

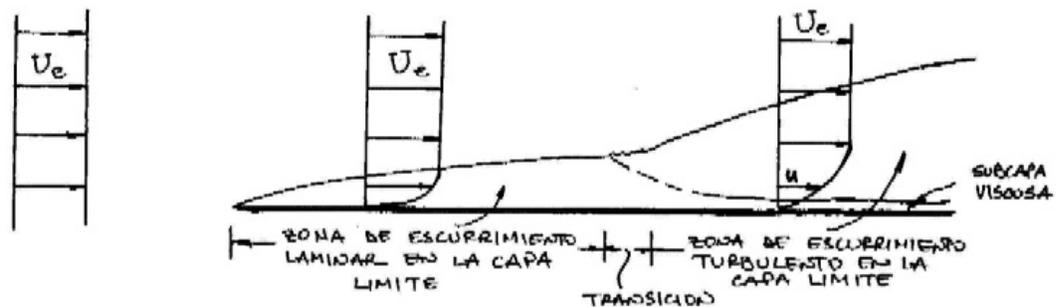
CI31A - MECÁNICA DE FLUIDOS

Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

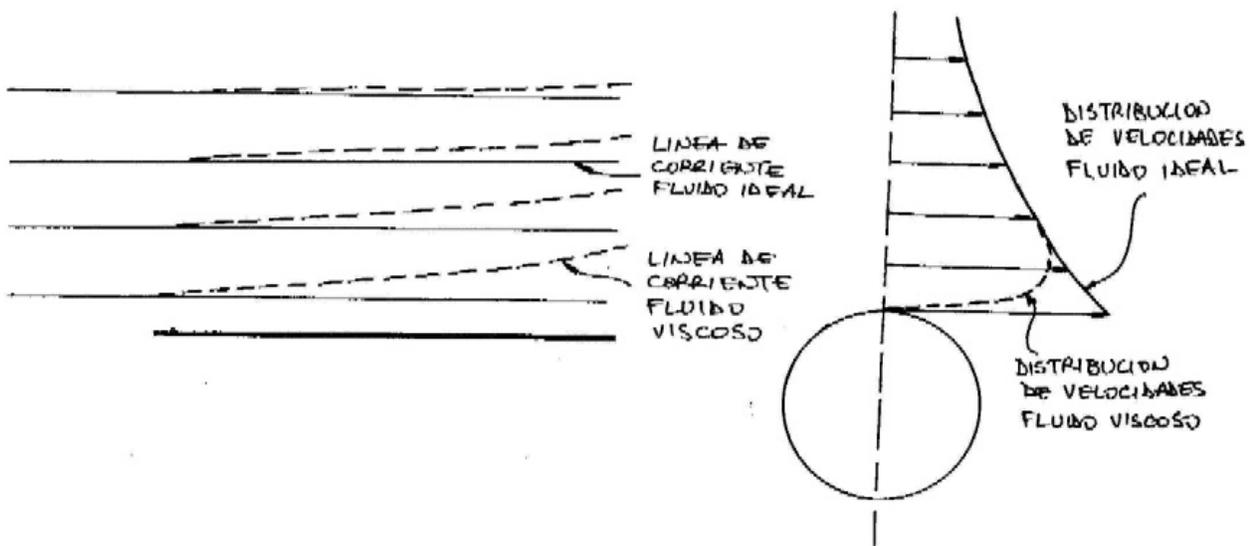
NOCIONES SOBRE LA TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

El aire y el agua tienen una viscosidad relativamente baja que para muchos casos prácticos puede considerarse igual a cero. Las ecuaciones que rigen el movimiento para fluidos con $\nu=0$ son las ecuaciones de Euler. Estas ecuaciones funcionan bien en muchas aplicaciones (ej. turbomáquinas) pero fallan completamente en otras (paradoja d' Alambert).

