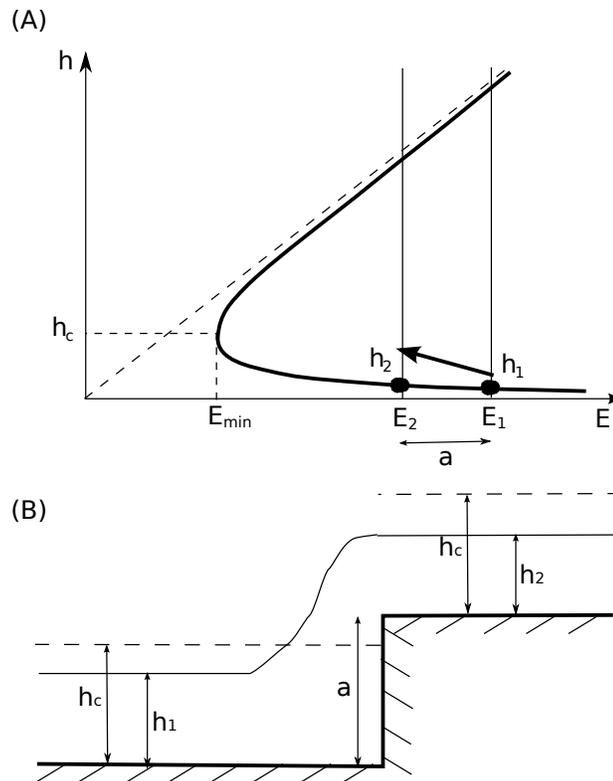


Figura 4.11: A) Diagrama de energía en canales con grada de subida, cuando la grada no controla el escurrimiento y el escurrimiento es de torrente. B) Esquema de alturas de escurrimientos que se desarrollan.

Propuesto, considere que se conoce la altura de escurrimiento h_1 , y sabemos que la grada controla el escurrimiento. Determine una relación para calcular q dado h_1 y a . Tome el límite cuando $h_1 \rightarrow \infty$ (o bien $a \rightarrow \infty$) y vea que se recupera el comportamiento descrito para vertederos.

Grada de bajada

Propuesto que será controlado en el ejercicio (**Fig. 4.13**).

Angostamiento

Propuesto que será controlado en el ejercicio: Analice los tipos de escurrimiento que se pueden desarrollar en el angostamiento de un canal rectangular desde un ancho b_1 a un ancho $b_2 < b_1$. En este caso se cumple que existen dos caudales por unitarios $q_1 = Q/b_1$ y $q_2 = Q/b_2$ con $q_2 > q_1$, y por lo tanto una altura crítica h_{c1} y otra h_{c2} , tal que $h_{c1} < h_{c2}$.

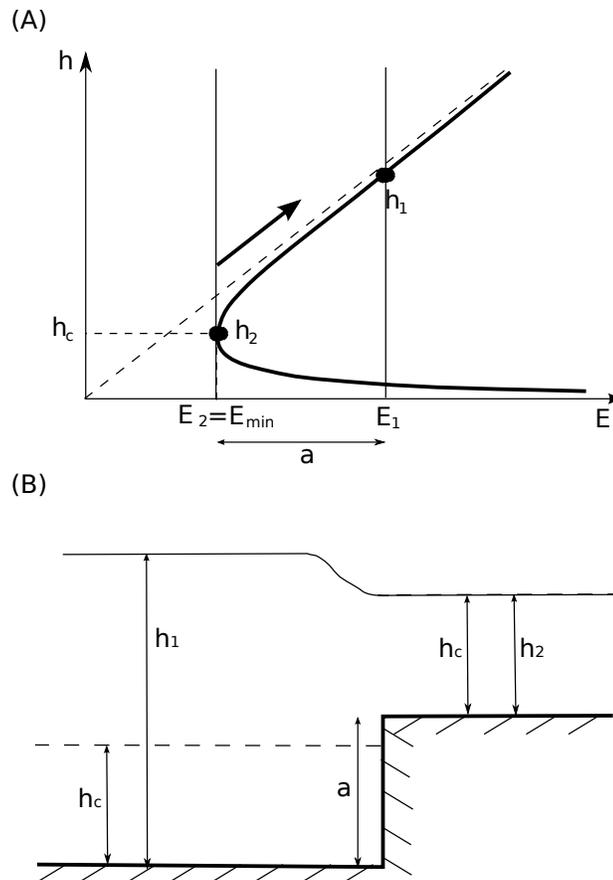


Figura 4.12: A) Diagrama de energía en canales con grada de subida, cuando la grada controla el escurrimiento. B) Esquema de alturas de escurrimientos que se desarrollan.

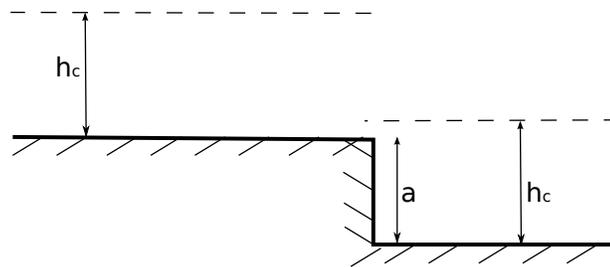
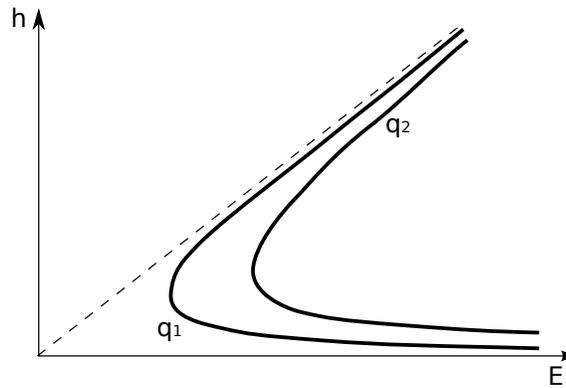


Figura 4.13: Grada de bajada

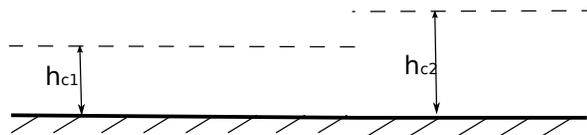
Ensanche.

Propuesto que será controlado en el ejercicio (Fig. 4.15).

(A) Diagrama de energía



(B) Perfil longitudinal



(C) Planta

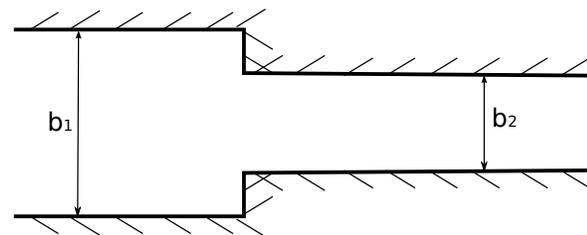


Figura 4.14: Angostamiento

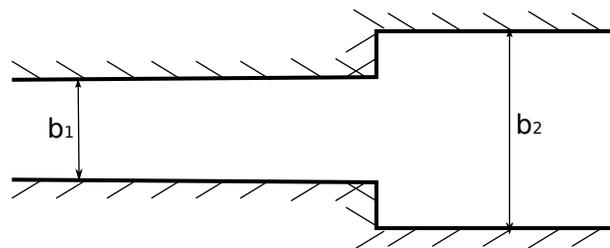


Figura 4.15: Ensanche

4.3 Principio de conservación de momentum

No referimos a la segunda ley de Newton aplicada al escurrimiento en canales. En este caso, consideremos que el escurrimiento se desarrolla en x , en un canal en pendiente θ (ver **Fig. 4.16**). Del teorema de cantidad de movimiento, sabemos que:

$$\sum F_{ext_x} = (\rho Qv)_2 - (\rho Qv)_1 \tag{4.78}$$

donde

$$\sum F_{ext_x} = F_{p1} - F_{p2} + W \sin \theta - F_\tau \tag{4.79}$$

donde M es la masa del volumen de control, F_{p1} y F_{p2} son las fuerzas de presión actuando en las secciones 1 y 2, respectivamente, y F_τ es la fuerzas de roce.

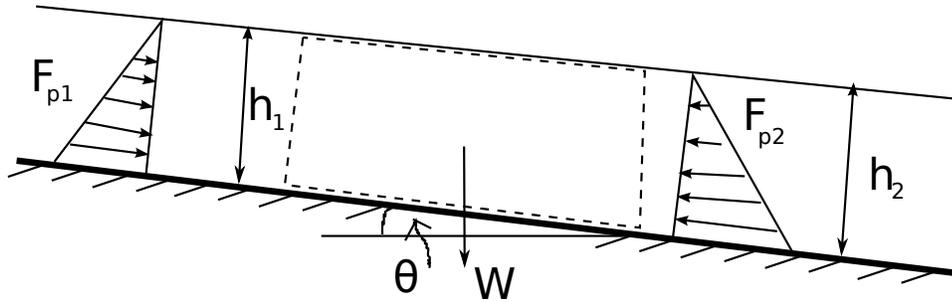


Figura 4.16: Volumen de control para teorema de cantidad de movimiento en canales.

Luego, de continuidad de caudales sabemos que:

$$Q = v_1\Omega_1 = v_2\Omega_2 \tag{4.80}$$

entonces

$$F_{p1} - F_{p2} + W \sin \theta - F_\tau = \rho Q^2 \left(\frac{1}{\Omega_2} - \frac{1}{\Omega_1} \right) \tag{4.81}$$

suponiendo que $\sin \theta \approx 0$, entonces

$$\rho Q^2 \left(\frac{1}{\Omega_2} - \frac{1}{\Omega_1} \right) = F_{p1} - F_{p2} - F_\tau \tag{4.82}$$

4.3.1 Función momenta

Consideremos ahora el caso de un canal rectangular plano donde existe un obstáculo en el fondo (**Fig. 4.17**). Si despreciamos las pérdidas friccionales, pero consideramos que el flujo ejerce una fuerza F_o sobre el obstáculo, de manera que el obstáculo ejerce la misma fuerza en sentido contrario, se obtiene que:

$$F_{p1} - F_{p2} - F_o = \rho Q (v_2 - v_1) \tag{4.83}$$

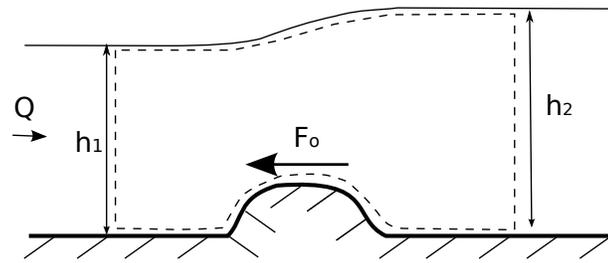


Figura 4.17: Obstáculo en el fondo de un canal.

Si consideramos que la ley hidrostática de presiones es válida en las secciones 1 y 2, y además que el canal es rectangular de ancho b , entonces:

$$\frac{1}{2}\rho gh_1^2 b - \frac{1}{2}\rho gh_2^2 b - F_o = \rho \left(\frac{Q^2}{h_2 b} - \frac{Q^2}{h_1 b} \right) \quad (4.84)$$

o bien:

$$b \left(\frac{1}{2}h_1^2 + \frac{Q^2}{h_1 g b^2} \right) = b \left(\frac{1}{2}h_2^2 + \frac{Q^2}{h_2 g b^2} \right) + \frac{F_o}{\rho g} \quad (4.85)$$

Entonces, usando el caudal por unidad de ancho $q = Q/b$, y definiendo la fuerza por unidad de ancho $f_o = F_o/b$, escribimos la ecuación anterior como:

$$M_1 = M_2 + \frac{f_o}{\rho g} \quad (4.86)$$

donde

$$M = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} \quad (4.87)$$

es la *función momenta* o simplemente *momenta* en canales rectangulares.

Una aplicación es para el cálculo de la fuerza que debe resistir una compuerta (**Fig. 4.18**). Si la apertura de la compuerta es a y decimos que si controla el escurrimiento, entonces sabemos que

$$h_2 = \mu a \quad (4.88)$$

donde μ es el coeficiente de contracción. Además, como el flujo se debe acelerar, podemos despreciar las pérdidas de energía, y por lo tanto:

$$E_1 = E_2 \quad (4.89)$$

donde E_2 se calcula sabiendo que $h_2 = \mu a$, y por lo tanto h_1 se calcula como la mayor altura del polinomio característico dado que el escurrimiento aguas arriba de la de la compuerta es subcrítico. Es así que conocemos M_1 y M_2 , y por lo tanto, la fuerza f_o que debe resistir la compuerta se calcula como:

$$M_1 - M_2 = \frac{f_o}{\rho g} \quad (4.90)$$

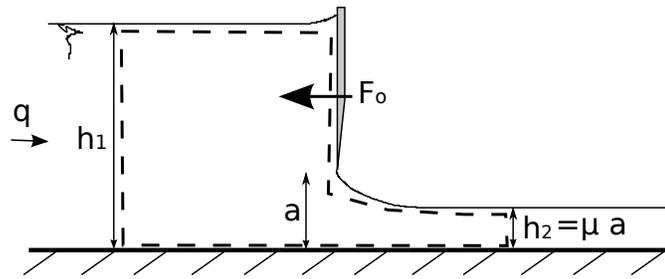


Figura 4.18: Fuerza sobre una compuerta.

4.3.2 Propiedades de la función momenta

Como vimos anteriormente, la función momenta en canales rectangulares se escribe como:

$$M = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} \tag{4.91}$$

y es fácil ver que tiene bastante semejanza con la energía específica E . Al igual que para E , podemos analizar la curva $M = f(h)$ de donde se obtiene que para $M = M_o$, existen dos soluciones posibles (Fig. 4.19):

- Solución para h_1 , caracterizada por grandes alturas (fuerzas de presión) y baja velocidad, y por lo tanto las fuerzas de presión dominan sobre la advección de momentum.
- Solución para h_2 , caracterizada por baja altura pero gran velocidad, entonces, la advección de momentum domina sobre presiones.

