

Daniel Calderon S.

# EDPS Y DIFERENCIAS FINITAS

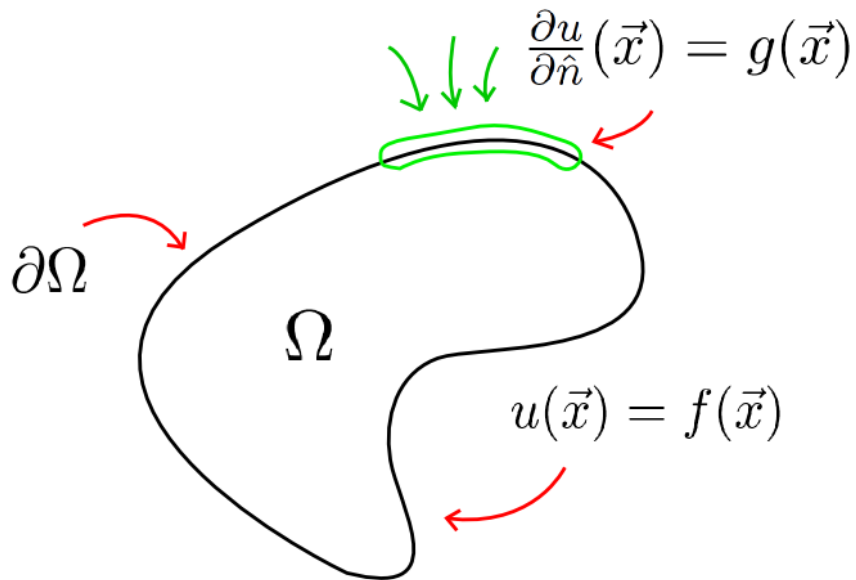
# ¿Qué es una ecuación diferencial?

- ⦿ Una ecuación donde la incógnita es la función.
- ⦿ Se utilizan para modelar procesos.
- ⦿ La derivada modela las variaciones de la función respecto de una variable.
- ⦿ La segunda derivada modela la variación de las variaciones de una función.
- ⦿ etc...

# EDO - EDP

- ⦿ EDO: Ecuación diferencial ordinaria.
  - Una variable: Típicamente el tiempo o el espacio.
- ⦿ EDP: Ecuación en derivadas parciales.
  - Existen derivadas de más de una variable involucradas. Ejemplo: 2 coordenadas espaciales y una temporal.
  - Cobra especial interés el dominio de interés de cada variable.

# Ingredientes de una Ecuación Diferencial



- Expresión diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Dominio sobre el cual se aplica.
- Condiciones iniciales y/o de borde.

# Ecuaciones Diferenciales Parciales

- Una gran cantidad de procesos se modelan con EDPs de segundo orden (la expresión diferencial involucra segundas derivadas).

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F = 0$$

- Otros procesos requieren EDPs de ordenes superiores.

# EDPs de segundo orden

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F = 0$$

## ● Elípticas

- $d > 0$
- Poisson, Laplace, Schrödinger independiente del tiempo.
- Solo se necesitan condiciones de borde.

$$d = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

## ● Parabólicas

- $d = 0$
- Del calor, Schrödinger dependiente del tiempo.
- Se requieren condiciones iniciales.

## ● Hiperbólicas

- $d < 0$
- Ecuación de Ondas
- Se requieren condiciones iniciales.

# Condiciones de Borde

- Dirichlet

- Se conoce el valor de la función en el borde.

$$u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$$

- Neumann

- Se conoce el valor de la derivada de la función en el borde.

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) = g(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$$

- Se pueden utilizar condiciones mixtas.

\*f,g funciones conocidas.

# EDPs famosas

- ⊙ Ecuación de Navier-Stokes
  - Movimiento de un fluido

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho F - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} + \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$



# EDPs famosas

## ⊙ Ecuación de Shrödinger

- Descripción mecano-cuántica de una partícula.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} (\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) \right) \Psi (\vec{r}, t)$$

# EDPs famosas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

## ⊙ Ecuaciones de Maxwell

- Ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética.

# EDPs simples

- ⊙ Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0$$

- ⊙ Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = f(x, \dots)$$

# ¿Cómo resolver una EDP?

## ⊙ Métodos analíticos

- Transformada de Laplace
- Transformada de Fourier
- Series de Fourier
- Separación de Variables
- ...

## ⊙ Métodos numéricos

- **Diferencias Finitas**
- Elementos Finitos
- Volúmenes Finitos
- ...

# Diferencias Finitas

## ⊙ Expansión de Taylor

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} \pm \frac{f^{(3)}(\epsilon)h^3}{6}$$

## ⊙ “Restando”

$$f(x + h) - f(x - h) = 2f'(x)h + \frac{f^{(3)}(\epsilon_1) + f^{(3)}(\epsilon_2)}{6}h^3$$

## ⊙ Primera derivada

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(\epsilon_1) + f^{(3)}(\epsilon_2)}{12}h^2$$

# Diferencias Finitas

## ⊙ Expansión de Taylor

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} \pm \frac{f^{(3)}(\epsilon)h^3}{6}$$

## ⊙ “Sumando”

$$f(x + h) + f(x - h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\epsilon_1) + f^{(4)}(\epsilon_2)}{24}h^4$$

## ⊙ Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\epsilon_1) + f^{(4)}(\epsilon_2)}{24}h^2$$

# Diferencias Finitas

## ⦿ Aproximando ...

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

## ⦿ Versión discreta

$$f'(x) \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1}}{2h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{h^2}$$

# Resolviendo Laplace 2D por Diferencias Finitas

- Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Aproximación de diferencias finitas