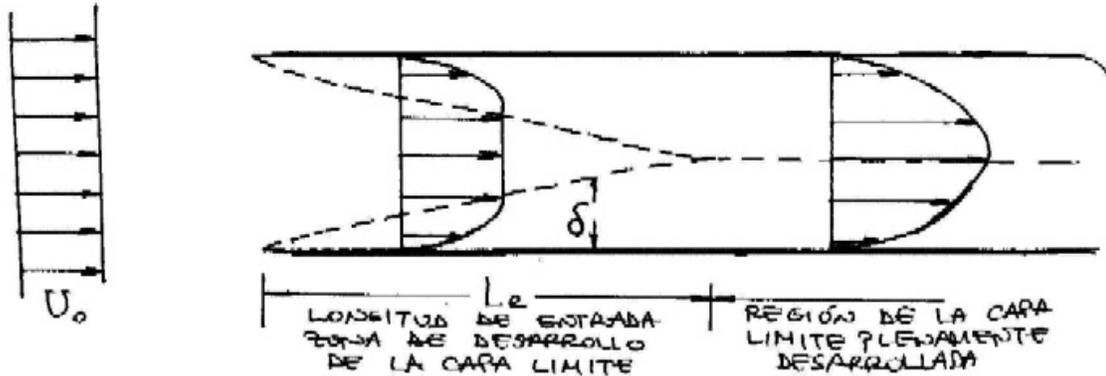
La discrepancia fue resuelta mediante el concepto de capa límite introducido por Prandtl a comienzos de este siglo. La idea es que si existe una frontera, por muy baja que sea la viscosidad del fluido, existe una delgada región en la cercanía de la frontera en la cual los efectos viscosos no pueden despreciarse y hay que considerarlos en el análisis. La otra característica de las capas límite es que las variaciones en la dirección del flujo son mucho menores que las variaciones en la dirección transversal al flujo. El caso más simple de analizar es el del caso de una placa plana lisa.



Los gradientes de velocidad son mucho más grandes en la capa límite que fuera de ella. Fuera de la capa límite, los esfuerzos viscosos son pequeños siendo su efecto en el flujo relativamente menor, predominando las fuerzas de inercia, presión y fuerzas másicas que interactúan con la geometría que define los límites del escurrimiento.



Al entrar a una tubería:



δ : espesor de la capa límite

ESPESOR DE LA CAPA LIMITE:

El espesor de la capa límite es definido de varias maneras. Una de los más comunes es:

$$\delta = \delta(v = 0,99 U_0)$$

Esta definición es arbitraria, por lo que muchas veces se usan otras con más sentido físico, por ej.:

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v}{U_0}\right) dy$$

δ_1 se denomina espesor desplazamiento y es una medida de lo que se desplaza la línea de corriente respecto a la de un fluido ideal.

Otras definiciones son:

Espesor de momentum:

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{v}{U_0} \left(1 - \frac{v}{U_0}\right) dy$$

Espesor de energía:

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{v}{U_0} \left(1 - \frac{v^2}{U_0^2}\right) dy$$

Parámetro de forma: $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$

LONGITUD DE DESARROLLO DE LA CAPA LIMITE

Expresiones para la longitud de desarrollo de la capa límite en tuberías, L_e .

Escorrentamiento laminar (Boussinesq): $\frac{L_e}{D} = 0,06 Re$

Régimen turbulento: $\frac{L_e}{D} \approx 4.4 Re^{1/6}$

Nikuradse da: $25 < \frac{L_e}{D} < 40$, $\frac{L_e}{D} = 40$ fue obtenido para $Re=9 \times 10^5$

Se recomienda usar $\frac{L_e}{D} = 40$ como mínimo

Si L es la longitud total de una tubería, en la práctica se tiene que $L/D > 1000$, por lo que L_e se desprecia en los cálculos.

ECUACIONES PARA LA CAPA LIMITE LAMINAR

Para simplificar, consideremos el caso 2-D y régimen permanente.

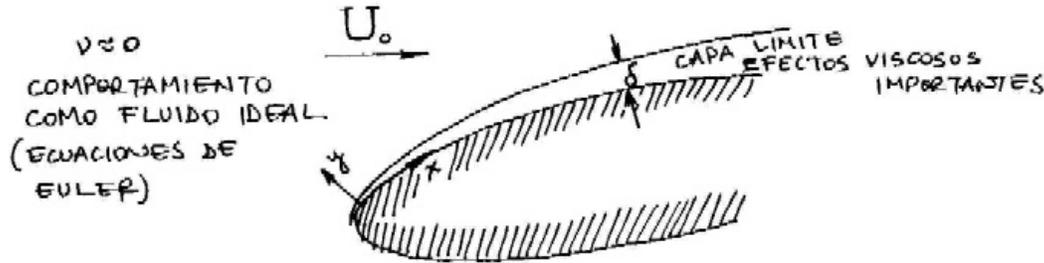
El movimiento de todo fluido newtoniano se rige por las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Recordemos la idea de la capa límite:



En la capa límite: $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

La Ec. 5 indica que \hat{p} es constante a través de la capa límite.