Además, la función momenta tiene también un mínimo asociado, el que, si buscamos

$$\frac{\partial M}{\partial h} = -\frac{q^2}{gh^2} + h = 0 \tag{4.92}$$

obtenemos que ocurre en la altura crítica

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \tag{4.93}$$

Entonces, podemos definir el escurrimiento crítico como aquel que ocurre cuando la momenta es mínima, dado un caudal q dado.

Se deja propuesto demostrar que e el caso de una sección de escurrimiento cualquiera, la momenta M queda escrita como:

$$M = \frac{Q^2}{g\Omega} + \eta\Omega \tag{4.94}$$

donde η es la profundidad del centro de gravedad.

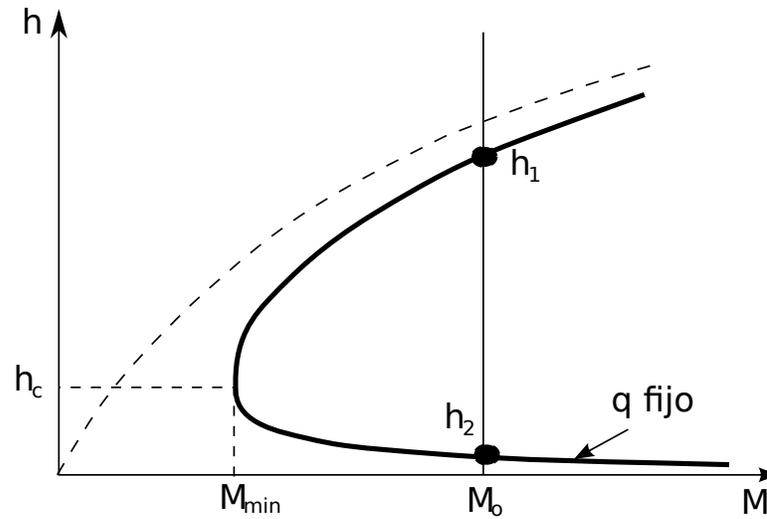


Figura 4.19: Función momenta.

4.3.3 Resalto hidráulico

Si en una situación dada no existen fuerzas del obstáculo y se desprecian los esfuerzos de corte, pero si existen pérdidas singulares de energía como lo es en un ensanche brusco, entonces:

$$M_1 = M_2 \tag{4.95}$$

Este equilibrio de momentas también ocurre en un resalto hidráulico, el cual compatibiliza los flujos supercríticos y subcríticos mediante una variación brusca de la altura de escurrimiento (discontinuidad matemática de la solución), la cual entendemos como una expansión brusca del escurrimiento. En este caso, también ocurre que

$$E_1 \neq E_2 \tag{4.96}$$

y por lo tanto podemos conocer la pérdida de energía de un resalto dado que h_1 y h_2 están relacionadas entre si mediante el equilibrio de momentas.

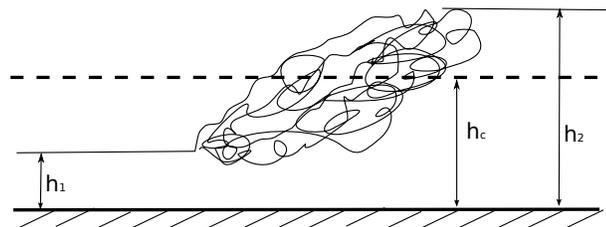


Figura 4.20: Resalto hidráulico.

En este caso particular de un resalto, las alturas h_1 h_2 se conocen como alturas conjugadas

del resalto, las cuales se relacionan entre si por:

$$M_1 = M_2 \quad (4.97)$$

y

$$E_1 = E_2 + \Lambda_r \quad (4.98)$$

para los equilibrios de momenta y energía respectivamente, donde Λ_r representa la pérdida de energía en el resalto.

Ahora, del equilibrio de momenta se sabe que

$$\frac{q^2}{gh_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2} \quad (4.99)$$

y por lo tanto:

$$\frac{q^2}{g} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \quad (4.100)$$

y

$$\frac{q^2}{g} \frac{(h_2 - h_1)}{h_1 h_2} = \frac{1}{2} (h_2 - h_1) (h_2 + h_1) \quad (4.101)$$

Luego, recordando que

$$Fr_1^2 = \frac{q^2}{gh_1^3} \quad (4.102)$$

es el cuadrado del número de Froude de aguas arriba del resalto, obtenemos que:

$$\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - 2Fr_1^2 = 0 \quad (4.103)$$

y entonces

$$\left(\frac{h_2}{h_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right) \quad (4.104)$$

Análogamente, si usamos

$$Fr_2 = \frac{q^2}{gh_2^3} \quad (4.105)$$

se obtiene que

$$\left(\frac{h_1}{h_2} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_2^2} \right) \quad (4.106)$$

A partir de este resultado, podemos calcular la pérdida de energía del resalto como:

$$\Lambda_r = E_1 - E_2 = \frac{q^2}{2g} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) + h_1 - h_2 = h_1 - h_2 + \frac{q^2}{2g} \frac{1}{(h_1 h_2)^2} (h_2^2 - h_1^2) \quad (4.107)$$

Por otro lado, del equilibrio de momento se obtiene que:

$$\frac{q^2}{g} = \frac{h_1 h_2}{2} (h_1 + h_2) \quad (4.108)$$

y por lo tanto, después de manipular algebraicamente la ecuación, se obtiene:

$$\Lambda_r = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \quad (4.109)$$

que es mayor que cero dado que $h_2 > h_1$.

4.3.4 Clasificación del resalto hidráulico

Dependiendo del número de Froude del torrente aguas arriba del resalto, se clasifica:

- $Fr_1 < 1.7$ El resalto es ondulatorio o de ondas, caracterizado por una baja pérdida de energía. (**Fig. 4.21**)

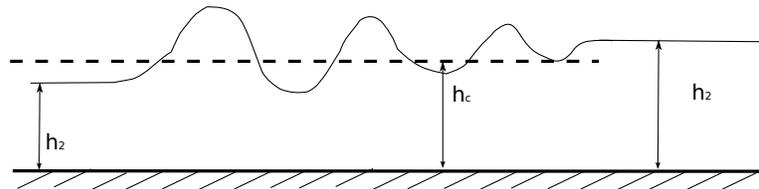


Figura 4.21: Resalto ondulatorio

- $1.7 < Fr_1 < 2.5$ Resalto débil: Las ondas se rompen pero las pérdidas de energía son débiles y aparecen torbellinos en la superficie.
- $2.5 < Fr_1 < 4.5$ Resalto oscilatorio. El torrente penetra como un chorro pulsante, lo cual genera ondas superficiales en el río de aguas abajo, las que se propagan en la dirección del flujo.
- $4.5 < Fr_1 < 9.0$ Resalto estacionario o estable.

Dependiendo de la ubicación espacial del resalto podemos decir que se ubican al pie, son rechazados o están ahogados. Para ver esta clasificación, veamos un canal con una grada de subida en el extremo de aguas abajo, y una compuerta que controla en el extremo de aguas arriba (**Fig. 4.22**). Si no existen condiciones que controlen el flujo aguas abajo de la grada

y el torrente generado en la compuerta no es lo suficientemente energético como para pasar por sobre la grada, entonces el flujo es crítico sobre la grada, tal que:

$$E_4 = E_{min} = \frac{3}{2}h_c = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (4.110)$$

Luego,

$$E_4 + z_o = E_3 \quad (4.111)$$

de donde calculamos la altura de escurrimiento en 3 como la mayor altura positiva dado que el flujo en 3 es de río. De igual forma, sabemos que

$$h_2 = \mu a \quad (4.112)$$

donde a es la apertura de la compuerta y μ es el coeficiente de contracción. Con estas dos alturas en 2 y 3, podemos calcular las momentas M_2 y M_3 y compararlas.

- Si $M_2 = M_3$, entonces decimos que el resalto está al pie de la compuerta (**Fig. 4.22B**).
- Si $M_2 > M_3$, entonces el resalto es rechazado por el torrente impuesto por la compuerta, y dado que aún no vemos fricción, se ubica al pie de la grada (**Fig. 4.22C**). En este caso, la fuerza que que ejerce la grada sobre el flujo interviene en el balance de fuerza y por lo tanto no es posible definir dos secciones de escurrimiento tal que se igualen las momentas. Esta fuerza por unidad de ancho f_o se calcula de:

$$M_2 = M_4 + \frac{f_o}{\gamma} \quad (4.113)$$

donde M_4 es la momenta en la sección 4, asociada a la altura crítica sobre la grada, y M_2 se calcula con $h_2 = \mu a$.

En este caso decimos que el resalto es incompleto.

- Si $M_2 < M_3$, entonces el resalto se ahoga y entonces el flujo impuesto por la grada influye el escurrimiento aguas arriba de la compuerta (**Fig. 4.22C**). En este caso se tiene que en la sección 2, existen dos alturas relevantes: μa es la altura que determina la velocidad (fuerza del chorro), y h' es la altura que define la fuerza de presión. Por esto, la momenta M_2 se calcula como:

$$M_2 = \frac{q^2}{g(\mu a)} + \frac{h'^2}{2} \quad (4.114)$$

Esta momenta (fuerza) es igual a M_3 calculado de imponer crisis en 4, y entonces podemos calcular h' dado que conocemos el resto de la información.

Es fácil ver que también es necesario redefinir la energía en 2, como:

$$E_2 = \frac{q^2}{g(\mu a)^2} + h' \quad (4.115)$$

y como $E_1 = E_2$, obtenemos la altura h_1 como la altura de río.

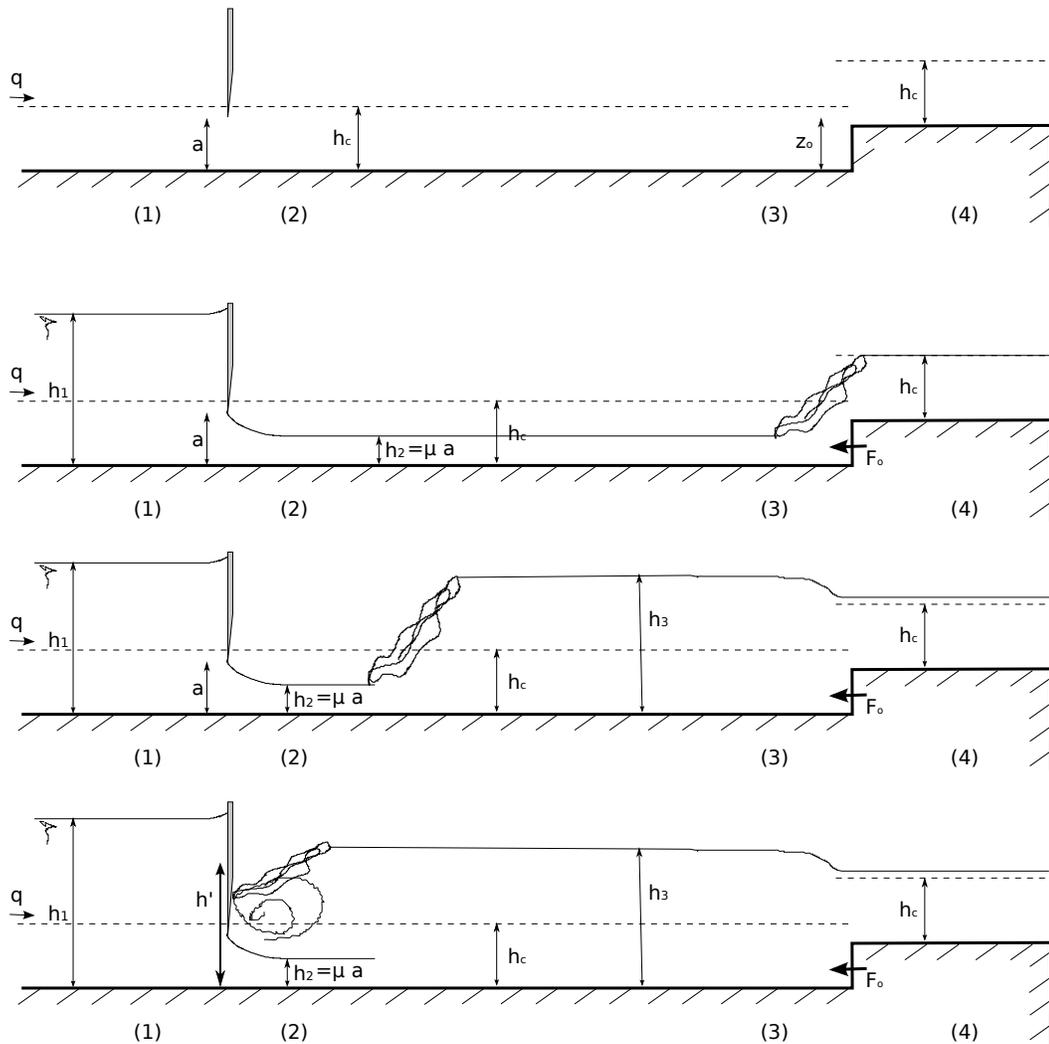


Figura 4.22: Clasificación de resalto al pie, rechazado o ahogado.

4.3.5 Otras propiedades

Forma

Experimentalmente se ha determinado que a lo largo del resalto, la cota piezométrica coincide con el nivel medio de la superficie libre, lo cual, sorpresivamente, nos indica que es válida la ley hidrostática de presiones. Este resultado nos hace suponer que de plantear equilibrio de momentos para un punto x ubicado dentro del resalto, es posible encontrar una ecuación que describa la forma de los resaltos. Sin embargo, esto no es posible dado que, si bien la presión es hidrostática, no conocemos el área que define la velocidad.