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{h_y^2} = 0$$

- Si  $h_x=h_y$

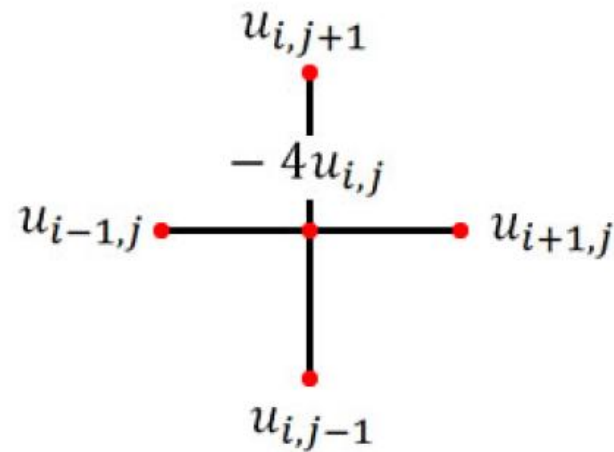
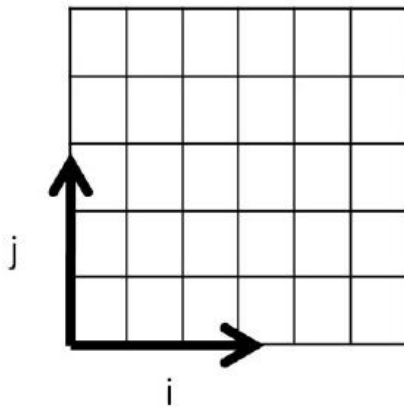
$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$



# Resolviendo Laplace 2D por Diferencias Finitas

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

- Ecuación válida para cada punto al interior del dominio.



# Resolviendo Laplace 2D por Diferencias Finitas

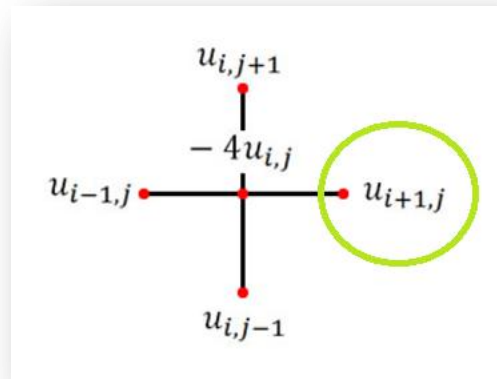
## ⦿ ¿Qué sucede en los bordes?

- Condiciones Dirichlet

- La función no es incógnita en el punto  $i,j$

$$u_{i,j} = D$$

- Influye sobre las ecuaciones de puntos vecinos



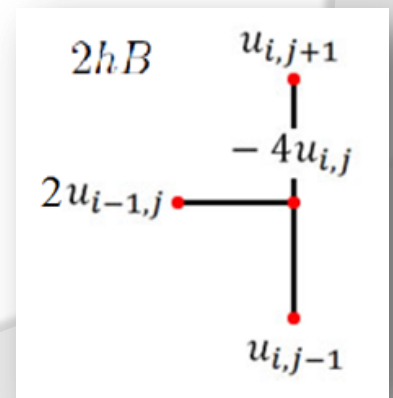
# Resolviendo Laplace 2D por Diferencias Finitas

## ¿Qué sucede en los bordes?

- Condiciones Newmann
  - La función es incógnita en  $i,j$

$$B = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \Rightarrow u_{i+1,j} = u_{i-1,j} + 2hB$$

$$2u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = -2hB$$



# Resolviendo Laplace 2D por Diferencias Finitas

- ⦿ Se tiene entonces una ecuación por cada incógnita.
- ⦿ Si se numeran las incógnitas, es posible resolver el problema con herramientas de álgebra lineal.

# Métodos Iterativos

- ⦿ También es posible resolver el problema iterando sobre el mismo dominio.
- ⦿ La misma ecuación discretizada de Laplace se formula recursivamente.

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k}{4}$$

# Métodos Iterativos

- Puede introducirse un factor de aceleración para encontrar la solución más rápido.

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \omega \left( \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k}{4} \right)$$

- Este método es llamado de “Sobrerrelajación sucesiva”

# Métodos Iterativos

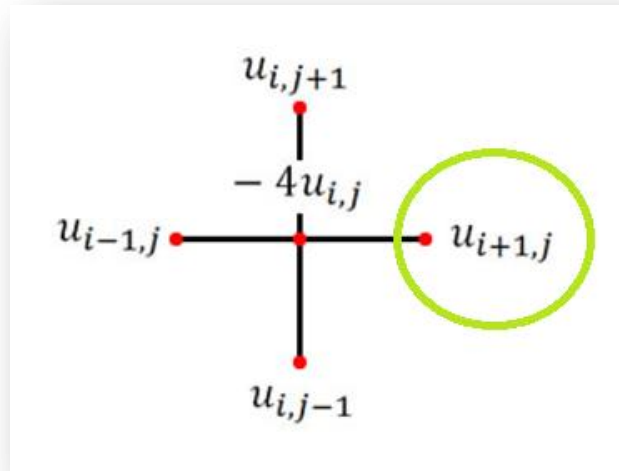
- ⦿ Se requiere una condición de término:
  - Número de iteraciones.
  - Convergencia (en las iteraciones sucesivas, la solución varía muy poco).
- ⦿ Puede utilizarse un paso adaptativo
  - Es decir, Al principio utilizar un paso grande e ir disminuyéndolo a medida que nos acercamos a la solución.

# Métodos Iterativos

## Condiciones de Borde

### ◉ Borde Dirichlet

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \omega \left( \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k + D}{4} \right)$$





# Métodos Iterativos

## Condiciones de Borde

### ● Borde Neumann

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \omega \left( \frac{2u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k + 2hB}{4} \right)$$