$\hat{p} = p + \rho g \delta = \text{cte.}$, pero δ es pequeño por lo que $p = \text{cte.}$ a través de la capa límite.

Fuera de la capa límite, el fluido se comporta como ideal, por lo que es válido:

$$\begin{aligned} B &= \text{cte.} \\ \frac{\hat{p}}{\rho} + \frac{U_0^2}{2g} &= \text{cte.} \\ \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{2 U_0}{2g} \frac{\partial U_0}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = +U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (6)$$

Luego, Ecs. 6 y 4:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7)$$

Como δ es pequeño, se resuelve el problema como si existiese sólo fluido ideal y se calcula: $U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}$. Con este valor como dato se resuelve la Ec. 7.

Puede demostrarse que: $\delta \sim \sqrt{\frac{vx}{U_m}}$

Blasius obtuvo: $\delta = 5 \sqrt{\frac{vx}{U_m}}$

de donde:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{xU_m}{\nu}$$

Notar que $\delta \sim \sqrt{\nu} \Rightarrow$ espesor de la capa límite es pequeño para fluidos de pequeña viscosidad.

$\delta=0$ si el fluido es ideal ($\nu=0$) ¡NO HAY CAPA LÍMITE!

Resistencia friccional:

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$$

$$\tau_0 \sim \mu \frac{U}{\delta} \Rightarrow \tau_0 \sim \sqrt{\mu \rho \frac{U^3}{x}}$$

En forma adimensional: $\frac{\tau_0}{\rho U^2} \sim \frac{1}{Re_x^{1/2}}$

Notar que para $x=0$, $\tau_0 \rightarrow \infty$. Esto se debe a que en la vecindad de $x=0$, la suposición de la capa límite $\left(\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \right)$ no es válida.

Blasius obtuvo, $\frac{\tau_w}{\rho U_m^2} = \frac{1,328}{Re_x^{1/2}}$

ECUACIONES PARA LA CAPA LIMITE TURBULENTA

Debemos trabajar con las cantidades medias temporales e incluir los esfuerzos aparentes (de Reynolds).

Si la capa límite se genera sobre una placa lisa, al comienzo siempre es laminar. Sin embargo, más hacia aguas abajo, el flujo se transforma en turbulento. El punto de transición de laminar a turbulento, x_T , está dado por:

$$Re_{xT} = \frac{Ux_T}{\nu} \approx 5 \times 10^5 \approx 3 \times 10^6$$

El valor de Re_{xT} depende fuertemente de la intensidad de turbulencia del flujo extremo a la capa límite. A mayor turbulencia externa, menor Re_{xT} .

Las ecuaciones de Reynolds aplicados a una capa límite turbulento bidimensional se reducen a:

Continuidad:
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Momentum:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \right) \quad (2)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_e(x) - \rho \bar{v}^2 \quad (3)$$

El espesor de la capa límite turbulenta es:

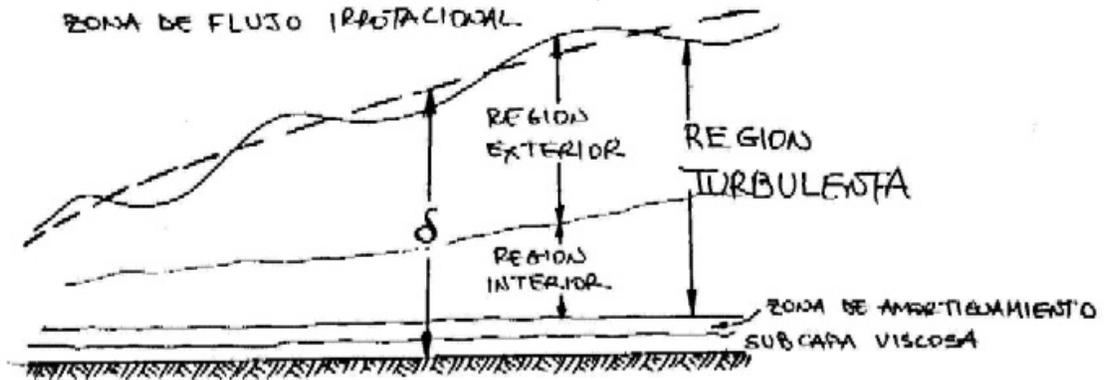
$$\frac{\delta}{x} = 0,37 Re_x^{-1/5} \quad , \quad Re_x < 10^7$$