Largo

Sea l_T el largo del resalto, visto como zona con torbellinos en superficie, o con zona de aguas blancas como se conoce en limnología de ríos, y l la longitud del resalto entre el comienzo y el punto de aguas abajo donde es válido suponer hidrostática (**Fig. 4.23**).

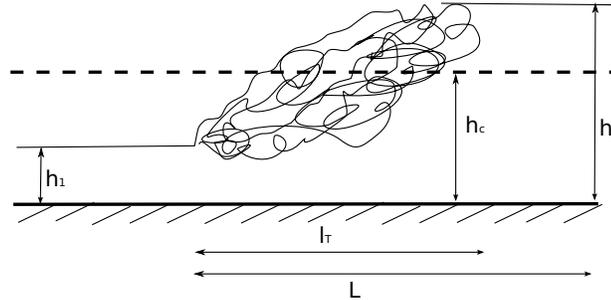


Figura 4.23: Definición longitud del resalto.

Experimentalmente se ha determinado que:

- Safranez:

$$l = 4.5h_2 \tag{4.116}$$

- Bakhneteff:

$$\frac{l}{h_c} = 4.5 \frac{h_2}{h_c} \tag{4.117}$$

confirmando la relación de Safranez para $\frac{h_2}{h_c} > 1.5$.

- En el clásico que cualquier hidráulico que se aprecie debiera tener, Francisco Javier Dominguez, se indica que:

$$\frac{l}{h_c} = 18 - 20 \frac{h_1}{h_c} \tag{4.118}$$

- En el Bureau of Reclamation, se considera la curvas de la **Fig. 4.24** para el cálculo preliminar de la longitud de un resalto.

4.3.6 Problemas propuestos

- Analice el caso de un resalto incompleto aguas abajo de un ensanche.
- Analice el caso de un resalto en un acueducto en presión.
- Analice el caso de un resalto en pendiente.

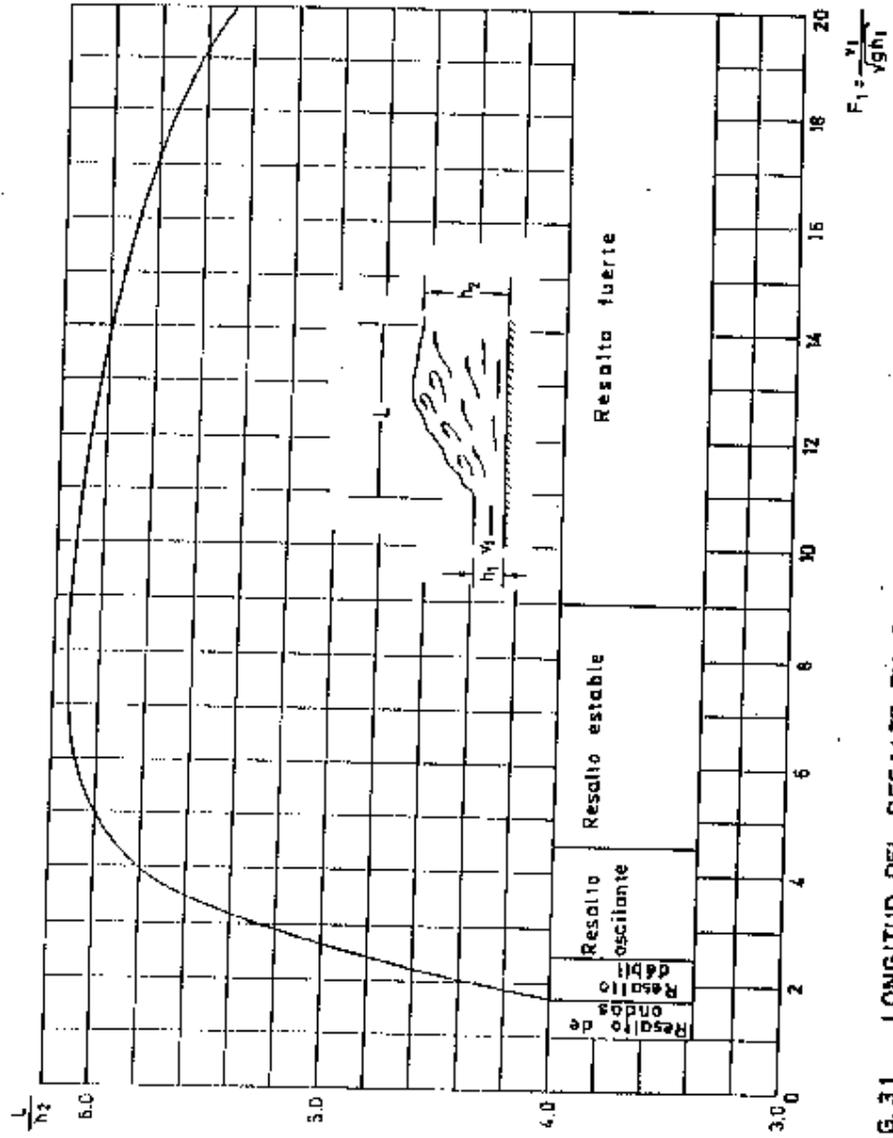


FIG. 3.1 LONGITUD DEL RESALTO EN CANALES RECTANGULARES HORIZONTALES, SEGUN EL U.S. BUREAU OF RECLAMATION

Figura 4.24:

Capítulo 5

Resistencia al escurrimiento en canales

El escurrimiento en canales es el resultado del balance de fuerzas motrices y fuerzas resistivas. Como vimos en Mecánica de Fluidos, las fuerzas motrices en tuberías se deben a gradientes de presión, mientras que la principal fuerza motriz en canales es la gravedad, para lo cual se requiere que en canal esté inclinado.

Por otro lado, en tuberías, la fuerza fuerza resistiva es el esfuerzo de corte que se homogéneamente actúa en todo el perímetro de la tubería. Si bien las fuerzas resistivas en canales también se deben a los esfuerzos de corte, es necesario considerar que los que actúan en la superficie libre son diferentes a los que ocurren en la pared del canal. Además, dentro de una misma sección de escurrimiento, el esfuerzo de corte en zonas profundas no es necesariamente igual al de aguas someras. Es posible, sin embargo, analizar la resistencia al escurrimiento en términos de un esfuerzo de corte medio, el cual se relaciona con las propiedades medias del escurrimiento en la sección: velocidad, área de escurrimiento, y perímetro mojado.

5.1 Esfuerzo de corte medio

5.1.1 Escurrimiento uniforme o normal

En este caso se cumple que la altura de escurrimiento es constante a lo largo de x , lo que implica que la superficie libre es paralela al canal, y entonces, como la velocidad es también uniforme, el nivel de energía es también paralelo al fondo del canal. Esta descripción nos lleva a que:

$$i = J \tag{5.1}$$

donde i es la pendiente del terreno, y J es la pendiente del plano de carga (**Fig. 5.1**).

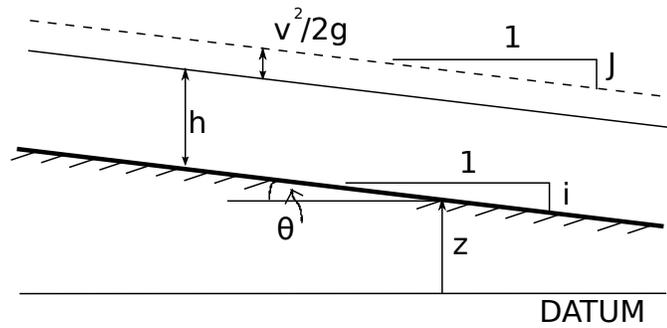


Figura 5.1: Flujo uniforme en canales abiertos.

A partir de un análisis simple del teorema de cantidad de movimiento, vemos que:

$$\sum F_{ext} = \rho Q (v_2 - v_1) \quad (5.2)$$

donde $Q = v_1 \Omega_1 = v_2 \Omega_2$, y entonces, como estamos bajo el supuesto de flujo uniforme, $\Omega_1 = \Omega_2$, y por lo tanto

$$\sum F_{ext} = F_{p1} - F_{p2} + W \sin \theta - F_\tau = 0 \quad (5.3)$$

donde $F_{p1} - F_{p2} = 0$ dado que estamos considerando flujo uniforme. Entonces:

$$W \sin \theta = F_\tau \quad (5.4)$$

la cual nos indica que el flujo uniforme en canales abiertos es aquel en que peso proyectado es balanceado con el esfuerzo de corte de fondo.

Respecto de la fuerza de corte F_τ , sabemos que, sin pérdida de generalidad:

$$F_\tau = \Delta x \int_\chi \tau_o d\chi = \Delta x \chi \bar{\tau}_o \quad (5.5)$$

donde χ es el perímetro mojado, τ_o es el esfuerzo de corte local, y $\bar{\tau}_o$ el esfuerzo de corte medio que actúa en χ .

Por otro lado,

$$W = \rho g \Omega \Delta x \quad (5.6)$$

de donde se obtiene que:

$$\rho g \Omega \Delta x \sin \theta = \Delta x \chi \bar{\tau}_o \quad (5.7)$$

y entonces, definiendo $i = \sin \theta$, obtenemos que:

$$\bar{\tau}_o = \rho g i \frac{\Omega}{\chi} = \rho g i R_h \quad (5.8)$$

donde R_h es el radio hidráulico.

5.1.2 Escurrimiento gradualmente variado

Recordando que el escurrimiento gradualmente variado era aquel en que, si bien se aceptan cambios longitudinales en la propiedades del flujo, estos eran lo suficientemente pequeños de manera que podíamos suponer que la ley hidrostática de presiones es válida. Bajo este supuesto, y considerando la definición de variables de la **Fig. 5.2**, vemos que el teorema de cantidad de movimiento queda escrito como:

$$\sum F_{ext} = \rho Q (v_2 - v_1) \quad (5.9)$$

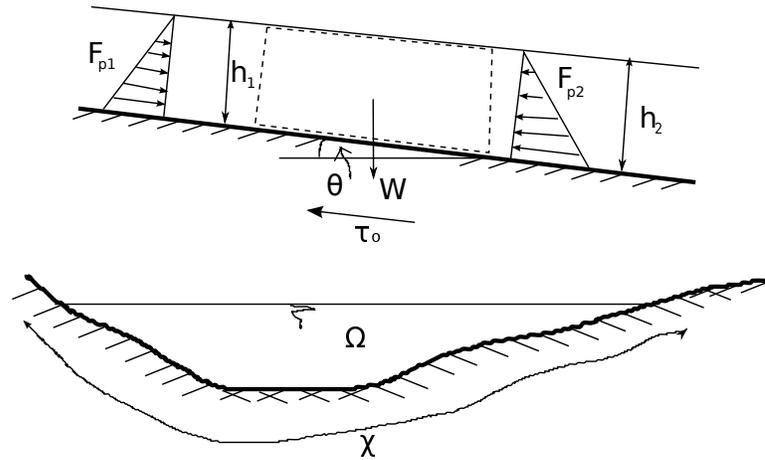


Figura 5.2: Flujo gradualmente variado en canales abiertos.

Luego, expresando $v_2 = v_1 + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$, obtenemos que:

$$\sum F_{ext} = \rho Q \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \quad (5.10)$$

Además,

$$\sum F_{ext} = F_{p1} - F_{p2} + W \sin \theta - F_\tau \quad (5.11)$$

y como $F_{p2} = F_{p1} + \frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x$, obtenemos que:

$$-\frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x + \Delta x \Omega g \rho i - \tau_o \chi \Delta x = \rho Q \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \quad (5.12)$$

y por lo tanto:

$$\Omega \rho \left(v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\Omega \rho} \frac{\partial F_p}{\partial x} - g \rho i \right) = \tau_o \chi \quad (5.13)$$

A continuación, expresamos $F_p = \rho g \eta \Omega$, donde η es la profundidad del centro de gravedad de Ω . De esta forma, el término $\frac{\partial F_p}{\partial x}$ queda escrito como:

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta \Omega}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.14)$$

donde necesitamos conocer $\frac{\partial \eta \Omega}{\partial h}$, para lo cual expandimos en Taylor el producto $\eta \Omega$ como:

$$(\eta \Omega)_{h+dh} = (\eta \Omega)_h + \frac{\partial \eta \Omega}{\partial h} dh \quad (5.15)$$

Luego, expresamos $(\eta \Omega)_{h+dh}$ a partir de dos superficies: una Ω cuyo centro de gravedad se encuentra a una profundidad $\eta + dh$, y otra $d\Omega$ cuyo centro de gravedad se encuentra a $dh/2$ (**Fig. 5.3**). Si $(\eta \Omega)_h = (\eta \Omega)$ se cumple que:

$$\Omega (\eta + dh) + d\Omega \frac{dh}{2} = (\eta \Omega) + \frac{\partial \eta \Omega}{\partial h} dh \quad (5.16)$$

y entonces

$$\Omega + \frac{1}{2} d\Omega = \frac{\partial \eta \Omega}{\partial h} \quad (5.17)$$

de donde podemos obtener que

$$\frac{\partial \eta \Omega}{\partial h} \approx \Omega \quad (5.18)$$

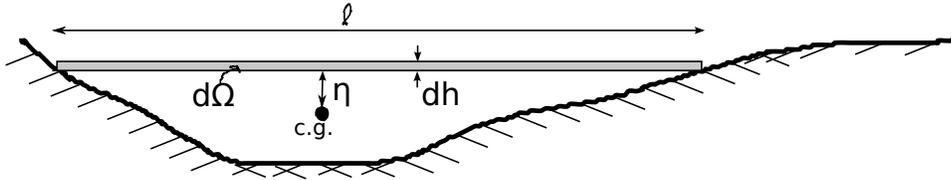


Figura 5.3: Superficies para cálculo de $(\eta \Omega)_{h+dh}$.

Reemplazando este último resultado en (5.19), obtenemos que:

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = \rho g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.19)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2g} v^2 + h + z \right) = \tau_o \frac{\chi}{\Omega \rho g} \quad (5.20)$$

dado que $i = -\frac{\partial z}{\partial x}$. O bien:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\tau_o}{\rho g R_h} \quad (5.21)$$

donde $\frac{\partial B}{\partial x} = J$. Es así que finalmente se obtiene que:

$$\tau_o = \gamma R_h J \quad (5.22)$$

5.1.3 Ecuaciones de resistencia

Se entiende como ley o ecuación de resistencia en canales a aquellas relaciones que permitan calcular J o τ_o en función de las propiedades del flujo medio v y R_h y de las propiedades del material del canal.

Factor de fricción

Vimos que la pérdida de carga friccional en tuberías se puede calcular de la ecuación de Darcy-Weisbach como:

$$J = \frac{f}{4R_h} \frac{v^2}{2g} \quad (5.23)$$

entonces:

$$v = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_h J} \quad (5.24)$$

El problema se reduce al cálculo del factor de fricción f , el que depende de la rugosidad del cauce, el número de Reynolds y la forma del canal. Al igual que en tuberías, si el flujo es lo suficientemente turbulento (altos números de Reynolds), entonces f deja de depender de Re , y sólo depende de la forma del cauce y de la rugosidad del fondo. A pesar que esta ecuación puede ser usada para el cálculo de J , la estrecha dependencia de f con la forma del canal hace inconveniente su uso práctico en canales.

Ecuación de Chèzy (1768)

Esta ecuación se escribe como:

$$v = c\sqrt{R_h J} \quad (5.25)$$

donde c es el coeficiente de Chèzy que tiene unidades de $L^{1/2}T^{-1}$, y nuevamente es dependiente de la forma y rugosidad del cauce, y del número de Reynolds, ya que es fácil ver que se relaciona con el coeficiente de fricción f como:

$$c = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (5.26)$$

Ecuación de Gauguillet y Kutter (1869)

Esta forma propone un valor experimental para el coeficiente de Chèzy como:

$$c = \frac{23 + 0.00155/J + 1/n}{1 + (23 + 0.00155/J)\frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (5.27)$$

donde $J = i$ y n es el número de Kutter que depende del tipo de superficie.

Ecuación de Bazin (1897)

$$c = \frac{87.02}{1 + m/\sqrt{R_h}} \quad (5.28)$$

donde m es el coeficiente de Bazin que es calibrado experimentalmente, sin embargo, no entrega buenos resultados.

Ecuación de Manning (1889)

Esta ecuación fue originalmente derivada para el escurrimiento uniforme tal que:

$$v = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (5.29)$$

donde n es el coeficiente de Manning cuyas unidades son de $L^{-1/3}T$ o bien $sm^{-1/3}$ en MKS. Si recordamos que $Q = v\Omega$, entonces escribimos la ecuación de Manning en su forma más usual:

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \Omega R_h^{2/3} \quad (5.30)$$

Esta ecuación es de uso generalizado en la actualidad y puede considerarse bastante precisa, sin embargo, requiere conocer el valor de n , para lo cual existen tablas y metodologías particulares.

- Cálculo del coeficiente de Manning en función de la aspereza de la pared, k_s . A partir de la ecuación de Stricker, el número de Manning se calcula como:

$$n = \frac{k_s^{1/6}}{26.4} \quad (5.31)$$

es importante notar que k_s también representa el tamaño de las partículas de sedimento en la superficie de caces naturales.

- En cauces naturales, el método de Cowan permite estimar el coeficiente de Manning como:

$$n = m(n_o + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) \quad (5.32)$$

donde m es un factor por presencia de meandros (curvas en el cauce), n_o es el valor base determinado de, por ejemplo Stricker, y n_1 a n_4 dan cuenta de correcciones por irregularidades en el perímetro mojado, variación de forma y dimensiones de la sección de escurrimiento, presencia de obstrucciones y presencia de vegetación.

La ecuación de Manning fue desarrollada para escurrimiento uniforme donde $i = J$. Sin embargo, se usa también para el escurrimiento gradualmente variado como:

$$\frac{Qn}{\sqrt{J}} = \Omega R_h^{2/3} \quad (5.33)$$

o bien

$$J = \frac{Q^2 n^2}{\Omega^2 R_h^{4/3}} \quad (5.34)$$

5.1.4 Altura normal

Como fue mencionado anteriormente la ecuación de Manning es la actualmente más usada, y nos permite caracterizar el escurrimiento uniforme, por lo tanto, nos permite calcular las propiedades que caracterizan este flujo. Como sabemos, tanto Ω como R_h son funciones de la altura de escurrimiento, y por lo tanto, la ecuación de Manning nos permite calcular la denominada *altura normal*, h_n que caracteriza el escurrimiento uniforme.

Por ejemplo, si el canal es rectangular muy ancho, sabemos que $b \gg h$ y entonces

$$R_h = \frac{bh_n}{b + 2 * h_n} \approx h_n \quad (5.35)$$

y entonces

$$\frac{qn}{\sqrt{i}} = h_n^{5/3} \quad (5.36)$$

donde $q = Q/b$.

De esta forma, independientemente de la forma del cauce, conocidos Q , n , i y la forma de las curvas $\Omega(h)$ y $R_h(h)$, la altura normal h_n es una altura característica del escurrimiento, la igual que h_c lo es. Por lo tanto, la relación entre h_n y h_c sirve para caracterizar el flujo:

- $h_c < h_n$, el escurrimiento normal es subcrítico, y este caso se denomina de pendiente hidráulica suave o simplemente pendiente suave.
- $h_c > h_n$, el escurrimiento normal es supercrítico, y este caso se denomina de pendiente hidráulica fuerte, o simplemente pendiente fuerte.
- $h_n = h_c$, el escurrimiento normal es crítico, y se denomina pendiente hidráulica crítica.

Por último, sin importar cómo ocurra, sabemos que todo sistema físico tiende a un equilibrio y por lo tanto podemos decir que si forzamos una altura de escurrimiento distinta a la normal en algún punto del canal (por ejemplo con una compuerta o crisis), el flujo va a buscar la altura normal de escurrimiento en puntos alejados de esta singularidad. Si bien la forma de

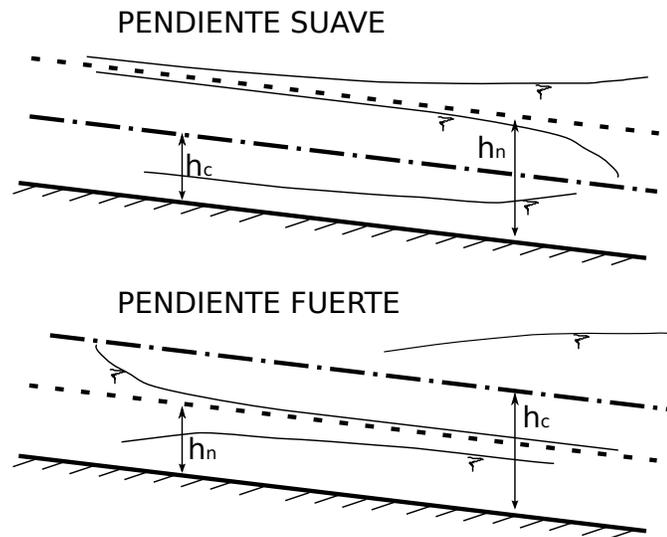


Figura 5.4: Clasificación de pendientes hidráulicas suave y fuerte.

cómo ocurre esta transición hacia la altura normal la vamos a ver en el capítulo siguiente, es importante destacar que la principal conclusión que se obtiene de este comportamiento, es que el flujo normal también determina condiciones de borde, si es que sabemos que las últimas secciones de control hidráulico se encuentran lo suficientemente alejadas del tramo de canal en estudio.

Capítulo 6

Escurrimiento gradualmente variado

Recordando que el escurrimiento gradualmente variado es aquel en que consideramos flujo permanente y no uniforme, sin embargo, consideramos que los cambios longitudinales de las propiedades del flujo son pequeños, y entonces, es igualmente válido suponer que las líneas de corriente son paralelas, de manera que la ley hidrostática de presiones es válida.

En capítulos anteriores distinguimos dos tipos de escurrimiento caracterizados por su pendiente hidráulica la cual puede ser suave o fuerte:

- Si la pendiente hidráulica es suave, se tiene que la pendiente del canal, i , es baja en relación a la pendiente crítica (i_c) que se obtiene de imponer que $h_n = h_c$. Esto implica que $h_N > h_c$. Luego, como el régimen es de río, el control hidráulico se encuentra aguas abajo, y entonces la altura normal tiende a ocurrir a una cierta distancia aguas arriba del control hidráulico (**Fig. 6.1**).

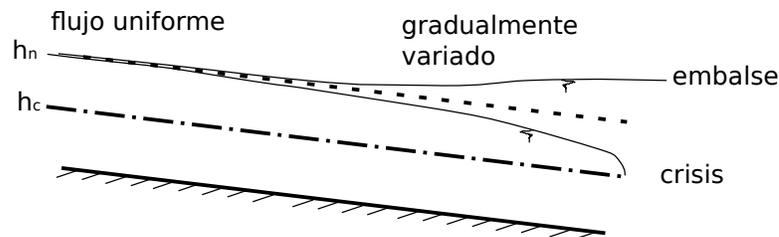


Figura 6.1: Flujo gradualmente variado en canales abiertos. Ejemplo de pendiente suave.

- Si la pendiente hidráulica es fuerte, entonces la pendiente i , es alta en relación a la pendiente crítica (i_c), o bien, $h_n < h_c$. En este caso, el escurrimiento naturalmente tiende a una condición de torrente, el cual se alcanzaría en un punto alejado de las sección de control, y el punto donde aproximadamente se alcanza la altura normal se

ubica aguas abajo del control dado que los torrentes son controlados por aguas arriba (**Fig. 6.2**).

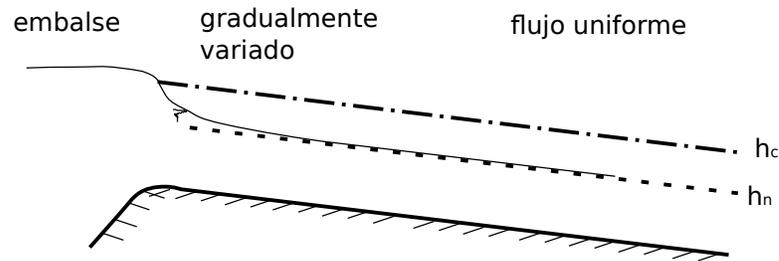


Figura 6.2: Flujo gradualmente variado en canales abiertos. Ejemplo de pendiente fuerte.

Es así que si forzamos (imponemos) una altura de escurrimiento en un cierto punto del canal, sabemos que el escurrimiento siempre va tender a alcanzar la altura normal en un punto alejado de este control hidráulico, generándose un régimen de transición gradualmente variado entre la altura de escurrimiento impuesta en el control hidráulico, y la altura normal de escurrimiento.

6.1 Ecuación diferencial de movimiento

A partir de Bernoulli entres los puntos 1 y 2 un canal (**Fig. 6.3**) sabemos que:

$$B_1 = B_2 + \Lambda_f \quad (6.1)$$

donde $\Lambda_f = J\Delta x$, y

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x \quad (6.2)$$

Entonces:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -J \quad (6.3)$$

Además sabemos que:

$$B = E + z \quad (6.4)$$

donde E es la energía específica en canales, y z es la cota de fondo. Por lo tanto, definiendo la pendiente del canal como $i = -\frac{\partial z}{\partial x}$, obtenemos que:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = i - J \quad (6.5)$$

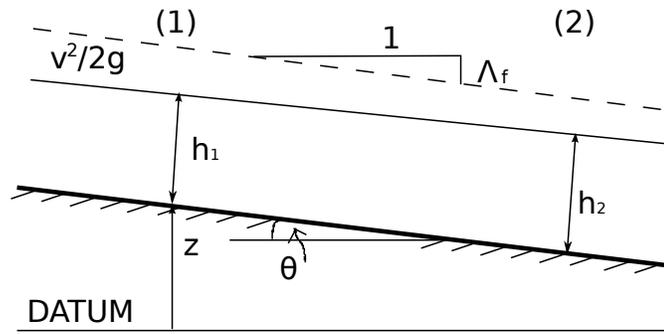


Figura 6.3: Bernoulli en canales.

Por otro lado, sabemos que:

$$E = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} + h \quad (6.6)$$

donde Ω es el área de escurrimiento, h la profundidad y Q el caudal. Entonces

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -2\frac{Q^2}{2g\Omega^3} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.7)$$

donde

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = l \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.8)$$

con l el largo superficial (ver capítulo 4). Entonces, recordando que el número de Froude en una sección de escurrimiento cualquiera es:

$$F_r^2 = \frac{Q^2 l}{g\Omega^3} \quad (6.9)$$

De esta forma se obtiene finalmente

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (1 - F_r^2) \frac{\partial h}{\partial x} = i - J \quad (6.10)$$

o bien

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{i - J}{1 - F_r^2} \quad (6.11)$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación del eje hidráulico, ya que nos permite calcular $h(x)$.

Finalmente, si asumimos que la ecuación de Manning es válida para caracterizar el escurrimiento gradualmente variado, entonces

$$\frac{Qn}{\sqrt{J}} = \Omega R_h^{2/3} \quad (6.12)$$

o bien

$$J = \frac{Q^2 n^2}{\Omega^2 R_h^{4/3}} \quad (6.13)$$

6.2 Análisis y clasificación de ejes hidráulicos

El análisis que se realiza a continuación permite identificar la forma del eje hidráulico dependiendo de cómo sea la condición de borde impuesta por las secciones de control hidráulico. Para eso analizaremos el signo de $\frac{\partial h}{\partial x}$ a partir de los signos de i/J y $1 - F_r^2$, separadamente.

Primero, es fácil ver que el producto $\Omega R_h^{2/3}$ es una función creciente con h (considere el caso de un canal muy ancho donde $\Omega R_h^{2/3} = bh^{5/3}$). Además, dado que Q y n son constantes, se obtiene que:

$$Qn = \sqrt{i} \left(\Omega R_h^{2/3} \right)_n = \sqrt{J} \left(\Omega R_h^{2/3} \right) \quad (6.14)$$

y entonces:

$$\frac{i}{J} = \frac{\left(\Omega R_h^{2/3} \right)^2}{\left(\Omega R_h^{2/3} \right)_n^2} \quad (6.15)$$

donde el subíndice n nos indica que estamos evaluando para el escurrimiento normal. Es así que

- Si estamos en un régimen tal que $h > h_n$, y como $\Omega R_h^{2/3}$ es creciente con h , el resultado (6.15) nos indica que:

$$\left(\Omega R_h^{2/3} \right)_n^2 < \left(\Omega R_h^{2/3} \right)^2 \Rightarrow \frac{i}{J} > 1 \quad (6.16)$$

o bien

$$i - J > 0 \quad (6.17)$$

- Si $h < h_n$, entonces

$$\left(\Omega R_h^{2/3} \right)_n^2 > \left(\Omega R_h^{2/3} \right)^2 \Rightarrow \frac{i}{J} < 1 \quad (6.18)$$

o bien

$$i - J < 0 \quad (6.19)$$

Luego, podemos analizar el signo de $1 - F_r^2$ como:

- Si $h > h_c$, se cumple que $F_r^2 < 1$, y por lo tanto, $1 - F_r^2 > 0$.
- Si $h < h_c$, se cumple que $F_r^2 > 1$, y por lo tanto, $1 - F_r^2 < 0$.

De esta forma, dependiendo de la pendiente hidráulica podemos analizar los diferentes casos y así esquematisar la forma del eje hidráulico.

6.2.1 Pendiente suave

En este caso se tiene que $h_n > h_c$, y entonces podemos definir tres casos en función de h , y calcular el signo de $\frac{\partial h}{\partial x}$ como se muestra en la **Table 1**

Tabla 1: Signo de $\frac{\partial h}{\partial x}$ para flujo en pendiente suave

| CASO | $i - J$ | $1 - F_r^2$ | $\frac{\partial h}{\partial x}$ |
|--------------------|---------|-------------|---------------------------------|
| 1: $h > h_n > h_c$ | (+) | (+) | (+) |
| 2: $h_n > h > h_c$ | (-) | (+) | (-) |
| 3: $h_n > h_c > h$ | (-) | (-) | (+) |

- Caso 1: $h > h_n > h_c$. Este caso corresponde a un escurrimiento de río en pendiente suave, cuya sección de control de aguas abajo impuso una altura de escurrimiento mayor que la altura normal. De la **Table 1** vemos que h es creciente con x , y entonces $J \rightarrow 0$, resultando que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx i \tag{6.20}$$

lo que nos indica que el escurrimiento tiende a ser horizontal en $x = \infty$. Sabemos además que en $x = -\infty$ el escurrimiento es uniforme donde $\frac{\partial h}{\partial x} \approx 0$ (**Fig. 6.4**).

Este eje hidráulico se conoce como **S1**, o bien río peraltado en pendiente suave, de acuerdo con Francisco Javier Domínguez.

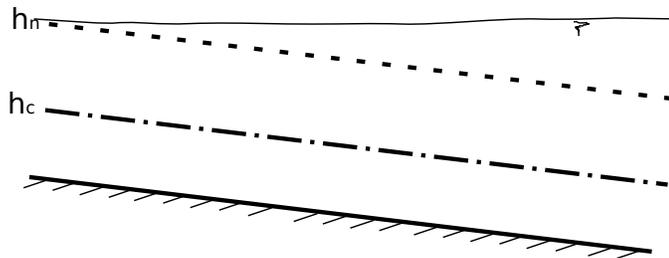


Figura 6.4: Escurrimiento S1.

- Caso 2: $h_n > h > h_c$. Este caso es un escurrimiento de río en pendiente suave, cuya sección de control de aguas abajo impuso una altura de escurrimiento menor a la altura normal, pero mayor que la altura crítica. El caso más usual es cuando aguas abajo sabemos que hay crisis. De la **Table 1** vemos que h es decreciente con x , y entonces $h \rightarrow h_c$, donde se cumple que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow -\infty \tag{6.21}$$

lo que nos indica que el escurrimiento se acelera al acercarse a la crisis, aunque es necesario destacar que cerca de esta sección de control, el escurrimiento no es gradualmente

variado. Sabemos además que en $x = -\infty$ el escurrimiento es uniforme donde $\frac{\partial h}{\partial x} \approx 0$ (**Fig. 6.5**).

Este eje hidráulico se conoce como **S2**, o bien río deprimido en pendiente suave según a Francisco Javier Domínguez.

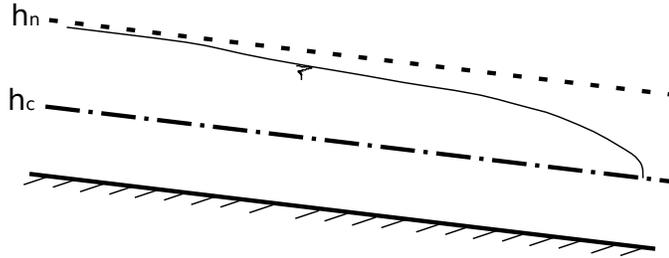


Figura 6.5: Escurrimiento S2.

- Caso 3: $h_n > h_c > h$. Este caso es un escurrimiento de torrente en pendiente suave, el cual fue forzado por una condición de borde de aguas arriba como una compuerta. De la **Table 1** vemos que h es creciente con x , y al igual que en el caso S2, la curvatura del eje hidráulico tiende

$$\frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow +\infty \tag{6.22}$$

Sabemos, sin embargo, que el escurrimiento no alcanza la crisis, dado que necesariamente se forma un resalto (**Fig. 6.6**).

Este eje hidráulico se conoce como **S3**, o bien torrente en pendiente suave según Francisco Javier Domínguez. Demuestre que a medida que se desarrolla este eje hidráulico S3, la momenta del torrente disminuye hacia aguas abajo, y analice la utilidad de este resultado para determinar la posición de un resalto rechazado, donde el torrente se impone por una compuerta en pendiente suave.

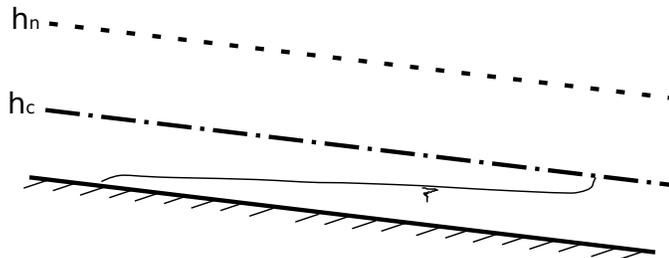


Figura 6.6: Escurrimiento S3.

6.2.2 Pendiente fuerte

En este caso se tiene que $h_c > h_n$, y entonces podemos definir tres casos en función de h , y calcular el signo de $\frac{\partial h}{\partial x}$ como se muestra en la **Table 2**

Tabla 2: Signo de $\frac{\partial h}{\partial x}$ para flujo en pendiente fuerte

| CASO | $i - J$ | $1 - F_r^2$ | $\frac{\partial h}{\partial x}$ |
|--------------------|---------|-------------|---------------------------------|
| 1: $h > h_c > h_n$ | (+) | (+) | (+) |
| 2: $h_c > h > h_n$ | (+) | (-) | (-) |
| 3: $h_c > h_n > h$ | (-) | (-) | (+) |

- Caso 1: $h > h_c > h_n$. Este caso corresponde al escurrimiento de río en pendiente fuerte, cuya sección de control de aguas abajo impuso una altura de escurrimiento mayor que la altura crítica. Por ejemplo, con una compuerta. De la **Table 2** vemos que h es creciente con x , y además, sabemos que el flujo va a tender a la altura normal, y entonces h tiende a cruzar h_c , donde

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \infty \tag{6.23}$$

Al igual que el eje hidráulico S1, h tiende a ser horizontal en caso que la altura de escurrimiento de río impuesta aguas abajo sea lo suficientemente grande tal que $J \approx 0$. Este eje hidráulico se muestra en la **Fig. 6.7**, y se conoce como **F1**, o bien río en pendiente fuerte según Francisco Javier Domínguez.

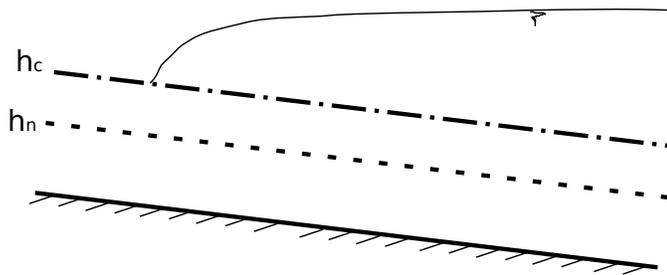


Figura 6.7: Escurrimiento F1.

- Caso 2: $h_c > h > h_n$. Este caso corresponde a un escurrimiento de torrente en pendiente fuerte, cuya sección de control de aguas arriba impuso una altura de escurrimiento mayor a la normal, pero menor o igual a la crítica. De la **Table 2** vemos que h es decreciente con x , y h tiende a h_n si $x \rightarrow \infty$. Este eje hidráulico se muestra en la **Fig. 6.8**, y se conoce como **F2**, o bien torrente peraltado en pendiente fuerte según Francisco Javier Domínguez.

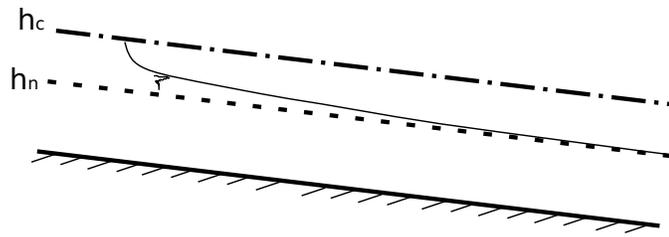


Figura 6.8: Esguerrimiento F2.

- Caso 3: $h_c > h_n > h$. Este caso corresponde a un esguerrimiento de torrente en pendiente fuerte, cuya sección de control de aguas arriba impuso una altura de esguerrimiento menor a la normal. De la **Table 2** vemos que h crece con x , y h tiende a h_n si $x \rightarrow \infty$. Este eje hidráulico se muestra en la **Fig. 6.9**, y se conoce como **F3**, o bien torrente deprimido en pendiente fuerte según Francisco Javier Domínguez.

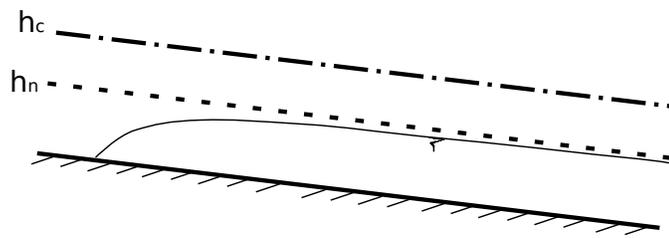


Figura 6.9: Esguerrimiento F3.

6.2.3 Otros casos

Repita el análisis anterior para esquematizar los ejes hidráulicos:

- Pendiente crítica, conocidos como C1 y C3, según si $h > h_c = h_n$ o $h < h_c = h_n$, respectivamente.
- Pendiente horizontal, conocidos como H2 y H3, según si $h > h_c$ o $h < h_c$, respectivamente. Note que este caso no existe la altura normal de esguerrimiento.
- Pendiente adversa, conocidos como A2 y A3, según si $h > h_c$ o $h < h_c$, respectivamente. Note que este caso tampoco existe la altura normal de esguerrimiento.

El resumen de todas estas combinaciones se muestra en la ya tradicional tabla de la página 98.

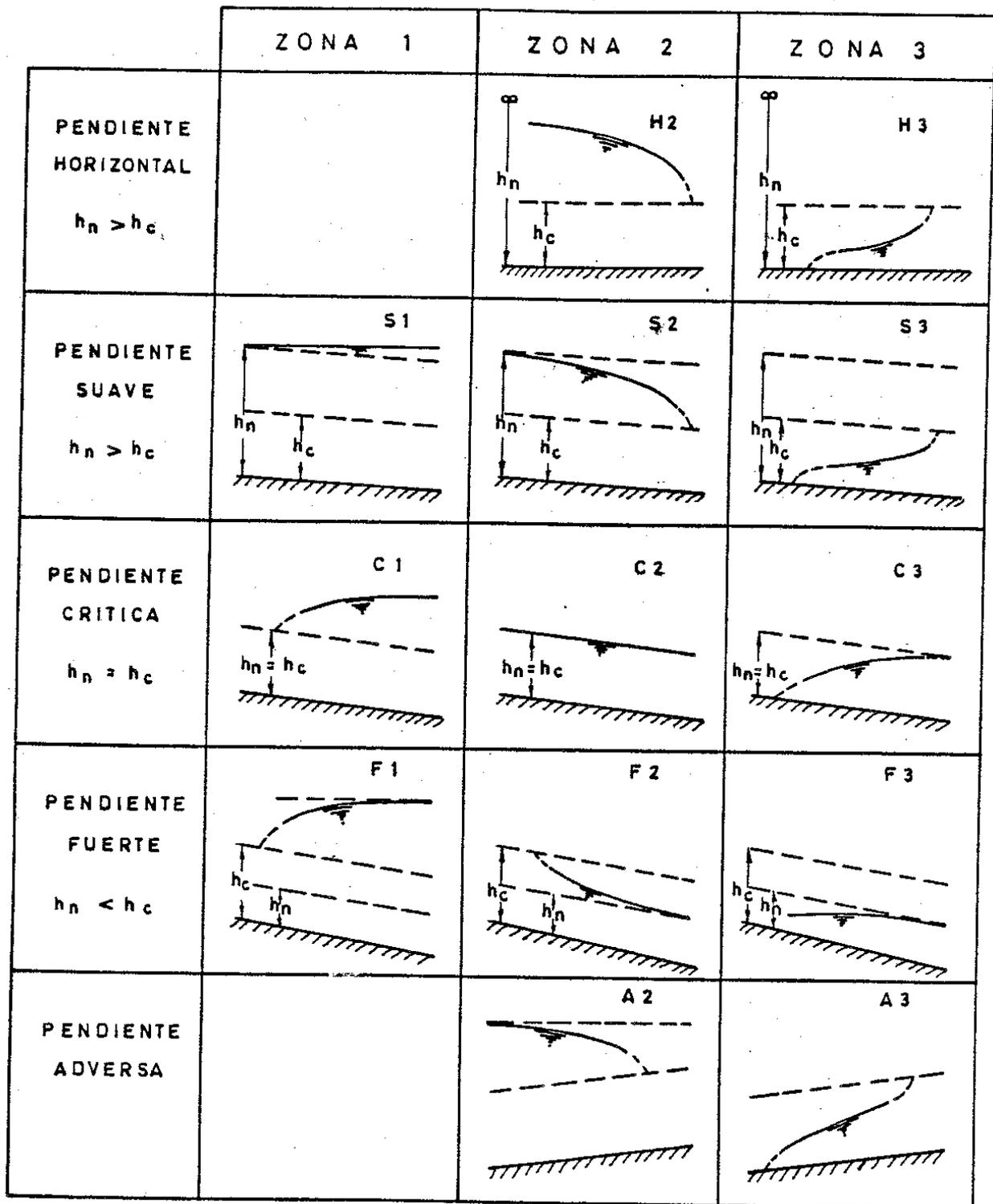


FIG. 5.1. CLASIFICACION DE LOS DISTINTOS TIPOS DE EJES HIDRAULICOS

6.3 Cálculo numérico del Eje Hidráulico

Ya dedujimos que la ecuación que describe la variación longitudinal de la altura de escurrimiento en canales es:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{i - J}{1 - F_r^2} \quad (6.24)$$

Se requiere determinar $h(x)$ de integrar esta ecuación, para lo cual necesitamos conocer una condición de borde que genéricamente escribimos como que $h(x = x_o) = h_o$. Sabemos también que si el escurrimiento es subcrítico o de río, entonces esta condición de borde determinará las alturas de escurrimiento de aguas arriba de x_o , mientras que si el escurrimiento es supercrítico, entonces esta condición de borde determinará las alturas de escurrimiento aguas abajo del punto x_o .

Si bien esta descripción indica que el problema de resolver el eje hidráulico podría ser un cálculo simple, el término derecho de (6.24) es altamente no lineal, ya sea porque:

$$J = \frac{Q^2 n^2}{\Omega^2 R_h^{4/3}} \quad (6.25)$$

o porque

$$F_r^2 = \frac{Q^2 l}{g \Omega^3} \quad (6.26)$$

donde l es el largo superficial. De esta forma,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f(h) \quad (6.27)$$

donde $f(h)$ es una función altamente no lineal, la cual, salvo para el caso invíscido, no posee solución analítica. Es por este motivo que desde los comienzos de la ingeniería hidráulica como se conoce actualmente, ha sido necesario contar con un esquema numérico para resolver esta ecuación. La clave que explica porqué el esquema de integración numérica que se presenta a continuación permanece aún vigente radica en que es un esquema numérico simple que fue desarrollado con anterioridad a los primeros computadores, pero también muy preciso ya que fuerza el principio de continuidad de la energía.

Es así que el método de integración numérica de la ecuación del eje hidráulico, no resuelve (6.24) propiamente tal, sino que se centra en conservar energía, resultando que la ecuación por integrar es:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -J \quad (6.28)$$

donde $B = E + z$ es el Bernoulli, E la energía específica, z la cota de fondo del canal, y J la pendiente de plano de carga hidráulica. Es así que obtenemos una ecuación para la energía E :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = i - J \quad (6.29)$$

donde $i = -\frac{\partial z}{\partial x}$ es la pendiente del canal que asumiremos constante.

A continuación, integramos (6.29) entre dos puntos x_1 y x_2 , ubicados a lo largo del eje x , tal que $x_2 = x_1 + \Delta x$ (**Fig. 6.10**). Este último cálculo nos permite obtener que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial E}{\partial x} dx = \int_{x_1}^{x_2} (i - J) dx \tag{6.30}$$

donde

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial E}{\partial x} dx = E_2 - E_1 \tag{6.31}$$

y

$$\int_{x_1}^{x_2} (i - J) dx = i\Delta x - \int_{x_1}^{x_2} J dx \tag{6.32}$$

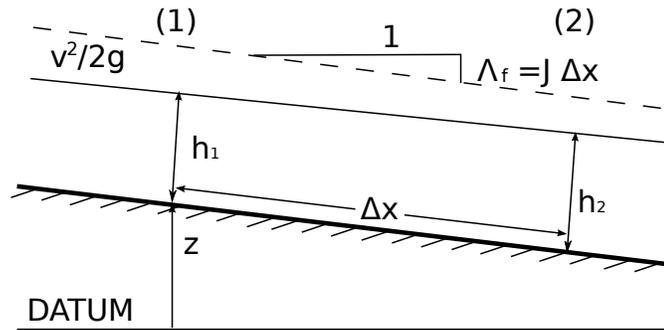


Figura 6.10: Integración ecuación de energía en canales.

Luego, sin pérdida de generalidad podemos definir \bar{J} como:

$$\bar{J} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} J dx \tag{6.33}$$

y por lo tanto

$$E_2 - E_1 = (i - \bar{J}) \Delta x \tag{6.34}$$

De esta forma, hemos obtenido una forma discretizada para representar la variación longitudinal de la energía en canales. Existen dos formas de utilizar este último resultado: la primera y no del todo eficiente, considera calcular E_2 dado que conocemos E_1 y aproximamos $\bar{J} \approx J_1$, donde J_1 es la pendiente del Bernoulli evaluada en el punto h_1 (NOTA este razonamiento es en caso que el flujo sea supercrítico). La ventaja de esta metodología es que es válida para cualquier tipo de eje hidráulico sin la necesidad de conocer cómo es su forma, sin embargo, el error en aproximar $\bar{J} \approx J_1$ es grande, y nos obliga a continuamente resolver las raíces del polinomio de la energía, y a definir cual de las dos alturas conjugadas h_2 es la adecuada para el problema en estudio.

La segunda forma de usar (6.34) considera que tanto h_1 y h_2 , y por lo tanto E_1 , E_2 , J_1 y J_2 son conocidos. Es así que si

$$\bar{J} = \frac{J_1 + J_2}{2} \quad (6.35)$$

podemos calcular la distancia Δx que existe entre los puntos 1 y 2, como:

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{i - \bar{J}} \quad (6.36)$$

Este método de cálculo es simplificado ya que no requiere resolver las raíces del polinomio de la energía, el error en la aproximación es bajo. Sin embargo, requiere un usuario que sepa de hidráulica de canales, debido a que las alturas h_1 y h_2 deben ser adecuadamente definidas en función del tipo de eje hidráulico que se esté calculando.

Por ejemplo:

- Si el escurrimiento es subcrítico o de río, entonces sabemos que el flujo está condicionado por aguas abajo, y por lo tanto h_2 es el dato que conocemos, y h_1 puede ser mayor o menor a h_2 dependiendo del eje hidráulico que se está calculando:
 1. Si nos encontramos resolviendo un eje hidráulico S1, C1 o F1, entonces $h_1 < h_2$. Sin embargo, en caso que el eje hidráulico S1, también sabemos que $h_1 > h_n$, mientras que si el eje hidráulico es del tipo C1 o F1, h_1 queda limitado por la altura crítica ($h_1 > h_c$).
 2. Si nos encontramos resolviendo un eje hidráulico S2, H2 o A2, entonces $h_1 > h_2$. Además, si el eje hidráulico es S2, sabemos también que $h_1 < h_n$. Por el contrario, si el eje hidráulico es del tipo H2 o A2, entonces el concepto de altura normal no existe, y entonces h_1 puede tener cualquier valor mayor a h_2 .
- Si el escurrimiento es supercrítico o de torrente, sabemos que el flujo está controlado por aguas arriba, y entonces la altura h_1 es conocida, y debemos escoger h_2 según el tipo de eje hidráulico que estemos resolviendo:
 1. Si nos encontramos resolviendo un eje hidráulico F2 entonces $h_2 < h_1$ y $h_2 > h_n$.
 2. Si nos encontramos resolviendo un eje hidráulico F3 entonces $h_2 > h_1$, pero $h_2 < h_n$.
 3. Si nos encontramos resolviendo un eje hidráulico H3, S3, C3 o A3, entonces entonces $h_2 > h_1$, y $h_2 < h_c$.

A partir de este resultado veamos el cálculo del eje hidráulico S2 que se desarrolla en un canal rectangular de ancho $b = 50m$, pendiente $i = 2 \times 10^{-3}$, caudal $Q = 20m^3s^{-1}$ y coeficiente de Manning $n = 0.03 sm^{-1/3}$. En este caso, la altura crítica es $h_c = 0.254m$ y altura normal $h_n = 0.458m$. Si la condición de borde es crisis en el extremo de aguas abajo ubicado en $x = 200m$, entonces podemos construir la **Table 3** donde x_{ac} es $200m$ menos la distancia

| h_2 | E_2 | J_2 | h_1 | E_1 | J_1 | \bar{J} | Δx | x_{ac} | M_1 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|------------|----------|--------|
| 0.2537 | 0.3805 | 0.0141 | 0.2639 | 0.3811 | 0.0124 | 0.0133 | 0.0517 | 199.9483 | 0.0967 |
| 0.2639 | 0.3811 | 0.0124 | 0.2741 | 0.3827 | 0.0109 | 0.0117 | 0.1691 | 199.7791 | 0.0971 |
| 0.2741 | 0.3827 | 0.0109 | 0.2843 | 0.3853 | 0.0097 | 0.0103 | 0.3055 | 199.4736 | 0.0978 |
| 0.2843 | 0.3853 | 0.0097 | 0.2944 | 0.3886 | 0.0086 | 0.0091 | 0.4642 | 199.0094 | 0.0988 |
| 0.2944 | 0.3886 | 0.0086 | 0.3046 | 0.3926 | 0.0077 | 0.0082 | 0.6493 | 198.3601 | 0.1000 |
| 0.3046 | 0.3926 | 0.0077 | 0.3148 | 0.3972 | 0.0069 | 0.0073 | 0.8661 | 197.4940 | 0.1014 |
| 0.3148 | 0.3972 | 0.0069 | 0.3250 | 0.4023 | 0.0062 | 0.0066 | 1.1214 | 196.3726 | 0.1030 |
| 0.3250 | 0.4023 | 0.0062 | 0.3352 | 0.4079 | 0.0056 | 0.0059 | 1.4243 | 194.9483 | 0.1049 |
| 0.3352 | 0.4079 | 0.0056 | 0.3454 | 0.4138 | 0.0051 | 0.0053 | 1.7869 | 193.1613 | 0.1069 |
| 0.3454 | 0.4138 | 0.0051 | 0.3556 | 0.4201 | 0.0046 | 0.0048 | 2.2261 | 190.9352 | 0.1091 |
| 0.3556 | 0.4201 | 0.0046 | 0.3658 | 0.4268 | 0.0042 | 0.0044 | 2.7656 | 188.1696 | 0.1115 |
| 0.3658 | 0.4268 | 0.0042 | 0.3759 | 0.4337 | 0.0038 | 0.0040 | 3.4407 | 184.7289 | 0.1141 |
| 0.3759 | 0.4337 | 0.0038 | 0.3861 | 0.4409 | 0.0035 | 0.0037 | 4.3050 | 180.4240 | 0.1168 |
| 0.3861 | 0.4409 | 0.0035 | 0.3963 | 0.4483 | 0.0032 | 0.0034 | 5.4454 | 174.9786 | 0.1197 |
| 0.3963 | 0.4483 | 0.0032 | 0.4065 | 0.4559 | 0.0030 | 0.0031 | 7.0116 | 167.9670 | 0.1228 |
| 0.4065 | 0.4559 | 0.0030 | 0.4167 | 0.4637 | 0.0027 | 0.0028 | 9.2865 | 158.6805 | 0.1260 |
| 0.4167 | 0.4637 | 0.0027 | 0.4269 | 0.4717 | 0.0025 | 0.0026 | 12.8745 | 145.8059 | 0.1294 |
| 0.4269 | 0.4717 | 0.0025 | 0.4371 | 0.4798 | 0.0023 | 0.0024 | 19.3432 | 126.4627 | 0.1329 |
| 0.4371 | 0.4798 | 0.0023 | 0.4473 | 0.4881 | 0.0022 | 0.0022 | 34.4066 | 92.0561 | 0.1365 |
| 0.4473 | 0.4881 | 0.0022 | 0.4575 | 0.4965 | 0.0020 | 0.0021 | 108.4192 | -16.3630 | 0.1403 |

Tabla 3: Tabla para el cálculo del eje hidráulico S2

acumulada a nuestro punto de inicio de cálculo del eje hidráulico ($x = 200m$). Note que lo que fue definido como 1 en una fila, pasa a ser 2 en la fila de abajo, y entonces permitimos el desarrollo del eje hidráulico.

Los resultados de este cálculo también se grafican en la **Fig. 6.11A** que muestra la altura de escurrimiento h_1 junto a las dos alturas características del flujo (h_c y h_c). Además, **Fig. 6.11B** y **6.11C** muestran la energía E_1 y momenta M_1 . A partir de estos últimos dos paneles vemos que:

- La mínima distancia a $x = 200m$ la cual podríamos ubicar una grada de $10cm$ de altura es en $x = 123.3m$. Este límite se determina de considerar el caso cuando existe crisis sobre la grada ($E_c = 3/2h_c = 0.38m$), entonces el Bernoulli sobre la grada sería igual a $0.48m$ (línea punteada en **Fig. 6.11B**). Por lo tanto, si la energía en el canal es menor que dicho límite (puntos ubicados a la derecha de valor límite definido por el círculo negro), entonces la energía en el canal no es la suficiente para subir a la grada.
- Si instalamos una compuerta de abertura $a = 22cm$ y $\mu = 0.66$, se obtiene que la momenta asociada a un escurrimiento cuya altura es (μa) es $M = 0.123m^2$ (línea punteada en **Fig. 6.11C**). De esta forma vemos que:
 - Si la compuerta se ubica a la derecha del punto negro en $x = 167.3m$, entonces el resalto se rechaza, para lo cual sería necesario calcular el desarrollo del eje

hidráulico S3 para ubicar su posición definitiva. Además, el eje hidráulico que se desarrolla aguas arriba de la compuerta es S1, forzado por una altura inicial $h = 0.5m$.

- Si la compuerta se ubica a la izquierda del punto negro en $x = 167.3m$, entonces el resalto se ahoga sobre la compuerta ya que la momenta del eje hidráulico S2 es mayor que la momenta del torrente impuesto por $h = \mu a$. En este caso necesitamos calcular h' a partir de igualar momenta aguas arriba y aguas abajo del resalto ahogado, y posteriormente igualar energía aguas arriba y aguas abajo de la compuerta, lo cual entrega una altura mayor a los $50cm$ calculados en el caso anterior. Recuerde que en el caso de resaltos ahogados en una compuerta, la altura que define la velocidad es $h = \mu a$, mientras que la altura que define la presión es $h = h'$.

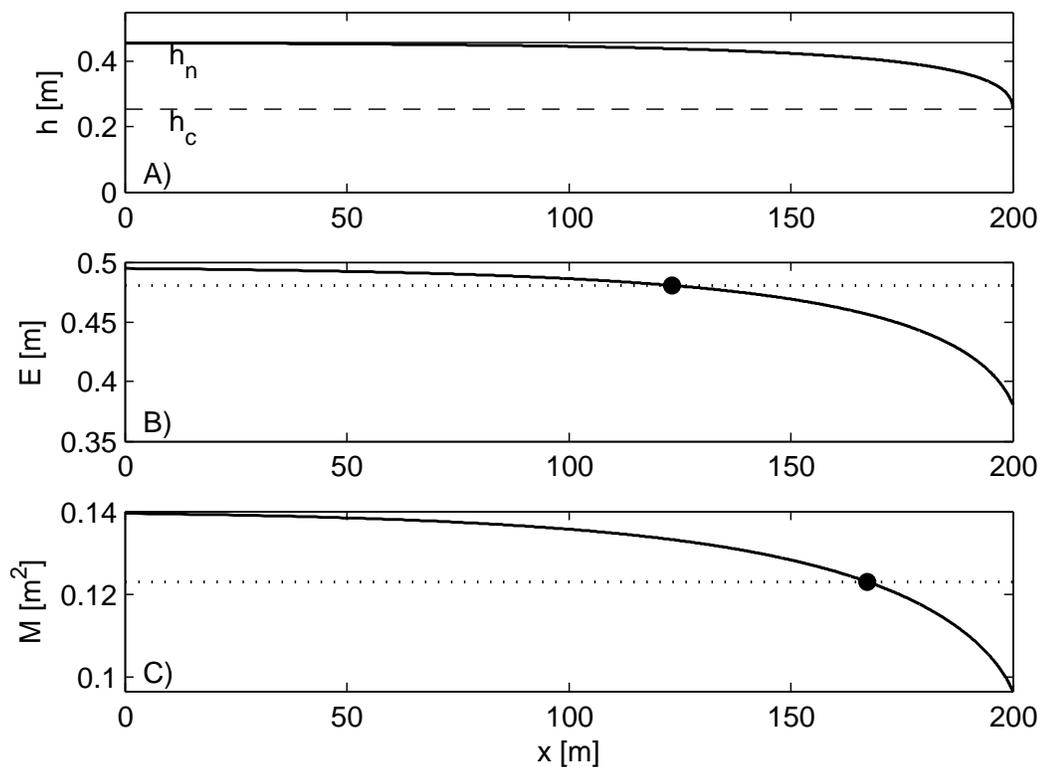


Figura 6.11: Resultados del cálculo del eje hidráulico. NOTE que fueron realizados con un paso Δh mucho menor que el usado en la **Table 3**.

Capítulo 7

Escurrimiento rápidamente variado

A diferencia del escurrimiento gradualmente variado, el escurrimiento rápidamente variado en canales se caracteriza porque las condiciones medias del flujo cambian significativamente en distancias pequeñas, lo cual significa que la curvatura de las líneas de corriente es grande, y por lo tanto la ley hidrostática de presiones deja de ser válida. En analogía con el flujo en tuberías, la dinámica asociada al escurrimiento rápidamente variado se puede considerar como una singularidad en la longitud total del canal, que lleva a pérdidas singulares de energía. Sin embargo, como bien sabemos, la principal diferencia entre el flujo en tuberías y en canales es que la sección de escurrimiento no se conoce, y ese es el resultado que se busca obtener. De esta forma, necesitamos conocer la dirección en que se propaga la información para determinar la condición de borde de aguas arriba (en caso de torrentes) o aguas abajo (en caso de río) de la singularidad. Una vez conocida esta condición de borde, más la dinámica del flujo en la singularidad, estamos en condiciones de calcular las condiciones del flujo aguas arriba (en caso de río) o aguas abajo (en caso de torrente) de la singularidad.

7.1 Vertederos

Se entiende como vertedero a una barrera ubicada a lo ancho del canal, de manera que el flujo vierte por sobre ésta. Existen diferentes clases de vertederos, los cuales se clasifican según su espesor (vertederos de pared delgada o ancha), por la forma de su sección (vertederos triangulares, rectangulares, con contracción lateral, etc.), o según si el vertedero está o no influenciado por aguas abajo (vertedero ahogado o incompleto).

Independientemente de qué clase de vertedero se esté estudiando, el parámetro principal que necesitamos conocer es la denominada carga h del vertedero, la cual corresponde a la altura de agua que existe por sobre el umbral del vertedero (punto alto). Para esto se define que h es la altura de agua sobre el umbral que se encuentra una distancia de $4h$ aguas arriba del vertedero (**Fig. 7.1**).

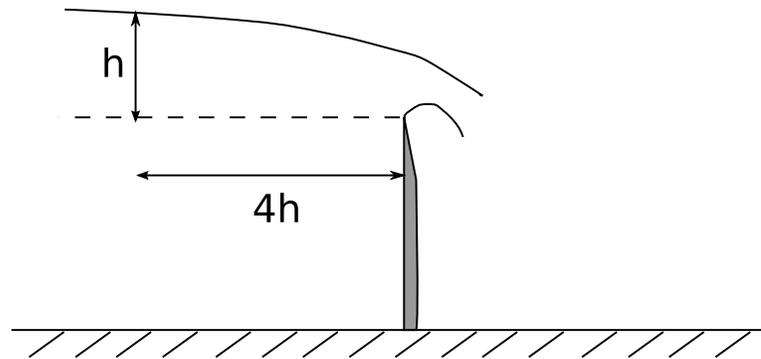


Figura 7.1: Definición carga sobre el vertedero.

7.1.1 Vertederos de pared delgada

Consideremos el caso simplificado de un canal rectangular de pared lo suficientemente delgada tal que su espesor no determina la dinámica del flujo, el cual posee una aproximación teórica para determinar cómo se relaciona el caudal vertido, con la carga del vertedero. Esta aproximación se basa en la teoría de Boussinesq, la cual fue sorprendentemente validada experimentalmente por Bazin. Para esto, consideremos el esquema de la **Fig. 7.2** donde existe dos superficies libres aguas abajo del vertedero, y trabajemos usando un caudal por unidad de ancho $q = Q/b$. Sabemos que si nos centramos en el punto donde la superficie libre inferior alcanza su máxima altura, las líneas de corriente son aproximadamente horizontales, y por lo tanto:

$$q = \int_0^e v dz \tag{7.1}$$

donde e es el espesor del escurrimiento en este punto máximo y v es la velocidad. Además, podemos suponer que la velocidad cerca de este punto puede ser descrita por líneas de corriente que describen arcos de circunferencia concéntricos, tal que el arco de circunferencia que describe la superficie libre de abajo es R_o , y el de la superficie libre de arriba es $R_o + e$.

Luego, usando coordenadas polares, vemos que la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{\rho v^2}{r} \tag{7.2}$$

donde \hat{p} es la presión motriz que contiene a la gravedad. Este resultado se obtiene de suponer flujo permanente, sin velocidad en r y despreciar la fricción viscosa.

Por otro lado, si tomamos un punto A y seguimos su trayectoria a lo largo de la línea de corriente, obtenemos que el Bernoulli es constante a lo largo de ella. Si despreciamos la velocidad de aproximación al vertedero para calcular el Bernoulli en A , entonces:

$$\frac{\hat{p}_A}{\gamma} = \frac{p_A}{\gamma} + z_A = h \tag{7.3}$$

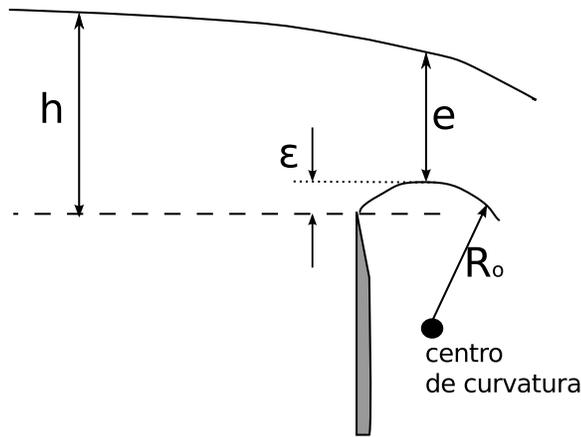


Figura 7.2: Definiciones necesarias para análisis de vertedero de pared delgada.

ya que fijamos nuestro datum en la cresta del vertedero. Usando esto, podemos decir que el Bernoulli en cualquier punto C ubicado en nuestra sección de espesor e , es igual a h , y entonces, dado que la presión p solo puede ser definida en puntos donde hay agua,

$$\epsilon + z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \epsilon + \frac{\hat{p}}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = h \quad (7.4)$$

donde v , p , \hat{p} y z son definidas para el punto C .

Al derivar este último resultado en z , obtenemos que:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\hat{p}}{\gamma} + \frac{1}{g} v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z} \quad (7.5)$$

donde $\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0$, y $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$, entonces:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = -v \frac{\partial v}{\partial z} \quad (7.6)$$

Por lo tanto, de usar el resultado de (7.2), obtenemos

$$-v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\rho v^2}{r} \quad (7.7)$$

y entonces, podemos integrar entre $z = 0$ y z , lo que nos permite obtener:

$$v = \frac{R_o}{R_o + z} v_o \quad (7.8)$$

donde v_o es la velocidad en la superficie libre de abajo definida en $z = 0$. Al integrar nuevamente para obtener el caudal, se obtiene que:

$$q = \int_0^e v dz = \int_0^e \frac{R_o}{R_o + z} v_o dz = R_o v_o \ln \left(\frac{R_o + e}{R_o} \right) \quad (7.9)$$

A continuación, nos situamos en ambas superficies libres, y vemos que como $p = 0$, se cumple que:

$$h = \frac{v_o^2}{2g} + \epsilon \quad (7.10)$$

en la superficie de abajo, y

$$h = \frac{v_1^2}{2g} + \epsilon + e \quad (7.11)$$

en la superficie libre de arriba, por lo tanto:

$$\frac{v_1}{v_o} = \sqrt{\frac{h - \epsilon - e}{h - \epsilon}} \quad (7.12)$$

Además, usando el resultado de (7.8), vemos también que:

$$\frac{v_1}{v_o} = \frac{R_o}{R_o + e} \quad (7.13)$$

Si llamamos $v_1/v_o = k$, se tiene que:

$$R_o = e \frac{k}{1 - k} \quad (7.14)$$

y,

$$e = (h - \epsilon) (1 - k^2) \quad (7.15)$$

y entonces:

$$R_o = (h - \epsilon) k (1 + k) \quad (7.16)$$

Si reemplazamos este resultado en (7.9), obtenemos finalmente que:

$$q = m h \sqrt{2gh} \quad (7.17)$$

donde m es el coeficiente de gasto del vertedero, igual a:

$$m = k(1 + k) \ln \left(\frac{1}{k} \right) \left(1 - \frac{\epsilon}{h} \right)^{3/2} \quad (7.18)$$

Si se considera que el caudal evacuado por el vertedero es el máximo posible, entonces m es máximo, tal que:

$$\frac{\partial m}{\partial k} = 0 \quad (7.19)$$

entonces, si despreciamos el término ϵ/h para localizar este máximo, se obtiene

$$(1 + 2k) \ln \left(\frac{1}{k} \right) - (1 + k) = 0 \quad (7.20)$$

que entrega $k = 0.4685$. Si reemplazamos en la ecuación para m , usando un valor experimental de $\epsilon/h = 0.115$, se obtiene $m = 0.435$.

Bazin determinó a partir de experiencias realizadas entre 1868 y 1888, que

$$m = 0.434 \quad (7.21)$$

7.1.2 Corrección por velocidad de aproximación, vertedero de pared delgada

En el análisis anterior se despreció la altura de velocidad en el cálculo del Bernoulli aguas arriba, lo cual válido si la altura a del vertedero es grande. En caso que sea pequeña en comparación con la carga h , el resultado anterior se corrige como:

$$q = mh\sqrt{2gh} \quad (7.22)$$

con m el coeficiente de gasto igual a:

- Boussinesq

$$m = 0.434 + 0.21 \left(\frac{h}{h+a} \right)^2 \quad (7.23)$$

7.1.3 Corrección por inclinación de la barrera, vertedero de pared delgada

Ver tabla 6.1 de archivo adjunto Manual_CI41A_-_Ch6.pdf.

7.1.4 Vertederos triangulares

En estos vertederos se cumple que para alturas pequeñas, y el coeficiente de gasto depende tanto de la altura h como del ángulo α del vertedero. m se determina de la Figura 6.1 de archivo adjunto Manual_CI41A_-_Ch6.pdf, y para alturas grandes, se usa un valor constante de m definido en la Tabla 6.2 del Manual. Las tablas 6.3 y 6.4 permiten corregir este valor inicial considerando el efecto del ancho del canal, y si existe influencia de la altura de aguas abajo, respectivamente.

7.1.5 Corrección por influencia de aguas abajo, vertedero de pared delgada

En caso que la altura de escurrimiento de abajo sea lo suficientemente grande como para ahogar el vertedero, la altura de escurrimiento de aguas abajo es importante de ser considerada en el análisis, para lo cual se debe usar la Figura 6.2 del archivo adjunto Manual_CI41A_-_Ch6.pdf. Esta figura muestra un familia de curvas, donde los datos h_r , $h - c$ y a son conocidos, por lo tanto los parámetros h_r/a (eje vertical) y h_c/a (línea verticales en el mallado de curvas). De esta forma, conocido el punto donde se cruzan la línea h_c/a con la horizontal determinada por h_r/a , se procede a ver el valor de h/a , o bien el coeficiente del vertedero m .

7.1.6 Vertedero de pared delgada con corrección por contracción lateral

En este caso se tiene que el ancho del vertedero es l , mientras que el ancho del canal es b . Se cumple que:

$$Q = m l h \sqrt{2gh} \quad (7.24)$$

donde

$$m = m_o \left(1 - 0.2 \frac{h}{l} \right) \quad (7.25)$$

en caso que $b > 9h$

7.1.7 Vertederos de pared gruesa

En caso de incluir en el análisis el espesor del vertedero, e , cabe la pregunta que dicho espesor sea o no relevante para el cálculo, para lo cual es necesario definir una altura característica del flujo tal que sea posible determinar si el espesor es o no lo suficientemente grande. Esta altura característica es la carga h , y para $e/h > 3$ decimos que el vertedero es de pared gruesa. En estos casos sabemos que si no existe influencia de aguas abajo, entonces definimos un punto 1 en el extremo de aguas abajo del vertedero, y un punto 0 aguas arriba del vertedero (**Fig. 7.3**), tal que:

$$B_0 = B_1 + \Lambda_s + \Lambda_f \quad (7.26)$$

donde Λ_s y Λ_f son las pérdidas de energía singular y friccionales, respectivamente. Si

$$\Lambda_s = k_s \frac{v_c^2}{2g} \quad (7.27)$$

y

$$\Lambda_f = J e \quad (7.28)$$

entonces, si expresamos la pérdida friccional en función de la altura de velocidad en 1 (igual a la crítica ya que no hay influencia de aguas abajo), es posible obtener que

$$m = \frac{2}{\left(3 + k_s + 2 \frac{J e}{h_c} \right)^{3/2}} \quad (7.29)$$

donde

$$J = \left(\frac{q n}{h_c^{5/3}} \right)^2 \quad (7.30)$$

si suponemos que el vertedero es además muy ancho.

El coeficiente de pérdida singular k_e depende de la altura de la grada respecto de la altura crítica a/h_c como se indica en la tabla 6.5 de archivo adjunto Manual_CI41A_-_Ch6.pdf.

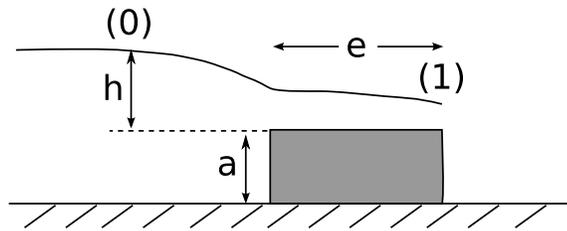


Figura 7.3: Vertedero de pared gruesa.

En caso que no se consideren pérdidas ni friccionales ni singulares, entonces $m = 0.385$ que se obtiene de imponer $k_s = 0$ y $J = 0$, o bien de suponer crisis sobre la grada e igualdad de Bernoulli entre 0 y 1.

Finalmente, en caso que existan influencia de aguas abajo, se debe usar la tabla 6.6 del Manual_CI41A_-_Ch6.pdf, recordando que la altura h' es dato. Entonces, si el caudal es conocido, entonces la carga h se debe calcular iterativamente, para lo cual se define un valor inicial de suponer que no existe influencia de aguas abajo (ecuación (7.29)), y calcular h con (7.17), luego corregir el coeficiente de gasto m a partir de la tabla 6.6, y recalculer h usando (7.17).

En caso que h sea un dato y se desea calcular el caudal vertido, entonces h_c es la incógnita del problema, que nuevamente se obtiene iterativamente de la forma: suponer coeficiente de gasto inicial ($m = 0.385$) y calcular q de (7.17); calcular h_c y recalculer m de (7.29).

7.1.8 Vertederos de pared intermedia

Ver Figura 6.3 de Manual_CI41A_-_Ch6.pdf. En caso que se q sea dato y se desee calcular h , entonces se supone un valor inicial de m ($m = 0.434$ suponiendo pared delgada), con este valor se calcula h (7.17), el cual permite calcular a/h y e/h . Luego se ve en la Figura 6.3 del Manual, y se determina m/m_o (con $m_o = 0.434$). Luego se calcula h y se verifica que el vertedero no sea de pared gruesa ($e/h < 3$).

En caso que el vertedero esté ahogado (esté influenciado por aguas abajo), el valor del coeficiente de gasto de Figura 6.3, se corrige usando la Figura 6.4.

7.2 Ensanches bruscos

Consideremos un ensanche brusco con grada de bajada que se muestra en la Fig. 7.4, y definimos el volumen de control indicado. Al aplicar el teorema de cantidad de movimiento

sobre este volumen de control, se obtiene que la altura de escurrimiento de aguas abajo, h_1 , determina tanto la presión como la velocidad, y la altura de escurrimiento de aguas arriba, h_0 , determina la velocidad de aguas arriba. Sin embargo, a priori no se sabe cómo cuantificar la fuerza de presión actuando aguas arriba ya que no es válida la ley hidrostática de presiones en las zonas de recirculación bajo la grada o el ensanche. Es por este motivo que se define la carga h' que determina la presión, y se considera que ésta ocurre en una superficie rectangular de alto $h_0 + a$ y ancho b_1 .

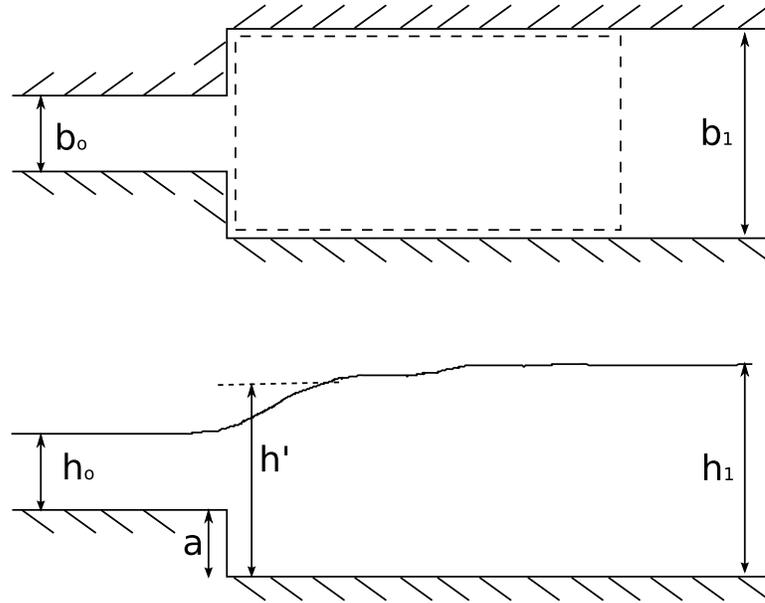


Figura 7.4: Ensanche brusco con grada de bajada.

Considerando esto, es fácil ver que el TCM puede ser escrito como (tarea demostrar el detalle):

$$\frac{n}{X_0} + \frac{1}{2}X'(X_0 + K) = \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2} \quad (7.31)$$

donde $X_0 = h_0/h_{c1}$, $X_1 = h_1/h_{c1}$, $X' = h'/h_{c1}$, $K = a/h_{c1}$, $n = b_1/b_0$, y h_{c1} la altura crítica de aguas abajo.

A continuación podemos expresar X' como la combinación lineal entre X_1 y $X_0 + K$ (o bien h' como la combinación lineal entre $h_0 + a$ y h_1), tal que:

$$X' = (1 - \epsilon)X_1 + \epsilon(X_0 + K) \quad (7.32)$$

. donde ϵ es un número menor igual a 1, que fue determinado experimentalmente igual a:

- $\epsilon = 1$ si
 - Crisis en 0 - flujo subcrítico en 1 (crisis-río). Usualmente se conocen las condiciones del flujo en 1, y se desea diseñar a y n tal que el escurrimiento en 0 este o no controlado por aguas abajo.

- Flujo subcrítico en 0 y 1 (río-río). Usualmente se conocen las condiciones del flujo en 1, y se desean conocer h_0
- Flujo supercrítico en 0-napa superficial-flujo subcrítico en 1 (torrente, resalto incompleto con napa superficial, río).

En este caso de $\epsilon = 1$, el problema se reduce a:

$$\frac{n}{X_0} + \frac{1}{2}(X_0 + K)^2 = \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2} \tag{7.33}$$

- $\epsilon = 1/4$ si el flujo es supercrítico en 0-napa sumergida-flujo subcrítico en 1 (torrente, resalto incompleto con napa sumergida, río). En este caso, el problema se reduce a:

$$\frac{n}{X_0} + \frac{1}{8}(3X_1 + X_0 + K)(X_0 + K) = \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2} \tag{7.34}$$

La distinción entre napa superficial o sumergida se muestra en la **Fig. 7.5**, y la Figura 6.8 del Manual define el límite entre ambos tipos de resaltos en caso que no existan variaciones del ancho ($n = 1$). Note que usualmente los valores de X_1 , X_0 y K son conocidos, y entonces si el punto determinado por X_1 y K queda sobre la curva límite determinada por el valor X_0 , entonces la napa es superficial, mientras que si queda bajo la curva límite, la napa es sumergida. Analice el caso de determinar el valor límite de K .

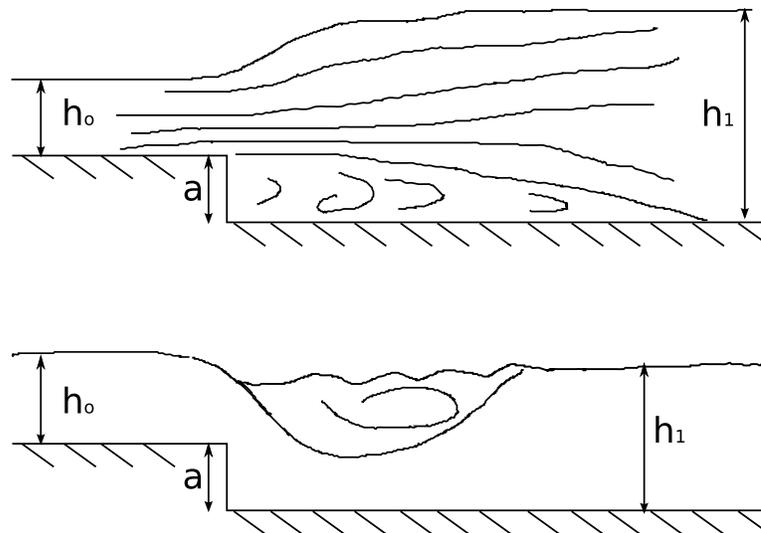


Figura 7.5: Napa superficial o sumergida.

7.3 Angostamientos bruscos

En este caso no es posible plantear el teorema de cantidad de movimiento. Es por esto que las relaciones de cálculo fueron determinadas experimentalmente por Francisco Javier

Dominguez y sus alumnos, y se muestran en la Figura 6.11 del Manual. En caso de un flujo condicionado por aguas abajo, donde $h_1 > h_{c1}$ se conoce, y los ábacos se usa para calcular h_0 .