supone la siguiente distribución de velocidades:
$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,0228 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} \quad \text{o} \quad \frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,029 Re_x^{1/5}$$

REGIONES DE LA CAPA LIMITE TURBULENTA

PARED LISA



ESPEORES DE LAS DISTINTAS REGIONES:

SUBCAPA VISCOSA: $0 \leq y_+ \leq 5$, $y_+ = \frac{y u_*}{\nu}$

ZONA DE AMORTIGUAMIENTO: $5 \leq y_+ \leq 30 - 70$

REGION INTERIOR: $y_+ > 30 - 70$, $\frac{y}{\delta} < 0,2$

REGION EXTERIOR: $\frac{y}{\delta} > 0,2$

DISTRIBUCIONES DE VELOCIDAD

SUBCAPA LAMINAR: $u_+ = y_+$, $U_+ = \frac{\bar{u}}{u_*}$

En esta región rige Newton-Navier,

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} \Rightarrow \rho u_*^2 = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} \approx \mu \frac{\bar{u}}{y}$$

$$\therefore \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{y u_*}{\nu} \Rightarrow \bar{u}_+ = y_+$$

ZONA DE AMORTIGUAMIENTO:

$$y_+ = u_+ + e^{-\kappa u_+} \left[e^{\kappa u_+} - 1 - \kappa u_+ - \frac{1}{2} (\kappa u_+)^2 - \frac{1}{6} (\kappa u_+)^3 \right]$$

(Fórmula compuesta de Spalding, 1961)

ZONA TURBULENTA: REGION INTERIOR

Es la región cercana a la pared donde $l = \kappa y$:

Encontramos:
$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{const.}$$

Podemos sumar y restar $\ln u_*/v$

$$\therefore u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + \underbrace{\text{const.} - \ln u_*/v}_B$$

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B$$

Nikuradse (1930): $(\kappa, B) \approx (0.4, 5.5)$

ZONA TURBULENTA: REGION EXTERIOR.

La distribución de velocidades depende de δ . Es independiente de v o κ_s .

$$\frac{U_0 - \bar{u}}{u_*} = -3.745 \ln \frac{y}{\delta}$$

Las ecuaciones para la región exterior vale tanto para paredes lisas como rugosas.

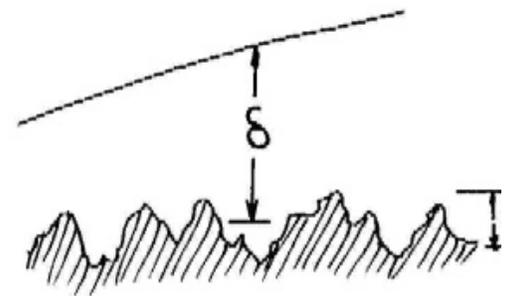
PAREDES RUGOSAS: $\left(\frac{u_* k_s}{v} > 70 \right)$

En este caso, las asperezas destruyen la subcapa laminar:

Región interior del flujo:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + B$$

$$(\kappa, B) = (0.4, 8.5)$$



k_s en las experiencias de Nikuradse corresponde al tamaño de la arena que se pegaba en la tubería.

PAREDES EN TRANSICION LISA RUGOSA: $\left(5 < \frac{u_* k_s}{\nu} < 70 \right)$

Tanto los efectos viscosos como la rugosidad de la pared es importante:

SUBCAPA
VISCOSA



Región interior de la zona turbulenta: $\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + B$

Con B obtenido del gráfico:

